

Л. Р. НЕЙМАН и П. А. КАЛАНТАРОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ



ГОСЭНЕРГОИЗДАТ



Л. Р. НЕЙМАН и П. Л. КАЛАНТАРОВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

*В ТРЕХ ЧАСТЯХ*

*Издание пятое, переработанное*

\*

*Часть третья*

\*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

Л. Р. НЕЙМАН

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Допущено Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебника для электротехнических и энергетических  
вузов и факультетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА 1959 ЛЕНИНГРАД

*Курс «Теоретические основы электротехники» Л. Р. Неймана и П. Л. Калантарова предназначен для студентов всех энергетических и электротехнических высших учебных заведений и факультетов. Содержание курса соответствует программе Министерства высшего образования СССР по одноименной дисциплине. Курс состоит из трех частей: части первой — «Физические основы электротехники и теория цепей постоянного тока», написанной Л. Р. Нейманом, за исключением главы о расчете линейных цепей постоянного тока, написанной П. Л. Калантаровым и дополненной Л. Р. Нейманом, части второй — «Теория цепей переменного тока», написанной П. Л. Калантаровым и переработанной и дополненной Л. Р. Нейманом, и части третьей — «Теория электромагнитного поля», написанной Л. Р. Нейманом.*

*Третья часть посвящена изучению электромагнитных полей и методов их расчета, а также связанных с ними методов расчета емкостей, индуктивностей, сопротивлений и других параметров электротехнических устройств.*

*Нейман Леонид Робертович и Калантаров Павел Лазаревич*

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

### *Часть третья*

Редакторы *И. А. Зайцев, М. С. Кияницына*

Технический редактор *Е. М. Соболева*

---

Сдано в производство 13/1 1959 г. Подписано к печати 4/VI 1959 г. М-04390.

Печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 13,7. Бум. л. 7,25. Формат 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Тираж 75 000 (1—25 000). Заказ 429. Цена 5 р. 80 к.

---

Типография № 6 УПП Ленсовнархоза. Ленинград, ул. Моисеенко, 10

---

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава первая

Стр.

#### Электромагнитное поле и характеризующие его уравнения

§ 1.	Связь между электрическими и магнитными явлениями. Электромагнитное поле . . . . .	9
§ 2.	Относительность составляющих электромагнитного поля . . . . .	15
§ 3.	Уравнения Максвелла в дифференциальной форме . . . . .	17
§ 4.	Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме . . . . .	20
§ 5.	Выражение в дифференциальной форме принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока . . . . .	24
§ 6.	Теорема Остроградского. Теорема Стокса . . . . .	25
§ 7.	Полная система уравнений электромагнитного поля . . . . .	27
§ 8.	Электростатическое поле и поле постоянных токов как частные случаи электромагнитного поля . . . . .	31

### Глава вторая

#### Электростатическое поле

§ 9.	Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала . . . . .	32
§ 10.	Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел . . . . .	35
§ 11.	Определение потенциала по заданному распределению зарядов . . . . .	39
§ 12.	Уравнения Пуассона и Лапласа . . . . .	41
§ 13.	Граничные условия на поверхности проводников . . . . .	42
§ 14.	Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков . . . . .	—
§ 15.	Основная задача электростатики . . . . .	45
§ 16.	Плоскопараллельное поле . . . . .	47
§ 17.	Применение функций комплексного переменного . . . . .	50
§ 18.	Поле уединенного провода кругового сечения . . . . .	52
§ 19.	Поле двух плоскостей, сходящихся под углом . . . . .	54
§ 20.	Поле двухпроводной линии передачи . . . . .	55
§ 21.	Поле параллельных несоосных цилиндров . . . . .	59
§ 22.	Поле у края плоского конденсатора . . . . .	60
§ 23.	Графический метод построения картины плоскопараллельного поля . . . . .	63
§ 24.	Графический метод построения картины поля тел вращения . . . . .	64
§ 25.	Графический метод построения картины поля в случае неоднородной изолирующей среды . . . . .	—
§ 26.	Тело из диэлектрика во внешнем электростатическом поле . . . . .	65
§ 27.	Диэлектрический шар во внешнем однородном поле . . . . .	66
§ 28.	Проводящее тело во внешнем электростатическом поле. Электростатическое экранирование . . . . .	69
§ 29.	Металлический шар во внешнем однородном поле . . . . .	71
§ 30.	Метод зеркальных изображений . . . . .	—

*Глава третья***Расчет электрической емкости**

§ 31. Емкость между круговыми цилиндрами. Емкость двухпроводной линии передачи . . . . .	74
§ 32. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел . . . . .	77
§ 33. Потенциальные коэффициенты в системе параллельных весьма длинных проводов . . . . .	81
§ 34. Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли . . . . .	83
§ 35. Емкость трехфазной линии передачи . . . . .	84
§ 36. Метод средних потенциалов для расчета потенциальных коэффициентов и емкостей в системе проводов . . . . .	87
§ 37. Вычисление емкости по картине поля . . . . .	92

*Глава четвертая***Электрическое поле постоянных токов**

§ 38. Уравнения электромагнитного поля постоянных токов . . . . .	93
§ 39. Электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами . . . . .	—
§ 40. Электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде . . . . .	95
§ 41. Граничные условия на поверхности раздела двух проводящих сред . . . . .	96
§ 42. Аналогия электрического поля в проводящей среде с электростатическим полем . . . . .	98
§ 43. Ток утечки в кабеле и сопротивление изоляции кабеля . . . . .	99
§ 44. Сопротивление заземления . . . . .	100

*Глава пятая***Магнитное поле постоянных токов**

§ 45. Вихревой характер магнитного поля токов. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов . . . . .	104
§ 46. Векторный потенциал магнитного поля токов . . . . .	106
§ 47. Выражение магнитного потока через векторный потенциал . . . . .	109
§ 48. Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов . . . . .	110
§ 49. Плоскопараллельное поле . . . . .	—
§ 50. Применение функций комплексного переменного . . . . .	113
§ 51. Поле линейных проводов. Принцип соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей . . . . .	—
§ 52. Прямолинейный провод с током во внешнем однородном поле . . . . .	115
§ 53. Поле проводов, имеющих конечное сечение произвольной формы . . . . .	116
§ 54. Поле проводов кругового сечения . . . . .	117
§ 55. Поле двухпроводной линии передачи . . . . .	118
§ 56. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями . . . . .	120
§ 57. Поле токов вблизи плоских поверхностей ферромагнитных тел. Метод зеркальных изображений . . . . .	121
§ 58. Графический метод построения картины поля . . . . .	123
§ 59. Пространственная задача. Поле кругового контура с током . . . . .	127
§ 60. Выражение скалярного потенциала через телесный угол, под которым виден контур тока . . . . .	129
§ 61. Магнитное поле контура произвольной формы на большом расстоянии от контура . . . . .	131

	Стр.
§ 62. Тело во внешнем магнитном поле. Аналогия с электростатической задачей . . . . .	131
§ 63. Шар и эллипсоид вращения во внешнем однородном поле . . . . .	132
§ 64. Коэффициенты размагничивания . . . . .	134
§ 65. Магнитное экранирование . . . . .	135

### Глава шестая

#### Расчет индуктивностей

§ 66. Общие выражения для взаимной и собственной индуктивностей . . . . .	136
§ 67. Взаимная индуктивность двух круговых контуров . . . . .	141
§ 68. Индуктивность кругового контура . . . . .	142
§ 69. Метод участков . . . . .	143
§ 70. Индуктивности контуров, составленных из прямолинейных отрезков . . . . .	145
§ 71. Индуктивность прямоугольной рамки . . . . .	147
§ 72. Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями . . . . .	—
§ 73. Индуктивность двухпроводной линии . . . . .	148
§ 74. Индуктивность трехфазной линии . . . . .	149

### Глава седьмая

#### Переменное электромагнитное поле в диэлектрике

§ 75. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны . . . . .	152
§ 76. Вектор Пойнтинга . . . . .	157
§ 77. Поток электромагнитной энергии . . . . .	160
§ 78. Излучение электромагнитных волн антенной. Опыты Г. Герца. Работы П. Н. Лебедева. Изобретение радио А. С. Поповым . . . . .	164
§ 79. Электродинамические векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля . . . . .	169
§ 80. Электрический диполь с переменными зарядами . . . . .	175
§ 81. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, малых по сравнению с длиной волны . . . . .	178
§ 82. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, значительно превышающих длину волны . . . . .	—
§ 83. Мощность и сопротивление излучения диполя и антенны . . . . .	179
§ 84. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии . . . . .	181
§ 85. Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб . . . . .	184
§ 86. Волноводы . . . . .	185

### Глава восьмая

#### Переменное электромагнитное поле в проводящей среде

§ 87. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде . . . . .	194
§ 88. Длина волны и затухание волны . . . . .	197
§ 89. Явление поверхностного эффекта . . . . .	198
§ 90. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводов . . . . .	199
§ 91. Сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта . . . . .	203
§ 92. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала . . . . .	205

---

	Стр.
§ 93. О комплексных магнитной и диэлектрической проницаемостях . . .	207
§ 94. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе . . . . .	209
§ 95. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе кругового сечения . . . . .	212
§ 96. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндри- ческих проводов кругового сечения . . . . .	217
§ 97. Эффект близости. Поверхностная закалка индукционным методом	220
§ 98. Электромагнитное экранирование . . . . .	221
§ 99. Экспериментальное исследование и моделирование электрических и магнитных полей . . . . .	222
§ 100. О параметрах электрических и магнитных цепей . . . . .	228
Алфавитный указатель . . . . .	232

---

---

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЕГО УРАВНЕНИЯ

#### § 1. Связь между электрическими и магнитными явлениями. Электромагнитное поле

В первой части курса было уделено большое внимание тесной связи между электрическими и магнитными явлениями. По существу всякое электрическое или магнитное явление, рассматриваемое в целом, всегда оказывается электромагнитным.

*Электромагнитное поле* является особым видом материи. Всякая электрически заряженная частица окружена электромагнитным полем, составляющим с ней единое целое. Но электромагнитное поле может существовать и в свободном, отделенном от заряженных частиц состоянии в виде движущихся со скоростью, близкой к  $3 \cdot 10^8$  м/сек, фотонов или вообще в виде излученного движущегося с этой скоростью электромагнитного поля (электромагнитных волн).

Электромагнитное поле характеризуется непрерывным распределением в пространстве и вместе с тем оно обнаруживает дискретную структуру в виде квантов излученного электромагнитного поля, например фотонов.

Электромагнитное поле является носителем определенного количества энергии, которая способна преобразовываться в другие виды энергии — химическую, тепловую, энергию механического движения и т. п.

Именно весьма широкие возможности осуществления таких преобразований, а также возможность передачи энергии электромагнитным полем на большие расстояния и привели к современному высокому развитию электротехники.

Электромагнитное поле, являясь носителем определенного количества энергии, обладает также и определенной соответствующей этой энергии массой, которая может быть определена из общей связи  $W = mc^2$  между полной энергией  $W$  и полной массой  $m$ , причем  $c$  есть скорость света в пустоте. Однако плотность массы в используемых обычно электромагнитных полях весьма мала. Пусть магнитная индукция равна  $1$  вб/м<sup>2</sup> и напряженность

электрического поля равна  $10^8$  в/м =  $10^6$  в/см. Последнее может быть достигнуто только при весьма высоком вакууме. При этих условиях объемная плотность энергии электромагнитного поля, равная сумме объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей, имеет значение:

$$W' = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{10^{16}}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^8} + \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 4,42 \cdot 10^5 \text{ дж/м}^3.$$

Соответственно, объемная плотность массы электромагнитного поля при этом имеет значение:

$$\frac{m}{V} = \frac{W'}{c^2} = \frac{4,42 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4,91 \cdot 10^{-12} \text{ кг/м}^3,$$

т. е. представляет собой весьма малую величину.

Наличие массы поля имеет принципиальное значение. В частности, располагая значением массы поля, весьма легко подсчитать давление света на поверхность тела, на которую он падает. Давление света было экспериментально установлено и количественно измерено в блестящих опытах П. Н. Лебедева, подтвердивших выводы теории электромагнитного поля.

Ничтожная плотность массы используемых на практике электромагнитных полей дает основание обычно не интересоваться этой характеристикой поля и обращать внимание в основном на энергетическую сторону рассматриваемых явлений. Электромагнитное поле наряду с вышеперечисленными свойствами характеризуется *особыми электромагнитными* свойствами, не рассматриваемыми в механике, а именно, способностью оказывать силовое воздействие на заряженные частицы. Это воздействие зависит от скорости заряженных частиц.

Итак, электромагнитное поле представляет собой особый вид материи, характеризующейся отмеченными выше свойствами. Электрическое же и магнитное поля являются лишь двумя сторонами всегда единого электромагнитного поля. Здесь весьма важно обратить внимание на то, что деление объективно существующего независимого от наших наблюдений электромагнитного поля на две его составляющие — поле электрическое и поле магнитное — является относительным, т. е. зависит от условий, при которых производится наблюдение электромагнитного поля с помощью тех или иных устройств.

Так, в случае покоящихся по отношению к нам электрически заряженных тел в окружающем эти тела пространстве мы обнаруживаем с помощью неподвижного пробного заряженного тела электрическое поле, но не обнаруживаем с помощью неподвижной магнитной стрелки магнитного поля. Пробное заряженное тело испытывает в каждой точке этого пространства определенную механическую силу, магнитная же стрелка не стремится ориентироваться каким-либо определенным образом. Однако, если в то же

время другой наблюдатель будет двигаться вместе с магнитной стрелкой по отношению к заряженным телам, то он обнаружит около этих тел также и магнитное поле. Действительно, движение заряженных тел относительно него и относительно прибора, с помощью которого он определяет магнитное поле, представляет собой электрический ток переноса, а всякий электрический ток связан с магнитным полем.

То же самое можно сказать и в отношении случая, когда мы обнаруживаем в некоторой области пространства одно магнитное поле. Так, мы наблюдаем только магнитное поле в пространстве, окружающем покоящиеся по отношению к нам постоянные магниты. Неподвижная магнитная стрелка в каждой точке этого пространства стремится ориентироваться определенным образом, но неподвижное пробное заряженное тело не испытывает в этом пространстве никаких сил. Однако в то же время наблюдатель, движущийся вместе с пробным электрически заряженным телом относительно магнитов, обнаружит и электрическое поле. Он объяснит это тем, что магнитное поле изменяется во времени вследствие движения относительно него магнитов, а всякое изменяющееся магнитное поле вызывает в том же пространстве индуктированное электрическое поле.

Все это подчеркивает высказанное выше основное положение, что объективно существует всегда единое электромагнитное поле, не зависящее от условий наблюдения, но что деление его на составляющие связано с условиями опыта.

Здесь полезно отметить, что и в тех случаях, когда мы заключаем, что в некоторой области пространства обнаруживается только электрическая или только магнитная сторона явления, такое заключение относится лишь к макроскопическому рассмотрению явления. Действительно, если мы углубимся в физическую картину тех процессов, с которыми связано электрическое поле покоящихся заряженных тел и которые совершаются в заряженных телах у их поверхности, то мы сейчас же обнаружим и магнитную сторону явления. Согласно нашим представлениям общий заряд тела образуется совокупностью зарядов элементарных заряженных частиц, находящихся в постоянном движении. Следовательно, в заряженном теле существуют элементарные электрические токи, окруженные не только электрическим, но и магнитным полем, и только вследствие того, что эти элементарные токи имеют разнообразные направления, их магнитные поля почти полностью взаимно компенсируются уже на небольших расстояниях от заряженных тел. Таким образом, явление, рассматриваемое в целом, и в этом случае оказывается электромагнитным.

Точно так же в случае покоящихся постоянных магнитов их магнитное поле связано с элементарными электрическими токами, существующими в веществе магнита, а следовательно, и в этом случае явление в целом также оказывается электромагнитным.

Возможность осуществить такие условия, при которых в некоторой области пространства обнаруживается одна сторона электромагнитного процесса, позволяет провести отдельно изучение ряда основных соотношений, характеризующих электрическое поле, и соотношений, характеризующих магнитное поле. Основанием тому служит и то обстоятельство, что при рассмотрении многих практических задач нас интересует только одно из полей. Так, например, при исследовании вращающего момента электрической машины мы принимаем во внимание только одно магнитное поле, существующее в машине. При решении же вопроса об электрической прочности изоляции в той же машине нас интересует только электрическое поле. Однако уже в первой части курса было неоднократно подчеркнуто наличие связи между электрическими и магнитными явлениями, и, по сути дела, полностью были установлены как физическая природа этой связи, так и определяющие ее количественные соотношения.

Из всего рассмотренного в первой части курса вытекает, что всякий электрический ток обязательно сопровождается магнитным полем, и наоборот, магнитное поле неизбежно связано с электрическим током. Принято различать три вида электрического тока: ток проводимости, плотность которого пропорциональна напряженности электрического поля, ток смещения, плотность которого пропорциональна скорости изменения напряженности электрического поля, и ток переноса, плотность которого определяется скоростью движущихся свободных электрически заряженных частиц или тел, зависящей от электрического напряжения вдоль пути, пройденного этими частицами или телами. Однако физически следует различать лишь два вида электрического тока, характеризующихся иными признаками. Первый вид тока представляет собой движение элементарных частиц, обладающих электрическим зарядом. Сюда относятся ток переноса, ток проводимости и часть тока смещения, обязанная изменению электрической поляризованности вещества. Второй вид тока, который не может быть представлен как движение известных нам заряженных элементарных частиц, есть ток электрического смещения в пустоте.

В пространстве, окружающем движущиеся заряженные частицы, существует как электрическое поле, так и магнитное поле. Эти поля определяют собой две стороны единого электромагнитного поля.

Токи электрического смещения в пустоте возникают при изменении электрического поля во времени и также окружены магнитным полем. Следовательно, при всяком изменении электрического поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним поле магнитное. Оба эти поля определяют и в этом случае единое электромагнитное поле.

Связь между электрическим током и напряженностью магнитного поля устанавливается законом полного тока:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i,$$

гласящим, что линейный интеграл напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равен полному току сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнение, выражающее закон полного тока, понимаемое в указанном выше обобщенном смысле, когда в правой его части содержатся все виды токов, в том числе и ток смещения, дано Максвеллом. Его называют *первым уравнением Максвелла*. Посредством этого уравнения устанавливается одна из важнейших связей между электрической и магнитной сторонами электромагнитных явлений, а именно, оно определяет магнитное поле, возникающее при движении заряженных частиц и при изменении электрического поля.

Вторая связь определяет электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля. Она открыта Фарадеем и сформулирована им в виде закона электромагнитной индукции. Максвеллу принадлежит заслуга обобщения этого закона на случай любой среды. Согласно максвелловой формулировке закона электромагнитной индукции, электродвижущая сила, возникающая в контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, равна взятой со знаком минус скорости изменения этого потока. Сущность обобщения Максвелла заключается в том, что контур, в котором возникает э. д. с., может быть представлен расположенным в любой среде. В частности, это может быть лишь мысленный контур, находящийся целиком в пустоте.

Возникновение э. д. с. в таком контуре при изменении магнитного поля есть результат появления индуктированного электрического поля. При этом электродвижущая сила, действующая вдоль контура, равна линейному интегралу напряженности электрического поля, взятому вдоль этого контура. Таким образом, обобщенная максвеллова формулировка закона электромагнитной индукции представляется в виде:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Это уравнение называют *вторым уравнением Максвелла*. Сущность явления электромагнитной индукции заключается в том, что при всяком изменении магнитного поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним поле электрическое.

Приведенные два уравнения являются основными уравнениями электромагнитного поля, представленными в интегральной форме.

Изучение электромагнитного поля и методов его расчета имеет весьма большое значение.

В первых параграфах второй части курса, посвященной теории цепей переменного тока, отмечалась сложность физических явлений в таких цепях. Было показано, что возможность построения теории цепей основана на ряде научных абстракций, на пренебрежении рядом явлений, которые при определенных условиях можно считать второстепенными. Теория электрических и магнитных цепей оперирует с параметрами цепей, например с индуктивностью, емкостью, электрическим сопротивлением, магнитным сопротивлением и т. д., принимая значения этих параметров как данные. Однако для расчета параметров цепей необходимо знать электрические и магнитные поля, образующиеся на участках цепей при наличии в этих участках токов и напряжений. Изучение электромагнитных полей важно не только для расчета параметров цепей. Оно необходимо, если мы желаем более полно рассмотреть картину электромагнитных явлений в том или ином устройстве, не ограничивая себя теми допущениями, на которых основана теория электрических и магнитных цепей. По существу для полной характеристики электромагнитных явлений в любом устройстве необходимо знать пространственное распределение определяющих их физических величин — плотности тока, напряженности электрического поля, магнитной индукции и т. д., и их изменение во времени. Поэтому для глубокого изучения электромагнитных явлений необходимо изучить характеризующие их поля.

Далеко не всегда при анализе электромагнитных явлений могут быть введены и использованы самые понятия об электрической и магнитной цепях, хотя бы даже для получения приближенного решения. Существует много важных практических случаев, когда эти понятия теряют свой смысл и когда анализ электромагнитных явлений может быть произведен только путем детального изучения электромагнитного поля. В качестве одного из важнейших примеров можно указать на вопрос об излучении и распространении электромагнитных волн.

Теория электромагнитного поля в главных своих чертах была создана Максвеллом и изложена им в его труде «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в 1873 г. Следует отметить, что уже в 1833 г. русский академик Э. Х. Ленц сформулировал положения, устанавливающие общность электрических и магнитных явлений и их взаимную связь. Максвеллова теория электромагнитного поля была блестяще подтверждена опытами Г. Герца, исследованиями электромагнитной природы света П. Н. Лебедева и изобретением радио А. С. Поповым.

## § 2. Относительность составляющих электромагнитного поля

Объективно существующее электромагнитное поле может восприниматься различно в зависимости от условий наблюдения. Именно, две основных составляющих электромагнитного поля — поле электрическое и поле магнитное — будут различными в различных движущихся друг относительно друга системах координат. Это в принципиальном отношении ясно уже из сказанного в предыдущем параграфе. Приведем некоторые соотношения, характеризующие это существенное положение.

Представим себе, что в некоторой системе координат электромагнитное поле характеризуется векторами  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  и, соответственно, векторами  $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{B}'}{\mu}$ . Пусть по отношению к этой системе координат движется со скоростью  $\mathbf{v}$  частица с зарядом  $q$ . Эта частица испытывает механическую силу (ч. 1):

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}' + q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'].$$

При этом силу  $q\mathbf{E}'$  частица испытывает со стороны электрического поля и силу  $q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}']$  — со стороны магнитного поля.

Представим теперь, что другая система координат движется вместе с заряженной частицей по отношению к первой системе равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{v}$ . По отношению к этой второй системе координат заряженная частица неподвижна. Поэтому вся сила  $\mathbf{f}$  в этой системе координат определяется как результат действия только электрического поля с напряженностью  $\mathbf{E}''$ , которая находится из равенства:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}''.$$

Сравнивая оба выражения для силы  $\mathbf{f}$ , получаем:

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}' + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'].$$

Отсюда мы видим, что напряженность электрического поля, количественно определяемая как отношение механической силы, действующей на *неподвижное* по отношению к данной системе координат точечное заряженное тело к заряду этого тела, оказывается различной в движущихся друг относительно друга системах координат.

Необходимо сделать оговорку, что полученное соотношение между  $\mathbf{E}''$  и  $\mathbf{E}'$  справедливо при условии, что скорость  $v$  много меньше скорости света  $c$  в пустоте и что движение совершается равномерно и прямолинейно. При  $v$ , близком к  $c$ , как это следует при более детальном рассмотрении, необходимо учесть еще дополнительный член, который ничтожно мал, если  $v \ll c$ .

Пусть в первой системе координат движется замкнутый проводящий контур. Э. д. с., возникающая в контуре вследствие

явления электромагнитной индукции, может быть представлена в виде:

$$e = \oint \mathbf{E}'' \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \cdot d\mathbf{l},$$

причем  $\mathbf{v}$  — скорость элемента  $d\mathbf{l}$ , или

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \cdot d\mathbf{l}.$$

Составляющая  $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  представляет собой э. д. с., которая индуктировалась бы переменным магнитным потоком в контуре, если бы контур был неподвижен в первой системе координат. Составляющая  $\oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}'] \cdot d\mathbf{l}$  обязана движению контура в этой системе координат (ч. I).

Можно показать также, что и напряженность магнитного поля получается различной в движущихся друг относительно друга системах координат. Соотношение между значениями  $\mathbf{H}''$  и  $\mathbf{H}'$  в двух рассмотренных выше системах координат можно получить, обращаясь к следующему простому случаю. Пусть электромагнитное поле в первой системе координат создается движущейся в этой системе со скоростью  $\mathbf{v}_1$  уединенной частицей с зарядом  $q$ . Вектор электрического смещения  $\mathbf{D}'$  при  $v_1 \ll c$  равен:  $\mathbf{D}' = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ , где  $r$  — расстояние от заряженной частицы до точки, в которой определяется  $\mathbf{D}'$ ;  $\mathbf{r}$  — соответствующий радиус-вектор.

Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}'$ , создаваемого в этой системе координат движущейся заряженной частицей, имеет значение (ч. I):

$$\mathbf{H}' = \frac{v_1 q \sin \alpha}{4\pi r^2}; \quad \mathbf{H}' = \left[ \mathbf{v}_1 \cdot \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{D}'].$$

Во второй системе координат, движущейся по отношению к первой со скоростью  $\mathbf{v}$ , заряженная частица  $q$  воспринимается как движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ . Следовательно, она создает в этой системе при  $v_2 \ll c$  магнитное поле с напряженностью:

$$\mathbf{H}'' = \left[ \mathbf{v}_2 \cdot \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = [\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{D}'] = [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{D}'] - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'].$$

Таким образом, получаем соотношение:

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}' - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}'].$$

Это соотношение справедливо с теми же оговорками, которые были сделаны при рассмотрении соотношения между векторами  $\mathbf{E}''$  и  $\mathbf{E}'$ .

Все сказанное выше еще раз подтверждает то важное положение, что физически мы можем говорить только об едином, существующем независимо от условий наблюдения электромагнитном поле. Деление же электромагнитного поля на его составляющие относительно.

В дальнейшем мы будем рассматривать электромагнитное поле в неподвижных средах и, в частности, в неподвижных проводниках. Соответственно во всех уравнениях будем вводить частные производные по времени.

### § 3. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Исследуя электромагнитное поле, необходимо определять все величины, его характеризующие, в каждой точке пространства. Поэтому мы не можем удовлетвориться интегральной формой уравнений и должны представить их в дифференциальной форме.

Выразим в дифференциальной форме первое уравнение Максвелла. Согласно этому уравнению линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по замкнутому контуру, может рассматриваться как мера электрического тока, проходящего сквозь поверхность  $s$ , ограниченную этим контуром. Однако по величине этого интеграла нельзя судить о распределении тока по поверхности  $s$ . Чтобы решить этот вопрос, необходимо воспользоваться этим же уравнением в дифференциальной форме. Допустим, мы желаем выяснить, проходит ли ток сквозь малую поверхность  $\Delta s$ , на которой расположена точка  $A$ , и какова плотность тока в этой точке (рис. 1). Линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый вдоль малого контура, ограничивающего поверхность  $\Delta s$ , равен малому току  $\Delta i$ , проходящему сквозь эту поверхность:  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \Delta i$  и может служить мерой тока  $\Delta i$ . Величина  $\Delta i$  зависит от размеров поверхности  $\Delta s$ . Чтобы получить вполне определенную величину, разделим правую и левую части равенства на  $\Delta s$  и найдем предел, к которому стремится отношение, когда  $\Delta s$  стремится к нулю, стягиваясь в точке  $A$ . Будем иметь:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} d\mathbf{l}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s}.$$

Величина, стоящая в правой части равенства, представляет собой составляющую вектора плотности тока по направлению нормали к поверхности  $s$  в точке  $A$ :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \delta \cos \beta = \delta_n.$$

Величина, стоящая в левой части равенства, как известно из курса математики, представляет собой проекцию на направле-

ние нормали к поверхности  $s$  в точке  $A$  вектора, называемого *вихрем* или *ротором* вектора  $\mathbf{H}$ . Вихрь вектора  $\mathbf{H}$  обозначают  $\text{rot}\mathbf{H}$ . Соответственно для его проекции имеем обозначение:

$$\text{rot}_n \mathbf{H} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} d\mathbf{l}}{\Delta s}.$$

Стало быть,

$$\text{rot}_n \mathbf{H} = \delta_n.$$

Если элемент поверхности расположить так, чтобы положительная нормаль к нему совпадала с направлением вектора плот-

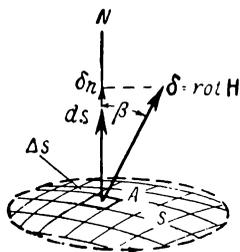


Рис. 1.

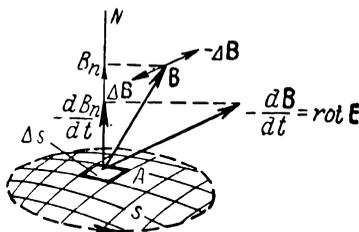


Рис. 2.

ности тока, то предел отношения  $\frac{\Delta i}{\Delta s}$  получит наибольшее значение, равное плотности тока в точке  $A$ , причем направление положительной нормали мы связываем правилом правого винта с направлением обхода контура. При таком расположении элемента поверхности в правой части равенства, написанного в векторной форме, будет стоять вектор плотности тока, а в левой — вектор  $\text{rot}\mathbf{H}$ . Таким образом, в дифференциальной форме первое уравнение Максвелла представится в виде:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \delta.$$

Напишем теперь в дифференциальной форме второе уравнение Максвелла. При этом, рассматривая поле в неподвижных средах, заменим полную производную по времени частной производной. Составим линейный интеграл напряженности электрического поля по малому контуру, ограничивающему малую поверхность  $\Delta s$  (рис. 2), разделим его на величину поверхности и найдем предел, к которому стремится полученное отношение, когда поверхность  $\Delta s$  стремится к нулю, стягиваясь в некоторой точке  $A$  поля. При этом мы получим проекцию на направление нормали к выбранному элементу поверхности в точке  $A$  вихря вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\Delta s} = \text{rot}_n \mathbf{E}.$$

В правой части второго уравнения Максвелла мы должны поток  $\Delta\Phi$  сквозь поверхность  $\Delta s$  разделить на поверхность  $\Delta s$  и найти предел, к которому стремится это отношение, когда  $\Delta s \rightarrow 0$ . При этом мы получим составляющую вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в точке  $A$ , нормальную к выбранному элементу поверхности:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta s} = \frac{d\Phi}{ds} = B_n.$$

Таким образом, получаем:

$$\text{rot}_n \mathbf{E} = - \frac{\partial B_n}{\partial t}.$$

Выберем положение элемента поверхности так, чтобы нормаль к нему совпала с вектором  $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Тогда в левой части равенства получим вихрь вектора  $\mathbf{E}$ . Будем иметь:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

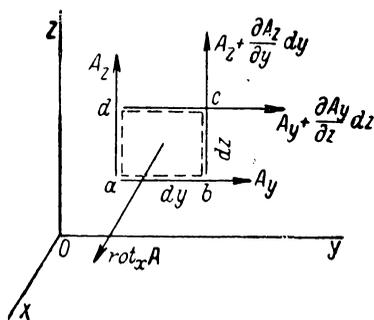


Рис 3

Это уравнение и является вторым уравнением Максвелла, представленным в дифференциальной форме.

Направление вектора  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  есть направление, к которому стремится направление приращения  $\Delta \mathbf{B}$  вектора магнитной индукции, происходящего за промежуток времени  $\Delta t$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$ . Если вектор  $\mathbf{B}$  изменяется не только по величине, но и по направлению, то производная  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  не направлена по одной прямой с вектором  $\mathbf{B}$ .

Уравнения Максвелла, записанные в вышеприведенной векторной форме, инвариантны в отношении системы координат. Действительно,  $\text{rot} \mathbf{H}$  и  $\text{rot} \mathbf{E}$  полностью определяются вектором плотности тока и производной по времени от вектора магнитной индукции в данной точке, которые, естественно, не зависят от выбора системы координат. В этом ценность записи уравнений Максвелла в такой форме. Однако выражения для составляющих вихря некоторого вектора  $\mathbf{A}$  через составляющие самого вектора  $\mathbf{A}$  получаются различными в разных системах координат.

Выразим составляющие вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  в декартовых координатах. Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный контур  $abcd$  (рис. 3) в плоскости, параллельной плоскости  $YOZ$ , и составим сумму произведений  $A dl$  по всем сторонам контура.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } & + A_y dy \text{ вдоль стороны } ab; \\ & + \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \right) dz \text{ вдоль стороны } bc; \\ & - \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \right) dy \text{ вдоль стороны } cd; \\ & - A_z dz \text{ вдоль стороны } da. \end{aligned}$$

При этом  $A_y$ ,  $(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy)$ ,  $(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz)$  и  $A_z$  — средние в пределах соответствующей стороны значения составляющих вектора  $\mathbf{A}$ . Суммируя эти величины и делая сумму на площадку  $dydz$ , ограниченную контуром, находим:

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Определяя аналогичным образом другие составляющие, получаем:

$$\text{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad \text{rot}_y \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad \text{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Последние два выражения легко получаются из первого циклической перестановкой букв  $x, y, z$ .

Таким образом, в декартовых координатах уравнения Максвелла принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \delta_x; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \delta_y; & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \delta_z; \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}; & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

#### § 4. Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме

Теорема Гаусса в применении к электрическому полю гласит: поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению электрического заряда, заключенного в объеме пространства, ограниченного этой поверхностью, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды, т. е.

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q}{\epsilon}.$$

Таким образом, интеграл напряженности электрического поля, распространенный по некоторой замкнутой поверхности  $s$  (рис. 4), в случае однородной и изотропной среды может рассматриваться как мера электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности. Однако по величине этого интеграла еще нельзя судить о распределении электрического заряда внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Для решения этого вопроса необходимо применить теорему Гаусса в дифференциальной форме. Допустим, что мы желаем выяснить, находится ли

электрический заряд в малом объеме  $\Delta V$ , заключающем в себе точку  $A$ , и какова объемная плотность электрического заряда в этой точке.

Поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь малую поверхность, ограничивающую объем  $\Delta V$ , равен деленному на  $\epsilon$  малому заряду  $\Delta q$ , заключенному внутри этой поверхности:

$$\oint_S \mathbf{E} ds = \frac{\Delta q}{\epsilon}.$$

Разделим обе части уравнения на  $\Delta V$  и найдем предел, к которому стремится отношение, когда  $\Delta V \rightarrow 0$ . Имеем:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} ds}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\epsilon \Delta V}.$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, называется *расхождением* или *дивергенцией* вектора  $\mathbf{E}$  и кратко обозначается  $\operatorname{div} \mathbf{E}$ . В правой части мы получаем объемную плотность  $\rho$  электрического заряда в данной точке пространства, деленную на  $\epsilon$ . Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

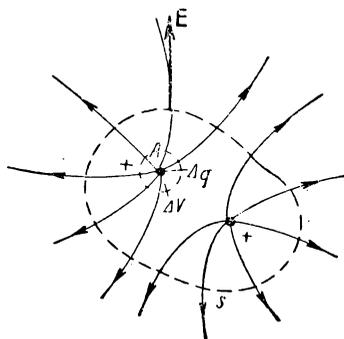


Рис. 4.

Термин «расхождение» хорошо характеризует особенности поля в тех местах, где  $\rho \neq 0$ , и в тех местах, где  $\rho = 0$ . Положительный заряд можно рассматривать как «источник» линий напряженности электрического поля, около него начинаются эти линии. Отрицательный заряд является как бы «стоком» (отрицательным источником) линий, около него линии кончаются. Поэтому, если в некотором объеме  $dV$  объемная плотность электрического заряда не равна нулю, то через поверхность, ограничивающую этот объем, линии напряженности электрического поля *расходятся* в окружающее пространство или *сходятся* из него (рис. 5, а, б), что кратко выражается словами: расхождение вектора  $\mathbf{E}$  не равно нулю. В области поля, где отсутствуют объемные заряды ( $\rho = 0$ ), линии напряженности поля не начинаются и не кончаются; через любой элемент объема такого пространства линии напряженности поля только проходят (рис. 5, в), но не расходятся от него и не сходятся к нему. Мы говорим, что расхождение вектора  $\mathbf{E}$  во всех точках такой области равно нулю:  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Поле в области, где  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , называется *соленоидальным*, от греческого слова  $\sigma\omega\lambda\eta\nu\omicron\iota\delta\eta\zeta$  — трубкообразный.

Значение расхождения вектора не зависит от выбора системы координат, и соответственно последнее уравнение инвариантно в отношении системы координат. Однако выражения расхождения некоторого вектора  $\mathbf{A}$  через его составляющие получаются различными в разных системах координат.

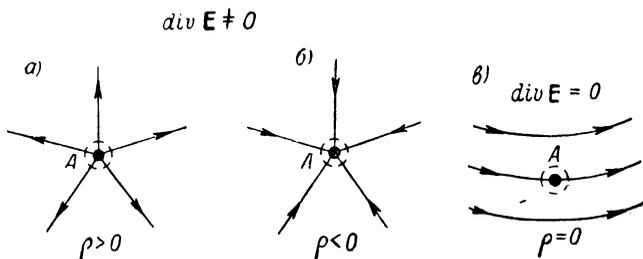


Рис. 5.

Выразим  $\text{div } \mathbf{A}$  в декартовых координатах. Представим себе бесконечно малый параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , параллельными осям координат (рис. 6). Поток вектора  $\mathbf{A}$  сквозь поверхность параллелепипеда складывается из потоков сквозь его грани.

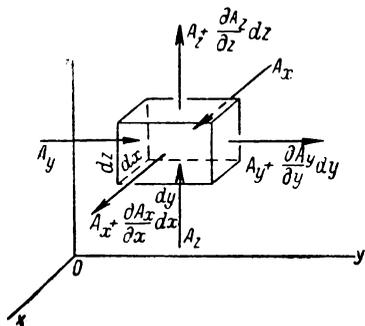


Рис. 6.

Имеем:

- $A_x dy dz$  сквозь дальнюю грань;
- +  $(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx) dy dz$  сквозь ближнюю грань;
- $A_y dx dz$  сквозь левую грань;
- +  $(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy) dx dz$  сквозь правую грань;

—  $A_z dx dy$  сквозь нижнюю грань;

+  $(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz) dx dy$  сквозь верхнюю грань.

При этом  $A_x$ ,  $(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx)$  и т. д. — средние в пределах соответствующей грани значения нормальных к поверхности грани составляющих вектора  $\mathbf{A}$ . Суммируя потоки через все грани и деля сумму на объем параллелепипеда  $dx dy dz$ , находим:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Расхождение вектора иногда обозначают так:  $\nabla \mathbf{A}$ , где  $\nabla$  (читается «набла») представляет собой символический дифференциальный векторный оператор Гамильтона. В декартовой системе координат он имеет вид:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — единичные векторы по осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Величины  $\frac{\partial}{\partial x} = \nabla_x$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = \nabla_y$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = \nabla_z$ , мы должны рассматривать как составляющие  $\nabla$  по осям координат.

Дифференциальное выражение  $\nabla \mathbf{A}$  формально можно рассматривать как скалярное произведение векторов  $\nabla$  и  $\mathbf{A}$ . Действительно:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{A} &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{A}, \end{aligned}$$

так как  $\mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = 1$  и  $\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{i} = 0$ .

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме можно написать также в виде:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В декартовой системе координат она имеет вид:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В случае неоднородной и анизотропной среды теорема Гаусса не применима. При этом следует пользоваться аналогичным, имеющим значительно более общий характер уравнением для вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$ . Именно, согласно постулату Максвелла поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному электрическому заряду, заключенному в пространстве, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_S \mathbf{D} \, ds = q.$$

В дифференциальной форме постулат Максвелла принимает вид:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \, ds}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

или, в иной записи,

$$\nabla \mathbf{D} = \rho.$$

В декартовых координатах это уравнение пишется в форме:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Заметим попутно, что выражение  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  может быть записано через знак  $\nabla$  в виде векторного произведения  $[\nabla \cdot \mathbf{A}]$ , в чем нетрудно убедиться.

### § 5. Выражение в дифференциальной форме принципов непрерывности магнитного потока и непрерывности электрического тока

Имеющий фундаментальное значение принцип непрерывности магнитного потока утверждает, что линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны. Иными словами, магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_s \mathbf{B} \, ds = 0.$$

В природе не существует магнитных масс, являющихся источниками линий магнитной индукции, подобных электрическим зарядам, которые дают начало линиям электрического смещения. Магнитное поле порождается только электрическими токами, и линии магнитной индукции, окружающие электрические токи, всегда замкнуты, непрерывны. Дифференциальной формой математической формулировки этого важного принципа является выражение:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

которое справедливо для всех точек любого магнитного поля.

Столь же фундаментальное значение имеет принцип непрерывности электрического тока, согласно которому линии тока нигде не прерываются, всегда являясь замкнутыми. Полный ток — проводимости, переноса и смещения, — проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю:

$$\oint \mathfrak{J} \, ds = 0.$$

Как было указано в первой части, это важнейшее положение приобретает совершенно общий характер лишь с введением в рассмотрение, помимо токов, представляющих собой движение эле-

ментарных заряженных частиц, также и токов электрического смещения в пустоте. Дифференциальной записью последнего равенства является выражение:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0,$$

которое так же, как и выражение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , справедливо во всех точках пространства.

С формальной стороны выражение  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$  является прямым следствием первого уравнения Максвелла. Действительно:  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ , но для любого вектора  $\mathbf{A}$  расхождение его вихря тождественно равно нулю. Действительно:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot}_x \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_y \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в полной системе уравнений электромагнитного поля, в которую в качестве одного из основных входит первое уравнение Максвелла, из двух выражений, характеризующих принципы непрерывности магнитного потока и электрического тока, должно содержаться только первое.

## 6. Теорема Остроградского. Теорема Стокса

Установим два важных, имеющих большое значение в теории поля равенства, выражающих собой теорему Остроградского и теорему Стокса. Эти равенства имеют чисто геометрический смысл и справедливы для произвольного вектора  $\mathbf{A}$ , но мы получим их сначала на основании имеющихся в нашем распоряжении уравнений для векторов напряженностей электрического и магнитного полей и затем уже дадим им геометрическую интерпретацию.

Пусть заряд  $q$  распределен некоторым образом по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $s$ . Тогда  $q = \int_V \rho dV$ . Используя теорему

Гаусса в интегральной форме, можем написать:  $\oint_s \mathbf{E} ds = \int_V \frac{\rho}{\epsilon} dV$ .

Заменяя  $\frac{\rho}{\epsilon}$  через  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  согласно той же теореме в дифференциальной форме, получаем равенство:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Это равенство может быть написано для любого вектора  $\mathbf{A}$ , непрерывного вместе со своими первыми производными в области  $V$  и на поверхности  $s$ :

$$\oint_s \mathbf{A} ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV.$$

Оно является формулировкой теоремы Остроградского и имеет чисто геометрический смысл преобразования объемного интеграла в поверхностный. Действительно, представим себе объем  $V$  разделенным на элементы объема  $dV$ . Величина  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ , в соответствии с ее определением, есть отношение потока вектора  $\mathbf{A}$  сквозь поверхность, ограничивающую объем  $dV$ , к объему  $dV$ . Следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{A} dV$  есть поток вектора  $\mathbf{A}$  сквозь поверхность, ограничивающую объем  $dV$ . Представим два соседних объема  $dV$ , соприкасающихся друг с другом по некоторой поверхности  $ds$ . Очевидно, если поток сквозь поверхность соприкосновения для одного объема будет выходящим из него, т. е. положительным, то для другого он будет входящим в него, т. е. отрицательным. Поэтому при составлении интеграла  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$  по всему объему  $V$  потоки сквозь все поверхности между смежными элементарными объемами  $dV$  в сумме дадут нуль. Останутся только потоки сквозь те поверхности  $ds$  крайних элементарных объемов  $dV$ , которые являются элементами поверхности  $s$ , ограничивающей весь объем  $V$ . Таким образом, интеграл  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$  действительно равен потоку вектора  $\mathbf{A}$  сквозь поверхность  $s$ , т. е. равен интегралу  $\oint_s \mathbf{A} ds$ .

Установим теперь второе важное равенство. Пусть сквозь некоторую незамкнутую поверхность  $s$ , ограниченную контуром  $l$ , проходит ток  $i$ . Имеем:  $i = \int_s \delta ds$ . Согласно первому уравнению Максвелла в интегральной форме можем написать:  $\oint_l \mathbf{H} dl = \int_s \delta ds$ . Используя то же уравнение в дифференциальной форме, заменим  $\delta$  на  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ . Получим:

$$\oint_l \mathbf{H} dl = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{H} ds.$$

Это равенство может быть написано для любого вектора  $\mathbf{A}$ , непрерывного вместе со своими первыми производными на поверхности  $s$  и на контуре  $l$ :

$$\oint_l \mathbf{A} dl = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{A} ds.$$

Оно выражает собой теорему Стокса и имеет чисто геометрический смысл преобразования поверхностного интеграла в интеграл по контуру. Действительно, представим себе поверхность  $s$  разделенной на элементы  $ds$ . Величина нормальной составляющей вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ , в соответствии с ее определением, есть отношение суммы произведений  $\mathbf{A} dl$  по всем сторонам контура, ограничи-

вающего элементарную площадку  $ds$ , к величине поверхности  $ds$ . Следовательно,  $\text{rot } \mathbf{A} ds$  представляет собой эту сумму. При составлении интеграла  $\int_s \text{rot } \mathbf{A} ds$  по всей поверхности  $s$ , произведения  $\mathbf{A} d\mathbf{l}$  для всех соприкасающихся сторон соседних элементарных поверхностей взаимно компенсируются, и остаются только произведения  $\mathbf{A} d\mathbf{l}$  по всем элементам  $d\mathbf{l}$  контура  $l$ , ограничивающего всю поверхность  $s$ , что и приводит к последнему равенству.

### § 7. Полная система уравнений электромагнитного поля

Рассматривая элементарные заряженные частицы, движущиеся в пустоте, и окружающее их поле, мы различаем два вида электрического тока: ток переноса и ток электрического смещения в пустоте. В части пространства, занимаемой движущимися заряженными частицами, существуют токи переноса, плотность которых имеет выражение:  $\delta_{пер} = \rho \mathbf{v}$ . В остальном пространстве, окружающем движущиеся заряженные частицы, существуют токи электрического смещения, имеющие плотность  $\delta_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , где  $\mathbf{D}$  — электрическое смещение в пустоте.

В общем виде можно написать  $\delta = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v}$ , причем в одних точках пространства первое слагаемое равно нулю, а в других точках равно нулю второе слагаемое.

Векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  электрического поля и соответственно векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  магнитного поля связаны через электрическую постоянную  $\epsilon_0$  и магнитную постоянную  $\mu_0$  соотношениями:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля в этом случае имеет вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \delta = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v};$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}; \text{div } \mathbf{D} = \rho; \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Используя связи  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , можно эти уравнения переписать так, чтобы они содержали только векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Эти векторы следует рассматривать как основные векторы электромагнитного поля. Действительно, как мы видели (ч. 1), сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле, определяется именно этими векторами. Учитывая, что  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  постоянные величины, получаем:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \delta; \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \delta = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{v};$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

При микроскопическом рассмотрении явлений только что приведенный случай является общим. При этом в некоторой области пространства элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, могут отсутствовать, и электрические токи являться замкнутыми на себя токами электрического смещения, что, например, имеет место в излученной электромагнитной волне.

При изучении электромагнитных процессов в веществе обычно нет необходимости рассматривать сложную микроструктуру вещества. Действительное электромагнитное поле в веществе весьма резко изменяется от точки к точке в пространстве между элементарными заряженными частицами, входящими в состав вещества, и в каждой точке величины, характеризующие поле, являются быстро изменяющимися функциями времени вследствие движения с большой скоростью этих частиц. Однако эти неоднородности имеют микроскопический характер, и мы имеем все основания их осреднить в пространстве и во времени при рассмотрении макроскопических процессов. При этом осредненные величины, вообще говоря, будут функциями координат и времени, но изменяющимися значительно медленнее, чем истинные величины при микроскопическом рассмотрении явления.

Если свободные заряженные частицы находятся в столь разреженном веществе, что они могут беспрепятственно ускоряться под действием электрического поля, не испытывая или почти не испытывая столкновений с молекулами вещества, то в таком случае под действием осредненного электрического поля возникает упорядоченный ток переноса. Примером может служить ток между электродами в сильно разреженном газе, когда расстояние между электродами меньше средней длины свободного пробега ионов и электронов.

Если элементарные заряженные частицы, движущиеся в веществе, на своем пути многократно путем столкновения передают атомам вещества кинетическую энергию, приобретаемую при ускорении в осредненном электрическом поле, то под действием постоянного осредненного поля устанавливается постоянная средняя скорость заряженных частиц. При этом в изотропной среде осредненная плотность тока может быть выражена в форме произведения осредненной напряженности электрического поля  $E$  и величины  $\gamma$ , характеризующей электропроводность вещества и именуемой удельной проводимостью вещества. Такой ток мы называем током проводимости. Примерами могут служить токи в металлах, полупроводниках и электролитах.

Плотность тока переноса  $\mathfrak{E}_{nep}$  и плотность тока проводимости  $\mathfrak{E}_{pp}$  могут быть представлены в виде произведения осредненной объемной плотности заряда движущихся частиц на осредненную их скорость. При этом, если в движении участвуют как положительно, так и отрицательно заряженные частицы, то плотность тока может быть выражена в виде  $\mathfrak{E} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-$ , где  $\rho_+$  и  $\mathbf{v}_+$  —

объемная плотность заряда и средняя скорость положительно заряженных частиц и  $\rho_-$  и  $\mathbf{v}_-$  — то же отрицательно заряженных частиц.

В случае тока проводимости мы имеем возможность представить плотность тока в изотропной среде также в форме:

$$\delta_{np} = \gamma \mathbf{E}.$$

Удельная проводимость  $\gamma$  зависит от температуры среды и в общем случае может зависеть также и от напряженности электрического поля.

Во всех остальных случаях, когда среду не представляется возможным характеризовать определенным образом зависящей от температуры и напряженности поля удельной электрической проводимостью, т. е. когда связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля не представляется возможным выразить в форме  $\delta = \gamma \mathbf{E}$ , условимся явление движения заряженных частиц именовать током переноса. При таком условии в окрестности данной точки пространства может быть либо ток проводимости, либо ток переноса, а не оба эти вида тока одновременно.

Всякое вещество под действием электрического поля поляризуется. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, смещаются: частицы с положительными зарядами — в направлении поля, с отрицательными зарядами — против поля. Процесс этот мы количественно характеризовали поляризованностью  $\mathbf{P}$  вещества. Полное осредненное электрическое смещение  $\mathbf{D}$  в веществе равно сумме осредненного электрического смещения  $\mathbf{D}_0$  в пустоте и поляризованности  $\mathbf{P}$  вещества:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Между осредненными значениями  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  для изотропного вещества можно написать соотношение:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

где  $\epsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества.

В выражении для плотности тока смещения в диэлектрике

$$\delta_{cm} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}$$

мы будем подразумевать под  $\delta_{cm}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  также осредненные значения соответствующих величин.

При внесении вещества во внешнее магнитное поле в веществе возникают согласованные элементарные токи, создающие магнитные поля, направленные против внешнего поля в случае диамагнитных веществ и в сторону внешнего поля в случае парамагнитных и ферромагнитных веществ. Осредненное значение

магнитной индукции может быть представлено при этом в виде суммы:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J},$$

где  $\mathbf{H}$  — осредненная напряженность магнитного поля и  $\mathbf{J}$  — намагниченность вещества. Соотношение между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  для изотропного вещества пишется в виде:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость вещества.

Рассматривая в дальнейшем осредненные в указанном смысле значения всех величин, мы будем иметь для любого изотропного вещества следующую систему уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \delta = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta_{\text{пер}};$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Плотность тока для общности выражена в виде суммы трех составляющих. При этом надо иметь в виду, что по самому смыслу первой и третьей составляющих они не могут иметь места в одной и той же точке пространства одновременно. Две первые составляющие могут иметь место одновременно в полупроводящей среде. Однако в хорошо проводящих веществах всегда можно пренебречь второй слагаемой по сравнению с первой и в диэлектриках обычно можно пренебречь первой слагаемой по сравнению со второй.

При решении конкретных задач к приведенным выше уравнениям электромагнитного поля необходимо добавить граничные условия на поверхностях, являющихся границами между различными средами — границами между диэлектриками и проводниками, между двумя диэлектриками с различными  $\epsilon$ , между двумя проводящими средами с различными  $\gamma$ , между двумя средами с различными  $\mu$ . Эти граничные условия будут сформулированы в соответствующих главах. При исследовании переменных полей в общем случае должны быть заданы также начальные условия.

Кроме того, для решения вопроса о передаче энергии электромагнитным полем необходимо использовать выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$W' = W'_e + W'_m = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2}.$$

### § 8. Электростатическое поле и поле постоянных токов как частные случаи электромагнитного поля

Уже было отмечено, что при движении заряженного тела около него обнаруживаются как электрическое, так и магнитное поля, т. е. обнаруживается электромагнитное поле, и что лишь в частном случае покоящегося заряженного тела около него обнаруживается только одно электрическое поле. Уже из этого простого факта следует, что уравнения, характеризующие электростатическое поле, должны вытекать как частный случай из общих уравнений электромагнитного поля. Очевидно, это будет простейший частный случай, характерный тем, что всюду плотность тока равна нулю. Рассмотрению этого частного случая будут посвящены следующие две главы.

Другим простейшим случаем является система неподвижных сверхпроводящих контуров, по которым протекают постоянные токи. Около таких контуров обнаруживается только статическое магнитное поле. Действительно, электрическое поле в такой системе полностью отсутствует, так как магнитный поток не изменяется во времени и, следовательно, в пространстве не индуцируется никаких э. д. с. и, кроме того, сопротивление проводников, а следовательно, и падение напряжения в проводниках равны нулю. Магнитное поле неподвижных постоянных магнитов имеет такой же характер, как и поле около неподвижных сверхпроводящих контуров с токами, так как оно создается элементарными токами в теле магнита, протекающими без потерь энергии. Несколько более сложным и вместе с тем весьма важным частным случаем электромагнитного поля является поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, обладающих отличным от нуля электрическим сопротивлением. В этом случае около проводников и внутри них обнаруживаются как постоянное магнитное поле, так и постоянное электрическое поле. Рассмотрению этих случаев посвящаются четвертая, пятая и шестая главы.

В последних двух главах будет рассмотрен общий случай электромагнитного поля, изменяющегося во времени.

---

---

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### § 9. Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала

Основной задачей настоящей главы является рассмотрение методов расчета электростатического поля, т. е. электрического поля системы неподвижных относительно наблюдателя заряженных тел при отсутствии электрических токов. Если в системе нет намагниченных тел, то магнитное поле отсутствует. Следовательно всюду

$$\delta = 0; \quad \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{H} = 0.$$

Наличие в электрическом поле свободных распределенных в объеме зарядов привело бы к возникновению электрического тока. Поэтому предположение, что  $\delta = 0$ , ведет к заключению, что всюду  $\rho = 0$ . Могут быть только заряды, распределенные по поверхностям заряженных тел.

Из системы уравнений электромагнитного поля остается следующая совокупность:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Условие  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  свидетельствует, что *электростатическое поле имеет безвихревой характер*. Поле, удовлетворяющее этому условию, называют *безвихревым*. Согласно теореме Стокса, для любого замкнутого контура имеем:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0.$$

Таким образом, условие  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  выражает в дифференциальной форме ранее высказанное важное положение: в электростатическом поле линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$  вдоль любого замкнутого контура равен нулю. Соответственно в электростатическом поле линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$ , взятый от точки  $A$  до точки  $B$ , не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек  $A$  и  $B$ . Это обстоятельство дало нам возможность ввести понятие о потенциале

электростатического поля. Потенциал электростатического поля в точке  $A$  мы определили как линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$ , взятый от точки  $A$  до некоторой заданной точки  $P$ , т. е.  $U_A = \int_A^P \mathbf{E} dl$ .

Потенциал в точке  $P$  равен нулю. Линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$  вдоль некоторого пути от точки  $A$  до точки  $B$  есть разность электрических потенциалов в точках  $A$  и  $B$ :

$$\int_A^B \mathbf{E} dl = U_A - U_B.$$

Установим связь между напряженностью электрического поля и изменением потенциала в пространстве. Допустим, что положение точки  $A$ , в которой мы рассматриваем потенциал  $U$ , определяется ее расстоянием  $l$  от начальной точки  $O$  вдоль некоторого пути (рис. 7), идущего в точку  $P$ , где потенциал принят равным нулю. Выражение для потенциала при этом можно написать в виде:

$$U = \int_l^{l_P} \mathbf{E} dl = \int_l^{l_P} E \cos \alpha dl,$$

причем  $l_P$  — длина всего пути от точки  $O$  до точки  $P$ ,  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{E}$  и касательной к пути.

Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E \cos \alpha,$$

откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком-либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении.

В частности, в декартовых координатах имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -E_z.$$

Если направление перемещения  $dl$  составляет прямой угол ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) с вектором  $\mathbf{E}$ , то  $\cos \alpha = 0$  и  $\frac{\partial U}{\partial l} = 0$ . Следовательно, перемещаясь в направлении, нормальном к направлению линий напряженности поля, мы будем иметь  $U = \text{const}$ , т. е. будем оставаться на поверхности равного потенциала. Линии напряженности поля нормальны к поверхностям равного потенциала. Урав-

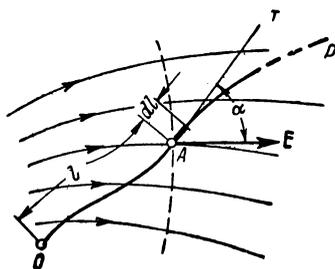


Рис. 7.

нение  $U(x, y, z) = \text{const}$  определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхностей равного потенциала в плоскости чертежа называют *линиями равного потенциала*. Линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Совмещая направление перемещения  $dl$  с направлением вектора  $\mathbf{E}$ , будем иметь:

$$\alpha = 0; \cos \alpha = 1; \frac{\partial U}{\partial l} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Поэтому условимся обозначать перемещение  $dl$  в этом направлении через  $dn$ , в соответствии с чем напомним:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -E.$$

Очевидно  $dn$  есть элемент длины линии напряженности поля, причем координату  $n$  мы считаем растущей в направлении вектора  $\mathbf{E}$ .

Производная от потенциала по координате имеет наибольшее значение в направлении, нормальном к поверхности равного потенциала, в сторону, противоположную направлению вектора  $\mathbf{E}$ . Это наибольшее значение производной может быть изображено вектором, направленным против вектора  $\mathbf{E}$  и носящим название *градиента электрического потенциала*. Его обозначают символом  $\text{grad } U$ .

*Градиент потенциала равен приращению потенциала, отношению к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение:*

$$|\text{grad } U| = \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|.$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\text{grad } U$  равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны:

$$\text{grad } U = -\mathbf{E}.$$

Составляющие градиента электрического потенциала по осям в декартовой системе координат суть:  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ .

Следовательно:

$$\text{grad } U = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Градиент потенциала может быть обозначен при помощи символического оператора  $\nabla$  (знак «набла») в виде  $\nabla U$ . При этом

$\nabla U$  формально можно рассматривать, как произведение символического вектора  $\nabla$  на скаляр  $U$ . В декартовых координатах имеем:

$$\nabla U = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) U = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z} = \text{grad } U.$$

Следовательно, равенство  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$  может быть написано в форме:

$$\mathbf{E} = -\nabla U.$$

Знак «минус» в этом равенстве указывает, что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Это является следствием определения потенциала как линейного интеграла напряженности электрического поля, взятого от рассматриваемой точки  $A$  до заданной точки  $P$ , в которой  $U = 0$ . Такое определение целесообразно, так как при этом потенциал положительно заряженного тела оказывается также положительным при условии, что потенциал бесконечно удаленных точек принимается равным нулю.

Все сказанное свидетельствует о том, что всякое *безвихревое поле* есть *потенциальное*, т. е. такое, которое может быть охарактеризовано потенциальной функцией  $U(x, y, z)$ .

Обратно, всякое потенциальное поле является безвихревым, что вытекает из тождества:  $\text{rot grad } U = 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \text{grad } U &= \frac{\partial}{\partial y} \text{grad}_z U - \frac{\partial}{\partial z} \text{grad}_y U = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично:  $\text{rot}_y \text{grad } U = 0$  и  $\text{rot}_z \text{grad } U = 0$ .

Подчеркнем еще раз, что для заданного поля потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора той точки, где принимается  $U = 0$ .

## § 10. Убывание потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от системы заряженных тел

Во многих случаях существенно знать, как изменяется потенциал при удалении на весьма большое расстояние от системы заряженных тел.

Простейшие случаи были рассмотрены в первой части. Так, напряженность поля и потенциал уединенного точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него в однородной и изотропной среде соответственно равны:

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2}; \quad U = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r},$$

причем принимается равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек.

Любая система заряженных тел с отличным от нуля суммарным зарядом, расположенных в конечной области пространства, может рассматриваться на расстояниях, весьма больших по сравнению с размерами этой области, как точечный заряд. Поэтому на таких весьма больших расстояниях будут справедливы с точностью до малых более высокого порядка последние формулы, причем  $q$  — общий заряд системы. Следовательно, для любой

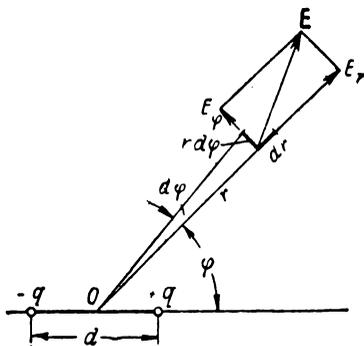


Рис. 8.

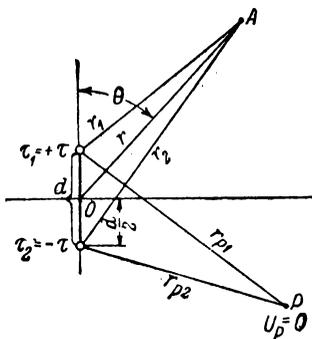


Рис. 9.

системы заряженных тел, расположенных в конечной области пространства и имеющих суммарный заряд, отличный от нуля, потенциал стремится к нулю в бесконечности, как  $1/r$ , и напряженность поля, как  $1/r^2$ .

В том случае, когда сумма зарядов всех тел, образующих систему, равна нулю, потенциал убывает в бесконечности еще быстрее. Такую систему можно подразделить на диполи, так как каждому положительному заряду  $dq_1$  можно подобрать в системе равный ему по величине отрицательный  $dq_2$ . Потенциал диполя на больших расстояниях  $r$  от него, как было получено в первой части, выражается формулой

$$U = \frac{qd \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2},$$

где  $p = qd$  — электрический момент диполя,  $\varphi$  — угол между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и осью диполя, положительное направление которой принимаем от отрицательного заряда к положительному (рис. 8).

Заметим, что потенциал равен нулю не только в бесконечности, но во всех точках плоскости, нормальной к оси диполя и проходящей через середину оси диполя, так как для этой плоскости  $\cos \varphi = 0$ .

Составляющие  $E_r$  и  $E_\varphi$  напряженности поля вдоль радиуса  $r$  и по касательной к окружности радиуса  $r$  в плоскости, проходящей через ось диполя, оказываются равными:

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^3}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon r^3}.$$

Таким образом,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}.$$

Итак, потенциал диполя на больших расстояниях от него убывает, как  $1/r^2$ , а напряженность поля, как  $1/r^3$ . Поэтому для любой совокупности заряженных тел, заключенных в конечной области пространства и имеющих суммарный заряд, равный нулю, потенциал убывает в бесконечности не медленнее, чем  $1/r^2$ , а напряженность поля не медленнее, чем  $1/r^3$ . При этом возможно и более быстрое убывание потенциала, если оси отдельных диполей, на которые можно подразделить систему зарядов, ориентированы в противоположных направлениях, и, следовательно, поля этих диполей ослабляют друг друга.

Во всех указанных задачах был принят равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек. Это не может быть сделано при рассмотрении поля бесконечно длинных проводов, суммарный заряд которых отличен от нуля. Хотя реальные провода всегда имеют конечную длину, однако при исследовании поля очень длинных параллельных прямолинейных проводов часто упрощают задачу, допуская, что провода имеют бесконечную длину. Как мы увидим дальше, этим достигается существенное упрощение задачи. Рассмотрим уединенный бесконечно длинный прямолинейный провод, равномерно по длине заряженный с линейной плотностью заряда  $\tau$ . Напряженность поля такого провода, как было получено в первой части, равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}.$$

Полагая, что точка  $P$ , в которой  $U = 0$ , удалена от оси провода на расстояние  $r_p$ , получим:

$$U = \int_r^{r_p} \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\ln r_p - \ln r).$$

В частности, можно принять  $U = 0$  при  $r_p = 1$ . Тогда будем иметь:

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r.$$

Принять же  $r_p = \infty$  нельзя, так как интеграл при этом теряет смысл — потенциал всюду при любом конечном  $r$  становится бесконечным.

Однако, если существует несколько параллельных проводов и при этом суммарный их заряд равен нулю, т. е.  $\tau = \sum \tau_k = 0$ , что обычно и имеет место в реальных задачах, то потенциал в бесконечности можно принять равным нулю даже и в том случае, если условно рассматривать провода как бесконечно длинные. Рассмотрим сначала два провода с зарядами на единицу длины  $\tau_1 = \tau$  и  $\tau_2 = -\tau$ . На рис. 9 помечены точки пересечения проводов с плоскостью рисунка. Провода нормальны к плоскости рисунка. Расстояние между проводами обозначим через  $d$ . Для потенциала в точке  $A$  имеем выражение:

$$U = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{p1}}{r_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{p2}}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{p1}}{r_{p2}} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния точки  $A$  от проводов;  $r_{p1}$  и  $r_{p2}$  — расстояния точки  $P$  от проводов.

При удалении точки  $P$  в бесконечность  $r_{p1} \rightarrow r_{p2}$  и первое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, если принять равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек, то на всех конечных расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  потенциал получается конечным:

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Заметим, что при этом потенциал равен нулю также на плоскости, проходящей посередине между проводами, так как для всех точек этой плоскости  $r_1 = r_2$ .

Определим, как убывает потенциал на больших расстояниях от проводов. При  $r \gg d$  имеем:  $\frac{r_1}{r_2} \approx 1 - \frac{d \cos \theta}{r_2} \approx 1 - \frac{d \cos \theta}{r}$ , где  $r$  — расстояние точки  $A$  от середины отрезка, соединяющего оси проводов, а  $\theta$  — угол между радиусом  $r$  и этим отрезком. Следовательно, при  $r \gg d$

$$U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right).$$

Разлагая логарифм в ряд по степеням  $\frac{d \cos \theta}{r}$  и пренебрегая членами высших порядков малости, находим:

$$U = \frac{\tau d \cos \theta}{2\pi\epsilon r}.$$

Составляющие напряженности поля при  $r \gg d$  имеют выражения:

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\tau d \cos \theta}{2\pi\epsilon r^2}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\tau d \sin \theta}{2\pi\epsilon r^2}$$

и, следовательно,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{\tau d}{2\pi\epsilon r^2}.$$

Таким образом, для пары бесконечно длинных проводов, имеющих равные и противоположные по знаку заряды, потенциал в бесконечности стремится к нулю, как  $1/r$ , и напряженность поля, как  $1/r^2$ . Любую систему бесконечно длинных параллельных проводов, расположенных на конечных расстояниях друг от друга и имеющих суммарный заряд  $\sum \tau_k$ , равный нулю, можно разделить на пары проводов с равными и противоположными по знаку зарядами. Следовательно, потенциал такой системы убывает в бесконечности не медленнее, чем  $1/r$ , а напряженность поля не медленнее, чем  $1/r^2$ .

### § 11. Определение потенциала по заданному распределению зарядов

Выражение потенциала точечного заряда дает возможность указать в случае однородной среды общий метод вычисления потенциала при заданном распределении в конечной области пространства электрических зарядов.

Подразделив все распределенные в пространстве заряды (рис. 10) на элементарные части  $dq$ , будем рассматривать эти элементы  $dq$  как точечные заряды. Потенциал в точке  $A$ , определяемый каждым таким элементом, равен  $dU = \frac{1}{\epsilon} \frac{dq}{4\pi r}$ . Следовательно, потенциал, определяемый всей совокупностью распределенных в пространстве зарядов, может быть найден из формулы:

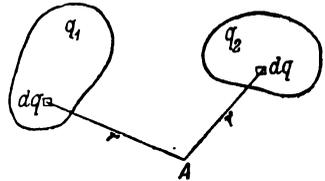


Рис. 10.

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r}.$$

Если электрический заряд распределен по объему  $V$ , причем объемная плотность заряда в некоторой точке пространства есть  $\rho$ , то следует разбить весь объем на элементы  $dV$ . Тогда

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Если заряд распределен лишь в весьма тонких слоях у поверхности заряженных тел, как это имеет место в случае тел из проводящего материала, то можно считать, что заряд распределен на поверхности тел. Разбивая заряженные поверхности на

элементы  $ds$ , можем написать:  $dq = \sigma ds$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Тогда потенциал принимает выражение:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\sigma ds}{r},$$

причем интеграл должен быть распространен по всем заряженным поверхностям. То обстоятельство, что в объемах, занятых самими заряженными телами, находится проводящая среда и, следовательно, среда во всем пространстве неоднородна, в данном случае несущественно, так как внутри проводящих тел поле отсутствует. Мы могли бы мысленно убрать проводящее вещество тел, заменив его диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  и сохранив все поверхностные заряды тел. При этом поле осталось бы без изменения.

В случае, когда заряд распределен на проводах, диаметр сечения которых мал по сравнению с расстояниями от проводов до точек поля, в которых определяется потенциал, можно считать заряд сосредоточенным на осях проводов. Если  $\tau$  — линейная плотность заряда, то  $dq = \tau dl$  и

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau dl}{r},$$

причем интеграл распространяется вдоль всех заряженных проводов.

Наконец в случае конечного числа  $n$  зарядов, которые могут рассматриваться как точечные, имеем:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{q_k}{r_k}.$$

Отметим еще раз, что формулами, приведенными в настоящем параграфе, можно пользоваться для вычисления потенциала только в том случае, если заряды распределены в конечной области пространства. В частности, предпоследней формулой можно пользоваться, если длина проводов конечна. Действительно, эта формула основана на выражении для потенциала точечного заряда, которое получено в предположении, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю. Однако, как выше было показано, в случае бесконечно длинных проводов потенциал в бесконечности не может быть принят равным нулю, так как при этом на всех конечных расстояниях потенциал получился бы бесконечно большим. Соответственно, и интеграл  $\int_l \frac{\tau dl}{r}$  в применении к беско-

нечно длинным проводам всюду обращается в бесконечность.

Заметим, что в случае объемного и поверхностного распределения зарядов потенциал остается конечным и в тех точках, где

$\rho$  или  $\sigma$  не равны нулю. В случае же линейного распределения зарядов потенциал самих заряженных нитей, если предположить их бесконечно тонкими, получается бесконечно большим. Поэтому точки нитей должны быть исключены из рассмотрения. Точно так же в случае системы точечных зарядов потенциал обращается в бесконечность в точках, где сосредоточены заряды. Эти точки также должны быть исключены из рассмотрения.

Физический смысл имеет только объемное распределение зарядов. Тем не менее условное представление о поверхностном, линейном или точечном распределении зарядов весьма полезно при решении многих конкретных практических задач.

## § 12. Уравнения Пуассона и Лапласа

Подставляя в уравнение

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

выражающее теорему Гаусса в дифференциальной форме, вместо величин  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  их выражения через потенциал:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Это дифференциальное уравнение носит название *уравнения Пуассона*. Интеграл

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r},$$

приведенный в предыдущем параграфе, является решением уравнения Пуассона в случае, когда заряды распределены в конечной области пространства.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды, то уравнение Пуассона получает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

и называется в этом частном случае *уравнением Лапласа*. Электростатическое поле удовлетворяет уравнению Лапласа.

Левые части уравнений Пуассона и Лапласа представляют собой расхождение градиента потенциала и могут быть записаны в форме, не зависящей от выбора системы координат:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\frac{\rho}{\epsilon}; \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0.$$

Нередко можно встретить запись левой части этих уравнений с помощью символического оператора в виде  $\nabla^2 U$ . Действительно,

$$\nabla^2 = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и, следовательно,

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Оператор  $\nabla^2$  часто обозначают  $\Delta$  и называют оператором Лапласа или лапласианом. Следовательно, уравнения Пуассона и Лапласа могут быть написаны также в виде:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{или} \quad \Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon}; \quad \nabla^2 U = 0 \quad \text{или} \quad \Delta U = 0.$$

### § 13. Граничные условия на поверхности проводников

Так как в случае электростатического поля электрические токи отсутствуют, то из соотношения  $\delta = \gamma \mathbf{E}$  следует, что внутри проводников ( $\gamma \neq 0$ ) всюду должно быть  $\mathbf{E} = 0$ . Из выражения  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$  при этом следует, что для каждого проводника потенциал всех его точек имеет одно и то же значение. Поверхности проводников суть поверхности равного электрического потенциала, и линии напряженности поля в диэлектрике нормальны к ним. Обозначим через  $E_n$  и  $E_t$  нормальную и касательную к поверхности проводника составляющие вектора  $\mathbf{E}$  в диэлектрике около поверхности проводника. Граничное условие для поля в диэлектрике на поверхности проводника может быть записано в виде:  $U = \text{const}$  или, что то же,  $E_t = 0$ ,  $E = E_n = -\frac{\partial U}{\partial n}$ .

При этом  $D = \epsilon E = -\epsilon \frac{\partial U}{\partial n} = \sigma$ , где  $\sigma$  — плотность электрического заряда на поверхности проводника.

### § 14. Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков

Рассмотрим поле на границе двух однородных и изотропных диэлектриков с различными абсолютными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 11). Пусть линии напряженности поля в первой среде у поверхности раздела образуют с нормалью к ней угол  $\theta_1$ . Определим соответствующий угол  $\theta_2$  во второй среде. Составляя линейный интеграл напряженности поля по контуру  $abcda$ , получим:

$$\oint_{abcda} \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_1 \sin \theta_1 ab - E_2 \sin \theta_2 cd = 0,$$

если  $bc$  и  $ad$  бесконечно малы по сравнению с  $ab$  и  $cd$ .

Ввиду того, что  $ab = cd$ , имеем:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2,$$

т. е. на поверхности раздела равны касательные составляющие вектора  $\mathbf{E}$ .

Вообразим замкнутую поверхность, образованную двумя плоскими поверхностями  $s_1$  и  $s_2$ , следы которых в плоскости рисунка суть линии  $ab$  и  $cd$ , и цилиндрической поверхностью,

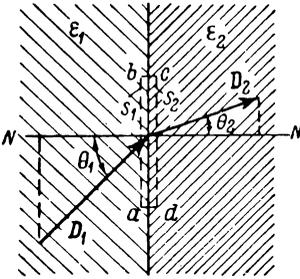


Рис. 11.

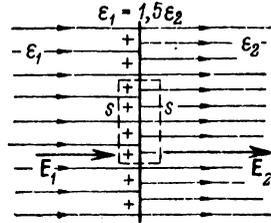


Рис. 12.

пересекающейся с плоскостью рисунка по линиям  $bc$  и  $ad$ . Поток смещения сквозь эту замкнутую поверхность равен нулю, так как внутри поверхности нет свободных электрических зарядов. Пренебрегая потоком сквозь бесконечно малую цилиндрическую поверхность, получаем:

$$\int_{s_1} \mathbf{D} ds + \int_{s_2} \mathbf{D} ds = -D_1 \cos \theta_1 s_1 + D_2 \cos \theta_2 s_2 = 0.$$

откуда, приняв во внимание, что  $s_1 = s_2$ , находим:

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2,$$

т. е. на поверхности раздела равны нормальные составляющие вектора  $\mathbf{D}$ .

Деля равенства  $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$  и  $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$  одно на другое и учитывая соотношения  $D_1 = \epsilon_1 E_1$  и  $D_2 = \epsilon_2 E_2$ , получаем условие преломления линий при переходе их из одной среды в другую:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Если линии напряженности поля нормальны к поверхности раздела (рис. 12), то векторы смещения будут одинаковы в обеих

средах:  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$ , но напряженность поля на поверхности раздела скачком изменяет свою величину, так как

$$E_1 = D_1/\epsilon_1 \neq E_2 = D_2/\epsilon_2.$$

Пусть  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , и соответственно диэлектрическая восприимчивость  $\alpha_1$  первой среды больше диэлектрической восприимчивости  $\alpha_2$  второй. Тогда  $E_1 < E_2$ . На рис. 12 изображено для этого случая поле вектора  $\mathbf{E}$ .

У поверхности раздела двух диэлектриков выступают из первой среды положительные заряды диполей и из второй среды отрицательные заряды диполей; так как  $\alpha_1 > \alpha_2$ , то положительные заряды преобладают над отрицательными, и в тонком слое у поверхности раздела образуется связанный положительный заряд. Ввиду чрезвычайной малости толщины этого слоя его заряд можно рассматривать как поверхностный с плотностью  $\sigma'$ . Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, след которой изображен на рис. 12 пунктиром, мы получим:  $D_1 = D_2$ , так как свободных зарядов на поверхности раздела двух диэлектриков нет. Следовательно, имеем:

$$\epsilon_0 E_1 + P_1 = \epsilon_0 E_2 + P_2 \text{ или } \epsilon_0 (E_2 - E_1) = P_1 - P_2.$$

С другой стороны, применяя теорему Гаусса в форме  $\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q + q'}{\epsilon_0}$  и учитывая, что  $q = 0$ , будем иметь:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q'}{\epsilon_0} \text{ или } -E_1 s + E_2 s = \frac{q'}{\epsilon_0},$$

откуда

$$\epsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{q'}{s} = \sigma'.$$

Таким образом,

$$\sigma' = P_1 - P_2.$$

Итак, вследствие неодинаковой способности диэлектриков поляризоваться, на их поверхности возникает связанный поверхностный заряд с плотностью, равной разности поляризованностей диэлектрика, из которого линии напряженности поля выходят, и диэлектрика, в который они входят. В общем случае, когда линии напряженности поля подходят к поверхности раздела под некоторым углом,  $\sigma'$  равно, как нетрудно убедиться, разности нормальных составляющих векторов  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$ .

В виде примера рассмотрим концентрический кабель с несколькими слоями диэлектрика с разными диэлектрическими проницаемостями (рис. 13). Вообразим цилиндрическую поверхность радиуса  $r$  и длины  $l$ , ось которой совмещена с осью кабеля. Поток смещения сквозь эту поверхность равен заряду  $q = \tau l$ ,

расположенному на отрезке  $l$  внутреннего провода кабеля, т. е.  $\int_s \mathbf{D} ds = q = \tau l$ , причем  $\tau$  — линейная плотность заряда.

Так как на всей поверхности ввиду симметрии  $D = \text{const}$  и вектор  $\mathbf{D}$  нормален к поверхности, то  $\int_s \mathbf{D} ds = Ds = 2\pi r l D$ .  
Итак,

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

Напряженность в  $k$ -том слое изоляции равна:

$$E_k = \frac{D}{\epsilon_k} = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_k}.$$

В пределах каждого слоя напряженность поля убывает с увеличением  $r$ , при переходе же к следующему слою она изменяется скачком в связи с изменением  $\epsilon$ . Этот скачок мы и можем объяснить появлением связанных зарядов на поверхности раздела двух слоев диэлектрика.

В каждом слое напряженность поля имеет максимальное значение у внутренней поверх-

ности слоя, равное  $E_{km} = \frac{\tau}{2\pi r_k \epsilon_k}$ , причем  $r_k$  — внутренний радиус слоя. Представляется возможным при проектировании кабеля подобрать величины  $r_k \epsilon_k$  для всех слоев так, чтобы величины  $E_{km}$  отвечали допустимым значениям напряженности, соответствующим электрической прочности слоев. В частности, если допустимая максимальная напряженность поля  $E_{km}$  во всех слоях одинакова, то следует стремиться к соблюдению условий:

$$r_1 \epsilon_1 = r_2 \epsilon_2 = \dots = r_k \epsilon_k = \dots = \text{const}.$$

Применением многослойной изоляции достигается значительное выравнивание напряженности поля вдоль радиуса, что иллюстрируется эпюрой на рис. 13.

### § 15. Основная задача электростатики

Общей задачей расчета электрического поля является определение напряженности поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел. В случае электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции

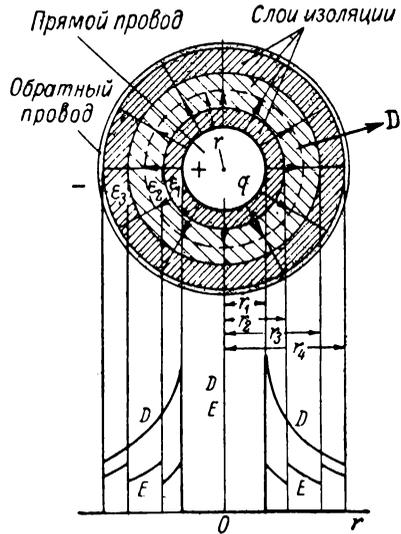


Рис. 13.

координат. Если полностью задано распределение электрических зарядов в однородной и изотропной среде, то решение может быть получено методом, изложенным в § 11. Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению потенциала решается с помощью уравнения Лапласа и граничного условия  $-\epsilon \frac{\partial U}{\partial n} = \sigma$  у поверхности заряженных проводящих тел. Однако большей частью задача оказывается значительно сложнее. Обычно рассматривается система заряженных проводящих тел, окруженных диэлектриком, в котором отсутствуют объемные заряды. Заданы либо потенциалы всех тел:  $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$ , либо полные заряды тел:  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ . Распределение же зарядов по поверхности каждого тела неизвестно и подлежит определению. В этом и заключается основная трудность задачи. Также неизвестным является и распределение потенциала в пространстве. Особенно усложняется задача в случае неоднородной или неизотропной среды.

Решение такой задачи аналитическим путем в конечном виде возможно только для отдельных частных случаев. В некоторых случаях удается найти решение при помощи искусственных приемов. В связи с этим чрезвычайно важно установить те необходимые и достаточные требования, при удовлетворении которых поле определяется единственным образом. Этими требованиями являются нижеследующие:

1. Поле в диэлектрике должно удовлетворять уравнениям:  
 $\text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$

При этом уравнение  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , как было показано в § 9, эквивалентно равенству  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ .

В случае однородной среды эти уравнения приводятся к одному уравнению для потенциала  $U$ :

$$\text{div } (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \text{div } \mathbf{E} = -\epsilon \text{div grad } U = -\epsilon \nabla^2 U = 0,$$

т. е. к уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

2. Поверхности проводящих тел должны быть поверхностями равного потенциала, т. е. для каждой такой поверхности должно быть соблюдено условие:  $U = \text{const}$ ; этот же потенциал тело имеет, конечно, и во всем своем объеме.

3. Потенциалы на поверхности тел должны быть равны заданным значениям  $U_k$ , если по условиям задачи известны эти потенциалы. Если же заданы полные заряды тел, то для каждого тела должно быть удовлетворено условие:

$$q_k = \int_{s_k} \sigma ds = - \int_{s_k} \epsilon \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Можно показать, что выполнение этих требований не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача была решена единственным образом. Это важное положение часто называют теоремой единственности.

### § 16. Плоскопараллельное поле

Задача расчета весьма упрощается, если все величины, характеризующие поле, зависят только от двух координат. Такому условию удовлетворяет поле системы из нескольких бесконечно длинных параллельных друг другу цилиндрических проводов с зарядами, равномерно распределенными по их длине. Диэлектрик будем предполагать однородным. Направим ось  $OZ$  параллельно осям проводов. Тогда все линии напряженности поля будут лежать в плоскостях, параллельных плоскости  $ХОУ$ . Картина поля во всех этих плоскостях одинакова, и достаточно исследовать поле только в плоскости  $ХОУ$ . Поле такого вида мы будем называть *плоскопараллельным*. На рис. 14

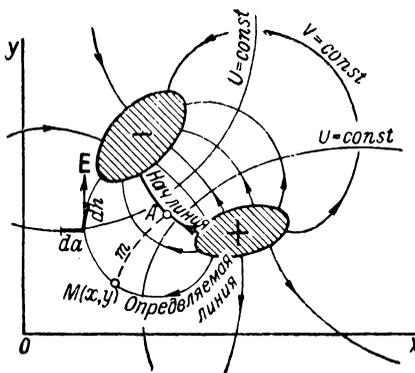


Рис. 14.

изображены поперечные сечения двух проводов и картина поля около них. Потенциал плоскопараллельного поля есть функция только двух координат,  $x$  и  $y$ . Поверхности равного потенциала суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси  $OZ$ . Линии равного потенциала в плоскости  $ХОУ$  определяются уравнениями вида:

$$U(x, y) = \text{const.}$$

Условимся наносить на чертеже линии равного потенциала через такие промежутки, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одинаковое приращение  $\Delta U$  потенциала.

Уравнение линии напряженности поля может быть получено на основе следующих соображений. Пусть некоторая линия напряженности поля рассматривается как начальная (рис. 14). Соединим произвольную точку  $M(x, y)$  с некоторой точкой  $A$  начальной линии криволинейным отрезком  $MmA$ . Обозначим через  $\Psi_E$  поток вектора  $E$  сквозь поверхность, которую описал бы отрезок  $MmA$ , перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси  $OZ$  и проходя путь  $l$ . Условимся рассматривать поток на единицу длины проводов и введем обозначение:  $V = \frac{\Psi_E}{l}$ .

Величина  $V$  так же, как и величина потока  $\Psi_E$ , зависит от положения точки  $M$ , т. е. является функцией ее координат, что мы запишем в виде  $V(x, y)$ . Ясно, что для всех точек  $M(x, y)$ , лежащих на одной и той же линии напряженности поля, функция  $V(x, y)$  имеет одинаковые значения. Поэтому уравнение

$$V(x, y) = \text{const},$$

определяющее совокупность таких точек, и является уравнением этой линии напряженности поля. Функцию  $V(x, y)$  называют *функцией потока*.

Функция  $V(x, y)$  многозначна, так как, если обойти по некоторому замкнутому контуру сечение какого-либо заряженного провода, то  $V$  получит приращение, равное  $\frac{\Delta\Psi_E}{l}$ , где  $\Psi_E$  — поток сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую отрезок этого провода длиной  $l$ . Эта многозначность не имеет существенного значения, так как напряженность поля, как сейчас будет показано, определяется в виде производной функции  $V$  по координате, и значение постоянной слагающей функции не играет существенной роли.

Условимся наносить на чертеже линии напряженности поля так, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одно и то же приращение  $\Delta V$  функции потока.

Отметим, что уравнения  $U(x, y) = \text{const}$  и  $V(x, y) = \text{const}$  определяют два семейства кривых, пересекающихся всюду под прямым углом, т. е. образующих в плоскости  $XOY$  ортогональную сетку. Пусть  $dn$  — элемент длины линии напряженности поля и  $da$  — элемент длины линии равного потенциала. Очевидно, во всех точках поля  $dn \perp da$ . Будем считать координату  $n$  возрастающей в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . Координату  $a$  будем считать возрастающей влево от вектора  $\mathbf{E}$  для наблюдателя, расположившегося так, что для него вектор  $\mathbf{E}$  направлен снизу вверх. Потенциал  $U$  увеличивается в направлении против вектора  $\mathbf{E}$ , т. е. в сторону уменьшения координаты  $n$ . Условимся считать функцию потока  $V$  возрастающей в том же направлении, в котором увеличивается  $a$ . Напряженность электрического поля при этих условиях может быть выражена через  $U$  и  $V$  в форме:

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{\partial V}{\partial a}. \quad (*)$$

Равенство  $E = -\frac{\partial U}{\partial n}$  нам уже знакомо. Оно говорит, что величина вектора  $\mathbf{E}$  численно равна убыли потенциала на единицу длины в направлении линии напряженности поля. Соотношение же  $E = \frac{\partial V}{\partial a}$  следует из того, что напряженность поля численно равна потоку вектора  $\mathbf{E}$ , проходящему через единицу

поверхности, нормальной к линиям напряженности поля. Давая приращение только одной координате  $a$ , получим соответствующее приращение потока  $d_a\Psi_E$ . Поток  $d_a\Psi_E$  проходит через поверхность  $l da$ . Так как эта поверхность нормальна к линиям напряженности поля, то

$$E = \frac{d_a\Psi_E}{l da} = \frac{d_aV}{da} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Уравнение (\*) выражено в системе криволинейных ортогональных координат  $n$  и  $a$ , где  $n$  отсчитывается вдоль линии напряженности поля и  $a$  — вдоль линий равного потенциала. Переходя к декартовым координатам, напишем:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}, \\ E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (**)$$

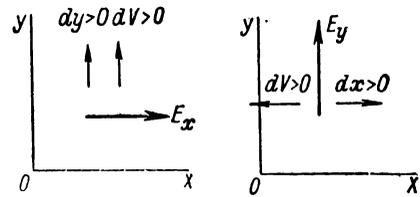


Рис. 15.

Равенства  $E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$  и  $E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$  были уже приведены ранее.

Равенства  $E_x = \frac{\partial V}{\partial y}$  и  $E_y = -\frac{\partial V}{\partial x}$  вытекают из следующих соображений. Дадим приращение только координате  $y$ . Сквозь площадку  $l dy$  проходит поток  $d_y\Psi_E = E_x l dy$ . Отсюда имеем:  $E_x = \frac{d_y\Psi_E}{l dy} = \frac{d_yV}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y}$ . Знак «плюс» (+) следует принять потому, что  $V$  и  $y$  возрастают оба влево от  $E_x$  (рис. 15). Давая приращение только координате  $x$ , найдем соответственно:

$$d_x\Psi_E = -E_y l dx \quad \text{или} \quad E_y = -\frac{d_x\Psi_E}{l dx} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Здесь необходимо поставить знак «минус» (—), так как  $V$  возрастает влево, а  $x$  — вправо от  $E_y$  (рис. 15).

Обе функции  $U$  и  $V$  удовлетворяют уравнению Лапласа. Продифференцировав первое уравнение (\*\*) еще раз по  $x$  и второе еще раз по  $y$ , получим:  $-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  и  $-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ , откуда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по  $y$  и второе по  $x$ , найдем:  $-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  и  $-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ , откуда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, любые функции  $U$  и  $V$ , удовлетворяющие совокупности уравнений (\*\*), удовлетворяют и первому требованию, сформулированному в § 15.

Для заданной системы проводников эти функции должны быть такого вида, чтобы удовлетворилось второе требование — постоянство потенциала  $U$  на поверхности каждого проводника.

Кроме того, для определения постоянных в выражениях функций  $U$  и  $V$  необходимо использовать третье условие — количественное задание потенциалов или зарядов проводников.

Соотношения (\*\*) вполне достаточны для вычисления составляющих напряженности поля, если тем или иным способом найдена либо функция  $U(x, y)$ , либо функция  $V(x, y)$ .

### § 17. Применение функций комплексного переменного

Будем рассматривать плоскость, в которой расположены линии напряженности плоскопараллельного поля, как плоскость комплексного переменного  $z = x + jy$ , в которой по оси абсцисс откладываются вещественные количества ( $x$ ), а по оси ординат мнимые количества ( $jy$ ). Назовем эту плоскость плоскостью  $z$ . Каждой точке такой плоскости соответствует вполне определенное комплексное число  $z$ .

Введем в рассмотрение комплексную величину  $\zeta = \xi + j\eta$ , где  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  — функции  $x$  и  $y$ .

Говорят, что  $\zeta$  есть регулярная аналитическая функция комплексного переменного  $z$  в некоторой области, если она однозначна, непрерывна и имеет определенную непрерывную производную во всех точках этой области. При этом обозначают  $\zeta = f(z)$ .

Давая переменной  $z$  приращение  $\Delta z$ , получим приращение функции  $\Delta \zeta = f(z + \Delta z) - f(z)$ . Если отношение  $\frac{\Delta \zeta}{\Delta z}$  стремится к определенному пределу

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{d\zeta}{dz}$$

независимо от того, по какому закону стремится к нулю  $\Delta z$ , то этот предел и называется производной от функции комплексного переменного.

Выбирая приращение  $\Delta z$  один раз в направлении оси вещественных ( $\Delta z = \Delta x$ ), другой раз в направлении оси мнимых ( $\Delta z = j\Delta y$ ) количеств, мы можем написать условие дифференцируемости функции в виде:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \xi + j\Delta x \eta}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y \xi + j\Delta y \eta}{j\Delta y},$$

где  $\Delta_x \xi$  и  $\Delta_x \eta$  — изменения  $\xi$  и  $\eta$  при изменении только  $x$  на величину  $\Delta x$ ;  $\Delta_y \xi$  и  $\Delta_y \eta$  — то же при изменении только  $y$  на величину  $\Delta y$ . Это равенство может быть переписано в виде:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + j \frac{\partial \eta}{\partial x} = -j \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Последние уравнения называются уравнениями Коши — Римана. Они необходимы и, как нетрудно показать, достаточны для того, чтобы функция  $\zeta = f(z)$  комплексного переменного  $z$  имела определенную производную. Из этих уравнений получаем:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$ , а следовательно, и функция  $\zeta = \xi + j\eta$  удовлетворяют уравнению Лапласа.

Сопоставляя уравнения Коши — Римана, связывающие  $\xi$  и  $\eta$ , с уравнениями (\*\*\*) в предыдущем параграфе, дающими связь между  $V$  и  $U$ , мы замечаем их полное соответствие. Это значит, что мы можем непосредственно принять  $\xi = V$  и  $\eta = U$  и соответственно положить:

$$\zeta = \xi + j\eta = V + jU = f(z).$$

Функция  $\zeta = V + jU$ , вещественная часть которой есть функция потока, а мнимая — потенциал, называется *комплексным потенциалом поля*.

Составляющие вектора напряженности поля могут быть получены из уравнений:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Нередко интересуются только модулем  $E$  вектора  $\mathbf{E}$ , так как вынужденное состояние диэлектрика определяется именно величиной напряженности поля. Для вычисления  $E$  имеем соотношение:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}.$$

Но согласно уравнениям Коши — Римана  $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Следовательно,

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

Из всего сказанного следует, что задача расчета поля решена, если найдена аналитическая функция  $\zeta = f(z)$ , удовлетворяющая граничным условиям на поверхности проводов, т. е. такая, мнимая часть которой принимает постоянное значение на контуре, ограничивающем сечение провода. Указать общий метод нахождения такой функции для любой формы сечений проводов не представляется возможным.

По заданной конфигурации контура сечения проводов функция  $\zeta = f(z)$  может быть найдена только для некоторых форм сечений. Однако можно пойти обратным путем. Именно, исследуя различные аналитические функции, можно найти соответствующие им поля и получить таким путем решения для ряда конкретных случаев. Это очень существенно, так как создается возможность при сложной форме сечения проводов, для которой не может быть получено точное решение, подобрать близкий случай, разобранный теоретически, и выводы, полученные из последнего, приближенно применить к исследуемому реальному случаю.

### § 18. Поле уединенного провода кругового сечения

Рассмотрим аналитическую функцию  $\zeta = Aj \ln z + C$ , где  $A$  — вещественная величина, а  $C = C_1 + jC_2$ .

Обозначив  $z = re^{j\theta}$ , получим:

$$\zeta = \xi + j\eta = Aj \ln r - A\theta + C_1 + jC_2.$$

Полагая  $\xi = V$  и  $\eta = U$ , находим:

$$V = -A\theta + C_1; \quad U = A \ln r + C_2.$$

Уравнение линий напряженности поля:  $V = \text{const}$  или  $\theta = \text{const}$ . Уравнение линий равного потенциала:  $U = \text{const}$  или  $r = \text{const}$ .

Следовательно, функция  $\zeta = Aj \ln z + C$  определяет поле, линии напряженности которого являются лучами, исходящими из начала координат (рис. 16). Линии равного потенциала являются окружностями с центром в начале координат и поверхности равного потенциала — поверхностями круговых цилиндров. Если совместим с одной из этих поверхностей поверхность заряженного провода кругового сечения, то для поверхности провода

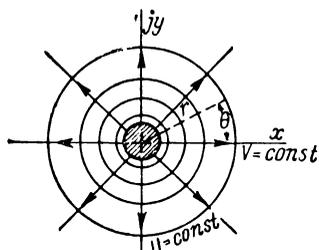


Рис. 16

будет удовлетворено основное требование — постоянство потенциала. Следовательно, можно утверждать, что рассматриваемая функция является комплексным потенциалом поля вне провода.

Постоянная  $A$  определяется на основании того, что при обходе по замкнутому контуру вокруг сечения провода угол  $\theta$  возрастает на  $2\pi$ , а функция  $V$  получает приращение, равное  $\frac{\Psi_E}{l}$ , где  $\Psi_E$  — поток вектора  $E$  сквозь цилиндрическую поверхность, охватывающую отрезок провода длиной  $l$ . Согласно теореме Гаусса этот поток должен быть равен отношению заряда  $q$  отрезка провода к абсолютной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды. Следовательно,  $\frac{q}{\epsilon l} = -A \cdot 2\pi$  и  $A = -\frac{q}{2\pi\epsilon l} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon}$ , причем  $\tau$  — заряд на единицу длины провода.

Итак:

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \theta + C_1; \quad U = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + C_2.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  зависят от выбора начальной линии напряженности поля, для которой принимается  $V = 0$ , и от выбора линии равного потенциала, на которой принимается  $U = 0$ .

Напряженность поля, согласно последнему выражению предыдущего параграфа, равна:

$$E = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \frac{1}{z} \right| = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}.$$

Приращение  $\Delta U$  потенциала при переходе от линии равного потенциала, помеченной номером  $\nu$  к соседней  $(\nu + 1)$ -ой линии, согласно принятому, должно быть постоянным, не зависящим от  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_{\nu+1} - U_{\nu} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\ln r_{\nu+1} - \ln r_{\nu}) = \\ &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = \text{const}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = B = \text{const}.$$

Следовательно, радиусы окружностей равного потенциала изменяются в геометрической прогрессии, знаменатель которой может быть выбран произвольно.

Приращение  $\Delta V$  функции потока при переходе от  $\nu$ -той линии напряженности поля к  $(\nu + 1)$ -ой мы условились также принимать одинаковым для всех промежутков между линиями напряженности поля:

$$\Delta V = V_{\nu+1} - V_{\nu} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\theta_{\nu+1} - \theta_{\nu}) = \text{const},$$

откуда

$$\theta_{\nu+1} - \theta_{\nu} = \Delta\theta = \text{const},$$

т. е. линии напряженности поля должны отстоять друг от друга на равные углы. На рис. 16 вычерчено поле уединенного провода, причем принято  $B = 1,5$  и  $\Delta\theta = \pi/4$ .

Поле вне провода такое же, как если бы весь заряд провода был сосредоточен на его оси. Следовательно, полученное решение справедливо для уединенного линейного провода любой формы сечения. Линейными проводами мы называем такие, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с расстоянием от проводов до точек, в которых рассматривается поле.

Заметим, что если бы ось провода проходила не через начало координат, а через точку  $z_1 = x_1 + jy_1$ , то поле характеризовалось бы функцией

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \ln(z - z_1) + C.$$

### § 19. Поле двух плоскостей, сходящихся под углом

Рассмотрим теперь функцию  $\zeta = A \ln z + C$ . Полагая опять  $\xi = V$  и  $\eta = U$ , будем иметь:

$$\zeta = V + jU = A \ln r + jA\theta + C_1 + jC_2.$$

Уравнение линий напряженности поля:  $V = A \ln r + C_1 = \text{const}$ , т. е.  $r = \text{const}$ . Уравнение линий равного потенциала:  $U = A\theta + C_2 = \text{const}$ , т. е.  $\theta = \text{const}$ .

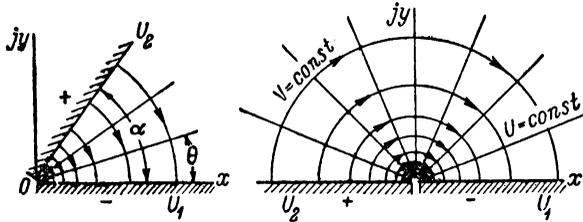


Рис. 17.

Линии напряженности поля представляют собой окружности, линии равного потенциала — радиальные прямые и поверхности равного потенциала — плоскости, проходящие через ось  $OZ$ . Совместим с любыми двумя поверхностями равного потенциала поверхности двух металлических пластин, имеющие электрические заряды, равные по величине, но противоположные по знаку (рис 17). В начале координат пластины отделены друг от друга весьма тонким слоем диэлектрика. Так как основное требование постоянства потенциала на поверхности каждой пластины оказывается удовлетворенным, то, следовательно, поле таких пластин характеризуется рассмотренной функцией. Постоянные  $A$  и  $C_2$  найдем из условий:  $U = C_2 = U_1$  при  $\theta = 0$ ,  $U = A\alpha + C_2 = U_2$  при  $\theta = \alpha$ . Следовательно,  $A\alpha = U_2 - U_1$ , где  $\alpha$  — угол между пластинами. Кроме того,

$\ln r = 0$  и  $C_1 = V_1$  при  $r = 1$ . Таким образом, функция, характеризующая поле, имеет вид:

$$\zeta = \frac{U_2 - U_1}{\alpha} \ln z + V_1 + jU_1,$$

Напряженность поля равна:

$$E = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| \frac{U_2 - U_1}{\alpha z} \right| = \frac{U_2 - U_1}{\alpha r},$$

т. е. так же, как и в случае уединенного провода, она изменяется обратно пропорционально  $r$ .

Обратим внимание на то, что функция  $\zeta = A \ln z + C$  отличается от функции, рассмотренной в предыдущем параграфе, только множителем  $j$ . Это приводит к перемене местами  $U$  и  $V$  и соответственно к перемене местами линий напряженности поля и линий равного потенциала (рис. 16 и 17).

## § 20. Поле двухпроводной линии передачи

Рассмотрим важный для практики случай двухпроводной линии передачи (рис. 18). Провода, расположенные друг от друга на расстоянии  $2b$ , вначале будем считать линейными.

Пользуясь принципом наложения, получаем выражение для комплексного потенциала:

$$\begin{aligned} \zeta &= V + jU = \\ &= -\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} j \ln(z - z_1) - \\ &- \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} j \ln(z - z_2) + C, \end{aligned}$$

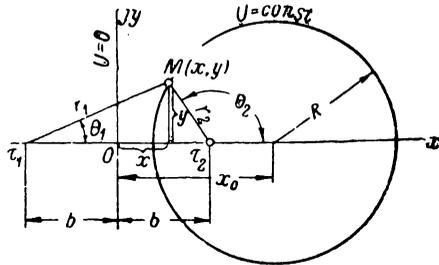


Рис. 18.

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — линейные плотности зарядов проводов,  $z_1$  и  $z_2$  — комплексные координаты точек пересечения проводов с плоскостью  $XOY$ .

Расположив оси координат так, как показано на рис. 18 ( $z_1 = -b$ ,  $z_2 = +b$ ), и учитывая, что в случае двухпроводной линии  $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$ , получаем:

$$\zeta = V + jU = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} j \ln \left( \frac{z + b}{z - b} \right) + C.$$

Обозначая  $z + b = r_1 e^{j\theta_1}$  и  $z - b = r_2 e^{j\theta_2}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точки  $z$  до осей проводов и  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — соответствующие углы с осью  $OX$ , находим:

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\theta_2 - \theta_1) + C_1; \quad U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2.$$

Положив  $C_2 = 0$ , получаем  $U = 0$  при  $r_1 = r_2$ , т. е. линией нулевого потенциала при  $C_2 = 0$  является ось ординат. Уравнение любой линии равного потенциала имеет вид:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{const} \text{ или } \frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}.$$

Покажем, что линии равного потенциала суть окружности с центрами на оси  $OX$ . Имеем:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = k^2$$

или

$$(1-k^2)x^2 - 2(1+k^2)bx + (1-k^2)y^2 = -b^2(1-k^2).$$

Разделим последнее уравнение на  $(1-k^2)$  и добавим с каждой стороны по члену  $\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2$ . Получим:

$$x^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}bx + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2 + y^2 = -b^2 + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2,$$

или

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kb}{1-k^2}\right)^2,$$

что является уравнением окружности с координатами центра

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b \text{ и } y_0 = 0$$

и радиусом

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|} b.$$

Чтобы приращение потенциала при переходе от любой линии равного потенциала к соседней оставалось постоянным, должно быть соблюдено условие:

$$\begin{aligned} \Delta U = U_{\nu+1} - U_{\nu} &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left( \ln \frac{r_{2,\nu+1}}{r_{1,\nu+1}} - \ln \frac{r_{2,\nu}}{r_{1,\nu}} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{k_{\nu+1}}{k_{\nu}} = \text{const}, \end{aligned}$$

т. е. числа  $k$  при возрастании порядкового номера  $\nu$  линий должны изменяться в геометрической прогрессии:

$$\frac{k_{\nu+1}}{k_{\nu}} = B = \text{const},$$



жить оси линейных проводов, чтобы две поверхности равного потенциала совпали с поверхностями реальных проводов (рис. 20).

Поле внутри металлических проводов будет отсутствовать. Поле же в диэлектрике при такой замене реальных проводов эквивалентными им линейными останется без изменения, так как при этом удовлетворяется основное граничное условие —

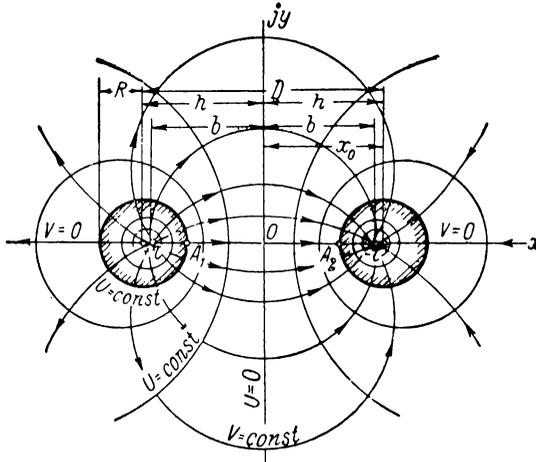


Рис. 20.

постоянство потенциала на поверхности провода. Таким образом, задача расчета поля двух проводов кругового сечения сводится к отысканию положения эквивалентных им линейных проводов или, как говорят, к нахождению *электрических осей* проводов.

Обозначим через  $D$  расстояние между геометрическими осями проводов и через  $h = \frac{D}{2}$  расстояние от геометрической оси до плоскости нулевого потенциала. Пусть  $x_0$  и  $R$  — координата центра и радиус окружности равного потенциала, совпадающей с окружностью сечения провода. Имеем  $h = |x_0|$  и согласно выражениям для  $x_0$  и  $R$  получаем:

$$h = \frac{1 + k^2}{|1 - k^2|} b; \quad R = \frac{2k}{|1 - k^2|} b.$$

Отсюда нетрудно убедиться, что  $h^2 - R^2 = b^2$ , и, следовательно,

$$b = \sqrt{h^2 - R^2}.$$

Эта формула и дает возможность определить положение электрических осей по заданному расстоянию  $D = 2h$  между геометрическими осями и радиусу  $R$  сечений проводов.

На рис. 20 заштрихованы сечения проводов около контуров сечений. Так как поле подразделено на трубки равного потока ( $\Delta V = \text{const}$ ), то густота линии напряженности поля всюду пропорциональна величине напряженности поля. Картина поля, изображенная на рисунке, отчетливо показывает, что напряженность поля имеет максимум в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Около этих точек диэлектрик находится в наиболее напряженном состоянии, и при повышении напряжения между проводами нарушение электрической прочности диэлектрика начинается именно в этих точках.

### § 21. Поле параллельных несоосных цилиндров

Решенная в предыдущем параграфе задача для двух линейных проводов дает возможность найти поле между двумя параллельными несоосными цилиндрами, имеющими круговые сечения различных радиусов  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 21). Действительно, всегда можно так расположить оси эквивалентных проводов, чтобы в их поле две поверхности равного потенциала совпали с поверхностями заданных проводящих цилиндров. Пусть  $D$  — расстояние между геометрическими осями цилиндров,  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния от геометрических осей до плоскости постоянного (нулевого) потенциала,  $b$  — расстояние от электрических осей до этой плоскости. Согласно формуле  $b = \sqrt{h^2 - R^2}$ , справедливой для каждого провода, имеем:

$$b^2 = h_1^2 - R_1^2 = h_2^2 - R_2^2,$$

или

$$(h_2 - h_1)(h_2 + h_1) = R_2^2 - R_1^2.$$

При расположении цилиндров согласно рис. 21 имеем  $h_2 + h_1 = D$  и, следовательно,  $h_2 - h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}$ .

В этом случае имеем:

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

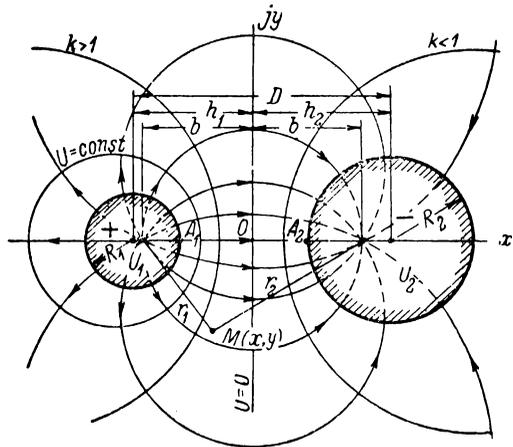


Рис. 21.

При расположении цилиндров один внутри другого полого (рис. 22)  $h_2 - h_1 = D$  и, следовательно,  $h_2 + h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}$ .

В этом случае имеем:

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}.$$

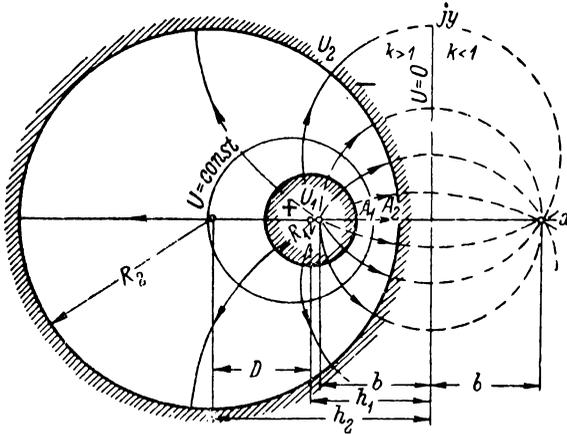


Рис. 22.

Выражения для  $h_1$  и  $h_2$  можно написать в общем виде, справедливым для обоих расположений цилиндров при любом соотношении радиусов  $R_1$  и  $R_2$ :

$$h_1 = \left| \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \right|; \quad h_2 = \left| \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \right|.$$

Из этих формул определяется положение плоскости нулевого потенциала, и из формул  $b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$  находятся положения электрических осей, т. е. эквивалентных линейных проводов, что дает возможность построить поле по методу, изложенному в предыдущем параграфе.

## § 22. Поле у края плоского конденсатора

Рассмотрим функцию  $z = A(e^{a\zeta} + a\zeta)$ , где  $a$  и  $A$  — вещественные и постоянные величины. Положив  $\zeta = V + jU$ , будем иметь:

$$x + jy = A(e^{aV} \cos aU + je^{aV} \sin aU + aV + jaU)$$

или

$$x = A(e^{aV} \cos aU + aV); \quad y = A(e^{aV} \sin aU + aU).$$

В частном случае, когда  $aU = \pm\pi$ , выражения для  $x$  и  $y$  приобретают вид:

$$x = A(aV - e^{aV}), \quad y = \pm A\pi.$$

Эти уравнения определяют две полупрямые, параллельные оси  $Ox$ . Действительно, координата  $x$  при изменении функции потока  $V$  имеет один максимум, определяемый из условия:

$$\frac{dx}{dV} = Aa(1 - e^{aV}) = 0, \quad \text{т. е. } V = 0.$$

Это максимальное значение равно  $x_{\text{макс}} = -A$ . Крайним значениям функции потока,  $V = -\infty$  и  $V = +\infty$ , соответствует значение  $x = -\infty$ . Следовательно, при изменении функции потока от  $-\infty$  до  $+\infty$  координата  $x$  принимает все значения между  $-\infty$  и  $-A$ . Координата же  $y$  остается постоянной. Она

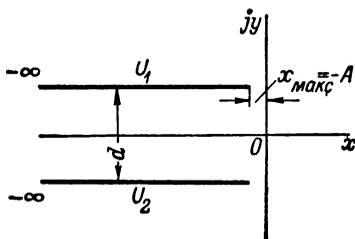


Рис. 23.

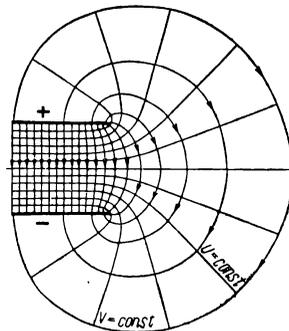


Рис. 24.

имеет значения: для одной полупрямой  $y_1 = +A\pi$  и для другой  $y_2 = -A\pi$ . На рис. 23 изображены эти полупрямые. Обозначив расстояние между ними через  $d$ , будем иметь:  $y_1 - y_2 = 2A\pi = d$  и, следовательно,  $A = \frac{d}{2\pi}$ .

Обнаруживается замечательное свойство исследуемой нами функции, а именно: две линии равного потенциала определяемого ею поля являются параллельными полупрямыми. Потенциал одной из них равен  $U_1 = \frac{\pi}{a}$  потенциал другой имеет значение  $U_2 = -\frac{\pi}{a}$ . Таким образом, постоянная  $a$  определяется через разность потенциалов:  $U_1 - U_2 = \frac{2\pi}{a}$ , откуда

$$a = \frac{2\pi}{U_1 - U_2}$$

Если мы заметим, что эти полупрямые являются следами в плоскости  $z$  двух ограниченных с одной стороны бесконечных параллельных пластин, то нам станет ясно, что рассмотренная функция определяет поле между пластинами плоского конденсатора ограниченными с одной стороны. Подставляя в выражение для  $z$  найденные значения постоянных  $A$  и  $a$ , получаем:

$$z = \frac{d}{2\pi} \left( e^{\frac{2\pi}{U_1 - U_2} \zeta} + \frac{2\pi}{U_1 - U_2} \zeta \right),$$

причем  $\zeta = V + jU$ . Полагая  $V = \text{const} = V_0$  и задаваясь рядом значений  $U$  в интервале  $U_2 < U < U_1$ , получим ряд точек, лежащих на одной линии напряженности поля, по которым и можем построить эту линию. Для построения других линий постоянную величину  $V_0$  будем изменять при переходе от одной линии к соседней каждый раз на одинаковую величину  $\Delta V$ .

Полагая  $U = \text{const} = U_0$ , причем  $U_2 < U_0 < U_1$ , и задаваясь рядом значений  $V$ , найдем точки, принадлежащие одной и той же линии равного потенциала. Линии равного потенциала строим так, чтобы для любых двух соседних линий имело место условие  $\Delta U = \text{const}$ . На рис. 24 построено поле у края плоского конденсатора.

Весьма существенно выяснить, на каком расстоянии от края конденсатора можно считать поле практически однородным. С этой целью найдем положение той точки на оси  $OX$ , в которой напряженность поля отличается на 1%

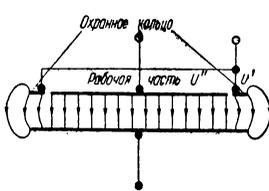


Рис. 25.

от напряженности  $E_0 = \frac{U_1 - U_2}{d}$  однородного поля. Напряженность в любой точке поля имеет значение:  $E = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ . Следовательно,

$$\frac{1}{E} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = Aa |e^{a\zeta} + 1|.$$

На оси  $OX$  потенциал равен нулю, что нетрудно усмотреть из выражения для координаты  $y$ . Действительно, если положить в этом выражении  $U = 0$ , то получим  $y = 0$ . Поэтому для точек на оси  $OX$  имеем:  $\zeta = V$ . Приняв еще во внимание, что

$Aa = \frac{d}{U_1 - U_2} = \frac{1}{E_0}$ , получаем на оси  $OX$  уравнение:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} (e^{aV} + 1).$$

Стало быть,

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{1}{e^{aV} + 1} - 1 = -\frac{e^{aV}}{e^{aV} + 1}.$$

Полагая  $\frac{E - E_0}{E_0} = -0,01$ , получим  $e^{aV} = 0,0101$  и  $aV = -4,61$ . Вводя эти числовые значения в выражение для координаты  $x$ , которое при  $U = 0$  имеет вид:  $x = A (e^{aV} + aV)$ , получаем  $x = -4,6A$ . Расстояние искомой точки от края конденсатора равно:  $|x - x_0| = 3,6A$ , так как расстояние края пластин от оси  $OY'$  есть  $x_0 = -A$ . Используя значение постоянной  $A$ , окончательно находим:

$$|x - x_0| = 3,6 \frac{d}{2\pi} = 0,57d.$$

Таким образом, уже на расстоянии от края конденсатора, имеем порядок толщины диэлектрика между пластинами, поле можно считать однородным с весьма высокой степенью точности.

В эталонных воздушных конденсаторах, рассчитанных на высокое напряжение, в которых расстояние между пластинами значительно, для исключения краевого эффекта выделяют в качестве рабочей части только среднюю часть пластины (рис. 25). Край пластины образует при этом так называемое охранное кольцо, изолированное от рабочей части пластины, но имеющее потенциал, по возможности близкий к потенциалу рабочей части. Произведенный расчет дает возможность определить требуемую ширину охранного кольца.

### § 23. Графический метод построения картины плоскопараллельного поля

Во многих практических случаях форма сечений заряженных проводников и их взаимное расположение настолько сложны, что точный аналитический расчет поля оказывается невозможным. В связи с этим получает большое практическое значение графический метод построения картины поля, который разработан для случаев плоскопараллельных полей и полей, окружающих заряженные тела вращения.

Наиболее просто построение осуществляется в случае плоскопараллельного поля. Должны быть соблюдены следующие условия:

1) линии напряженности поля и линии равного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом;

2) линии напряженности поля должны быть перпендикулярны к контурам, ограничивающим сечения проводников;

3) ячейки сетки, образованной линиями напряженности поля и линиями равного потенциала, при достаточной густоте сетки должны быть приблизительно подобны друг другу.

Третье условие соответствует требованию, чтобы приращение потенциала  $\Delta U$  при переходе от любой линии равного потенциала к соседней было постоянным и чтобы поле было подразделено на трубки равного потока, т. е. чтобы было  $\Delta V = \text{const}$ . При наличии такого требования третье условие вытекает из уравнений:

$$E = - \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Если обозначить средние размеры ячейки сетки:  $\Delta n$  — по направлению линии напряженности поля и  $\Delta a$  — по направлению линии равного потенциала (рис. 26), то эти уравнения приближенно могут быть написаны в форме:

$$E = - \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{\Delta V}{\Delta a}.$$

При условиях  $\Delta U = \text{const}$  и  $\Delta V = \text{const}$  имеем:

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_1 = \text{const},$$

откуда и следует, что при достаточно густой сетке ее ячейки должны представлять собой приблизительно подобные прямо-

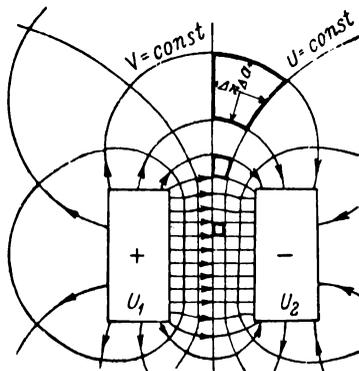


Рис. 26.

угольники, если форма ячейки не слишком искажена кривизной линий. Но даже и при значительном искажении ячеек, когда трудно говорить об их подобии, последнее соотношение весьма помогает правильно построить картину поля. Обычно рисуют картину поля на-глаз, стремясь удовлетворить первому и второму условиям, а затем уже постепенно вносят исправления так, чтобы удовлетворилось и третье условие. Рекомендуются для облегчения построения выбирать  $\Delta n = \Delta a$ . На рис. 26 в виде примера построено поле между двумя прямолинейными проводниками прямоугольного сечения, имеющими одинаковые заряды разных знаков.

### § 24. Графический метод построения картины поля тел вращения

Построение поля, образованного заряженными телами вращения с общей осью вращения, также может быть выполнено графическим путем. Поле строят в одной из меридианных плоскостей. В виде примера на рис. 27 построено поле около круглого стержня, проходящего через вырезанное в пластине круглое отверстие.

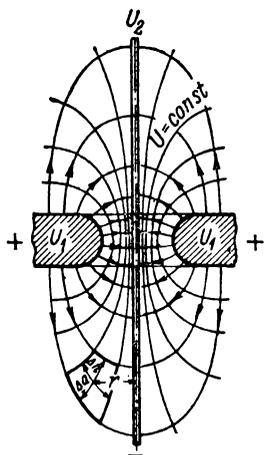


Рис. 27.

Первое и второе условия, сформулированные для случая плоскопараллельного поля в предыдущем параграфе, остаются без изменений, третье же условие, касающееся формы ячеек, несколько усложняется. При вращении картины поля вокруг оси заряженных тел каждая линия напряженности поля опишет поверхность вращения. Можно условиться выбирать эти поверхности так, чтобы поток  $\Delta \Psi_E$ , проходящий между двумя соседними поверхностями, всюду был одинаков. Тогда, если  $\Delta a$  — среднее в пределах ячейки поля расстояние между этими поверхностями, отсчитываемое в меридианной плоскости по направлению линии равного потенциала, и  $E$  — среднее значение напряженности в пределах отрезка  $\Delta a$ , то  $\Delta \Psi_E = 2\pi r \cdot \Delta a \cdot E$ , где  $r$  — расстояние от середины отрезка  $\Delta a$  до оси вращения. Таким образом, имеем:

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta \Psi_E}{\Delta a}.$$

Так как  $\Delta U = \text{const}$  и  $\Delta \Psi_E = \text{const}$ , то получаем:

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k_2 r,$$

где  $k_2 = \text{const}$ .

Такому соотношению приблизительно и удовлетворяет поле, построенное на рис. 27.

### § 25. Графический метод построения картины поля в случае неоднородной изолирующей среды

Все вышеизложенное относилось к случаю однородной среды. Допустим, что изолирующая среда состоит из нескольких однородных диэлектриков с различными значениями  $\epsilon$ , причем поверхности раздела между диэлектриками

в случае плоскопараллельного поля являются цилиндрическими поверхностями и в случае поля тел вращения — поверхностями вращения вокруг общей оси. При этом лучше изображать на рисунке не линии напряженности поля, а линии электрического смещения, так как на поверхности раздела двух диэлектриков трубки смещения не претерпевают разрыва.

Так как  $D = \epsilon E$  и  $\Delta \Psi_D = \epsilon \Delta \Psi_E$ , то будем иметь для случая плоскопараллельного поля:

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{\epsilon_p} \frac{\Delta \Psi_{1D}}{\Delta a},$$

где  $\Psi_{1D} = \frac{\Psi_D}{l}$  — поток смещения, рассчитанный на единицу длины проводов. Следовательно, для плоскопараллельного поля получается условие:

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = \epsilon_p k_1,$$

где  $k_1 = \text{const}$  и  $\epsilon_p$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость в той области, где строится ячейка сетки поля.

Для случая поля тел вращения:

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{1}{2\pi r \epsilon_p} \frac{\Delta \Psi_D}{\Delta a}$$

и

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = r \epsilon_p k_2,$$

где  $k_2 = \text{const}$ .

Кроме этого, необходимо принять во внимание условие преломления линий электрического смещения на поверхности раздела двух диэлектриков (§ 14).

## § 26. Тело из диэлектрика во внешнем электростатическом поле

Практическое значение имеет задача о расчете поля в случае, когда тело из диэлектрика вносится в заданное внешнее поле. Тело поляризуется. Положительно заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул вещества, смещаются в направлении поля, отрицательно заряженные частицы — в противоположном направлении. На поверхности тела появляются связанные заряды разных знаков. Эти связанные заряды создают свое поле как внутри тела, так и вне его. Напряженность  $E$  результирующего поля является геометрической суммой напряженности  $E_0$  внешнего поля и напряженности  $E_1$  поля связанных зарядов. Трудность задачи заключается в том, что поляризация вещества, а следовательно, и связанные заряды определяются результирующей напряженностью  $E$ , которая сама зависит от связанных зарядов.

Если тело из диэлектрика находится в среде, диэлектрическая проницаемость которой меньше диэлектрической проницаемости тела, то внутри тела поле связанных зарядов направлено против внешнего поля. Это нетрудно усмотреть из рис. 28. Такое поле

связанных зарядов внутри тела называют *деполяризующим электрическим полем* и напряженность его обозначают через  $E_{\ominus}$ .

Задача расчета поля заключается в следующем. Необходимо найти распределение связанных зарядов, создающих такое поле, которое, будучи наложено на заданное внешнее поле, дает результирующее поле, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности тела: равенству касательных составляющих вектора  $E$ .

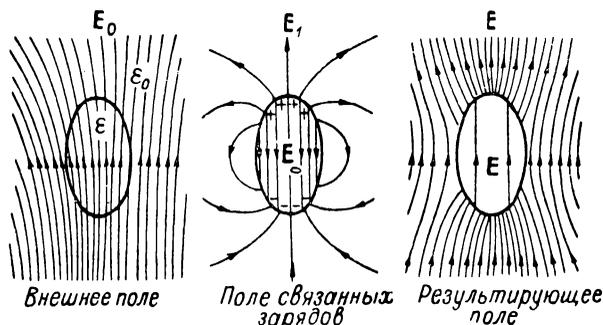


Рис. 28.

и равенству нормальных составляющих вектора  $D$  по обе стороны поверхности. В следующем параграфе рассмотрен простейший пример задачи такого типа.

### § 27. Диэлектрический шар во внешнем однородном поле

Пусть шар из диэлектрика внесен во внешнее однородное поле напряженности  $E_0$ , существующее в пустоте. Предположим, что шар поляризуется однородно, т. е. что однородно результирующее поле, создающее поляризацию, и, следовательно, однородно и деполяризующее поле связанных зарядов.

Обозначим напряженность деполяризующего поля через  $E_{\ominus}$ . Следовательно, напряженность результирующего поля внутри шара будет:

$$E'' = E_0 - E_{\ominus}.$$

Направим ось  $OZ$  в сторону внешнего поля (рис. 29). В силу симметрии относительно оси  $OZ$  достаточно рассмотреть поле в одной меридианной плоскости.

Потенциал  $U''$  внутри шара найдется из условия:

$$E'' = -\frac{\partial U''}{\partial z},$$

откуда

$$U'' = -E''z + \text{const.}$$

Полагая  $U'' = 0$  при  $z = 0$  и замечая, что  $z = r \cos \varphi$ , получим:

$$U'' = -(E_0 - E_0) r \cos \varphi.$$

При этом составляющая  $-E_0 r \cos \varphi$  представляет собою потенциал внешнего поля, а составляющая  $E_0 r \cos \varphi$  — потенциал поля связанных зарядов внутри шара.

Во внешнем пространстве однородно поляризованный шар создает поле такое же, как электрический диполь, помещенный

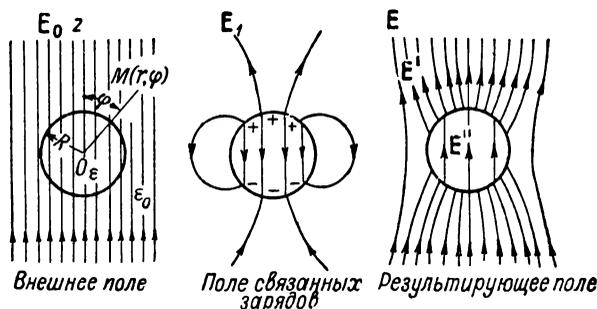


Рис. 29.

в центре шара. Действительно, неполяризованный диэлектрический шар можно представить себе как две наложенные друг на друга разноименно заряженные сферы с зарядами, равномерно распределенными по их объему. Эти заряды образуют совокупностью положительных и, соответственно, отрицательных элементарных частиц, входящих в состав молекул диэлектрика. При однородной поляризации все молекулы поляризуются одинаково. Пусть  $d$  — длина осей элементарных диполей, т. е. среднее расстояние, на которое смещаются друг от друга в молекулах заряды противоположных знаков. Весь поляризованный шар эквивалентен двум равномерно и разноименно заряженным сферам, смещенным друг от друга на расстояние  $d$ . Но каждая сфера создает во внешнем пространстве такое же поле, как если бы весь ее заряд был сосредоточен в ее центре. Следовательно, две смещенные друг относительно друга сферы эквивалентны диполю.

Так как радиус  $R$  шара много больше длины  $d$  диполя, то вне шара потенциал поля, вызванного поляризацией шара, определится приведенной в § 10 формулой  $\frac{p \cos \varphi}{4\pi \epsilon_0 r^2}$ , где  $p$  — электрический момент диполя, эквивалентного поляризованному шару. Налагая этот потенциал на потенциал внешнего однородного поля, будем иметь вне шара:

$$U' = -E_0 r \cos \varphi + \frac{p \cos \varphi}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Обозначим результирующую напряженность поля и электрическое смещение вне шара  $E'$  и  $D'$ . Используем граничные условия на поверхности шара.

При  $r = R$  имеем:

$$E'_t = E''_t \text{ или } \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U'}{\partial \varphi}\right)_{r=R} = \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U''}{\partial \varphi}\right)_{r=R},$$

т. е.

$$-E_0 \sin \varphi + \frac{\rho \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -(E_0 - E_\infty) \sin \varphi.$$

Следовательно,

$$E_\infty = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Кроме того, при  $r = R$

$$D'_n = D''_n \text{ или } \epsilon_0 \left(-\frac{\partial U'}{\partial r}\right)_{r=R} = \epsilon \left(-\frac{\partial U''}{\partial r}\right)_{r=R},$$

т. е.

$$\epsilon_0 E_0 \cos \varphi + \frac{\rho \cos \varphi}{2\pi R^3} = \epsilon (E_0 - E_\infty) \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$\epsilon_0 E_0 + \frac{\rho}{2\pi R^3} = \epsilon E_0 - \epsilon E_\infty.$$

Используя выражение  $E_\infty = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ , получаем:

$$\epsilon_0 E_0 + 2\epsilon_0 E_\infty = \epsilon E_0 - \epsilon E_\infty$$

и

$$E_\infty = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0.$$

Таким образом, момент эквивалентного диполя равен:

$$\rho = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_\infty = 4\pi R^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0.$$

Нам удалось выразить  $\rho$  и  $E_\infty$  через напряженность  $E_0$  заданного внешнего поля. При этом граничные условия на поверхности шара удовлетворяются для всех точек поверхности, т. е. для любого значения  $\varphi$  при  $r = R$ . Следовательно, наше предположение, что шар в однородном поле поляризуется однородно, правильно.

Нетрудно найти распределение связанных зарядов по поверхности шара. Именно, поверхностная плотность  $\sigma$  этих зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризованности:

$$\sigma = P_n = P \cos \varphi,$$

где

$$P = \frac{p}{4\pi R^3} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 = 3\epsilon_0 E_D.$$

Мы нашли распределение связанных зарядов из условия, что шар поляризован однородно. Можно высказать обратное положение, что распределение связанных зарядов на поверхности шара с плотностью, пропорциональной  $\cos \varphi$ , вызывает однородное деполаризующее поле внутри шара.

Можно доказать, что таким же замечательным свойством поляризоваться однородно во внешнем однородном поле обладает эллипсоид. Шар является его частным случаем.

Однако нетрудно сообразить, что тело произвольной формы будет поляризоваться в однородном поле неоднородно. Рассмотрим, например, цилиндр конечной длины, помещенный в однородное поле так, что его образующие совпадают с направлением поля (рис. 30). Если предположить, что цилиндр поляризуется однородно, то связанные заряды появятся только на его торцах. Очевидно, при этом поле связанных зарядов не может быть внутри цилиндра однородным, а следовательно, неоднородным будет и результирующее поле, что противоречит предположению об однородной поляризации.

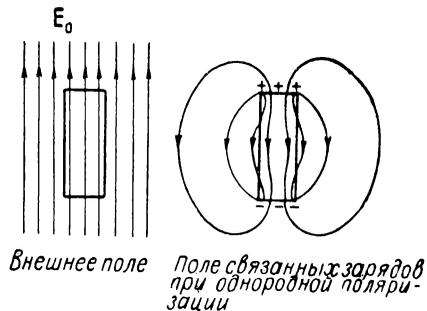


Рис. 30.

## § 28. Проводящее тело во внешнем электростатическом поле. Электростатическое экранирование

Большое практическое значение имеют также задачи, в которых рассматриваются заряженные или незаряженные проводящие тела, внесенные в заданное внешнее электрическое поле. Поле внутри проводящего тела исчезает. В пространстве вне тела внешнее поле изменяется. На поверхности тела наводятся (индуцируются) электрические заряды. Это явление называется *явлением электростатической индукции*. На рис. 31 в виде примера показано результирующее поле около проводящего тела, внесенного в поле заряженных пластин.

Если внесенное тело не было заряжено, то сумма наведенных на нем зарядов оказывается равной нулю. Заряды эти распределяются так, чтобы их поле внутри проводящего тела в точности компенсировало поле всех внешних зарядов. Ничто не изменится,

если проводящее тело будет полым — во всей полости тела поле также будет отсутствовать. Этим обстоятельством широко пользуются для *электростатического экранирования* электрических измерительных приборов и элементов измерительных схем от внешних электрических полей. С этой целью приборы помещают в замкнутые металлические оболочки, называемые *экранами*. Как показывает опыт, достаточно выполнить экраны из мелкой металлической сетки.

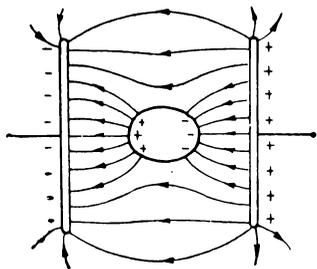


Рис. 31

Если желательнее придать самому экрану потенциал, равный нулю, то экран соединяют с землей. Это бывает полезно, например, в случае, если от прибора, заключенного в экран, выходят проводники к внешней схеме, которая находится при потенциале, близком к потенциалу земли.

Заземленный экран способен в равной мере защитить внешнее пространство от поля зарядов, помещенных внутри экрана.

Подобную экранирующую роль играет защитная свинцовая оболочка кабелей (рис. 32, а). Поле, существующее между отдельными проводами кабеля, не выходит за пределы свинцовой обо-

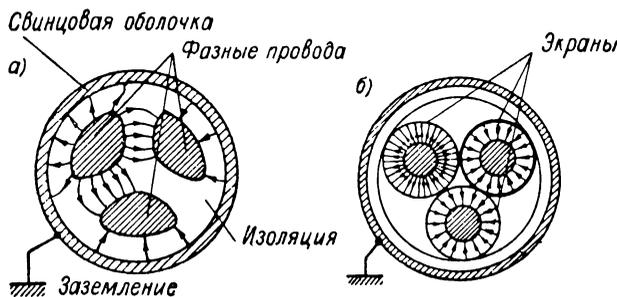


Рис. 32.

лочки, и этим исключается электростатическое влияние кабеля на близлежащие провода линий связи. Иногда в кабеле экранируют каждый провод в отдельности (рис. 32, б), чем достигается более равномерное распределение поля около каждого из проводов кабеля.

Интересуясь результирующим полем, которое образуется вне проводящего тела, внесенного во внешнее поле, например, в случае, показанном на рис. 31, мы должны рассматривать это поле как результат наложения поля наведенных на теле зарядов на заданное внешнее поле. Если, кроме того, внесенное тело имеет

суммарный заряд, отличный от нуля, то необходимо наложить еще и поле этого заряда.

Пример расчета результирующего поля приведен в следующем параграфе.

### § 29. Металлический шар во внешнем однородном поле

Задача, рассмотренная в § 27, позволяет найти поле, окружающее металлический шар, внесенный во внешнее однородное поле. Внутри шара поле должно отсутствовать и потенциал в объеме шара должен иметь постоянное значение. Следовательно, заряды, которые наводятся на поверхности шара, должны создавать внутри шара однородное поле, полностью компенсирующее внешнее поле. Как вытекает из рассмотрения, произведенного в § 27, такое поле образуется зарядами, поверхностная плотность которых пропорциональна  $\cos\varphi$ . Во внешнем пространстве эти заряды создают поле такое же, как эквивалентный диполь, помещенный в центре шара. Таким образом, интересующая нас задача сводится к рассмотренной в § 27 задаче о диэлектрическом шаре, если в ней положить  $E'' = E_0 - E_\infty = 0$ , т. е.  $E_\infty = E_0$ . Согласно формуле  $E_\infty = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$  это равенство достигается в пределе при  $\epsilon = \infty$ . Поэтому поля вектора  $\mathbf{E}$  одинаковы в случаях металлического шара и шара из диэлектрика при  $\epsilon = \infty$ . Вне шара в обоих случаях одинаковы и поля вектора  $\mathbf{D}$ . Однако внутри шара из диэлектрика вектор  $\mathbf{D}$  и при  $\epsilon = \infty$  остается конечным и не равным нулю. Именно, учитывая равенства  $P = 3\epsilon_0 E_\infty$  и  $E_\infty = E_0$ , имеем:

$$D = \epsilon_0 E + P = P = 3\epsilon_0 E_0.$$

Это связано с тем, что трубки электрического смещения непрерывны на границе диэлектрика и, сгущаясь внутри тела с большой диэлектрической проницаемостью, они проходят через тело без разрыва. Связанные заряды на границе двух диэлектриков не дают начала новым трубкам смещения.

В случае же металлического тела внутри тела исчезает не только поле вектора  $\mathbf{E}$ , но и поле вектора  $\mathbf{D}$ . Заряды, наведенные на поверхности тела, являются теперь свободными, образовавшимися вследствие конечной проводимости тела. Трубки электрического смещения, существующие вне тела, заканчиваются на этих зарядах и не проникают внутрь тела. Отсюда видно, что рассмотрение проводника как диэлектрика с  $\epsilon = \infty$  по существу является формальным.

### § 30. Метод зеркальных изображений

Расчет поля заряженных проводников, расположенных вблизи плоских поверхностей, ограничивающих проводящую среду, сводится при помощи метода зеркальных изображений к расчету

поля нескольких проводников при отсутствии проводящей среды. Рассмотрим поле прямолинейного провода, расположенного на расстоянии  $h$  от плоской поверхности проводящей среды (рис. 33). Это соответствует, например, проводу, подвешенному на высоте  $h$  над поверхностью земли. Все линии напряженности поля, начинающиеся на положи-

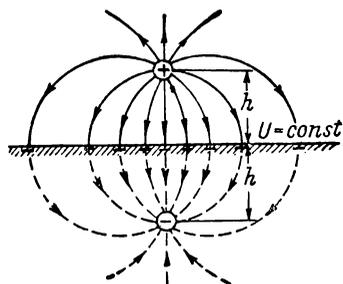


Рис. 33.

тельно заряженном проводе, заканчиваются у поверхности проводящей среды, где появляется индуктированный отрицательный заряд. Поле определяется как зарядом провода, так и всем зарядом, распределенным по поверхности проводящей среды. Распределение индуктированного заряда из условий задачи не известно и также подлежит определению.

На первый взгляд задача расчета поля в такой системе кажется достаточно сложной. Однако она решается весьма просто при помощи *метода зеркальных изображений*. Устраним мысленно проводящую среду и заменим ее проводом, являющимся зеркальным изображением реального провода в поверхности раздела и имеющим заряд той же величины, что и заряд реального провода,

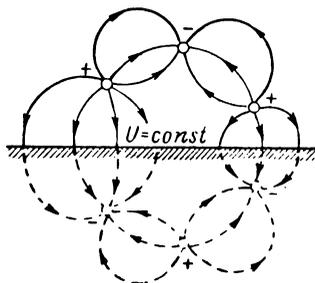


Рис. 34.

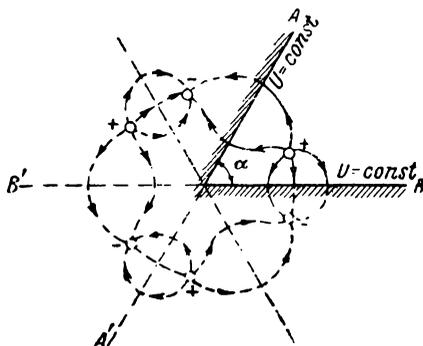


Рис. 35

но противоположного знака (рис. 33). Действительный провод и его зеркальное изображение составляют двухпроводную линию, поле которой изображено на рис. 20. Из рис. 20 видно, что плоскость, расположенная посредине между действительным проводом и его зеркальным изображением, является поверхностью равного потенциала. В действительных условиях поверхность проводящей среды как раз совпадает с этой плоскостью и также является поверхностью равного потенциала. Отсюда следует, что *если заменить проводящую среду зеркальным изображением провода*

*с изменением знака заряда, то в области над проводящей средой поле останется таким же, как и в действительных условиях.* В этом и заключается метод зеркальных изображений.

Этот метод применим и в случае любого числа проводов, протянутых параллельно друг другу и параллельно плоской поверхности, ограничивающей проводящую среду (рис. 34). Каждый провод должен быть зеркально отражен в поверхности проводящей среды с изменением знака заряда, после чего проводящая среда может быть мысленно удалена и рассмотрено поле совокупности действительных проводов и их зеркальных изображений. В таком поле плоскость, расположенная на месте поверхности проводящей среды, является поверхностью равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично относительно этой плоскости. Следовательно, найденное таким путем поле и будет действительным полем в области над поверхностью проводящей среды.

Метод зеркальных изображений также может быть использован, когда проводящая среда ограничена двумя плоскостями, сходящимися под углом  $\alpha = \pi/n$ , где  $n$  — целое число, причем угол  $\alpha$  отсчитывается в диэлектрике, где рассматривается поле. Разделив все пространство на одинаковые части плоскостями, пересекающимися под углом  $\alpha$  (рис. 35), что возможно только, если  $n$  есть целое число, и последовательно отражая провод в этих плоскостях, получим систему из действительного провода и серии его зеркальных изображений. В поле такой системы плоскости  $A-A'$  и  $B-B'$  являются плоскостями равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично по отношению к ним. Поэтому поле этой системы совпадает с действительным полем в той части пространства, где последнее существует.

Метод зеркальных изображений в полной мере применим и для случая заряженных тел любой формы, расположенных в диэлектрике около плоскостей, ограничивающих проводящую среду. Естественно, поле при этом уже не будет плоскопараллельным.

---

---

ГЛАВА ТРЕТЬЯ  
РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

**§ 31. Емкость между круговыми цилиндрами.  
Емкость двухпроводной линии передачи**

Емкость между двумя уединенными проводящими телами равна отношению заряда  $q_1 = q$  одного из тел к разности их потенциалов  $U_1 - U_2$ , причем предполагается, что заряды тел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е.  $q_2 = -q_1 = -q$ . Вычисление емкости между двумя телами сводится к вычислению разности их потенциалов в этих условиях. В качестве важного примера найдем выражение для емкости между двумя параллельными круговыми проводящими цилиндрами. Цилиндры будем предполагать бесконечно длинными, емкость будем определять между их отрезками длиной  $l$ . В § 20 и 21 было исследовано поле таких цилиндров.

Потенциал в некоторой точке, удаленной на расстояния  $r_1$  и  $r_2$  от электрических осей цилиндров (рис. 18 и 21), определяется формулой:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln k + C_2.$$

Нас интересует разность потенциалов самих цилиндров. Для определения потенциалов цилиндров выберем на их поверхностях точки, например, наиболее близкие друг к другу точки  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 20 и 21). Пусть  $k_1$  — значение отношения  $r_2/r_1$  для точки  $A_1$  и, соответственно,  $k_2$  — значение этого отношения для точки  $A_2$ . Имеем:

$$U_1 - U_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{k_1}{k_2}$$

Так как  $q = \tau l$ , то

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{k_1}{k_2}}.$$

Отношение  $r_2/r_1$  для любой точки поля может быть выражено через радиус  $R$  окружности равного потенциала, проходящей через эту точку (рис. 18), и через расстояние  $h = |x_0|$  от центра

этой окружности до плоскости постоянного потенциала (на рис. 18 до плоскости нулевого потенциала). Воспользовавшись формулами  $h = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b$  и  $R = \frac{2k}{|1-k^2|} b$ , приведенными в § 20, получаем:  $\frac{h}{R} = \frac{1+k^2}{2k}$ , откуда  $k^2 - 2\frac{h}{R}k + 1 = 0$  и

$$k = \frac{h}{R} \pm \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}.$$

Знак «плюс» следует брать при  $k > 1$ , что соответствует случаю  $r_2 > r_1$ , т. е. расположению окружности равного потенциала

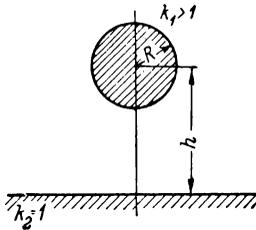


Рис. 36.

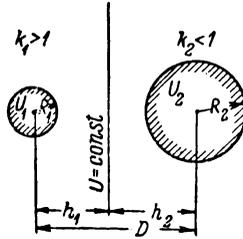


Рис. 37.

слева от плоскости  $U = \text{const}$  (рис. 21). Знак «минус» следует брать при  $k < 1$ , что соответствует расположению окружности равного потенциала справа от плоскости  $U = \text{const}$ .

Рассмотрим частные случаи.

1) Емкость кругового цилиндра относительно плоскости (рис. 36).

Для плоскости постоянного потенциала  $k_2 = r_2/r_1 = 1$ , так как эта плоскость расположена посередине между электрическими осями (рис. 18). Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left[\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}\right]}.$$

Здесь  $h$  — расстояние от оси цилиндра до плоскости и  $R$  — радиус цилиндра. Полученной формулой можно пользоваться для вычисления емкости относительно земли провода, подвешенного на высоте  $h$  параллельно поверхности земли. Так как обычно  $h \gg R$ , то приближенно:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2h}{R}}.$$

2) Емкость между несоосными не охватывающими друг друга круговыми цилиндрами (рис. 37).

Имеем  $k_1 > 1$  и  $k_2 < 1$ , и, следовательно, перед знаком квадратного корня в формуле для  $k_1$  надо взять знак «плюс», а для  $k_2$  — знак «минус». Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) : \left( \frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

Учитывая, что для любого числа  $x$  существует тождество:

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

можем переписать формулу для емкости между цилиндрами в виде:

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) \left( \frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

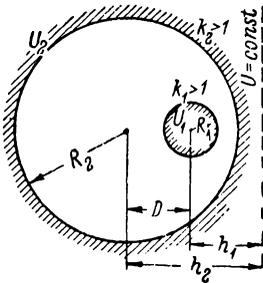


Рис. 38.

Величины  $h_1$  и  $h_2$  определяются через расстояние  $D$  между геометрическими осями цилиндров и через их радиусы  $R_1$  и  $R_2$  по формулам:

$$h_1 = \left| \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \right|; \quad h_2 = \left| \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D} \right|,$$

выведенным в § 21.

Для двух цилиндров одинаковых радиусов имеем  $R_1 = R_2 = R$  и  $h_1 = h_2 = D/2$ . Формула для емкости при этом принимает вид:

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{D}{2R} + \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1} \right)}.$$

3) Емкость между тонкими проводниками. Емкость двухпроводной линии передачи.

Если  $R_1 \ll D$  и  $R_2 \ll D$ , то согласно формулам для  $h_1$  и  $h_2$  имеем:

$$h_1 \approx \frac{D}{2}, \quad h_2 \approx \frac{D}{2}, \quad \frac{h_1}{R_1} \approx \frac{D}{2R_1} \gg 1 \quad \text{и} \quad \frac{h_2}{R_2} \approx \frac{D}{2R_2} \gg 1.$$

Поэтому формула для емкости может быть представлена в приближенной форме:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{D}{R_1} \cdot \frac{D}{R_2} \right)} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}}.$$

Если радиусы проводов одинаковы,  $R_1 = R_2 = R$ , как это обычно имеет место в случае двухпроводной линии передачи, то получаем:

$$C \approx \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{D}{R}}.$$

4) *Емкость между несоосными охватывающими друг друга круговыми цилиндрами* (рис. 38).

В этом случае имеем  $k_1 > 1$  и  $k_2 > 1$  и, следовательно,

$$C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \left[ \left( \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left( \frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) : \left( \frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left( \frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

При этом  $h_1$  и  $h_2$  определяются теми же формулами, что и в п. 2.

5) *Емкость между соосными круговыми цилиндрами.*

Последняя формула переходит в формулу для емкости между соосными цилиндрами (ч. 1) в пределе при  $h_1/R_1 \rightarrow \infty$  и  $h_2/R_2 \rightarrow \infty$ .

Действительно, для соосных цилиндров  $D = 0$ , и согласно выражениям для  $h_1$  и  $h_2$ , имеем  $h_1 = \infty$  и  $h_2 = \infty$ , причем  $h_1/h_2 = 1$ . Учитывая это, получаем из последней формулы:

$$C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

## § 32. Потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости в системе тел

В системе нескольких заряженных тел потенциал каждого тела определяется не только зарядом данного тела, но также и зарядами всех остальных тел. При этом, если  $\epsilon$  не зависит от напряженности поля, то потенциал является линейной функцией зарядов. Это положение было использовано (ч. 1) при выводе выражения для энергии заряженных тел. Рассмотрим это положение и вытекающие из него соотношения более подробно.

Если внести незаряженное проводящее тело  $A_2$  в поле другого тела  $A_1$ , имеющего заряд  $q_1$ , то тело  $A_2$  приобретает некоторый потенциал  $U'_2$ , отличный от нуля. Если вносимое тело  $A_2$  имеет ничтожно малые размеры (рис. 39), то можно пренебречь искажением поля, возникающим от появления на вносимом теле индуцированных зарядов. При этом тело  $A_2$  приобретает потенциал, который был в точке его расположения и до его внесения. При значительных размерах вносимого тела (рис. 40) поле искажается, и потенциал  $U'_2$  будет определяться как зарядом  $q$  тела  $A_1$ , так и зарядами, индуцированными на теле  $A_2$ . Следовательно,  $U'_2$

зависит от формы поверхностей обоих тел и от взаимного их расположения. Если диэлектрическая проницаемость среды не зависит от напряженности поля, то потенциал  $U'_2$  изменяется пропорционально заряду  $q_1$ , так как в этом случае при изменении заряда  $q_1$

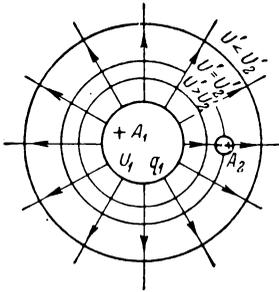


Рис. 39.

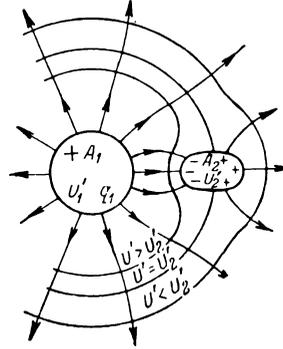


Рис. 40.

распределение зарядов на поверхности тел и, соответственно, картина поля не изменяются. Итак, можно написать:

$$U'_2 = \alpha_{21} q_1.$$

Связь между потенциалом  $U'_1$  тела  $A_1$  и его зарядом  $q_1$  можно выразить в аналогичной форме:

$$U'_1 = \alpha_{11} q_1.$$

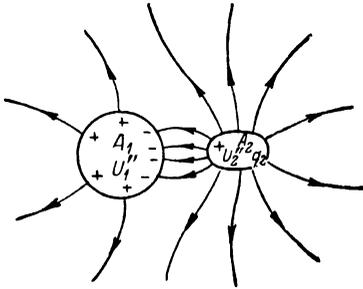


Рис. 41.

Следует подчеркнуть, что коэффициент  $\alpha_{11}$  не равен величине  $\frac{1}{C_1}$ , где  $C_1$  — емкость тела  $A_1$ , определяемая в предположении, что все другие тела от него бесконечно удалены. Такое равенство приближенно имеет место только в том случае, когда вносимое тело  $A_2$  весьма мало (рис. 39).

В общем случае (рис. 40) потенциал  $U_1$  определяется как зарядом  $q_1$ , распределенным на поверхности тела  $A_1$ , так и зарядами, индуктированными на теле  $A_2$ . Таким образом, коэффициент  $\alpha_{11}$  так же, как и коэффициент  $\alpha_{21}$ , зависит от формы обоих тел и от их взаимного расположения.

Предположим теперь, что тело  $A_1$  имеет суммарный заряд, равный нулю, в то время как заряд  $q_2$  тела  $A_2$  отличен от нуля (рис. 41). При этом тела приобретают потенциалы, величины которых пропорциональны заряду  $q_2$ :

$$U'_1 = \alpha_{12} q_2 \text{ и } U'_2 = \alpha_{22} q_2.$$

Если заряды обоих тел отличны от нуля, то потенциалы тел могут быть найдены на основе принципа наложения. Имеем:

$$U_1 = U_1' + U_1'' = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2;$$

$$U_2 = U_2' + U_2'' = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

В общем случае, когда имеется  $n$  заряженных тел —  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , получаем систему уравнений:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots + \alpha_{1k}q_k + \dots + \alpha_{1n}q_n;$$

$$U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \dots + \alpha_{2k}q_k + \dots + \alpha_{2n}q_n;$$

$$U_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kk}q_k + \dots + \alpha_{kn}q_n;$$

$$U_n = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \dots + \alpha_{nk}q_k + \dots + \alpha_{nn}q_n.$$

Коэффициенты  $\alpha$  носят название *потенциальных коэффициентов*. Они зависят от формы и размеров поверхностей тел, от взаимного расположения тел и от диэлектрической проницаемости среды. Коэффициенты  $\alpha_{kk}$  с одинаковыми индексами называют *собственными потенциальными коэффициентами*, а коэффициенты  $\alpha_{nk}$  с различными индексами называют *взаимными потенциальными коэффициентами*. Эти уравнения служат для вычисления потенциалов тел по заданным их зарядам.

Нередко возникает обратная задача: известны потенциалы тел, требуется найти их заряды. Решая приведенные выше уравнения относительно зарядов, получим:

$$q_1 = \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \dots + \beta_{1k}U_k + \dots + \beta_{1n}U_n;$$

$$q_2 = \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \dots + \beta_{2k}U_k + \dots + \beta_{2n}U_n;$$

$$q_k = \beta_{k1}U_1 + \beta_{k2}U_2 + \dots + \beta_{kk}U_k + \dots + \beta_{kn}U_n;$$

$$q_n = \beta_{n1}U_1 + \beta_{n2}U_2 + \dots + \beta_{nk}U_k + \dots + \beta_{nn}U_n.$$

Коэффициенты  $\beta$  называются *коэффициентами электростатической индукции* — *собственными* при одинаковых индексах и *взаимными* при разных индексах. Они имеют размерность емкости.

Собственный коэффициент электростатической индукции  $\beta_{kk}$  может быть найден, если принять, что потенциалы всех тел, кроме тела  $A_k$ , равны нулю. При этом получим:  $q_k = \beta_{kk}U_k$ .

На практике равным нулю принимают потенциал поверхности земли. Следовательно, для того чтобы тело приняло потенциал, равный нулю, его, как принято выражаться, необходимо «заземлить», т. е. соединить проводником с землей. Для определения опытным путем коэффициента  $\beta_{kk}$  следует, заземлив все тела, кроме тела  $A_k$  (рис. 42), сообщить последнему потенциал  $U_k$ ,

хотя бы присоединив это тело к полюсу электрической батареи, другой полюс которой заземлен. Измерив вольтметром напряжение  $U_k$  между телом и землей, отключим вольтметр и батарею и разрядим тело  $A_k$  на землю через баллистический гальванометр  $G_k$ . По отбросу гальванометра мы определим заряд  $q_k$  тела, а следовательно, сможем вычислить и искомый коэффициент  $\beta_{kk}$ . Все соединительные и заземляющие проводники в этом опыте должны быть весьма тонкими, чтобы присутствие их по возможности мало искажало поле. Коэффициенты с одинаковыми индексами все положительны:  $\beta_{kk} > 0$ , так как в описанном опыте потенциал и заряд тела  $A_k$  имеют одинаковые знаки.

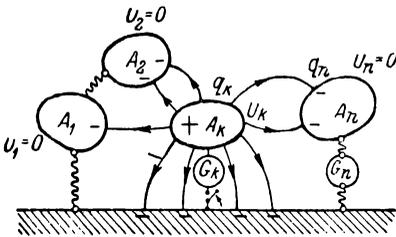


Рис. 42.

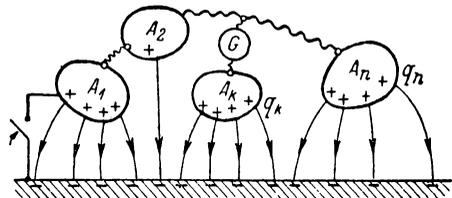


Рис. 43.

Если в том же опыте измерить при помощи другого гальванометра  $G_n$  заряд  $q_n$ , который был связан на поверхности тела  $A_n$  и осасбодился при разряде тела  $A_k$ , то мы получим возможность определить и взаимный коэффициент электростатической индукции  $\beta_{nk}$  из соотношения:  $q_n = \beta_{nk} U_k$ .

Очевидно, коэффициент  $\beta_{nk}$  так же, как и все взаимные коэффициенты электростатической индукции, отрицателен. Это непосредственно явствует из рис. 42: при  $U_k > 0$  линии поля начинаются на теле  $A_k$  и заканчиваются на теле  $A_n$ , и, следовательно,  $q_n < 0$ . Таким образом, вообще  $\beta_{kp} < 0$  при  $k \neq p$ .

Нередко пользуются уравнениями несколько в иной форме. Именно, выражают заряд каждого тела не через потенциалы тел, а через разности потенциалов данного тела и других тел, в том числе и земли. Имеем:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + \dots + \\
 &\quad + C_{1k}(U_1 - U_k) + \dots + C_{1n}(U_1 - U_n), \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 q_k &= C_{k1}(U_k - U_1) + C_{k2}(U_k - U_2) + \dots + \\
 &\quad + C_{kk}(U_k - 0) + \dots + C_{kn}(U_k - U_n), \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 q_n &= C_{n1}(U_n - U_1) + C_{n2}(U_n - U_2) + \dots + \\
 &\quad + C_{nk}(U_n - U_k) + \dots + C_{nn}(U_n - 0).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $C$  в этих уравнениях называют *частичными емкостями* — *собственными* при одинаковых индексах и *взаимными* при различных индексах. Для определения собственной частичной емкости  $C_{kk}$  следует положить потенциалы всех тел равными  $U_k$ . Тогда  $q_k = C_{kk}U_k$ .

Для измерения емкости  $C_{kk}$  необходимо соединить между собой все тела, зарядить всю эту систему до потенциала  $U_k$  относительно земли и затем, отключив источник э. д. с., разрядить ее на землю (рис. 43). При этом гальванометр должен быть включен так, чтобы был измерен только заряд  $q_k$  тела  $A_k$ .

Ясно, что  $C_{kk} > 0$ , так как при положительном потенциале системы и заряд на ней будет положителен.

При этом же условии  $U_1 = U_2 = \dots = U_k = \dots = U_n$  из уравнений, содержащих коэффициенты электростатической индукции, имеем:

$$q_k = (\beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn})U_k.$$

Следовательно,

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn}.$$

Взаимная частичная емкость  $C_{nk}$  определяется из того же опыта, что и коэффициент  $\beta_{nk}$ . Действительно, при  $U_1 = U_2 = \dots = U_{k-1} = U_{k+1} = \dots = U_n = 0$  и  $U_k \neq 0$  имеем из уравнений, содержащих частичные емкости:  $q_n = -C_{nk}U_k$ . Следовательно,  $C_{nk} = -\beta_{nk}$ . Таким образом, вообще при  $k \neq p$ :

$$C_{kp} = -\beta_{kp} \text{ и } C_{kp} > 0.$$

Преимущество уравнений, содержащих частичные емкости, по сравнению с уравнениями, содержащими коэффициенты электростатической индукции, состоит в том, что в них все коэффициенты положительны.

Отметим, что имеет место равенство  $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$ , справедливость которого легко показать из условия независимости энергии системы заряженных тел от последовательности, в которой устанавливаются заряды системы, аналогично тому, как было доказано равенство:  $M_{kp} = M_{pk}$  (ч. 1). Пользуясь определителями, легко показать также, что  $\beta_{kp} = \beta_{pk}$ . И из условия  $C_{kp} = -\beta_{kp}$  следует, что  $C_{kp} = C_{pk}$ . Это соотношение выражает принцип взаимности для системы заряженных тел.

### § 33. Потенциальные коэффициенты в системе параллельных весьма длинных проводов

В виде примера, весьма важного для практики, рассмотрим систему проводов, протянутых параллельно друг другу над поверхностью земли (рис. 44). Длину проводов будем предполагать столь большой, что поле можно считать плоскопараллельным. Обычно

диаметры проводов весьма малы по сравнению с расстоянием между их осями и с высотой их подвеса. В таком случае проще всего определяются потенциальные коэффициенты  $\alpha$ . Для определения коэффициентов  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{n1}$  достаточно положить  $q_1 \neq 0$  и  $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$ . При этом ни один провод не должен быть заземлен. Уравнения приобретают вид:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1, U_2 = \alpha_{21}q_1, \dots, U_k = \alpha_{k1}q_1, \dots$$

Поле заряженного первого провода будет таким же, как и в случае одного провода, протянутого над поверхностью земли (рис. 33), так как искажением поля вследствие существования других проводов можно пренебречь ввиду малости их сечений. При таком условии коэффициент  $\alpha_{11}$  является величиной, обратной емкости провода по отношению к земле, выражение для которой получено в § 31 в предположении отсутствия остальных проводов. Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h_1}{R_1},$$

и вообще

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h_k}{R_k}.$$

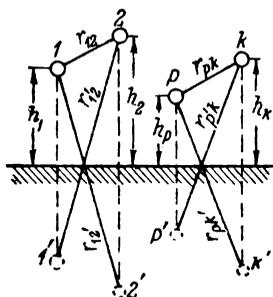


Рис. 44.

Коэффициент  $\alpha_{21}$  нетрудно определить, если заметить, что незаряженные провода, ввиду малости их сечений, принимают в поле заряженного провода те потенциалы, которые получаются в местах их расположения и при отсутствии их. Найдем, пользуясь уравнением  $U = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2$ , приведенным в § 20, потенциал на оси второго провода, определяемый зарядами первого провода и его зеркального изображения в поверхности земли. Постоянная  $C_2$  в данном случае равна нулю, так как для точек на поверхности земли расстояния  $r_1$  и  $r_2$  до провода и его зеркального изображения равны между собой и, кроме того, для этих точек  $U = 0$ .

Замечая, что для точки, лежащей на оси второго провода, необходимо положить  $r_1 = r_{12}$  и  $r_2 = r_{1'2}$  (рис. 44), получаем:

$$U_2 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Вообще будем иметь:

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_{p'k}}{r_{pk}}.$$

Так как  $r_{p'k} = r_{pk}$  (рис. 44), то  $\alpha_{kp} = \alpha_{pk}$ , что было отмечено в предыдущем параграфе для общего случая.

Умение рассчитывать потенциальные коэффициенты, коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости весьма важно во многих практических задачах, например, при расчете параметров линии передачи со сложным расположением проводов, при выяснении вопроса о влиянии линии передачи высокого напряжения на расположенные рядом с ней линии связи и т. д.

### § 34. Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли

Полученные в предыдущем параграфе выражения для потенциальных коэффициентов в системе параллельных проводов, протянутых над поверхностью земли, дают возможность найти выражение для емкости двухпроводной линии передачи с учетом влияния земли.

В случае двух проводов имеем:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2; \quad U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

Пусть заряды проводов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку:  $q_2 = -q_1$ . Заменяя  $q_2$  на  $-q_1$ , получаем:

$$U_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1; \quad U_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})q_1.$$

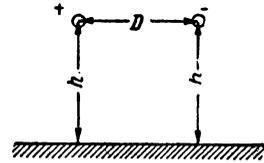


Рис. 45.

Следовательно, искомая емкость имеет выражение:

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}.$$

Определим, пользуясь этой формулой, емкость двухпроводной линии, провода которой подвешены на одинаковой высоте  $h$  от земли и на расстоянии  $D$  друг от друга (рис. 45). Радиусы проводов одинаковы и равны  $R$ . Согласно формулам, полученным в предыдущем параграфе, имеем:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + D^2}}{D}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{2h}{R} \cdot \frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}} \right)}.$$

Если высота подвеса  $h$  много больше расстояния между проводами  $D$ , то  $\sqrt{4h^2 + D^2} \approx 2h$  и

$$C \approx \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{D}{R}},$$

т. е. получаем формулу, выведенную ранее (§ 31) без учета влияния земли.

### § 35. Емкость трехфазной линии передачи

Все полученные выше соотношения, строго говоря, справедливы только для электростатического поля. Однако с большой степенью точности они могут быть использованы и при вычислении параметров линий передачи при технической частоте. Критерием допустимости приближенного рассмотрения переменного электрического поля около проводов линии в отдельные моменты времени как электростатического поля может служить соотношение между линейными размерами области, в которой рассматривается поле, и длиной электромагнитной волны. Вопрос о длине  $\lambda$  электромагнитной волны и о скорости  $v$  ее распространения будет рассмотрен в § 75 и 76. Имеет место соотношение:  $\lambda = v/f$ , где  $f$  — частота колебаний. В воздухе  $v = 3 \cdot 10^8$  км/сек, и при частоте 50 гц имеем  $\lambda = 6000$  км. На длине волны фаза колебаний напряженности поля меняется на  $2\pi$ . В пределах области, линейные размеры которой значительно меньше  $\lambda$ , можно считать фазу колебаний напряженности поля одинаковой во всех точках области и с большой степенью точности рассматривать поле в каждый момент времени как электростатическое.

В уравнениях, связывающих заряды и потенциалы, необходимо под  $q$  и  $U$  понимать в этом случае мгновенные значения зарядов проводов и напряжений между проводами и землей. При синусоидальном режиме эти уравнения могут быть написаны в символической форме для комплексных действующих значений  $\dot{q}$  и  $\dot{U}$  зарядов и напряжений. Для случая трехпроводной линии уравнения приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \beta_{11}U_1 + \beta_{12}\dot{U}_2 + \beta_{13}\dot{U}_3; \\ \dot{q}_2 &= \beta_{21}\dot{U}_1 + \beta_{22}\dot{U}_2 + \beta_{23}\dot{U}_3; \\ \dot{q}_3 &= \beta_{31}\dot{U}_1 + \beta_{32}\dot{U}_2 + \beta_{33}\dot{U}_3. \end{aligned}$$

Предположим, что напряжения  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  образуют симметричную систему, т. е.  $\dot{U}_2 = a^2\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_3 = a\dot{U}_1$ , где  $a$  — комплексный множитель (ч. II). Имеем:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a^3 = 1, \quad \frac{1}{a} = a^2, \quad \frac{1}{a^2} = a.$$

В этом случае уравнения могут быть записаны в форме:

$$\dot{q}_1 = (\beta_{11} + a^2\beta_{12} + a\beta_{13})\dot{U}_1;$$

$$\dot{q}_2 = (\beta_{22} + a^2\beta_{23} + a\beta_{21})\dot{U}_2;$$

$$\dot{q}_3 = (\beta_{33} + a^2\beta_{31} + a\beta_{32})\dot{U}_3.$$

Величины, стоящие в скобках, вещественны при условии, что провода линии расположены симметрично друг относительно друга, т. е. если  $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31}$ , так как  $(a + a^2) = -1$  вещественное число. При этом стоящие в скобках величины представляющие собой емкости проводов относительно земли или, что то же, емкость линии на одну фазу при соединении звездой.

При отсутствии симметрии в расположении проводов, т. е. если  $\beta_{12} \neq \beta_{23} \neq \beta_{31}$ , стоящие в скобках величины оказываются комплексными. Их вещественные части являются емкостями проводов относительно земли, так как они определяют часть заряда, изменяющуюся в фазе с напряжением, и, следовательно, определяют реактивную составляющую тока, сдвинутую по фазе на угол  $\pi/2$  относительно напряжения. Мнимые части величин, стоящих в скобках, определяют активные составляющие токов в проводах, находящиеся в фазе или в противофазе с напряжениями. Заметим, что сумма мнимых частей для всех трех фаз равна нулю, так как при суммировании мы получаем перед всеми коэффициентами  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{23}$  и  $\beta_{31}$  вещественные множители  $(a + a^2) = -1$ . Это значит, что если в одних фазах они определяют положительную активную мощность, то в других фазах они определяют такую же по абсолютной величине, но отрицательную активную мощность. Физически это означает, что при несимметричном расположении проводов некоторое количество энергии передается за период путем электростатической индукции из одной фазы в другую. Это своеобразное явление проявляется в несимметрии токов при симметричных напряжениях. Естественно, что несимметрия токов определяется не только появлением разных по величине и по знаку активных составляющих, но также и различием реактивных составляющих вследствие того, что емкости проводов различны.

Полная симметрия в расположении проводов может быть достигнута только в кабеле, в котором заземленная оболочка охватывает симметрично все три провода (рис. 32). В воздушной линии даже при расположении проводов по вершинам равностороннего

треугольника (рис. 46) наличие земли вносит несимметрию. Подавно несимметричной оказывается линия с расположением проводов, согласно рис. 47.

Обычно через равные расстояния изменяют расположение проводов на опорах так, что постепенно осуществляется круговая перестановка (транспозиция) проводов (рис. 48). Основная цель круговой перестановки уменьшить электростатическое и электро-

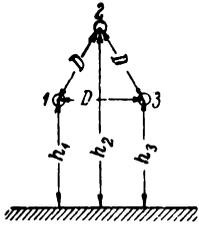


Рис. 46.

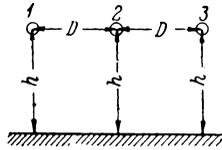


Рис. 47.

магнитное влияние проводов линии высокого напряжения и сильного тока на соседние линии связи. При наличии круговой перестановки средние значения параметров всей линии получаются одинаковыми для всех фаз, и всю линию можно рассматривать как симметричную.

В среднем для всей линии не будет иметь места передача энергии за целый период из одной фазы в другую путем электростатической индукции.

С достаточной для практики точностью решение можно получить, вводя в систему уравнений:

$$\dot{U}_1 = \alpha_{11} \dot{q}_1 + \alpha_{12} \dot{q}_2 + \alpha_{13} \dot{q}_3;$$

$$\dot{U}_2 = \alpha_{21} \dot{q}_1 + \alpha_{22} \dot{q}_2 + \alpha_{23} \dot{q}_3;$$

$$\dot{U}_3 = \alpha_{31} \dot{q}_1 + \alpha_{32} \dot{q}_2 + \alpha_{33} \dot{q}_3$$

средние для всей линии значения потенциальных коэффициентов  $\alpha$ .

Обозначим:

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}}{3};$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3},$$

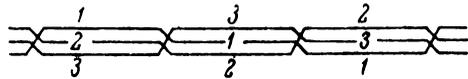


Рис. 48.

где  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\alpha_{31}$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$  — истинные значения коэффициентов для одного из участков, и будем считать в дальнейшем, что для всей линии все коэффициенты  $\alpha$  с разными индексами равны  $\alpha_m$  и все коэффициенты  $\alpha$  с одинаковыми индексами равны  $\alpha_0$ .

Естественно, что в симметричной линии при симметричной системе напряжений и заряды  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  образуют также симметричную систему, т. е.  $q_2 = a^2 q_1$ ,  $q_3 = a q_1$ .

Уравнения в этом случае приобретают вид:

$$\dot{U}_1 = \alpha_0 \dot{q}_1 + \alpha_m \dot{q}_2 + \alpha_m \dot{q}_3 = [\alpha_0 + (\alpha + \alpha^2) \alpha_m] \dot{q}_1 = (\alpha_0 - \alpha_m) \dot{q}_1;$$

$$\dot{U}_2 = \alpha_m \dot{q}_1 + \alpha_0 \dot{q}_2 + \alpha_m \dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m) \dot{q}_2;$$

$$\dot{U}_3 = \alpha_m \dot{q}_1 + \alpha_m \dot{q}_2 + \alpha_0 \dot{q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m) \dot{q}_3.$$

Следовательно, искомая емкость провода относительно земли равна:

$$C = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_m}.$$

Согласно формулам, приведенным в § 33, имеем:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \cdot \frac{1}{3} \left( \ln \frac{2h_1}{R_1} + \ln \frac{2h_2}{R_2} + \ln \frac{2h_3}{R_3} \right);$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \cdot \frac{1}{3} \left( \ln \frac{r_{12'}}{r_{12}} + \ln \frac{r_{23'}}{r_{23}} + \ln \frac{r_{31'}}{r_{31}} \right).$$

Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left( 2 \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r_{12}' r_{23}' r_{31}'}}{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}} \right)}.$$

При расположении проводов, согласно схеме рис. 47, имеем:

$$r_{12} = r_{23} = D, \quad r_{31} = 2D; \quad h_1 = h_2 = h_3 = h;$$

$$r_{12}' = r_{23}' = \sqrt{4h^2 + D^2}; \quad r_{31}' = \sqrt{4h^2 + 4D^2}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left( \frac{2hD}{R \sqrt[3]{(4h^2 + D^2) \sqrt{h^2 + D^2}}} \right)}.$$

Пренебрегая влиянием земли, т. е. полагая  $D \ll h$ , получим:

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{\sqrt[3]{2} D}{R}}.$$

### § 36. Метод средних потенциалов для расчета потенциальных коэффициентов и емкостей в системе проводов

Для расчета емкости сложных систем, состоящих из нескольких проводов конечной длины, например емкости радиоантенн, широко используется приближенный метод, предложенный Хау

В электростатическом поле потенциал проводника одинаков во всех его точках, заряд же распределяется по поверхности проводника неравномерно. Хоу предложил для вычисления емкости исходить из обратного, по существу не отвечающего действительности предположения. Именно, предполагается, что заряд распределяется равномерно по поверхности проводников и в случае линейных проводников — равномерно по их длине. Вычисляется распределение потенциала по поверхности или по длине проводников и в формулу для емкости вводится среднее значение вычисленных таким образом потенциалов проводников. В соответствии с этим мы будем называть этот метод *методом средних потенциалов*. Этот метод, хотя и основан на предположении, не соответствующем реальным условиям, в ряде случаев, например, при вычислении емкости системы, образованной параллельными проводами, дает достаточно точные результаты. Это объясняется тем, что неравномерность распределения заряда заметно сказывается лишь на концах

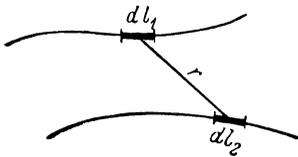


Рис. 49.

таких проводов. Упрощение же расчета достигается весьма большое, так как при заданном распределении заряда потенциал вычисляется по формулам:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\sigma ds}{r} \quad \text{и} \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau dl}{r}.$$

Предположим, что имеется два отрезка проводов, длины которых  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 49). Требуется вычислить потенциальный коэффициент  $\alpha_{12}$ . Предположим, что  $q_1 = 0$  и  $q_2 \neq 0$ . При этом имеем:

$$U_1 = \alpha_{12} q_2.$$

Пользуясь приближенным методом, предполагаем, что  $q_2$  распределен равномерно вдоль второго провода с линейной плотностью  $\tau_2 = q_2/l_2$ . Потенциал в некоторой точке первого провода, определяемый зарядом  $q_2$ , будет равен:

$$U'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{l_2} \frac{\tau_2 dl_2}{r} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon l_2} \int_{l_2} \frac{dl_2}{r},$$

причем интегрирование производится вдоль всего второго провода. Среднее значение потенциала первого провода получается в результате интегрирования вдоль первого провода:

$$U_1 = \frac{1}{l_1} \int_{l_1} U'_1 dl_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon l_1 l_2} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Таким образом, искомый потенциальный коэффициент определяется формулой:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon l_1 l_2} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Выражение для потенциального коэффициента с одинаковыми индексами, например  $\alpha_{11}$  для прямолинейного отрезка провода кругового сечения, может быть найдено путем следующих рассуждений. Предполагаем, соответственно принятому допущению, что заряд, находящийся на поверхности провода, равномерно распределен по длине провода. Находим потенциал  $U'$ , создаваемый этим зарядом в разных точках оси про-

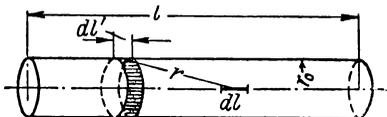


Рис. 50.

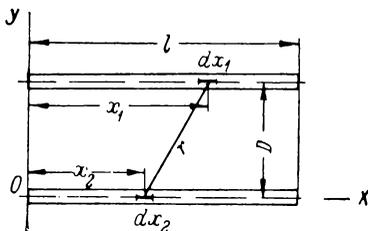


Рис. 51.

вода, и вычисляем среднее значение  $U$  потенциала вдоль оси. Пусть  $r$  — расстояние от кольцевого элемента поверхности проводника, имеющего длину  $dl'$  в направлении оси проводника (рис. 50), до элемента  $dl$  оси проводника,  $l$  — длина проводника и  $r_0$  — радиус его сечения. Потенциал  $U'$  в некоторой точке оси, определяемый всем зарядом  $q$  проводника, равен:

$$U' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{l} \int \frac{dl'}{r}.$$

Среднее значение потенциала вдоль всей оси будет:

$$U = \frac{1}{l} \int U' dl = \frac{q}{4\pi\epsilon l^2} \int \int \frac{dl' dl}{r}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon l^2} \int \int \frac{dl' dl}{r},$$

причем наименьшее значение  $r$  есть  $r_0$ .

В качестве примера определим, пользуясь методом средних потенциалов, потенциальный коэффициент  $\alpha_{12}$  для случая параллельных отрезков проводов, расположенных на расстоянии  $D$  друг от друга и имеющих одинаковые длины  $l_1 = l_2 = l$ , причем

начала отрезков лежат на одном перпендикуляре к ним. Оси координат расположим так, как показано на рис. 51. Имеем:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon l^2} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}}.$$

Но

$$\int_0^l \frac{dx_2}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}} = \int_{-x_1}^{l-x_1} \frac{d(x_2 - x_1)}{\sqrt{D^2 + (x_2 - x_1)^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{l-x_1}{D} + \operatorname{Arsh} \frac{x_1}{D}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon l^2} \int_0^l \left( \operatorname{Arsh} \frac{l-x_1}{D} + \operatorname{Arsh} \frac{x_1}{D} \right) dx_1.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^l \operatorname{Arsh} \frac{l-x_1}{D} dx_1 = \int_0^l \operatorname{Arsh} \frac{x_1}{D} dx_1.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Arsh} y dy &= y \operatorname{Arsh} y - \int y d(\operatorname{Arsh} y) = \\ &= y \operatorname{Arsh} y - \int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = y \operatorname{Arsh} y - \sqrt{1+y^2} + \text{const}, \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon l^2} 2 \int_0^l \operatorname{Arsh} \frac{x_1}{D} dx_1 = \frac{D}{2\pi\epsilon l^2} \left[ \frac{x_1}{D} \operatorname{Arsh} \frac{x_1}{D} - \right. \\ &\left. - \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{D^2}} \right]_0^l = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \cdot \frac{D}{l} \left[ \frac{l}{D} \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} - \sqrt{1 + \frac{l^2}{D^2}} + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left[ \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2} + 1} + \frac{D}{l} \right]. \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{22}$  с одинаковыми индексами для прямолинейного проводника, имеющего круговое сечение радиуса  $r_0$ , результат интегрирования приведет к формуле, которая получается из формулы, только что полученной, путем замены  $D$  на  $r_0$ . Следовательно,

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left[ \operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2} + 1} + \frac{r_0}{l} \right].$$

Так как при выводе этой формулы наличие другого провода не учитывалось, то емкость уединенного цилиндра конечной длины получается из выражения:

$$C = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2} + 1} + \frac{r_0}{l}}.$$

Заметим, что имеет место соотношение:

$$\operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} = \ln \left( \frac{l}{r_0} + \sqrt{\frac{l^2}{r_0^2} + 1} \right).$$

При  $l \gg r_0$  имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh} \frac{l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{l^2} + 1} + \frac{r_0}{l} &\approx \ln \frac{2l}{r_0} - 1 = \\ &= \ln \frac{l}{r_0} + \ln 2 - 1 = \ln \frac{l}{r_0} - 0,307. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{l}{r_0} - 0,307} \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{l}{r_0}}.$$

Емкость между цилиндрами найдется из системы уравнений:

$$U_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2; \quad U_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2.$$

Полагая  $q_2 = -q_1$  и учитывая, что  $\alpha_{21} = \alpha_{12}$  и  $\alpha_{22} = \alpha_{11}$ , получаем:

$$\begin{aligned} U_1 &= (\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1; \quad U_2 = -(\alpha_{11} - \alpha_{12})q_1, \\ C &= \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{11}$  находятся по только что полученным формулам.

При  $l \gg r_0$  и  $l \gg D$  получаем:

$$\alpha_{11} - \alpha_{12} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left[ \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right) - \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{D}{r_0},$$

и, следовательно,

$$C \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{D}{r_0}},$$

что совпадает с выведенной ранее формулой для емкости двухпроводной линии передачи (§ 31).

### § 37. Вычисление емкости по картине поля

Емкость между двумя цилиндрическими телами большой длины или между двумя телами вращения с общей осью можно вычислить, пользуясь картиной поля, построенной хотя бы приближенным графическим методом, изложенным в §§ 23—25.

Отношение потока вектора смещения  $\Delta\Psi_D$  сквозь сечение одной трубки к приращению потенциала  $\Delta U$  между соседними линиями равного потенциала, согласно уравнениям, приведенным в § 25, равно:

для плоскопараллельного поля

$$\left| \frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U} \right| = \varepsilon_p l \frac{\Delta a}{\Delta n} = \frac{1}{k_1} l$$

и для поля тел вращения

$$\left| \frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U} \right| = 2\pi r \varepsilon_p \frac{\Delta a}{\Delta n} = 2\pi \frac{1}{k_2}.$$

Заряд тела равен, согласно постулату Максвелла, полному потоку смещения сквозь сечения всех трубок, начинающихся на теле. Если число этих трубок равно  $m_1$ , то  $q = m_1 \Delta\Psi_D$ . Разность потенциалов между двумя телами равна  $U_1 - U_2 = m_2 \Delta U$ , где  $m_2$  — число интервалов между соседними линиями равного потенциала. Таким образом,

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \left| \frac{\Delta\Psi_D}{\Delta U} \right| \frac{m_1}{m_2} = k_3 \frac{m_1}{m_2},$$

причем для плоскопараллельного поля  $k_3 = \frac{l}{k_1}$  и для поля тел вращения  $k_3 = \frac{2\pi}{k_2}$ . Число  $k_3$  задают, приступая к графическому построению поля. Оно определяет форму ячеек поля, т. е. отношение  $\Delta a/\Delta n$ . Числа  $m_1$  и  $m_2$  находят из построенной картины поля.

---

---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

#### § 38. Уравнения электромагнитного поля постоянных токов

В настоящей главе мы будем рассматривать поле постоянных токов в неподвижных проводниках и проводящих средах. Постоянный ток может протекать только в замкнутой проводящей цепи. Если электрическое сопротивление цепи отлично от нуля, то прохождение тока в ней вызывает падение напряжения. Следовательно, как в диэлектрике, окружающем проводники с постоянным током, так и внутри самих проводников будет существовать не только магнитное, но и электрическое поле. Эти постоянные поля называют *стационарными*.

Первое уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathfrak{J}$  в этом случае указывает, что  $\mathbf{H}$ , а следовательно, и  $\mathbf{B}$ , так же как и  $\mathfrak{J}$ , не зависят от времени. Поэтому из второго уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  следует, что вне источников э. д. с.  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ .

Таким образом, уравнения электромагнитного поля для случая постоянных токов в неподвижной проводящей среде вне источников э. д. с. приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathfrak{J}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \mathfrak{J} = \gamma \mathbf{E};$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Условие  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  свидетельствует, что вне источников э. д. с. электрическое поле постоянных токов является так же, как и электростатическое поле, *безвихревым*. Такое поле является *потенциальным*, т. е. для его характеристики может быть введена функция координат  $U(x, y, z)$ , называемая электрическим потенциалом, причем  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$ .

#### 39. Электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами

Рассмотрим сначала электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами. Так как при

отсутствии токов в диэлектрике следует положить в нем  $\rho = 0$ , то поле в диэлектрике характеризуется уравнениями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \text{ т. е. } \mathbf{E} = -\operatorname{grad} U; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

В случае однородной среды, когда  $\epsilon = \operatorname{const}$ , эти уравнения дают  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  или  $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$ , т. е. потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

Таким образом, в самом диэлектрике такое поле ничем не отличается от электростатического. Однако граничные условия на поверхности проводников уже не соответствуют тем, которые имеют место в электростатике. В случае электростатической задачи поверхность каждого проводника является поверхностью равного потенциала. При прохождении по проводнику электрического тока в проводнике возникает падение потенциала, и, следовательно, поверхность проводника уже не является равнопотенциальной. Линии напряженности электрического поля в диэлектрике

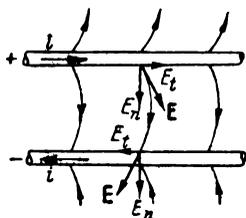


Рис. 52.

подходят к поверхности проводника не под прямым углом, так как на поверхности проводника появляется касательная составляющая напряженности поля в направлении линий тока. На рис. 52 показан характер линий напряженности электрического поля около проводов линии передачи. С принципиальной точки зрения указанное обстоятельство существенно осложняет расчет поля, однако практически во многих случаях его можно не учитывать, так как обычно падение напряжения вдоль проводников на длине, сравнимой с расстоянием между проводниками, ничтожно мало по сравнению с разностью потенциалов проводников.

Сравним в качестве примера между собою касательную  $E_t$  и нормальную  $E_n$  — составляющие вектора  $\mathbf{E}$  в диэлектрике у поверхности проводов линии передачи (рис. 52). Касательная составляющая представляет собой падение напряжения, отнесенное к единице длины провода, и может быть определена из выражения:  $E_t = \delta/\gamma$ . Если принять для медных проводов  $\gamma = 58 \text{ м/ом мм}^2$  и  $\delta = 5 \text{ а/мм}^2$ , то получим  $E_t = 0,086 \text{ в/м}$ . Нормальная составляющая зависит от напряжения  $u$  между проводами и расстояния  $D$  между ними. Так как поле между проводами неоднородно и наиболее сильное поле сосредоточено около проводов, то  $E_n > u/D$ . Даже для проводов линии низкого напряжения, проложенных на значительном расстоянии друг от друга, как это бывает в сырых помещениях, величина  $E_n$  оказывается много больше  $E_t$ . Пусть, например,  $u = 100 \text{ в}$  и  $D = 10 \text{ см}$ . При

этом  $E_n > 1000$  в/м и, следовательно,  $E_n/E_t > 10^4$ . В случае линии высокого напряжения величина  $E_n$  близка к критическому градиенту потенциала для воздуха, т. е. имеет порядок  $E_n \approx \approx 30$  кв/см =  $3 \cdot 10^6$  в/м. Следовательно, для таких линий  $E_n/E_t \approx \approx 3,5 \cdot 10^7$ .

Полученные цифры показывают, что составляющая  $E_t$  ничтожно мала по сравнению с  $E_n$  и при рассмотрении поля около проводов ею можно пренебречь без опасения внести этим сколь-нибудь заметную ошибку. В таком случае граничные условия на поверхности проводников оказываются тождественными с условиями в электростатике. Поэтому при рассмотрении электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении соответствующих электростатических задач.

#### § 40. Электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде

Внутри проводников, по которым проходит электрический ток, также существует электрическое поле. Напряженность этого поля в изотропной в отношении проводимости среде связана с плотностью тока соотношением:  $\delta = \gamma E$ , которое представляет собой выражение закона Ома в дифференциальной форме.

В изотропной среде направление линий электрического тока всюду совпадает с направлением линий напряженности электрического поля. Если, кроме того, среда однородна ( $\gamma = \text{const}$ ), то и густота линий тока всюду пропорциональна густоте линий напряженности электрического поля, т. е. картины линий тока и линий напряженности поля подобны друг другу.

Если среда неоднородна в отношении проводимости, то линии тока остаются в ней непрерывными, что следует из принципа непрерывности тока, выражаемого условием:  $\oint \delta ds = 0$  или  $\text{div } \delta = 0$ , которое представляет собой обобщенную форму первого закона Кирхгофа соответственно в интегральной и в дифференциальной форме. Но в такой неоднородной среде линии напряженности электрического поля будут прерывными. На поверхности раздела двух сред с различными удельными проводимостями нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля изменится скачкообразно.

Поверхности проводников, являющиеся границами между проводящей средой и диэлектриком, очевидно, образуются совокупностью линий тока, так как нормальная к ним составляющая вектора плотности тока равна нулю.

В настоящей главе мы будем исследовать пространственное распределение тока в массивных проводящих средах. Поле вектора плотности тока в таких средах, вообще говоря, будет неоднород-

ным, и для вычисления тока  $i$ , проходящего сквозь некоторую поверхность  $s$ , взятую в проводящей среде, необходимо произвести интегрирование  $i = \int_s \delta ds$ .

Внутри проводящей среды вне источников э. д. с. всюду соблюдается условие:  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$  или  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ , что выражает второй закон Кирхгофа соответственно в интегральной и дифференциальной форме в области, где нет источников э. д. с. Поле оказывается потенциальным. Поверхности равного электрического потенциала, определяемые уравнением  $U(x, y, z) = \text{const}$ , пересекаются линиями напряженности электрического поля под прямым углом, а следовательно, в изотропной среде они пересекаются под прямым углом и линиями тока.

Таким образом, электрическое поле и поле вектора плотности тока в проводящей среде вне источников э. д. с. характеризуется системой уравнений:

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \delta = \gamma \mathbf{E}; \quad \text{div} \delta = 0.$$

Эти уравнения вытекают из приведенной в § 38 системы уравнений, причем уравнение  $\text{div} \delta = 0$ , как было указано в § 5, является следствием уравнения  $\text{rot} \mathbf{H} = \delta$ , так как  $\text{div} \text{rot} \mathbf{H} = 0$ .

Вопрос о пространственном распределении тока чрезвычайно важен при рассмотрении многих практических задач, например, при исследовании токов в земле, токов в массивных проводниках, токов проводимости в изоляции и т. д.

#### § 41. Граничные условия на поверхности раздела двух проводящих сред

При переходе тока через поверхность раздела сред с различными удельными проводимостями,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , направление тока изменяется, если только линии тока не направлены нормально к поверхности раздела. Установим соотношение между углом падения  $\theta_1$  и углом преломления  $\theta_2$  (рис. 53). Составляя линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$  по контуру  $abcd$ , стороны  $ab$  и  $cd$  которого расположены в разных средах бесконечно близко к поверхности раздела, получим:

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_1 \sin \theta_1 ab - E_2 \sin \theta_2 cd = 0,$$

и так как  $ab = cd$ , то

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2.$$

Применяя соотношение, выражающее принцип непрерывности тока, к замкнутой поверхности, образованной двумя поверхностями  $s_1$  и  $s_2$  (на рисунке показаны их следы), расположенными в разных средах бесконечно близко к поверхности раздела, и бес-

конечно малой боковой цилиндрической поверхностью, пересекающей поверхность раздела, найдем:

$$\oint_S \delta ds = -\delta_1 \cos \theta_1 s_1 + \delta_2 \cos \theta_2 s_2 = 0.$$

Имея в виду, что  $s_1 = s_2$ , получаем:

$$\delta_1 \cos \theta_1 = \delta_2 \cos \theta_2.$$

Приняв во внимание соотношение  $E\gamma = \delta$ , находим:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Закон преломления линий тока по форме вполне аналогичен закону преломления линий электрического смещения на границе двух диэлектриков.

Во многих практических случаях мы встречаемся с переходом тока из металлических тел в окружающую среду, удельная проводимость которой во много раз меньше удельной проводимости материала этих тел. Такие условия имеют место, например, в случае токов утечки через изоляцию между проводами, находящимися при разных потенциалах. Ток утечки возникает вследствие несовершенства изоляции. Удельная проводимость изоляции во много раз меньше удельной проводимости материала проводов. Например, для кабельной бумаги имеем приблизительно  $\gamma \approx 10^{-13} \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ , тогда как для меди  $\gamma = 58 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ , т. е. отношение удельной проводимости меди к удельной проводимости изоляции имеет порядок  $6 \cdot 10^{20}$ . В качестве другого примера можно указать на случай перехода тока в землю через зарытые в землю металлические электроды. Обычно применяют стальные электроды. Удельная проводимость стали приблизительно равна  $\gamma \approx 5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ .

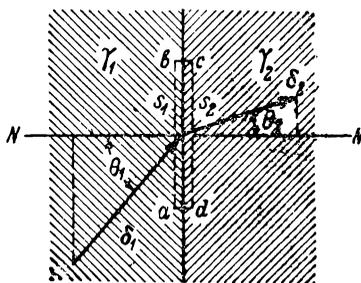


Рис. 53

Удельная проводимость почвы зависит от влажности почвы и от ее состава. В среднем ее можно считать равной  $\gamma \approx 10^{-2} \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ . Таким образом, отношение удельной проводимости материала электродов к удельной проводимости почвы имеет порядок  $5 \cdot 10^8$ .

Во всех этих случаях при рассмотрении поля в среде с малой удельной проводимостью можно пренебречь падением напряжения внутри металлических тел и считать поверхности тел поверхностями равного потенциала.

### § 42. Аналогия электрического поля в проводящей среде с электростатическим полем

Между соотношениями, характеризующими стационарное электрическое поле постоянных токов в проводящей среде, и соотношениями, характеризующими электростатическое поле в диэлектрике, можно провести формальную аналогию.

Для электрического поля токов в проводящей среде имеют место соотношения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B; \quad \mathbf{\delta} = \gamma \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{\delta} = 0, \quad \int_S \mathbf{\delta} ds = i.$$

Они формально совпадут с соотношениями для электростатического поля в диэлектрике:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \int_S \mathbf{D} ds = Q,$$

если в последних заменить вектор электрического смещения  $\mathbf{D}$  вектором плотности тока  $\mathbf{\delta}$ , электрический заряд  $Q$  током  $i$  и абсолютную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  удельной проводимостью  $\gamma$ .

Отсюда ясно, что если условия для вектора  $\mathbf{\delta} = \gamma \mathbf{E}$  на границе данной проводящей среды с удельной проводимостью  $\gamma$  совпадают с условиями для вектора  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  на такой же формы границе диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то электрические поля в проводящей среде и в диэлектрике должны быть аналогичны друг другу.

В электростатической задаче границей диэлектрика является поверхность проводящего тела. Эта поверхность есть поверхность равного потенциала, и вектор  $\mathbf{D}$  к ней нормален. В примерах, рассмотренных в предыдущем параграфе, границей плохо проводящей среды (почвы или несовершенной изоляции) является поверхность проводников. С большой степенью точности эту поверхность можно считать поверхностью равного потенциала и вектор плотности тока  $\mathbf{\delta}$  в плохо проводящей среде считать направленным по нормали к ней. На основании изложенного можно утверждать, что картина электрического поля токов (в почве или в изоляции) в этих задачах должна совпадать с картиной поля в соответствующих электростатических задачах.

На этом основан так называемый *метод электростатической аналогии*, позволяющий в ряде случаев при расчете токов в проводящей среде воспользоваться готовыми решениями соответствующих задач электростатики. Метод электростатической аналогии дает возможность также заменить исследование электростатического поля экспериментальным исследованием поля тока в проводящей среде, о чем будет сказано в § 99.

В частности, формулы для электрической проводимости  $G = i/U$  сред, в которых протекает ток, могут быть получены из соответствующих формул для емкости  $C = q/U$  тел, так как в аналогичных задачах ток  $i$  заменяется через заряд  $q$ . Электрическая емкость тела или емкость между телами определяется геометрическими параметрами тел и абсолютными диэлектрическими проницаемостями сред, окружающих тела. Поэтому, чтобы получить формулу для  $G$  достаточно заменить в соответствующей формуле для  $C$  абсолютные диэлектрические проницаемости  $\epsilon$  диэлектриков на удельные проводимости  $\gamma$  проводящих сред. Если проводящая среда и, соответственно, диэлектрик однородны, то в формулу для проводимости  $G$  удельная проводимость  $\gamma$  входит множителем и, соответственно, в формулу для емкости  $C$  абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  также входит множителем. В таком случае для аналогичных задач имеем:

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\epsilon}.$$

### § 43. Ток утечки в кабеле и сопротивление изоляции кабеля

Определим ток утечки  $i$  в кабеле, возникающий вследствие несовершенства изоляции. Сечение кабеля изображено на рис. 54. Линии напряженности поля и линии тока утечки в изоляции можно считать направленными по радиусам.

Проведем внутри изоляции цилиндрическую поверхность, имеющую радиус  $r$  и длину  $l$  в направлении оси кабеля. Имеем:  $i = 2\pi r l \delta$  и, следовательно,  $E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{i}{2\pi r l \gamma}$ .

Напряжение  $u_{AB}$  между проводами найдем, составляя линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль радиуса:

$$u_{AB} = \int_A^B E dl = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{i}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

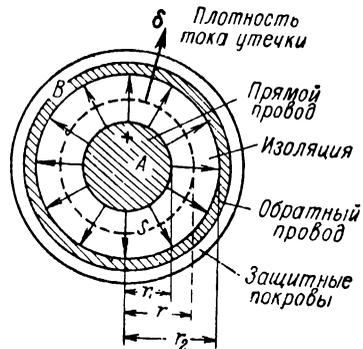


Рис. 54

Отсюда находим сопротивление  $R$  и проводимость  $G$  изоляции кабеля:

$$R = \frac{u_{AB}}{i} = \frac{1}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi l \gamma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Формулу для проводимости  $G$  можно было написать сразу, пользуясь методом электростатической аналогии. Для этого достаточно в формуле для емкости кабеля

$$C = \frac{2\pi l \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

приведенной в § 31, п. 5, заменить  $\epsilon$  на  $\gamma$ .

#### § 44. Сопротивление заземления

Для осуществления соединения какой-либо точки электрической цепи с землей зарывают в землю металлические проводники, к которым и присоединяют соответствующую точку цепи. Систему

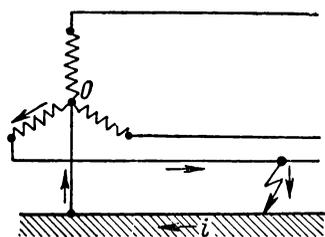


Рис. 55.

таких зарытых в землю проводников называют *заземлителем*. Так например, при соединении в звезду обмоток высокого напряжения трехфазного трансформатора, питающего линию передачи, обычно заземляют, непосредственно или через некоторое сопротивление, нейтральную точку трансформатора (рис. 55). Этим достигается то, что напряжения проводов линии по отношению к земле

при нормальном режиме не могут быть больше фазных напряжений. При повреждении изоляции одного из фазных проводов возникает ток короткого замыкания, проходящий от места повреждения через землю и заземлитель к нейтральной точке трансформатора. Электрический ток, проходя через землю, встречает некоторое сопротивление, называемое *сопротивлением заземления*. По существу это — сопротивление земли, которое встречает ток при растекании от заземлителя. Вдоль поверхности земли создается падение напряжения, которое вблизи от мест заземления может достигать опасных для жизни человека значений уже на длине шага человека. Поэтому весьма существенно уметь вычислить сопротивление растеканию тока в земле при различных конструкциях заземлителей.

С заземлением отдельных точек цепи мы встречаемся в цепях как переменного, так и постоянного тока. В приведенном примере в земле протекает переменный ток. Распределение переменного тока в проводящей среде в принципе должно отличаться от распределения постоянного тока, так как при переменном токе в контурах, которые можно себе представить в проводящей среде, возникают индуктированные электродвижущие силы, оказывающие влияние на распределение тока. Однако ввиду большого удельного сопротивления земли при вычислении токов вблизи электро-

дов можно пренебречь, во всяком случае при промышленной частоте, индуктированными электродвижущими силами по сравнению с активным падением напряжения и вести расчет, как при постоянном токе.

Формулы для проводимости  $G = i/U$  заземления могут быть написаны на основании метода электростатической аналогии по имеющимся формулам для емкости  $C = q/U$  соответственно расположенных тел.

В электростатических задачах обычно равным нулю принимают потенциал бесконечно удаленных точек. В интересующих нас задачах, относящихся к токам в земле, также принимают равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек или, практически, достаточно удаленных от электрода точек. При этом в выражении  $G = i/U$  величина  $U$  есть потенциал электрода, так же как в выражении  $C = q/U$  величина  $U$  есть потенциал заряженного тела.

Необходимо еще заметить, что в земле линии тока не уходят в бесконечность, а собираются у другого электрода или, как в примере, изображенном на рис. 55, у места повреждения изоляции линии. Однако это обстоятельство мало сказывается на распределении тока около данного электрода и на величине ему соответствующего сопротивления заземления, так как основное сопротивление растеканию тока сосредоточено вблизи электрода, где плотность тока в земле имеет наибольшие значения.

Рассмотрим некоторые примеры. Так как емкость уединенного шара радиуса  $r$  равна

$$C = 4\pi\epsilon r,$$

то проводимость заземления в случае шарового электрода, погруженного в землю столь глубоко, что можно пренебречь влиянием поверхности земли (рис. 56), должна быть равна

$$G = \frac{1}{R} = 4\pi\gamma r,$$

причем  $R$  — сопротивление заземления.

Если электрод расположен близко от поверхности земли, то линии тока искажаются, как это видно из рис. 57. В этом случае можно воспользоваться методом зеркальных изображений. Линии тока у поверхности земли должны быть к ней касательны. Это условие останется удовлетворенным, если мысленно заполнить воздушное пространство над поверхностью земли проводящей средой с такой же, как у земли, удельной проводимостью и поместить в эту среду электрод, являющийся зеркальным изображением в поверхности земли действительного электрода. Ток, выходящий из мнимого электрода, должен быть равен по величине и по знаку току, выходящему из действительного электрода в землю. Прово-

димность заземления для действительного электрода, очевидно, равна половине проводимости системы, образованной электродом и его зеркальным изображением. Так, например, проводимость

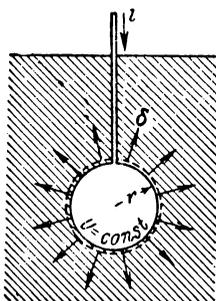


Рис. 56

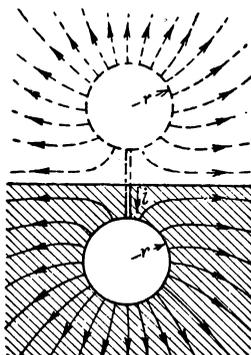


Рис. 57.

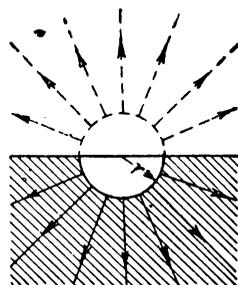


Рис. 58.

в случае электрода в форме полушария, расположенного у поверхности земли так, как показано на рис. 58, равна:

$$G = \frac{1}{R} - 2\pi\gamma r.$$

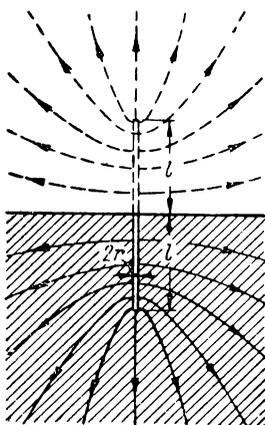


Рис. 59.

Часто применяют заземлители в виде труб, забитых вертикально в землю (рис. 59).

Пусть  $l$  — длина трубы и  $r$  — ее радиус. Предположим, что один конец трубы находится у самой поверхности земли. Длина трубы вместе с ее зеркальным изображением равна  $2l$ .

Емкость цилиндра, имеющего длину  $2l$  и радиус  $r$ , при  $2l \gg r$  согласно формуле, приведенной в § 36, приближенно равна:

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon 2l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Следовательно, проводимость для системы из электрода и его зеркального изображения равна:

$$G \approx \frac{4\pi\gamma l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Таким образом, проводимость заземления для электрода в форме вертикальной трубы выражается формулой:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Для уменьшения сопротивления заземления заземляющее устройство часто выполняют в виде рядов забитых в землю труб, соединенных между собой металлическими полосами. Расчет проводимости заземления при таком сложном заземлителе может быть выполнен по аналогии с расчетом емкости системы соединенных между собой прямолинейных отрезков проводников. С этой целью с успехом может быть использован метод средних потенциалов, изложенный в § 36.

---

---

ГЛАВА ПЯТАЯ  
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

§ 45. Вихревой характер магнитного поля токов. Скалярный потенциал магнитного поля в области вне токов

Уравнения магнитного поля постоянных токов, как это следует из системы уравнений, приведенных в § 38, имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Первое уравнение свидетельствует о том, что магнитное поле токов является *вихревым*. Следовательно, там, где  $\delta \neq 0$ , нельзя указать такую скалярную функцию координат  $U_m(x, y, z)$ , градиент которой пропорционален вектору  $\mathbf{H}$ , так как в силу тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U_m = 0$ , при этом оказалось бы всюду  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ .

Иными словами, вихревое поле не является потенциальным.

Однако в той части пространства, где плотность тока равна нулю, имеем  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  и, следовательно, в этой части пространства можно представить  $\mathbf{H}$  в виде:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} U_m.$$

Величину  $U_m$  называют *скалярным потенциалом магнитного поля*. Индекс  $m$  мы ставим, чтобы отличить магнитный потенциал от электрического. Имеем:

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z},$$

и вообще составляющая вектора  $\mathbf{H}$  по любому направлению равна убыли магнитного потенциала, отнесенной к единице длины в этом направлении:

$$H_l = H \cos \alpha = -\frac{\partial U_m}{\partial l},$$

где  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{H}$  и направлением, в котором определяется составляющая  $H_l$ .

Потенциал одинаков во всех точках поверхности, пересекаемой линиями напряженности поля под прямым углом, так как, перемещаясь по этой поверхности, имеем  $\cos \alpha = 0$  и  $\frac{\partial U_m}{\partial l} = 0$ ,

т. е.  $U_m = \text{const}$ . Такую поверхность называют *поверхностью равного магнитного потенциала*. Ее уравнение имеет вид:

$$U_m(x, y, z) = \text{const}.$$

Если обозначить через  $dn$  перемещение в сторону вектора  $\mathbf{H}$  по нормали к поверхности равного потенциала или, что то же, по касательной к линии напряженности поля, то, очевидно, будем иметь:

$$|\text{grad } U_m| = H = -\frac{\partial U_m}{\partial n}.$$

Из сказанного ясно, что пользоваться понятием скалярного магнитного потенциала можно только в той области пространства, где  $\delta = 0$ . Однако и в этой части пространства  $U_m$  является многозначной функцией. Чтобы показать это, рассмотрим магнитное поле около контура с током (рис. 60). Линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по любому замкнутому контуру, не охватывающему контура с током, равен нулю  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ . В частности, равен нулю интеграл по пути  $AnBmA$ , изображенному на рис. 60. Следовательно,  $\int_{AnB} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{H} d\mathbf{l}$ , т. е.

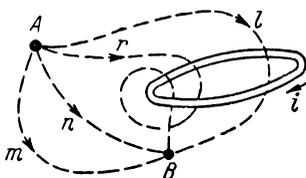


Рис. 60.

интеграл, взятый между двумя заданными точками  $A$  и  $B$ , определяется только положением этих точек и не зависит от выбора пути интегрирования между точками при условии, что замкнутые контуры, образованные двумя различными путями интегрирования, не охватывают контуров с токами. При таком условии интеграл

$$\int_A^B \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{mA} - U_{mB}$$

можно рассматривать как разность магнитных потенциалов  $U_{mA}$  и  $U_{mB}$  поля в точках  $A$  и  $B$ . Если условно принять равным нулю потенциал в некоторой заданной точке  $P$  ( $U_{mP} = 0$ ), то разность потенциалов в точках  $A$  и  $P$  будет равна потенциалу в точке  $A$ :

$$\int_A^P \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{mA}.$$

Однако, если выбрать такой замкнутый путь интегрирования, который охватывает контур тока  $i$ , например путь  $AiBmA$  на рис. 60, то линейный интеграл напряженности магнитного поля по такому пути уже не равен нулю:

$$\oint_{AiBmA} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{AiB} \mathbf{H} d\mathbf{l} - \int_{AmB} \mathbf{H} d\mathbf{l} = i \neq 0,$$

откуда

$$\int_{A'B} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{H} d\mathbf{l} + i = U_{mA} - U_{mB} + i.$$

Путь  $ArBmA$  охватывает два раза контур с током  $i$ . Для такого пути имеем:  $\oint_{ArBmA} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2i$  и, следовательно,

$$\int_{ArB} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{H} d\mathbf{l} + 2i = U_{mA} - U_{mB} + 2i,$$

и вообще интеграл по некоторому пути  $AxB$  может отличаться от интеграла по пути  $AmB$  на  $ki$ , где  $k$  — целое число, если все пути проходят вне области пространства, занятой самими проводниками с током

$$\int_{AxB} \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{mA} - U_{mB} + ki.$$

Совместив точку  $B$  с точкой  $P$ , в которой потенциал принят равным нулю, получаем:

$$\int_{AxP} \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_{mA} + ki.$$

Таким образом, скалярный магнитный потенциал оказывается величиной *многозначной*.

## § 46. Векторный потенциал магнитного поля токов

Вектор магнитной индукции можно представить в виде вихря некоторого вспомогательного вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

причем вектор  $\mathbf{A}$  при заданном распределении в пространстве электрических токов является функцией координат.

Вектор  $\mathbf{A}$  носит название *векторного потенциала магнитного поля*. Определим его так, чтобы уравнения магнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

были удовлетворены во всем пространстве — и там, где отсутствуют токи, и там, где  $\delta \neq 0$ .

Условие  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , выражающее принцип непрерывности магнитного потока, удовлетворяется тождественно, если  $\mathbf{B}$  представить через  $\mathbf{A}$  в виде  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , так как всегда  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$  (§ 5).

Найдем выражение векторного потенциала, определяющее его по заданному распределению токов так, чтобы были удовлетворены остальные два уравнения:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Ограничимся рассмотрением однородной среды. Умножим правую и левую части первого уравнения на абсолютную магнитную проницаемость  $\mu$  среды. Получим:

$$\mu \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \delta,$$

и так как  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , то имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \delta.$$

В частности, для проекции на ось  $OX$  можем написать:

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu \delta_x.$$

Развернем левую часть этого уравнения. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \mathbf{A} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Прибавим к этому выражению величину  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x}$  и вычтем ей равную величину  $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ . Получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 A_x. \end{aligned}$$

Подчиним вектор  $\mathbf{A}$  условию  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , т. е. будем считать, что поле вектора  $\mathbf{A}$  не имеет источников. Действительно, при условии  $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$  всегда можно положить  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}''$ , причем  $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{A}'' \neq 0$ . Поле составляющей  $\mathbf{A}''$ , как созданное источниками, является потенциальным, и, следовательно,  $\operatorname{rot} \mathbf{A}'' = 0$ . Поэтому  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}'$ , т. е. наличие составляющей  $\mathbf{A}''$  не изменяет величину  $\mathbf{B}$  и можно принять  $\mathbf{A}'' = 0$ . Окончательно получаем:

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = -\nabla^2 A_x.$$

Уравнение  $\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu \delta_x$  переписывается в виде:

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu \delta_x.$$

Это есть уравнение Пуассона, оно полностью совпадает с уравнением Пуассона для электрического потенциала (§ 12), если заметить  $A_x$  на  $U$  и  $\mu \delta_x$  на  $\rho/\epsilon$ . Поэтому его решение можно написать

по аналогии с решением уравнения Пуассона для электрического потенциала. Для электрического потенциала мы имели:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Заменяя  $U$  на  $A_x$  и  $\rho/\epsilon$  на  $\mu\delta_x$ , получаем:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{r}.$$

Интегрирование достаточно распространить по всему объему, где  $\delta_x \neq 0$ . Величина  $r$  есть расстояние от центра элемента объема  $dV$ , в котором проекция вектора плотности тока есть  $\delta_x$ , до точки, в которой определяется  $A_x$ .

Аналогичным путем нетрудно получить выражения для других составляющих векторного потенциала. Окончательно будем иметь:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{r}; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y dV}{r}, \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z dV}{r};$$

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{(i\delta_x + j\delta_y + k\delta_z) dV}{r},$$

что можно записать кратко:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \boldsymbol{\delta} \frac{dV}{r},$$

понимая здесь интегрирование как геометрическое суммирование.

Полученные выражения, служащие для определения составляющих векторного потенциала по заданному распределению тока в пространстве, справедливы всюду, в частности и там, где  $\boldsymbol{\delta} \neq 0$ . Они пригодны при условии, что токи существуют в ограниченном объеме пространства, что физически всегда и имеет место. При этом величина векторного потенциала убывает по мере удаления в бесконечность от области, занятой токами, не медленнее, чем  $1/r$ , что нетрудно усмотреть из последнего выражения. Так как составляющие вектора  $\mathbf{B}$  выражаются через пространственные производные от составляющих вектора  $\mathbf{A}$ , то величина магнитной индукции  $B$ , а следовательно, и величина напряженности поля  $H$  убывают в бесконечности не медленнее, чем  $1/r^2$ .

Выражение для  $\mathbf{A}$  может быть упрощено, если токи протекают по контурам из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстояниями от проводников до точек, в которых определяется  $\mathbf{A}$ . Представим элемент объема проводника в виде

$dV = dl ds$ , где  $ds$  — элемент поверхности  $s$  поперечного сечения и  $dl$  — элемент длины  $l$  проводника.

Выберем направления  $d\mathbf{l}$  всюду так, чтобы они совпадали с направлениями вектора плотности тока  $\delta$ , т. е. разобьем проводник на отрезки трубок тока. При этом  $\delta (ds dl) = (\delta ds) dl$ .

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \int_s \delta \frac{(ds dl)}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \int_s (\delta ds) \frac{dl}{r}.$$

Но при соблюдении вышеуказанных условий можно считать, что расстояния  $r$  до точки, в которой определяется  $\mathbf{A}$ , одинаковы для всех элементов  $ds$  данного сечения  $s$ . Точно так же можно считать одинаковыми все отрезки  $dl$  между двумя поперечными сечениями. Следовательно, можно написать:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \frac{dl}{r} \int_s \delta ds = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \frac{i dl}{r},$$

где  $i = \int_s \delta ds$  — ток в проводнике.

### § 47. Выражение магнитного потока через векторный потенциал

Установим связь между магнитным потоком  $\Phi$  сквозь некоторую поверхность  $s$  и векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  магнитного поля. Имеем:

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} ds = \int_s \text{rot } \mathbf{A} ds.$$

Согласно теореме Стокса  $\int_s \text{rot } \mathbf{A} ds = \oint \mathbf{A} dl$ . Следовательно,

$$\Phi = \oint \mathbf{A} dl.$$

Таким образом, *магнитный поток сквозь поверхность  $s$  равен линейному интегралу векторного потенциала по замкнутому контуру, ограничивающему эту поверхность.*

Для вычисления магнитного потока через вектор магнитной индукции при помощи интеграла  $\int_s \mathbf{B} ds$  необходимо определить вектор  $\mathbf{B}$  во всех точках поверхности  $s$ . При вычислении магнитного потока через векторный потенциал  $\mathbf{A}$  достаточно знать последний только на контуре, ограничивающем эту поверхность. Интегрирование по поверхности заменяется интегрированием по контуру, что во многих случаях оказывается весьма полезным.

Оперирование векторным потенциалом облегчает рассмотрение ряда важных положений теории магнитного поля, так же как пользование скалярным потенциалом упрощает рассмотрение многих вопросов электростатики.

### § 48. Общая задача расчета магнитного поля постоянных токов

Общей задачей расчета магнитного поля постоянных электрических токов является нахождение вектора магнитной индукции или вектора напряженности поля во всех точках пространства по заданному распределению тока в пространстве. Эта задача полностью решается нахождением векторного потенциала  $\mathbf{A}$  как функции координат. При этом магнитная индукция находится из соотношения  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . В конечном виде задачу удается решить в ограниченном числе случаев.

Интересуясь магнитным полем вне проводников с током, т. е. только в той области пространства, где плотность тока равна нулю, мы имеем возможность воспользоваться также другим методом. В этой области пространства можно охарактеризовать магнитное поле скалярным магнитным потенциалом  $U_m$ . Вектор напряженности поля при этом определяется из соотношения:  $\mathbf{H} = -\text{grad } U_m$ .

Последний метод аналогичен методу, использованному при расчете электростатического поля, и в этом его большое достоинство. Пользуясь этим методом, возможно решить ряд задач, относящихся к расчету магнитных полей, путем сопоставления их с соответственными решенными задачами электростатики. Мы и воспользуемся этим методом при исследовании плоскопараллельного магнитного поля в области вне проводников с током.

### § 49. Плоскопараллельное поле

Рассмотрим магнитное поле системы бесконечно длинных параллельных цилиндрических проводников с токами в однородной среде. Ось  $OZ$  направим параллельно осям проводников. В таком случае линии напряженности поля целиком лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $XOY$ , и картина поля во всех этих плоскостях одинакова, т. е. поле такой системы токов есть плоскопараллельное. Поверхности равного магнитного потенциала  $U_m$  суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси  $OZ$ . Линии равного потенциала в плоскости  $XOY$  определяются уравнением:

$$U_m(x, y) = \text{const.}$$

Интервалы между соседними линиями равного потенциала будем выбирать так, чтобы при переходе от одной линии к другой соблюдалось условие  $\Delta U_m = \text{const.}$

Уравнение линии напряженности поля можно получить на основе соображений, аналогичных тем, которые были использованы для получения уравнения линии напряженности электрического поля. Условимся считать положительными токи, направленные к наблюдателю. Выберем одну линию напряженности поля в качестве начальной. На рис. 61 она отмечена жирной линией.

Соединим произвольную точку  $M(x, y)$  с некоторой точкой  $A$  начальной линии криволинейным отрезком  $MmA$ . Пусть  $\Psi_H$  есть поток вектора  $\mathbf{H}$  сквозь поверхность, которую описал бы отрезок  $MmA$ , перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси  $OZ$  и проходя путь  $l$ . Условимся рассматривать поток на единицу длины проводов. Введем обозначение  $V_M = \frac{\Psi_H}{l}$ . Величина  $V_M$ , называемая *функцией потока*, зависит от положения точки  $M$  и, следовательно, является функцией координат этой точки. Для всех точек, лежащих на одной и той же линии напряженности поля, функция  $V_M(x, y)$  имеет одинаковое значение. Следовательно, уравнение

$$V_M(x, y) = \text{const},$$

определяющее совокупность таких точек, и является уравнением линии напряженности поля.

Условимся располагать на чертеже линии напряженности поля так, чтобы при переходе от любой линии к соседней всегда получать одно и то же приращение  $\Delta V_M$  функции потока.

Обозначив через  $dn$  элемент длины линии напряженности поля и через  $da$  — элемент длины линии равного потенциала, будем иметь всюду  $dn \perp da$ . Координату  $n$  условимся считать возрастающей в направлении вектора  $\mathbf{H}$ . Координату  $a$  будем считать возрастающей влево от вектора  $\mathbf{H}$  для наблюдателя, расположившегося так, что вектор  $\mathbf{H}$  кажется ему направленным снизу вверх (рис. 61). Функцию потока будем считать возрастающей в том же направлении, в котором увеличивается  $a$ .

Напряженность магнитного поля выражается через  $U_M$  и  $V_M$  в виде:

$$H = -\frac{\partial U_M}{\partial n} = +\frac{\partial V_M}{\partial a}. \quad (*)$$

Первое равенство уже было приведено ранее. Второе выражение следует из того, что напряженность поля численно равна потоку вектора  $\mathbf{H}$  сквозь единицу поверхности, нормальной к линиям напряженности поля. Пусть  $d_a \Psi_H$  — приращение потока вектора  $\mathbf{H}$ , соответствующее приращению только одной координаты  $a$ . Поток  $d_a \Psi_H$  проходит через поверхность  $lda$ , нормальную к линиям напряженности поля. Следовательно,

$$H = \frac{d_a \Psi_H}{l da} = \frac{d_a V_M}{da} = \frac{\partial V_M}{\partial a}.$$

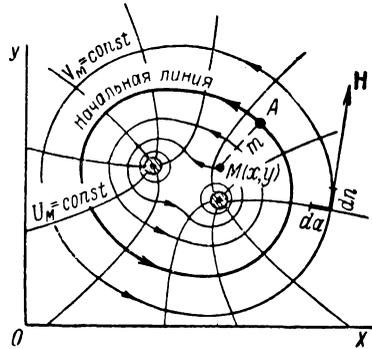


Рис. 61.

Выражения (\*) совершенно аналогичны соответствующим выражениям в § 16, определяющим напряженность электрического поля.

Составляющие вектора  $\mathbf{H}$  в декартовых координатах выражаются в виде:

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x} = +\frac{\partial V_m}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y} = -\frac{\partial V_m}{\partial x}. \quad (**)$$

Эти равенства пишутся на основании тех же соображений, что и соответственные равенства (\*\*) в § 16. Из них путем повторного дифференцирования получаем уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. обе функции  $U_m$  и  $V_m$  удовлетворяют уравнению Лапласа. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это имеет место только в области пространства, не занятой электрическим током. Только в этой области возможно выразить напряженность поля в виде градиента скалярного потенциала  $U_m$ . Такая оговорка не относится к выражениям напряженности поля через функцию потока:

$$H = \frac{\partial V_m}{\partial a}; \quad H_x = \frac{\partial V_m}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial V_m}{\partial x},$$

которые по самому их смыслу должны быть *справедливы также и внутри проводников с током*.

Наконец отметим, что функция потока  $V_m$ , введенная для характеристики плоскостного параллельного поля, весьма просто связана с векторным потенциалом. В рассматриваемом случае векторный потенциал направлен всюду параллельно оси  $OZ$ , т. е.  $A_x = A_y = 0$ ,  $A_z \neq 0$ , так как вектор плотности тока всюду параллелен этой оси. Поэтому имеем:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0.$$

Умножая равенства (\*\*) на  $\mu$  и сопоставляя с последними равенствами, получаем:

$$A_z = \mu V_m + C,$$

причем постоянная  $C$  может быть отброшена, как не имеющая существенного значения.

### § 50. Применение функций комплексного переменного

Магнитный потенциал  $U_m$  и функция потока  $V_m$  в области, не занятой токами, связаны между собой соотношениями (\*\*), совпадающими с уравнениями Коши — Римана, которым должны удовлетворять функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$ , определяющие вещественную и мнимую части аналитической функции  $\zeta = \xi + j\eta = f(z)$  комплексного переменного  $z = x + jy$ . Поэтому для описания плоскопараллельных магнитных полей вне токов, так же как и при описании плоскопараллельных электрических полей, мы можем воспользоваться аналитическими функциями комплексного переменного, положив  $\xi = V_m$  и  $\eta = U_m$ , т. е. принимая:

$$\zeta = \xi + j\eta = V_m + jU_m = f(z).$$

Составляющие вектора  $\mathbf{H}$  могут быть получены из уравнений:

$$H_x = -\frac{\partial U_m}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial U_m}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Модуль вектора  $\mathbf{H}$  равен:  $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ .

### § 51. Поле линейных проводов. Принцип соответствия плоскопараллельных электрических и магнитных полей

Рассмотрим функцию  $\zeta = K \ln z + C$ , где  $K$  — вещественная величина и  $C = C_1 + jC_2$ . Выражая переменную  $z$  в полярных координатах, будем иметь  $z = re^{j\theta}$  и

$$\zeta = V_m + jU_m = K \ln r + jK\theta + C_1 + jC_2.$$

Уравнение линий напряженности поля можно написать в виде:

$$V_m = K \ln r + C_1 = \text{const}, \text{ т. е. } r = \text{const}.$$

Уравнение линий равного потенциала имеет вид:

$$U_m = K\theta + C_2 = \text{const}, \text{ т. е. } \theta = \text{const}.$$

Линии напряженности поля суть окружности с общим центром в начале координат. Линии равного потенциала — радиальные лучи. Такой характер имеет магнитное поле линейного провода с током, проходящего перпендикулярно к плоскости  $XOY$  через начало координат. Постоянная  $K$  определяется из условия, что при обходе вокруг тока  $i$  в положительном направлении угол  $\theta$  изменяется на  $2\pi$ , а магнитный потенциал получает приращение, равное  $\Delta U_m = -i$ . Стало быть,  $i = -K \cdot 2\pi$  и  $K = -\frac{i}{2\pi}$ . Окончательно получаем выражения для  $V_m$  и  $U_m$ :

$$V_m = -\frac{i}{2\pi} \ln r + C_1; \quad U_m = -\frac{i}{2\pi} \theta + C_2.$$

Чтобы интервал между двумя линиями равного потенциала соответствовал определенному приращению  $\Delta U_m$  потенциала, эти линии должны отстоять друг от друга на равные углы  $\Delta\theta$ .

Для того чтобы линии напряженности поля делили поле на трубки равного потока, необходимо соблюсти для двух соседних  $\nu$ -той и  $(\nu + 1)$ -ой линий условие:

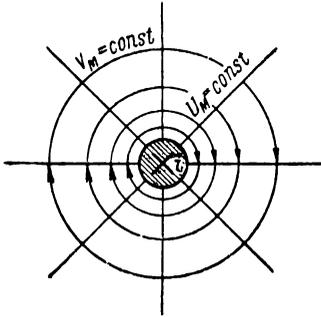


Рис. 62.

$$\begin{aligned}\Delta V_m &= -\frac{i}{2\pi} (\ln r_{\nu+1} - \ln r_\nu) = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = \text{const},\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = N = \text{const}.$$

Следовательно, радиусы линий напряженности поля должны возрастать в геометрической прогрессии, знаменатель которой можно выбрать произвольно.

На рис. 62 изображено магнитное поле уединенного провода, причем принято  $N = 1,5$  и  $\Delta\theta = \pi/4$ .

В том случае, когда имеется  $n$  линейных проводов с токами, можно воспользоваться принципом наложения и находить комплексный потенциал из выражения:

$$\zeta = V_m + jU_m = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \ln(z - z_k) + C,$$

где  $z_k$  определяет точку, через которую проходит провод с током  $i_k$ .

Сравнивая полученные выражения для потенциала и функции потока магнитного поля линейных проводов с токами с соответственными выражениями для потенциала и функции потока электрического поля линейных заряженных проводов (§ 18) и сопоставляя картину магнитного поля на рис. 62 с картиной электрического поля на рис. 16, мы замечаем их соответствие с той лишь разницей, что  $U$  и  $V$  поменялись местами. Отсюда следует замечательный вывод:

*картина магнитного поля линейных токов совпадает с картиной электрического поля линейных зарядов, если токи и заряды распределены в пространстве одинаково. Различие между этими картинками заключается лишь в том, что на месте линий напряженности электрического поля располагаются линии равного магнитного потенциала и на месте линий равного электрического потенциала располагаются линии напряженности магнитного поля.*

Поэтому достаточно построить только картину одного поля, электрического или магнитного, второе же получается на основе только что высказанного положения, которое можно назвать *принципом соответствия* плоскопараллельных электрического и магнитного полей.

## 52. Прямолинейный провод с током во внешнем однородном поле

Функция  $\zeta = Dz + C$  определяет собой однородное магнитное поле. Действительно, имеем:

$$\zeta = V_m + jU_m = Dx + jDy + C_1 + jC_2.$$

Линии напряженности поля суть прямые, параллельные оси  $OY$ . Они выражаются уравнением:

$$V_m = Dx + C_1 = \text{const}$$

или

$$x = \text{const.}$$

Вектор напряженности поля направлен параллельно оси  $OY$ . Напряженность поля равна:

$$H_y = -\frac{\partial V_m}{\partial x} = -D = -H_0.$$

На основании принципа наложения мы можем утверждать, что функция

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi} \ln z + H_0 z + C$$

определяет собой поле прямолинейного провода с током  $i$  во внешнем однородном поле, напряженность которого  $H_y = -H_0$ . Так как

$$\ln z = \ln r + j\theta = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + j \arctg \frac{y}{x},$$

то уравнение линий напряженности поля может быть написано в виде:

$$V_m = -\frac{i}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + H_0 x + C_1 = \text{const.},$$

а уравнение линий равного потенциала может быть представлено в виде:

$$U_m = -\frac{i}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} + H_0 y + C_2 = \text{const.}$$

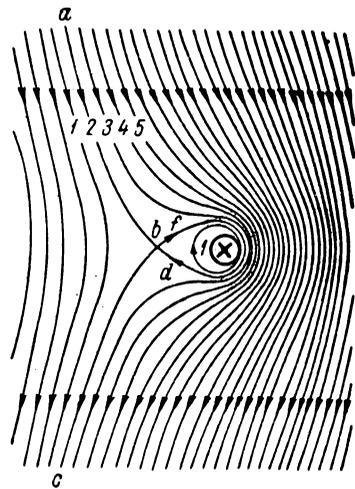


Рис. 63.

Такое поле изображено на рис. 63. В точке  $b$  напряженность поля равна нулю. Линию напряженности поля, проходящую через эту точку и помеченную вторым номером, можно рассматривать как одну линию  $abfdbc$ . В таком случае она подобна линиям 3, 4 и 5, расположенным вправо от провода с током. Ее можно рассматривать так же, как две линии: линию  $abc$  и замкнутую линию  $bfdb$ . В таком случае она подобна двум линиям, отмеченным первым номером, из которых одна проходит слева от провода, а другая охватывает провод.

### § 53. Поле проводов, имеющих конечное сечение произвольной формы

При исследовании магнитного поля вблизи массивных проводов, имеющих сечение сложной формы, эти провода уже нельзя рассматривать как линейные. Разобьем провод на бесконечно тонкие параллельные нити. Координаты центра

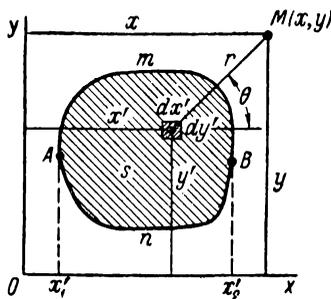


Рис. 64.

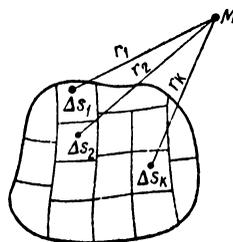


Рис. 65.

сечения нити в плоскости  $XOY$  обозначим через  $x'$  и  $y'$  (рис. 64). Поверхность сечения нити равна  $ds = dx'dy'$ . Каждая такая нить является линейным проводом с током  $di = \delta ds$ , где  $\delta$  — плотность тока, и по отношению к ней справедливы полученные выше выражения для функции потока и потенциала. Функция потока и потенциал, определяемые в точке  $M(x, y)$  током  $i$ , протекающим во всем проводе, получаются суммированием функций потока и потенциалов, определяемых в этой точке токами, протекающими в отдельных нитях. Следовательно, выражения для величин  $V_M$  и  $U_M$  в точке  $M(x, y)$  должны быть получены интегрированием по сечению  $s$  провода выражений для функции потока и потенциала, определяемых в точке  $M(x, y)$  токами в нитях. Таким образом, можно написать:

$$V_M = - \int_s \frac{\delta}{2\pi} \ln r ds + C_1; \quad U_M = - \int_s \frac{\delta}{2\pi} \theta ds + C_2,$$

где  $r$  — расстояние от центра сечения нити тока до точки  $M(x, y)$  и  $\theta$  — угол, составляемый осью  $Ox$  с радиусом-вектором  $r$ .

Формулой для  $U_M$  можно пользоваться лишь при рассмотрении поля вне проводника с током, так как понятие скалярного потенциала только здесь имеет смысл. Формула же для  $V_M$  пригодна как вне провода с током, так и внутри него.

Полученное общее выражение функции потока в случае  $\delta = \text{const}$  может быть написано в виде:

$$V_M = -\frac{\delta s}{2\pi} \frac{1}{s} \int_s \ln r ds + C_1 = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{s} \int_s \ln r ds + C_1,$$

где  $s$  — поверхность сечения провода. Величину  $\frac{1}{s} \int_s \ln r ds$ , входящую в это выражение, обозначают следующим образом:

$$\frac{1}{s} \int_s \ln r ds = \ln g.$$

Здесь  $r$  — расстояние от точки  $M$  до элемента  $ds$  поверхности. Величину  $g$  называют *средним геометрическим расстоянием* от точки  $M$  до площади  $s$ . Поясним этот термин. Разобьем площадь  $s$  на  $n$  равных частей  $\Delta s$  (рис 65) так, что  $s = n\Delta s$ . Среднее геометрическое всех  $n$  расстояний от точки  $M$  до центров всех площадок  $\Delta s$  равно  $g = \sqrt[n]{r_1 r_2 \dots r_n}$  или

$$\ln g = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln r_k = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=n} \ln r_k \Delta s.$$

Увеличивая число площадок, получаем в пределе при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\ln g = \frac{1}{s} \int_s \ln r ds.$$

Таким образом, имеем:

$$V_M = -\frac{i}{2\pi} \ln g + C_1.$$

Ясно, что среднее геометрическое расстояние от точки до плоской поверхности зависит только от формы контура, ограничивающего эту поверхность, и от положения точки по отношению к этой поверхности.

### § 54. Поле проводов кругового сечения

Поле вне провода кругового сечения такое же, как если бы весь ток  $i$  проходил по оси провода. Поэтому вне провода, согласно полученному в § 51, имеем:

$$V_M = -\frac{i}{2\pi} \ln r_0 + C_1,$$

где  $r_0$  — расстояние от точки  $M$ , в которой определяется  $V_M$  до центра сечения.

Найдем выражение для функции потока внутри провода. Напряженность поля на расстоянии  $r_0$  от оси провода опреде-

ляется на основании закона полного тока и соображений симметрии:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H 2\pi r_0 = \delta \pi r_0^2 = i \frac{r_0^2}{R^2},$$

где  $R$  — радиус сечения провода ( $r_0 < R$ ). Имеем:

$$H = i \frac{r_0}{2\pi R^2}.$$

Поток вектора  $\mathbf{H}$  сквозь площадку, имеющую длину в направлении оси провода, равную единице, и ширину  $dr_0$ , имеет величину  $H dr_0$ . Следовательно,

$$dV_{\mathcal{M}} = -H dr_0 = -\frac{ir_0}{2\pi R^2} dr_0.$$

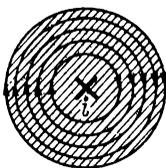


Рис. 66.

Знак «минус» необходимо поставить, так как  $V_{\mathcal{M}}$  и  $r_0$  возрастают при  $i > 0$  в противоположных направлениях.

Интегрируя, находим:

$$V_{\mathcal{M}} = -i \frac{r_0^2}{4\pi R^2} + C_1.$$

Подразделяя поле на трубки равного потока  $\Delta V_{\mathcal{M}}$ , получаем:

$$\Delta V_{\mathcal{M}} = -\frac{i}{4\pi R^2} (r_{0, \nu+1}^2 - r_{0, \nu}^2) = \text{const}$$

или

$$r_{0, \nu+1}^2 = r_{0, \nu}^2 + K.$$

Так как внутренний радиус внутренней трубки равен нулю, то имеем связь между радиусами линий магнитной индукции:

$$r_{0,1}^2 = K, \quad r_{0,2}^2 = r_{0,1}^2 + K = 2K, \dots, r_{0,\nu}^2 = \nu K.$$

На рис. 66 изображено поле внутри провода, причем поток подразделен на пять трубок равного потока.

### § 55. Поле двухпроводной линии передачи

Магнитное поле нескольких постоянных токов, протекающих в прямолинейных проводах, имеющих круговые сечения любых размеров, вне проводов такое же, как если бы эти токи протекали по линейным проводам, совмещенным с осями действительных проводов. В самом деле, постоянное магнитное поле соседних проводов не индуцирует в теле данного провода электродвижущих сил. Поэтому распределение тока в теле каждого провода остается таким же, как и в том случае, когда этот провод уединен. Так как магнитное поле тока, протекающего в уединенном про-

воде кругового сечения, вне провода такое же, как если бы весь ток был сосредоточен на оси провода, то и при любом числе проводов кругового сечения при рассмотрении поля вне проводов можно их заменить линейными проводами, совмещенными с геометрическими осями действительных проводов. Необходимо подчеркнуть, что это правило справедливо только по отношению к пространству вне проводов, только при постоянном токе и только в том случае, если магнитная проницаемость материала проводов равна магнитной проницаемости окружающей среды, например, в случае медных или алюминиевых проводов в воздухе.

Такое правило неверно по отношению к электрическому полю нескольких массивных проводов кругового сечения, так как близость соседних проводов вызывает перераспределение заряда на поверхности данного провода.

Для построения картины магнитного поля токов, протекающих в двух линейных проводах, образующих двухпроводную линию передачи, воспользуемся ранее рассчитанной картиной электрического поля двух заряженных линейных проводов (рис. 20), заменив в этой картине на основании принципа соответствия (§ 51) линии напряженности электрического поля линиями равного магнитного потенциала и линии равного электрического потенциала — линиями напряженности магнитного поля. Выражения для функции потока и для потенциала имеют вид:

$$V_m = -\frac{1}{2\pi} (i_1 \ln r_1 + i_2 \ln r_2) + C_1 = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_1;$$

$$U_m = -\frac{1}{2\pi} (i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2) + C_2 = \frac{i}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) + C_2,$$

так как  $i_1 = -i_2 = i$ .

Линии напряженности поля суть окружности с центрами на прямой, пересекающей с осями проводов. Координаты центров и радиусы этих окружностей определяются из выражений, полученных в § 20 при расчете электрического поля. Линиями равного магнитного потенциала являются дуги окружностей, проходящих через оси сбоя проводов. На рис. 67 изображена картина магнитного поля двухпроводной линии передачи.

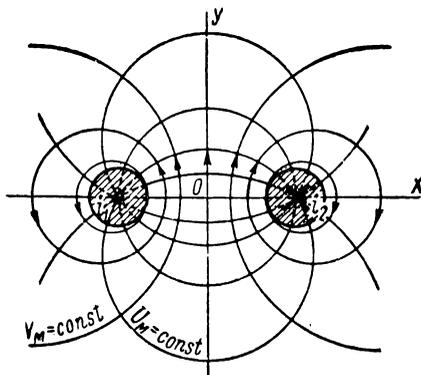


Рис. 67.

В реальных условиях провода имеют сечения конечных размеров. При этом вне проводов поле такое же, как если бы токи были сосредоточены на геометрических осях проводов. В этом отношении магнитное поле отличается от электрического, так как электрическое поле около проводов кругового сечения оказывается таким же, как если бы заряды были сосредоточены на электрических осях проводов, не совпадающих с их геометрическими осями. Внутри проводов магнитные линии представляют собой сложные кривые. Так, внутри прямого провода функция потока имеет выражение:

$$V_m = -\frac{ir_1^2}{4\pi R^2} + \frac{i}{2\pi} \ln r_2 + C_1,$$

и линии  $V_m = \text{const}$  имеют сложную форму.

### § 56. Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями

Если линии магнитной индукции пересекают поверхность раздела двух участков магнитной цепи, имеющих различные магнит-

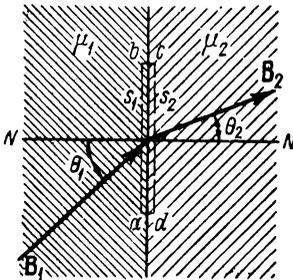


Рис. 68.

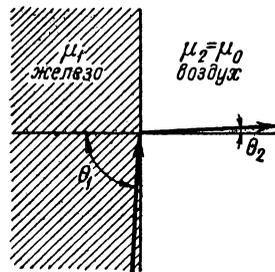


Рис. 69.

ные проницаемости, под некоторым углом к нормали к этой поверхности, то на поверхности раздела линии магнитной индукции изменяют свое направление.

Найдем общие условия, которым подчиняются составляющие векторов магнитной индукции и напряженности поля на границе двух сред с различными абсолютными магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Обе среды будем предполагать однородными и изотропными. Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы между направлением линии магнитной индукции и направлением нормали к поверхности раздела в первой и во второй среде (рис. 68). Составим линейный интеграл вектора  $\mathbf{H}$  по контуру  $abcd$ , стороны которого  $ab$  и  $cd$  лежат в разных средах бесконечно близко к поверхности раздела. Имеем:

$$\int_{abcd} \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1 \sin \theta_1 ab - H_2 \sin \theta_2 cd = 0,$$

так как сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования, не проходит электрический ток. Принимая во внимание, что  $ab = cd$ , получаем:

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2,$$

т. е. на поверхности раздела равны касательные составляющие вектора  $\mathbf{H}$ .

Представим себе замкнутую поверхность, образованную двумя плоскими поверхностями  $s_1$  и  $s_2$ , следы которых в плоскости рисунка суть линии  $ab$  и  $cd$ , и цилиндрической поверхностью, пересекающейся с плоскостью рисунка по линиям  $bc$  и  $ad$ . Магнитный поток сквозь эту поверхность равен нулю. Следовательно,

$$\int_{s_1} \mathbf{B} ds + \int_{s_2} \mathbf{B} ds = -B_1 \cos \theta_1 s_1 + B_2 \cos \theta_2 s_2 = 0,$$

откуда, приняв во внимание, что  $s_1 = s_2$ , находим:

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2,$$

т. е. на поверхности раздела равны нормальные составляющие вектора  $\mathbf{B}$ .

Из условий на поверхности раздела для векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  имеем:

$$\frac{B_1 \cos \theta_1}{H_1 \sin \theta_1} = \frac{B_2 \cos \theta_2}{H_2 \sin \theta_2} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Большое практическое значение имеет вопрос о характере магнитного поля в воздухе около поверхностей стальных частей машин, трансформаторов, электромагнитов и других электротехнических устройств. Магнитные проницаемости ферромагнитной среды и воздуха сильно разнятся между собой. Для воздуха практически  $\mu_2 = \mu_0$ . Пусть для ферромагнитной среды  $\mu_1 = 1000 \mu_0$ . В таком случае имеем:  $\operatorname{tg} \theta_1 = 1000 \operatorname{tg} \theta_2$ . Если линии магнитной индукции внутри ферромагнитной среды (рис. 69) составляют с нормалью угол  $\theta_1 = 89^\circ$ , то соответствующий угол в воздухе оказывается равным  $\theta_2 \approx 3^\circ 20'$ . Поэтому во всех случаях, когда магнитное поле создается токами, протекающими по проводникам, расположенным в воздухе, практически можно принять  $\theta_2 = 0$ , т. е. считать, что линии магнитной индукции в воздухе нормальны к поверхностям тел из ферромагнитных материалов.

## § 57. Поле токов вблизи плоских поверхностей ферромагнитных тел. Метод зеркальных изображений

Пусть около бесконечной плоскости, ограничивающей ферромагнитную среду, для которой примем  $\mu = \infty$ , расположен в воздухе параллельно плоскости провод с током  $i$  (рис. 70). Поверхность ферромагнитной среды является поверхностью равного

магнитного потенциала, так как линии напряженности поля в воздухе к ней перпендикулярны.

Удалим мысленно ферромагнитную среду, заменив ее током  $i'$ , являющимся зеркальным изображением в поверхности раздела действительного тока  $i$ . Ток  $i'$  примем равным току  $i$  и имеющим то же направление.

Средняя плоскость между действительным током и его зеркальным изображением, совпадающая с поверхностью раздела

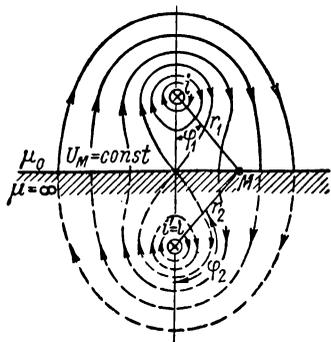


Рис. 70.

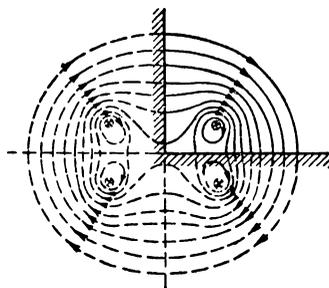


Рис. 71.

в действительной задаче, является плоскостью равного магнитного потенциала. Это вытекает хотя бы из того, что линии магнитной индукции, охватывающие оба тока, должны расположиться симметрично относительно этой плоскости, что возможно только, если они ее пересекают под прямым углом.

Итак, после замены ферромагнитной среды током  $i'$  условия на граничной плоскости не изменились. Остался без изменения и ток  $i$  в области действительного поля. Поэтому мы приходим к следующему весьма существенному выводу: поле прямолинейного тока  $i$ , проходящего в воздухе параллельно плоской поверхности массивного тела из ферромагнитного материала, совпадает в воздухе с полем, которое образуется двумя токами — действительным током  $i$  и его зеркальным изображением  $i' = i$  в поверхности тела в предположении, что ферромагнитная среда удалена.

Основанный на этом положении метод расчета поля называют методом зеркальных изображений. С аналогичным методом мы ознакомились в главе о расчете электростатического поля. Однако электрические заряды должны быть отражены в поверхности проводящей среды с изменением знака заряда, ток же отражается в поверхности ферромагнитной среды без изменения направления.

Метод зеркальных изображений, очевидно, может быть распространен на случай любого числа проводников с токами, причем проводники могут иметь сечения любой формы. Этот метод, так же,

как и в случае электростатического поля, может быть использован, когда две поверхности, ограничивающие ферромагнитную среду, сходятся под углом  $\alpha = \pi/n$ , где  $n$  — целое число, причем угол  $\alpha$  отсчитывается в воздухе. Поле при  $\alpha = \pi/2$  показано на рис. 71.

### § 58. Графический метод построения картины поля

В сложных случаях аналитический расчет поля оказывается невозможным и приходится прибегать к приближенным графическим методам построения картины поля. Такой метод весьма полезен при построении картины поля около стальных полюсов электрических машин и аппаратов. На помощь нам при это приходит то обстоятельство, что линии магнитной индукции в воздухе около полюсов нормальны к их поверхностям, и, следовательно, поверхности полюсов можно считать поверхностями равного магнитного потенциала. Такое условие верно в том случае, когда поле создается токами, проходящими по проводникам и обмоткам, расположенным в воздухе, что обычно и имеет место. Установим сначала метод построения картины поля в области, не занятой проводниками с токами, создающими исследуемое поле, т. е. около тех частей полюсов, которые выступают за пределы обмоток с током, наложенных на сердечники полюсов. Если, помимо того, в данной области пространства поле приближенно можно считать плоскопараллельным, то, очевидно, следует руководствоваться правилами, аналогичными тем, которые были установлены в § 23 для построения электрического поля, а именно:

1) линии напряженности поля и линии равного магнитного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом;

2) поверхности ферромагнитных сред следует считать поверхностями равного магнитного потенциала, и линии напряженности поля в воздухе следует проводить перпендикулярно к ним;

3) ячейки сетки, образованной линиями напряженности поля и линиями равного потенциала, при достаточной густоте сетки должны быть приблизительно подобны друг другу.

Обозначим средние размеры ячейки сетки в направлении линии напряженности поля через  $\Delta n$  и в направлении линии равного магнитного потенциала через  $\Delta a$ . Тогда последнее правило можно выразить в форме

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = k = \text{const.}$$

Путем ряда последовательных приближений удастся нарисовать картину поля, удовлетворяющую всем указанным требованиям. На рис. 72 построена таким способом картина поля около полюсов электрической машины.

Если построена картина поля, то из нее может быть найдено магнитное сопротивление  $R_m$  или магнитная проводимость  $G_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi}{F}$  воздушного промежутка между полюсом и якорем, причем  $\Phi$  — магнитный поток в рассматриваемом промежутке

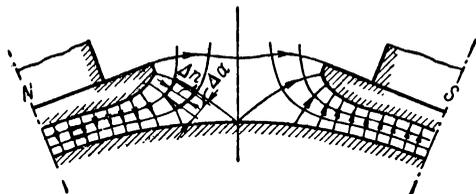


Рис. 72.

и  $F$  — м. д. с. на длине промежутка. Если  $m_1$  — число трубок магнитной индукции, то

$$\Phi = m_1 \Delta \Phi = m_1 l \mu_0 H \Delta a,$$

где  $\Delta \Phi$  — поток в одной трубке и  $l$  — длина в направлении оси  $OZ$  (перпендикулярном плоскости рисунка).

Если  $m_2$  — число интервалов между соседними линиями равного потенциала, то  $F = m_2 \Delta U_m = m_2 H \Delta n$ , где  $\Delta U_m$  — изменение потенциала на протяжении одного интервала.

Таким образом,

$$G_m = \mu_0 l \frac{\Delta a}{\Delta n} \cdot \frac{m_1}{m_2} = l \lambda.$$

Величина  $\lambda$  представляет собой магнитную проводимость на единицу длины в направлении оси  $OZ$ . Она зависит исключительно от конфигурации рассматриваемого участка магнитной цепи.

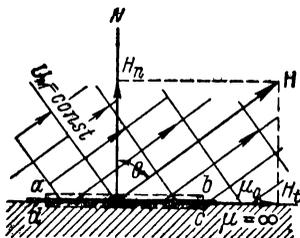


Рис. 73.

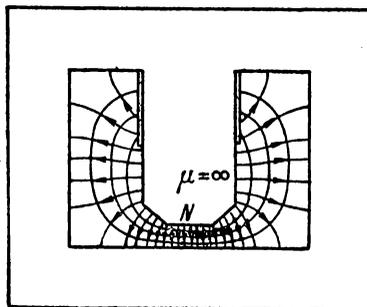


Рис. 74.

Приведенные правила построения картины поля справедливы только в области, не занятой электрическим током. В области, где расположены проводники или катушки с током, эти правила неприменимы, так как здесь теряет смысл понятие скалярного магнитного потенциала. Для построения приближенной картины поля и в тех местах, где около сердечника полюса расположены катушки с током, поступают следующим образом. Сжимают сечение катушки в направлении к поверхности сердечника до нулевых

размеров. Иначе говоря, предполагают, что ток течет по бесконечно тонкому слою, прилегающему к поверхности сердечника. При таком предположении во всем пространстве около полюса токов нет, и понятие скалярного магнитного потенциала может быть использовано. При этом поле всюду должно удовлетворять первому и третьему условиям. Однако второе условие — перпендикулярность линий напряженности поля к поверхности ферромагнитной среды — сохраняется только там, где на поверхности ферромагнитной среды нет токов. В местах, где имеются распределенные поверхностные токи, соответствующие токам в катушках, это условие не соблюдается. Рассмотрим плоскую поверхность ферромагнитной среды, по которой протекает в тонком слое ток (рис. 73). Пусть ток протекает в направлении, нормальном к плоскости рисунка. Составим линейный интеграл вектора  $\mathbf{H}$  по контуру  $abcd$ . Если для ферромагнитной среды принять  $\mu = \infty$ , то будем иметь внутри ферромагнитной среды  $H = 0$ . Пусть  $ad$  и  $bc$  весьма малы по сравнению с  $ab$ . Тогда

$$\oint_{abcd} \mathbf{H} dl = H ab,$$

где  $H_t$  — касательная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  в воздухе около поверхности ферромагнитной среды. Но этот интеграл равен току  $i$ , проходящему сквозь контур  $abcd$ . Поэтому

$$H_t = \frac{i}{ab},$$

т. е. касательная составляющая напряженности поля в воздухе отлична от нуля и равна линейной плотности тока. Следовательно, линии напряженности поля около таких поверхностей не перпендикулярны к ним. Направление линий остается неизвестным, так как неизвестна нормальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$ .

При построении поля поступают следующим образом. Строят сначала поле около тех частей полюсов, где нет токов, пользуясь вышеизложенными правилами. Поверхности полюсов в этих местах считают равнопотенциальными. Остальные линии равного потенциала этого поля подводят к соответствующим точкам контура полюса в местах, где протекают поверхностные токи. Положение этих точек зависит от распределения тока в поверхностном слое. Разность потенциалов двух соседних линий равна току, протекающему между соответствующими двумя точками, к которым необходимо подвести эти линии. Линии равного потенциала так же, как и линии напряженности поля, в местах, где протекают токи, наклонны к контуру полюса (рис. 73). Затем строят все поле, стремясь к тому, чтобы всюду удовлетворялись первое и третье требования. Когда это удастся — поле построено правильно. На рис. 74 приведен пример построенного таким путем поля около полюса, обтекаемого током.

Если поле создается несколькими токами и при этом легко может быть построено поле каждого тока в отдельности, то для построения результирующего поля можно применить графический метод наложения полей, предложенный Максвеллом.

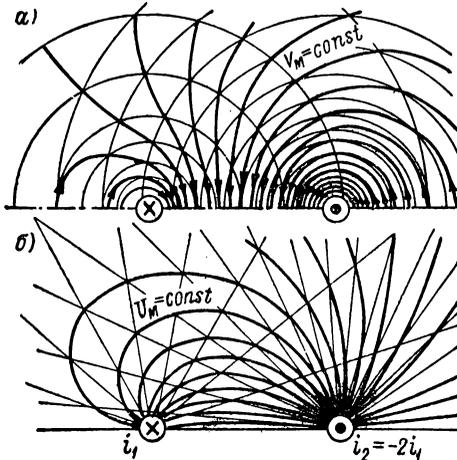


Рис. 75.

на этой линии, имеем:  $\Delta V_{M1} + \Delta V_{M2} \stackrel{!}{=} 0$ , т. е.  $\Delta V_{M1} = -\Delta V_{M2}$ .

Если при построении отдельных полей соблюдено условие  $|\Delta V_{M1}| = |\Delta V_{M2}|$ , то ряд точек пересечения линий напряженности отдельных полей будет принадлежать одной и той же линии напряженности результирующего поля. Для того чтобы перейти от одной такой точки к другой, необходимо, переходя в одном поле на соседнюю линию, переходить и в другом поле также на соседнюю линию. При этом если токи  $i_1$  и  $i_2$  одинаково направлены, то, удаляясь от одного тока, следует приближаться к другому; если же токи  $i_1$  и  $i_2$  имеют разные направления, то следует одновременно удаляться от обоих токов или одновременно приближаться к ним. Практически это означает, что линия напряженности результирующего поля переходит через ячейку сетки, получающейся от наложения отдельных полей, по криволинейной диагонали этой ячейки, причем следует избрать ту или иную диагональ в зависимости от знаков токов. На рис. 75, а (верхняя часть рисунка) построена картина линий напряженности поля при  $i_2 = -2i_1$  и на рис. 76, а при  $i_2 = 2i_1$ . Аналогичный прием может быть использован для построения картины линий равного магнитного потенциала результирующего

Пусть имеется два параллельных провода кругового сечения с токами  $i_1$  и  $i_2$  в однородной среде. Картины поля каждого тока в отдельности строятся весьма просто (§ 51).

Построим на одном рисунке картину линий напряженности поля тока  $i_1$  и картину линий напряженности поля тока  $i_2$  с такой густотой, чтобы имело место равенство  $|\Delta V_{M1}| = |\Delta V_{M2}|$ . При соблюдении этого условия получающаяся в итоге наложения двух полей сетка позволяет легко построить картину линий напряженности результирующего поля обоих токов  $i_1$  и  $i_2$ . Действительно, уравнение линии напряженности результирующего поля имеет вид:  $V_{M1} + V_{M2} = \text{const}$ , и, следовательно, для любых двух точек, лежащих

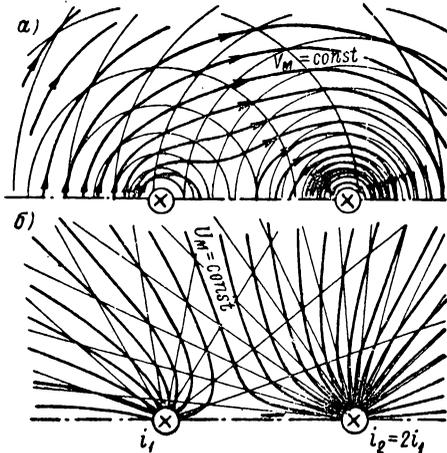


Рис. 76.

шего поля, которые описываются уравнением:  $U_{m1} + U_{m2} = \text{const}$ . На рис. 75, б (нижняя часть рисунка) осуществлено такое построение для случая  $i_2 = -2i_1$  и на рис. 76, б для случая  $i_2 = 2i_1$ .

Если мы наложим картины линий напряженности на картины линий равного магнитного потенциала результирующего поля для соответствующих случаев, то получим ортогональную сетку.

Пользуясь принципом соответствия плоскопараллельных электрического и магнитного полей (§ 51), мы можем утверждать, что для двух заряженных линейных проводов рис. 75, а и рис. 76, а дают картины линий равного электрического потенциала при  $\tau_2 = -2\tau_1$  и при  $\tau_2 = 2\tau_1$  и, соответственно, рис. 75, б и рис. 76, б дают картины линий напряженности электрического поля. Этот метод может быть использован и в более сложных случаях. Например, если поле в электромагните создается токами в двух катушках, и построены поля, создаваемые отдельно током в одной и током в другой катушке, то указанным методом легко построить результирующее поле как при  $i_2/i_1 > 0$ , так и при  $i_2/i_1 < 0$ .

### § 59. Пространственная задача. Поле кругового контура с током

Расчет магнитных полей токов, протекающих по контурам, имеющим во всех направлениях конечные размеры, представляет собой весьма сложную задачу. При этом все величины, характеризующие поле, являются функциями трех координат. Общий метод решения заключается в случае однородной среды в нахождении по заданному распределению токов векторного потенциала по формулам, указанным в § 46. Вектор магнитной индукции находится из соотношения  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

Простейший случай пространственной задачи — поле токов, протекающих по круговым контурам, лежащим в параллельных плоскостях и имеющим центры на общей оси. Достаточно рассмотреть картину такого поля в одной плоскости, проходящей через эту ось, так как все поле получается вращением найденной картины вокруг оси. Сюда относится важный случай магнитного поля катушек с током, состоящих из круговых витков.

Определим поле одного кругового контура с током  $i$  (рис. 77). Естественно рассматривать поле в цилиндрических координатах  $z$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ . Начало координат поместим в центре контура с током. Ось  $OZ$  направим перпендикулярно плоскости контура.

Пусть поперечные размеры сечения  $s$  проводника весьма малы по сравнению с радиусом  $R$  кольца. Рассматривая поле на расстояниях от проводника значительно больших поперечных размеров его сечения, можем вычислять векторный потенциал по формуле (§ 46):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \frac{i \, dl}{r}.$$

Интегрирование производится вдоль всего контура с током. Вследствие симметрии относительно оси  $OZ$  линии векторного потенциала должны быть окружностями, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости контура тока, и имеющими центры на оси  $OZ$ . Следовательно,  $\mathbf{A}$  имеет единственную составляющую  $A_\alpha$ . Она равна:

$$A = A_\alpha = \frac{\mu}{4\pi} \oint_i \frac{i \cos \alpha \, dl}{r}.$$

Так как

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \alpha}; \quad dl = R d\alpha,$$

то

$$A = \frac{\mu i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \alpha}}.$$

Приведем этот интеграл к эллиптическим интегралам, для которых имеются таблицы. Положим:

$$\alpha = \pi - 2\beta; \quad d\alpha = -2d\beta;$$

$$\frac{4R\rho}{z^2 + (R + \rho)^2} = k^2.$$

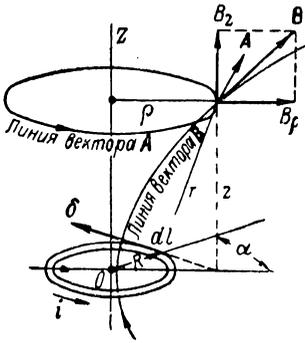


Рис. 77.

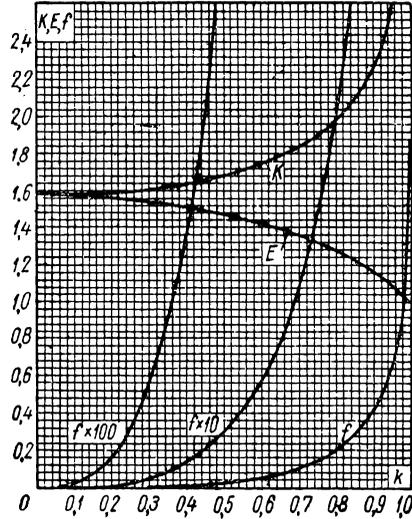


Рис. 78.

Число  $k$  лежит в пределах  $0 \leq k \leq 1$ . Значение  $k = 1$  получается при  $z = 0$  и  $\rho = R$ , т. е. на оси контура с током, который мы предполагаем весьма тонким. Здесь  $A$  обращается в бесконечность, но, как было отмечено, принятая упрощенная формула для  $A$  может быть использована только на достаточном расстоянии от проводника. Имеем:

$$\cos \alpha = -\cos 2\beta = 2 \sin^2 \beta - 1;$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2 + \rho^2 - 4R\rho \sin^2 \beta + 2R\rho} = \frac{2\sqrt{R\rho}}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}.$$

Следовательно,

$$A = -\frac{\mu i}{8\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$$

или

$$A = \frac{\mu i}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta = \frac{\mu i}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} f(k).$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right),$$

можем написать:

$$f(k) = \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E,$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$$

и

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta$$

представляют собой полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Они являются функциями модуля  $k$ . На рис. 78 приведены кривые, выражающие эти функции, и кривые, дающие величину  $f(k)$ , входящую в выражение для векторного потенциала.

Линии магнитной индукции исследуемого поля лежат в плоскостях, проходящих через ось  $OZ$ . Вектор магнитной индукции имеет только две составляющие  $B_z$  и  $B_\rho$ , которые находятся из выражений:

$$B_z = \text{rot}_z \mathbf{A}, \quad B_\rho = \text{rot}_\rho \mathbf{A}.$$

Для вычисления этих составляющих необходимо использовать выражения составляющих вектора  $\text{rot} \mathbf{A}$  через составляющие вектора  $\mathbf{A}$  в цилиндрических координатах.

## § 60. Выражение скалярного потенциала через телесный угол, под которым виден контур тока

Покажем, что скалярный магнитный потенциал  $U_M$  в некоторой точке  $M$  поля замкнутого тока  $i$  пропорционален телесному углу  $\omega$ , под которым видна из этой точки поверхность, ограниченная контуром тока (рис. 79). При перемещении из точки  $M$  в точку  $M'$  на расстоянии  $dl'$  потенциал получает приращение:

$$dU_M = -H \cos \alpha dl' = -H dl'.$$

Точно такое же приращение получил бы потенциал в точке  $M$ , если весь контур переместить самому себе параллельно на расстояние  $-dl'$  в противоположном направлении.

Выделим элемент длины  $dl$  контура тока и рассмотрим приращение потенциала  $dU'_M$  в точке  $M$ , вызванное перемещением этого элемента по пути  $-dl'$  (рис. 80). Имеем:

$$dU'_M = -dN dl',$$

где  $dH$  — напряженность поля в точке  $M$  от тока  $i$  в элементе  $dl$ . Согласно закону Био—Савара—Лапласа

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{r^2} \left[ dl \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right].$$

Следовательно,

$$dU'_M = -\frac{1}{4\pi} \frac{i}{r^2} dl' \left[ dl \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{i}{4\pi r^2} [-dl' \cdot dl] \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Но  $[-dl' \cdot dl] = ds$  есть вектор, нормальный к площадке, описываемой отрезком  $dl$  при перемещении его на пути  $-dl'$  и равный по величине этой

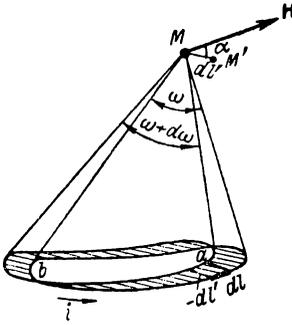


Рис. 79.

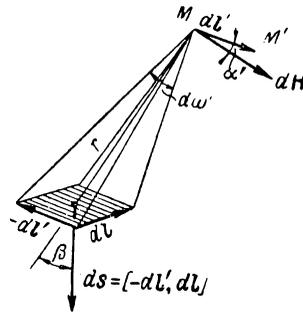


Рис. 80.

площадке. Следовательно,  $ds \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos \beta ds$  есть проекция этой площадки на сферу радиуса  $r$  с центром в точке  $M$ , и  $\frac{1}{r^2} \left( ds \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = d\omega'$  есть телесный угол, под которым видна площадка из точки  $M$ . Итак,

$$dU'_M = \frac{i}{4\pi} d\omega'.$$

Чтобы получить изменение  $dU_M$  потенциала, вызванного в точке  $M$  током во всем замкнутом контуре (рис. 79), необходимо просуммировать величины  $dU'_M$  по всем элементам  $dl$  контура. При этом, суммируя в правой части величины  $d\omega'$ , получим телесный угол  $d\omega$ , под которым видна из точки поверхность, описываемая всем контуром при перемещении его на пути  $-dl'$ . Очевидно,  $d\omega$  есть приращение телесного угла  $\omega$ , под которым видна из точки  $M$  поверхность, ограниченная контуром тока. Таким образом,

$$dU_M = \frac{i}{4\pi} d\omega \quad \text{и} \quad U_M = \frac{i}{4\pi} \omega + C.$$

Если положить  $U_M = 0$  в бесконечно удаленных от контура тока точках, для которых  $\omega = 0$ , то будем иметь  $C = 0$  и

$$U_M = \frac{i}{4\pi} \omega.$$

Телесный угол  $\omega$  положителен, если из точки  $M$  ток в контуре кажется направленным против часовой стрелки (рис. 79).

### § 61. Магнитное поле контура произвольной формы на большом расстоянии от контура

Обозначим через  $r$  расстояние точки  $M$ , в которой ищется потенциал  $U_M$ , от некоторой точки  $O$  внутри контура (рис. 81). Пусть  $r$  много больше линейных размеров контура. Пусть  $ON$  — направление от  $O$  к  $M$ , при котором при заданном  $r$  телесный угол  $\omega$  получается наибольшим, равным  $\omega_{\text{макс}}$ . При всяком другом направлении, составляющем с этим направлением угол  $\varphi$ , при том же  $r$  будем иметь  $\omega = \omega_{\text{макс}} \cos \varphi$ . Но  $\omega_{\text{макс}} = \frac{s}{r^2}$ , где  $s$  — часть поверхности сферы радиуса  $r$ , вырезаемая центральным конусом с телесным углом  $\omega_{\text{макс}}$ . Таким образом, согласно выражению  $U_M = \frac{i}{4\pi} \omega$  имеем:

$$U_M = \frac{is}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2}.$$

В случае плоского контура, при  $r$  много больше, чем размеры контура,  $s$  есть площадь, ограниченная контуром, и  $ON$  — направление нормали к ней.

Так как произведение  $is = p$  есть магнитный момент тока  $i$  в замкнутом контуре, то формулу для  $U_M$  можно представить в виде:

$$U_M = \frac{p \cos \varphi}{4\pi r^3}.$$

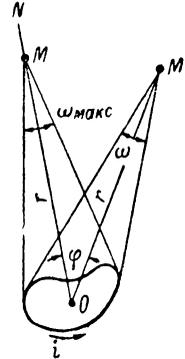


Рис. 81.

Составляющие напряженности поля на больших расстояниях от контура имеют выражения:

$$H_r = -\frac{\partial U_M}{\partial r} = \frac{2p \cos \varphi}{4\pi r^3}, \quad H_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_M}{\partial \varphi} = \frac{p \sin \varphi}{4\pi r^3}.$$

Из изложенного вытекает следующее важное положение. На больших расстояниях от контура тока напряженность магнитного поля убывает обратно пропорционально кубу расстояния и характер поля совершенно не зависит от формы контура тока. Напряженность поля полностью определяется магнитным моментом.

Весьма интересно отметить, что характер магнитного поля на больших расстояниях от контура тока такой же, как и характер электрического поля диполя на больших от него расстояниях. Это становится ясным, если сопоставить полученные в настоящем параграфе формулы с формулами в § 10 для поля электрического диполя.

### § 62. Тело во внешнем магнитном поле. Аналогия с электростатической задачей

Задача о расчете магнитного поля при наличии во внешнем магнитном поле тела из вещества с абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu$  аналогична рассмотренной в § 26 и 27 задаче о расчете электрического поля при наличии во внешнем электрическом поле тела из диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

Действительно, как уравнения поля, так и граничные условия аналогичны в обоих случаях.

В случае магнитного поля имеем во всей интересующей нас области пространства  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ , так как в этой области отсутствуют макроскопические токи. Следовательно, уравнения магнитного поля имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

В соответствующей электростатической задаче в рассматриваемой области пространства  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ , так как в этой области нет свободных зарядов. Поэтому уравнения электрического поля имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Заметим, что уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  эквивалентны уравнениям:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} U_m \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} U.$$

Граничными условиями у поверхности тела, внесенного во внешнее магнитное поле, являются равенство в обеих средах нормальных составляющих вектора магнитной индукции и касательных составляющих вектора напряженности поля:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{и} \quad H_{t1} = H_{t2}.$$

В случае тела из диэлектрика, внесенного во внешнее электрическое поле, граничные условия имеют аналогичный вид:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{и} \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Таким образом, при исследовании поля тел во внешнем магнитном поле мы можем воспользоваться аналогичными задачами, решенными в электростатике, с заменой  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  на  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}$  на  $\mu_0 \mathbf{J}$  и  $\epsilon$  на  $\mu$ . Так как поляризованность вещества  $\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$ , а намагнитченность  $\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$ , то в аналогичных задачах электрический момент соответствует умноженному на  $\mu_0$  магнитному моменту.

### § 63. Шар и эллипсоид вращения во внешнем однородном поле

В § 27 был рассмотрен случай шара из диэлектрика, находящегося во внешнем электрическом поле. Было найдено, что шар поляризуется однородно.

Точно так же шар из вещества с абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu$ , помещенный во внешнее однородное магнитное поле, поляризуется магнитно однородно. Пусть шар помещен в пустоте и  $\mu > \mu_0$ . Тогда вектор напряженности  $\mathbf{H}_0$  поля, определяемого намагнитченностью шара, оказывается внутри шара направленным против вектора напряженности  $\mathbf{H}_0$  внешнего поля. В этом случае поле вектора  $\mathbf{H}_0$  называется *размагничивающим полем*. Используя

формулы, полученные в § 27, и произведя в них соответствующую замену, получим формулы для интересующего нас случая. Напряженность размагничивающего поля определяется формулой:

$$H_{\circ} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0.$$

Вне шара поле, вызванное намагниченностью шара, такое же, как поле тока в весьма малом замкнутом контуре, находящемся в центре шара, имеющего магнитный момент  $p$ , равный геометрической сумме магнитных моментов всех элементарных токов в объеме шара.

Пользуясь формулами, полученными в § 27, получаем:

$$\begin{aligned} \mu_0 p &= 4\pi\mu_0 R^3 H_{\circ} = \\ &= 4\pi R^3 \mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0, \end{aligned}$$

где  $R$  — радиус шара.

Намагниченность  $J$  вещества шара равна магнитному моменту, отнесенному к единице объема шара. Следовательно,

$$\mu_0 J = \frac{\mu_0 p}{\frac{4\pi}{3} R^3} = 3\mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 = 3\mu_0 H_{\circ}.$$

Результирующая напряженность и результирующая магнитная индукция внутри шара равны:

$$H = H_0 - H_{\circ} = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0; \quad B = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 H_0 = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} B_0.$$

Чем больше  $\mu$ , тем сильнее размагничивающее поле и тем слабее поле  $H$ , но тем сильнее поле  $B$ . В пределе при  $\mu \rightarrow \infty$  имеем:

$$\begin{aligned} H_{\circ} &= H_0; \quad H = 0; \\ B &= 3B_0. \end{aligned}$$

Таким замечательным свойством намагничиваться однородно во внешнем однородном поле обладает эллипсоид, частным случаем которого является шар. На рис. 82 изображены для случая эллипсоида: внешнее однородное поле, поле вектора  $\mathbf{H}$ , определяемое

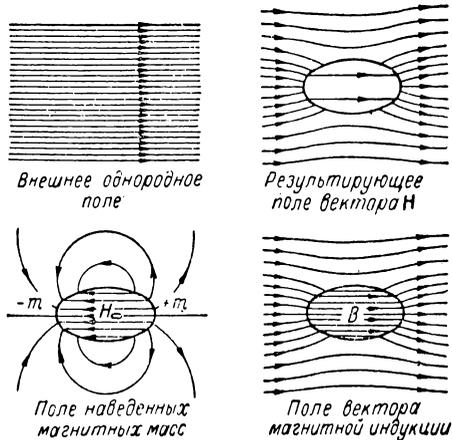


Рис. 82.

намагниченностью эллипсоида и связанное с условным представлением о наведенных магнитных массах, результирующее поле вектора  $\mathbf{H}$  и результирующее поле вектора  $\mathbf{B}$ .

### § 64. Коэффициенты размагничивания

Для эллипсоидов как  $H_0$ , так и  $J$  пропорциональны напряженности  $H_0$ , внешнего поля. Стало быть, можно написать:

$$H_0 = NJ.$$

Коэффициент пропорциональности  $N$  называют *коэффициентом размагничивания*. От него зависит при данной намагниченности величина напряженности размагничивающего поля. Коэффициент размагничивания зависит только от формы намагничиваемого тела. Для шара получаем:

$$N = \frac{H_0}{J} = \frac{1}{3}.$$

Расчет дает для эллипсоида вращения формулу:

$$N = \frac{\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) - 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \arccos \lambda}{1 - \lambda^2},$$

причем  $\lambda$  есть отношение оси вращения эллипсоида, которая предполагается направленной вдоль линий внешнего поля, к оси, ей перпендикулярной. Первым выражением для  $N$  удобно пользоваться при  $\lambda > 1$ , вторым — при  $\lambda < 1$ .

Для бесконечной пластины, расположенной поперек поля, которую можно рассматривать как сплюснутый эллипсоид, находим  $N = 1$ , положив  $\lambda = 0$ . Это — наивысшее возможное значение  $N$ . Для шара, полагая  $\lambda = 1$  и раскрывая неопределенность, получаем  $N = 1/3$ . Для бесконечно длинного стержня, расположенного вдоль поля, полагая  $\lambda = \infty$  и раскрывая неопределенность, получаем  $N = 0$ .

Свойство эллипсоидов однородно намагничиваться в однородном внешнем поле используется в магнитометрии. Для исследования магнитных свойств ферромагнитных материалов можно изготовить из этих материалов образцы, имеющие формы эллипсоида вращения или близкую к ней форму. Однородность намагничивания особенно важна именно при испытании ферромагнитных материалов, так как магнитная проницаемость  $\mu$  их зависит от напряженности поля и только при однородном намагничивании величина  $\mu$  во всем объеме образца будет одинакова.

Вести в рассмотрение коэффициент размагничивания, *зависящий только от формы тела*, строго говоря, возможно только для эллипсоидов и их частных случаев: шара, пластины, бесконечно

длинного цилиндра с эллиптическим или круговым сечением. Однако для приближенных практических расчетов магнитного поля, которое образуется при внесении в однородное внешнее поле тел иной формы, например коротких цилиндров, все же вводят в расчет коэффициенты размагничивания таких тел. Однако такой расчет является только ориентировочным, так как тела, отличные по форме от эллипсоидов, намагничиваются неоднородно в однородном внешнем магнитном поле.

### § 65. Магнитное экранирование

Для защиты электроизмерительных приборов от влияния посторонних магнитных полей их системы помещают в массивные замкнутые или почти замкнутые оболочки из ферромагнитного материала. Такие оболочки называют *магнитными экранами*. Поле внутри экрана оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем.

В случае экрана в форме полового шара с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 83) и с абсолютной магнитной проницаемостью стенок  $\mu$ , помещенного во внешнее однородное поле с индукцией  $B_0$ , магнитная индукция  $B$  в полости экрана может быть рассчитана и оказывается равной:

$$B = B_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \left( 1 - \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) \left( \frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu}{\mu_0} - 2 \right)}.$$

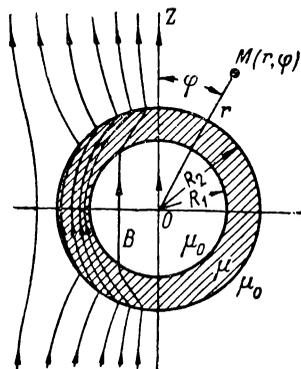


Рис. 83.

Например, если  $R_1 = 0,9R_2$  и  $\mu = 500 \mu_0$ , то  $B = 0,031 B_0$ , т. е. напряженность поля внутри экрана составляет 3% от напряженности внешнего поля. В случае ферромагнитного вещества  $\mu \gg \mu_0$ , и экранирующее действие определяется тем, что линии магнитной индукции внешнего поля, стремясь пройти по пути с наименьшим магнитным сопротивлением, сгущаются внутри стенок экрана, почти не проникая в его полость.

Нередко применяют многоступенчатые экраны в виде нескольких полых ферромагнитных тел, расположенных один внутри другого.

ГЛАВА ШЕСТАЯ  
РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

§ 66. Общие выражения для взаимной и собственной индуктивностей

В настоящей главе мы будем рассматривать статические индуктивности. Соответственно, магнитные потоки, определяющие эти индуктивности, мы будем находить при постоянном токе. Статические индуктивности зависят от геометрических параметров, определяющих форму, размеры и взаимное расположение контуров, и от магнитной проницаемости среды, окружающей контуры, а также от магнитной проницаемости вещества самих проводящих контуров.

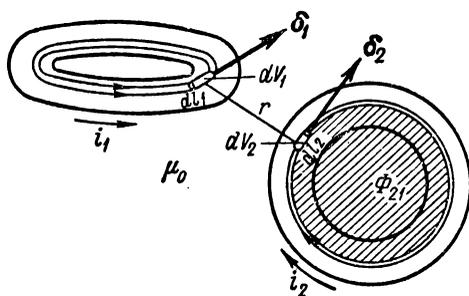


Рис. 84.

Если  $\mu = \text{const}$ , то индуктивности контуров не зависят от токов в них.

Обратим особое внимание на то, что индуктивности определяются потоко сцеплением, т. е. для вычисления индуктивности электрического контура необходимо определить полное число сцеплений единичных линий магнитной индукции с контуром.

Получим общее выражение для взаимной индуктивности двух контуров произвольной заданной формы (рис. 84).

Предположим, что контуры находятся в воздухе и материал проводников не ферромагнитный. Примем всюду  $\mu = \mu_0$ . Условимся снабжать обозначение потоко сцепления взаимной индукции двумя индексами: первый индекс будет указывать, с каким контуром рассматривается сцепление потока, второй — каким током обуславливается поток. Будем искать потоко сцепление  $\Psi_{21}$  со вторым контуром, обусловленное током  $i_1$  в первом контуре.

Представим себе весь проводник второго контура подразделенным на элементарные трубки тока  $i_2$  (рис. 84). Поток, сцепляю-

щийся с одной из таких трубок, равен линейному интегралу векторного потенциала вдоль оси этой трубки:

$$\Phi_{21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2.$$

На рис. 84 заштрихована поверхность, сквозь которую проходит поток  $\Phi_{21}$ .

Этот поток сцепляется с током  $di_2$ , протекающим в рассматриваемой трубке тока и составляющим долю  $\frac{di_2}{i_2}$  всего тока  $i_2$  во втором контуре. Следовательно, он вносит в величину  $\Psi_{21}$  долю, равную

$$d\Psi_{21} = \frac{di_2}{i_2} \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2.$$

Так как  $di_2$  имеет постоянное значение вдоль всей трубки тока, то его можно внести под знак интеграла. Обозначая через  $ds_2$  сечение трубки тока и через  $\delta_2$  плотность тока в этом сечении, можем написать  $di_2 = \delta_2 ds_2$ . Последнее равенство приобретает вид:

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \oint_{l_2} (\delta_2 ds_2) (\mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2).$$

Так как векторы  $\delta_2$  и  $d\mathbf{l}_2$  имеют одно и то же направление, то  $(\delta_2 ds_2) (\mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2) = (d\mathbf{l}_2 ds_2) (\mathbf{A}_2 \delta_2)$  и, следовательно,

$$d\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \oint_{l_2} (\delta_2 \mathbf{A}_2) (ds_2 d\mathbf{l}_2).$$

Интегрируя по всему сечению  $s_2$  второго проводника, получим:

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int_{s_2} \oint_{l_2} (\delta_2 \mathbf{A}_2) (ds_2 d\mathbf{l}_2).$$

Произведение  $ds_2 d\mathbf{l}_2$  есть элемент объема  $dV_2$  второго проводника. Поэтому потокосцепление  $\Psi_{21}$  может быть представлено в виде:

$$\Psi_{21} = \frac{1}{i_2} \int_{V_2} \delta_2 \mathbf{A}_2 dV_2.$$

Так как мы желаем определить величину  $\Psi_{21}$ , как потокосцепление взаимной индукции, обусловленное током  $i_1$ , то соответственно и векторный потенциал  $\mathbf{A}_2$  необходимо выразить через ток  $i_1$ . Согласно изложенному в § 46, имеем:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \delta_1 \frac{dV_1}{r},$$

где  $V_1$  — объем пространства, занимаемого первым контуром,  $r$  — расстояние от элемента объема  $dV_1$  до точки, в которой определяется векторный потенциал, и  $\delta_1$  — вектор плотности тока в точках элемента объема  $dV_1$ . Подставляя выражение для векторного потенциала в последнее выражение для  $\Psi_{21}$ , получаем:

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \delta_1 \delta_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Отсюда находим общее выражение для взаимной индуктивности:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \delta_1 \delta_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Интегрирование должно быть произведено один раз по всему объему первого проводника и другой раз по всему объему второго проводника, причем  $r$  есть расстояние между элементами объемов  $dV_1$  и  $dV_2$ . Полученная формула верна только в случае однородной в магнитном отношении среды, так как использованное при ее выводе выражение для векторного потенциала справедливо только в этом случае. В частности, и магнитная проницаемость материала самих проводников должна быть такой же, как и проницаемость окружающей среды. Как было ранее отмечено, при  $\mu = \text{const}$  взаимная индуктивность не зависит от токов в контурах. Наличие токов  $i_1$  и  $i_2$  в последнем выражении не противоречит этому положению. Действительно, внося токи под знаки интегралов, мы получим в подынтегральном выражении отношения  $\delta_1/i_1$  и  $\delta_2/i_2$ , которые характеризуют распределение токов в проводниках. Но при постоянном токе распределение тока зависит только от формы проводника и не изменяется при изменении тока. Поэтому отношение плотности тока в каждой точке проводника ко всему току полностью определяется формой проводника.

Если бы мы стали определять потокоцепление взаимной индукции  $\Psi_{12}$  с первым контуром, обусловленное током во втором контуре, то, очевидно, получили бы выражение:

$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1} \int_{V_1} \int_{V_2} \delta_1 \delta_2 \frac{dV_1 dV_2}{r}.$$

Следовательно, для взаимной индуктивности  $M_{12} = \Psi_{12}/i_2$  мы получили бы то же самое выражение, что и для  $M_{21}$ . Тем самым подтверждается важный вывод, полученный в первой части из условия независимости энергии магнитного поля токов от порядка установления токов, а именно, что при  $\mu = \text{const}$  имеет место равенство:

$$M_{kp} = M_{pk}.$$

Получим общее выражение для собственной индуктивности  $L$  контура, пользуясь найденным общим выражением для взаимной индуктивности  $M_{21}$  двух контуров. Представим себе два совершенно одинаковых контура, сближающихся до полного слияния так, что один из них занимает объем другого. После такого слияния по существу уже остается только один контур. Из выражения для  $M_{21}$  нетрудно получить выражение для  $L$  такого контура, положив  $i_1 = i_2 = i$  и  $V_1 = V_2 = V$ . Имеем:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi i^2} \int_V \int_V \delta \delta' \frac{dV dV'}{r},$$

причем  $\delta$  — плотность тока в элементе объема  $dV$ ,  $\delta'$  — плотность тока в элементе  $dV'$  и  $r$  — расстояние между элементами объема  $dV$  и  $dV'$ . Интегрирование производится дважды по объему всего проводника (рис. 85).

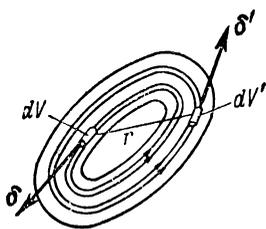


Рис. 85.

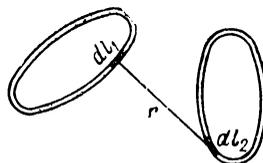


Рис. 86

Выражение для  $M_{21}$  весьма упрощается в случае контуров из линейных проводников, поперечные размеры сечений которых весьма малы по сравнению с длиной контуров и по сравнению с расстоянием между ними (рис. 86). В таком случае нет необходимости делить проводники на трубки тока. Векторный потенциал в центре элемента  $dl_2$  проводника второго контура можно вычислить по формуле (§ 46):

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{i_1 dl_1}{r}.$$

Потокосцепление  $\Psi_{21}$  при этом может быть принято равным потоку  $\Phi_{21}$  сквозь поверхность, ограниченную осью проводника второго контура, т. е.

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{i_1 dl_1 dl_2}{r}.$$

Разделив  $\Psi_{21}$  на  $i_1$ , получаем:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r},$$

Представляется возможным упростить и выражение для  $L$  контура, образованного из тонкого проводника. Однако упрощенную формулу нельзя при этом привести в точности к тому виду, к которому было приведено выражение для  $M_{21}$ , т. е. нельзя свести в формуле для  $L$  двухкратное интегрирование по объему проводника к двухкратному интегрированию по оси проводника, так как такой интеграл обращается в бесконечность.

Упрощение формулы для  $L$  контура из тонкого проводника кругового сечения можно выполнить следующим путем. Разделим потокосцепление  $\Psi$  на две части:  $\Psi = \Psi_{внеш} + \Psi_{внутр}$ , причем  $\Psi_{внеш}$  определяется линиями магнитной индукции, охватывающими весь проводник, следовательно, расположенными целиком во внешней по отношению к проводнику среде, и  $\Psi_{внутр}$  определяется линиями магнитной индукции, проходящими внутри тела проводника. Линии, определяющие величину  $\Psi_{внеш}$ , проходят сквозь заштрихованную на рис. 87 поверхность, ограниченную контуром  $l_2$ , лежащим на внутренней поверхности проводника. В случае, если проводник

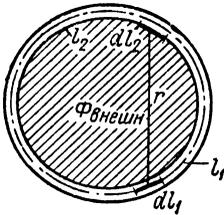


Рис. 87.

образует один виток, то каждая такая линия сцепляется один раз с проводником и, следовательно,

$$\Psi_{внеш} = \Phi_{внеш} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2,$$

где  $\mathbf{A}_2$  — значения векторного потенциала на контуре  $l_2$ . Величину  $\mathbf{A}_2$  мы можем приближенно вычислить по формуле:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r},$$

предположив, что весь ток  $i$  течет по оси проводника. При этом интегрирование производится по всей оси  $l_1$  проводника. Интеграл имеет конечное значение, так как все точки контура  $l_2$ , в которых определяется  $\mathbf{A}_2$ , лежат на конечном расстоянии  $r$  от точек контура  $l_1$ .

Таким образом,

$$\Psi_{внеш} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r}.$$

Величину  $\Psi_{внутр}$  приближенно можно принять равной внутреннему потокосцеплению в отрезке длиной  $l_1$  бесконечно длинного прямолинейного провода кругового сечения, поскольку радиус кривизны контура проводника велик по сравнению с поперечными

размерами сечения. Согласно выражению, полученному в первой части, имеем:

$$\Psi_{\text{внутр}} = \frac{\mu}{8\pi} i l_1,$$

где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Индуктивность  $L$  можно представить в виде:

$$L = \frac{\Psi_{\text{внеш}}}{i} + \frac{\Psi_{\text{внутр}}}{i} = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}},$$

причем  $L_{\text{внеш}}$  — называют *внешней*, а  $L_{\text{внутр}}$  — *внутренней* индуктивностями. Итак, можем написать следующее упрощенное выражение для индуктивности контура из тонкого проводника кругового сечения:

$$L = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{i_1} \oint_{i_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} + \frac{\mu l_1}{8\pi}.$$

## § 67. Взаимная индуктивность двух круговых контуров

Найдем выражение для взаимной индуктивности круговых контуров, расположенных в параллельных плоскостях так, что их центры лежат на одной прямой, нормальной к этим плоскостям (рис. 88).

Искомую формулу мы получим, выполнив двукратное интегрирование вдоль обоих контуров согласно выражению:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{i_1} \oint_{i_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Одно интегрирование уже было выполнено в § 59 при отыскании векторного потенциала в поле кругового тока. Именно величина  $A_2$  векторного потенциала на оси второго проводника, определяемого током  $i_1$ , протекающим в первом контуре, имеет выражение:

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} f(k).$$

При этом в соответствии с принятым в § 59 обозначением имеем:

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{h^2 + (R_1 + R_2)^2}.$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы контуров и  $h$  — расстояние между их центрами. Принято  $\mu = \mu_0$ , так как предполагается, что контуры находятся в воздухе.

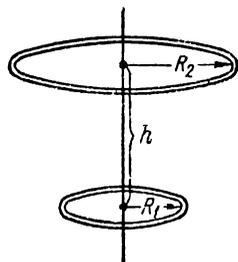


Рис. 88.

Функция  $f(k)$  изображена в виде кривой на рис. 78. Она может быть представлена через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, согласно выражениям, приведенным в § 59. Вектор  $\mathbf{A}_2$  касателен к оси проводника второго контура и в силу симметрии имеет одинаковую величину вдоль всего второго контура. Следовательно, потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром, обусловленное током  $i_1$  в первом контуре, получается равным:

$$\Psi_{21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_2 = \oint_{l_2} A_2 dl_2 = A_2 \oint_{l_2} dl_2 = A_2 2\pi R_2 = \mu_0 i_1 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

Таким образом, искомая взаимная индуктивность выражается формулой:

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

### 68. Индуктивность кругового контура

Найдем формулу для индуктивности круглого кольца из тонкого проводника кругового сечения (рис. 89). Внешняя индуктивность  $L_{внеш}$ , определяемая потоком  $\Phi_{внеш}$ , линии которого охватывают все сечение проводника, равна взаимной индуктивности между бесконечно тонкими круговыми контурами, один из которых  $l_1$  совпадает с осью проводника и другой  $l_2$  является внутренней, т. е. наименьшей окружностью на поверхности проводника. Следовательно, полагая в последнем выражении  $R_1 = R$  и  $R_2 = R - a$ , можем написать:

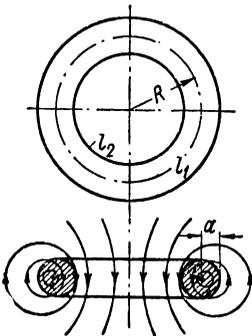


Рис. 89

$$L_{внеш} = \mu_0 \sqrt{R(R-a)} f(k) \approx \mu_0 R f(k),$$

где  $a$  — радиус сечения проводника и  $R$  — радиус кольца, причем  $a \ll R$ . Так как контуры  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости, то в выражении для  $k^2$  следует положить  $h = 0$ . Имеем:

$$k^2 = \frac{4(R-a)R}{(R-a+R)^2} = 1 - \frac{a^2}{4R^2 - 4Ra + a^2} \approx 1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2.$$

Следовательно,

$$k \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{8R^2}.$$

Величина  $f(k)$ , входящая в выражение для  $L_{внеш}$ , может быть взята из кривой на рис. 78. Однако для рассматриваемого

случая  $a \ll R$  можно получить приближенное выражение для  $f(k)$ . Так как  $k \approx 1$ , то приближенно имеем:

$$f(k) = \left(\frac{2}{k} - k\right) K - \frac{2}{k} E \approx K - 2E.$$

Можно показать, что при  $k \approx 1$  эллиптические интегралы  $K(k)$  и  $E(k)$  имеют следующие приближенные значения:

$$K \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \approx \ln \frac{8R}{a} \quad \text{и} \quad E \approx 1.$$

Следовательно,

$$L_{внеш} = \mu_0 R f(k) \approx \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right).$$

Так как  $l_1 = 2\pi R$ , то внутренняя индуктивность выражается формулой:

$$L_{внутр} = \frac{\mu l_1}{8\pi} = \frac{\mu R}{4}.$$

Следовательно,

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right) + \frac{\mu}{4} R.$$

Если провод из неферромагнитного материала, то  $\mu \approx \mu_0$  и

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 1,75 \right).$$

Выражение для внутренней индуктивности получено в предположении равномерного распределения тока по сечению проводника, что соблюдается при постоянном токе. При переменном токе высокой частоты при резком проявлении поверхностного эффекта внутренний поток при  $\mu = \mu_0$  будет мал, и точнее вычислять индуктивность по формуле:

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right),$$

пренебрегая величиной  $L_{внутр}$ .

## § 69. Метод участков

Полученные в § 66 выражения для индуктивностей контуров из тонких проводников дают основание ввести метод расчета, основанный на условных понятиях о взаимной индуктивности между участками проводников и об индуктивностях участков проводников.

Пусть имеется два контура. Разобьем первый контур на  $m$  участков и второй контур на  $n$  участков (рис. 90). Длину  $k$ -того

участка первого контура обозначим через  $l_{1k}$  и длину  $p$ -того участка второго контура — через  $l_{2p}$ . Разбивая в выражении для  $M_{21}$  интегралы по замкнутым контурам  $l_1$  и  $l_2$  на суммы интегралов, взятых вдоль участков контуров, будем иметь:

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Выражение, стоящее под знаком двойной суммы, мы можем рассматривать как взаимную индуктивность  $M_{1k, 2p}$  между  $k$ -тым

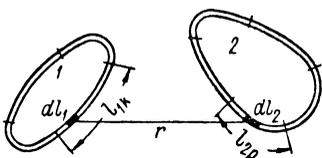


Рис. 90.

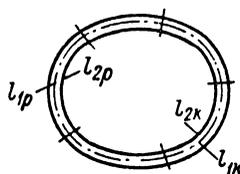


Рис. 91

участком первого контура и  $p$ -тым участком второго контура. Таким образом,

$$M_{21} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=n} M_{1k, 2p}.$$

Аналогично можно поступить при вычислении индуктивности контура. Разобьем весь контур на  $m$  участков (рис. 91). При этом пусть  $l_{1k}$  есть отрезок  $k$ -того участка по оси проводника, а  $l_{2p}$  — отрезок  $p$ -того участка по внутреннему контуру, лежащему на поверхности проводника. Хотя для тонкого проводника  $l_{1k} = l_{2k}$ , но необходимо различать эти два участка, так как в формуле для  $L$  интегрирование производится один раз по оси проводника, другой раз по указанному внутреннему контуру. Формула для  $L$  принимает вид:

$$L = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r} + L_{внутр}.$$

Выражение под знаком двойной суммы можно условно рассматривать при  $k = p$  как внешнюю индуктивность  $L_{внеш, k}$   $k$ -того участка контура и при  $k \neq p$  как взаимную индуктивность  $M_{kp}$  между  $k$ -тым и  $p$ -тым участками контура. При вычислении  $M_{kp}$  можно интегрирование по отрезку внутреннего контура  $l_{2p}$  заме-

нить интегрированием по отрезку оси  $l_{1p}$  того же  $p$ -того участка. Тогда будем иметь:

$$M_{1k, 2p} \approx M_{1k, 1p} = M_{kp} \quad \text{и} \quad M_{1p, 2k} \approx M_{1p, 1k} = M_{pk}.$$

Учитывая, что  $M_{kp} = M_{pk}$ , получаем:

$$L = \sum_{k=1}^{k=m} L_{внеш k} + 2 \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{p=1}^{p=m} M_{kp} + L_{внутр p},$$

где

$$L_{внеш k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2k}} \frac{dl_1 dl_2}{r}; \quad M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{1p}} \frac{dl_1 dl_1'}{r},$$

причем  $dl_1$  — элемент на оси  $k$ -того участка,  $dl_1'$  — элемент на оси  $p$ -того участка.

В выражении для  $L$  во втором члене  $p \neq k$  и определенное сочетание индексов  $k$  и  $p$  встречается только один раз независимо от порядка, в котором они стоят.

Рассмотренный метод облегчает расчет индуктивностей в тех случаях, когда контуры можно разбить на участки, имеющие простую форму, например, на прямолинейные отрезки или на дуги окружностей.

## § 70. Индуктивности контуров, составленных из прямолинейных отрезков

Формулы для взаимной индуктивности  $M_{1k, 2p}$  и индуктивности  $L_{внеш k}$  участков проводов сходны с формулами для потенциальных коэффициентов отрезков проводов, полученными в § 36 по методу средних потенциалов. Различие заключается в множителях, стоящих перед знаками интегралов, и в том, что в формулы для индуктивностей входит скалярное произведение векторов  $dl_1$  и  $dl_2$ , т. е. величина  $dl_1 dl_2 = \cos \theta dl_1 dl_2$ , где  $\theta$  — угол между направлениями элементарных отрезков  $dl_1$  и  $dl_2$ , а в формулы для потенциальных коэффициентов входит произведение  $dl_1 dl_2$  длин отрезков.

В случае, когда отрезки  $l_1$  и  $l_2$  прямолинейны, величина  $\cos \theta$  одинакова для всех элементов  $dl_1$  и  $dl_2$  и может быть вынесена за знак интеграла. При этом формула для взаимной индуктивности между этими отрезками приобретает вид:

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos \theta \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

В формуле для собственной индуктивности  $L_{внеш}$  прямолинейного отрезка необходимо положить  $\cos \theta = 1$  и, следовательно,

$$L_{внеш} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{dl_1 dl_2}{r}.$$

Эти формулы отличаются от формул для потенциальных коэффициентов  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{11}$  только множителями. Именно имеем:

$$\frac{M_{12}}{\alpha_{12}} = \mu_0 \varepsilon_0 l_1 l_2 \cos \theta; \quad \frac{L_{внеш}}{\alpha_{11}} = \mu_0 \varepsilon_0 l^2.$$

На это обстоятельство обратил внимание в одной из своих работ Л. А. Цейтлин. Оно имеет важное значение, так как дает возможность имеющиеся в литературе формулы для индуктивностей использовать для вычисления потенциальных коэффициентов, и обратно.

В § 36 была выведена формула для коэффициентов  $\alpha_{12}$  двух параллельных отрезков прямых проводов одинаковой длины  $l$ , расположенных так, что начала отрезков находятся на одном к ним перпендикуляре. Расстояние между осями проводов равно  $D$ .

Если направления обхода, которые мы считаем положительными, для обоих отрезков совпадают, то  $\theta = 0$  и  $\cos \theta = 1$ . Если положительные направления обоих отрезков противоположны, то  $\theta = \pi$  и  $\cos \theta = -1$ . Используя выражения для отношения  $M_{12}/\alpha_{12}$ , получаем:

$$M = \pm \mu_0 \varepsilon_0 l^2 \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 l} \left( \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2} + 1} + \frac{D}{l} \right).$$

Учитывая равенство

$$\operatorname{Arsh} \frac{l}{D} = \ln \left( \frac{l}{D} + \sqrt{\frac{l^2}{D^2} + 1} \right),$$

можем написать:

$$M = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + D^2}}{D} - \frac{\sqrt{l^2 + D^2} - D}{l} \right).$$

В частном случае при  $l \gg D$  получаем:

$$M = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right).$$

Из последней формулы непосредственно вытекает выражение для внешней индуктивности прямолинейного отрезка проводника длиной  $l$ , имеющего круговое сечение радиуса  $r_0$ , причем  $r_0 \ll l$ . В этой формуле необходимо заменить  $D$  на  $r_0$  и взять знак плюс. Имеем:

$$L_{внеш} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right).$$

Обратим особое внимание на то, что коэффициенты  $\alpha_{12}$  были вычислены в § 36 приближенным методом средних потенциалов, основанным на допущении, что заряд распределен равномерно по длине провода, т. е., что линейная плотность заряда  $\tau$  одинакова по всей длине провода. Однако формулы для  $M$  и  $L$  в этом отношении вполне точны, так как постоянный ток имеет одно и то же значение на всей длине провода.

### § 71. Индуктивность прямоугольной рамки

Воспользуемся методом участков для вычисления индуктивности прямоугольной рамки из провода кругового сечения (рис. 92). Длины сторон рамки обозначим через  $a$  и  $b$ , радиус сечения — через  $r_0$ . Пусть  $a \gg r_0$  и  $b \gg r_0$ .

Взаимная индуктивность между взаимно перпендикулярными сторонами рамки равна нулю, так как здесь  $\cos \theta = 0$ . Следовательно, достаточно учесть только взаимные индуктивности между парами противоположных параллельных сторон рамки. Для этих сторон  $\cos \theta = -1$ , так как, идя вдоль контура рамки, мы обходим противоположные стороны в противоположных направлениях.

Для сторон рамки, имеющих длину  $l = a$  и расстояние между осями проводников  $D = b$ , получаем, обозначив через  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$  диагональ рамки:

$$M_a = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \ln \frac{a+d}{b} - \frac{d-b}{a} \right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \ln \frac{b}{a+d} + \frac{d-b}{a} \right).$$

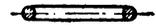
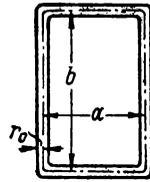


Рис. 92.

Соответственно, для сторон, имеющих длину  $b$  и расстояние между осями проводов  $a$ , можем написать:

$$M_b = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left( \ln \frac{a}{b+d} + \frac{d-a}{b} \right).$$

Внешние индуктивности сторон, имеющих длины  $a$  и  $b$ , равны:

$$L_{\text{внеш } a} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left( \ln \frac{2a}{r_0} - 1 \right), \quad L_{\text{внеш } b} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left( \ln \frac{2b}{r_0} - 1 \right).$$

Внутреннюю индуктивность всей рамки находим, замечая, что длина контура равна  $2(a+b)$ . Следовательно,

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu}{4\pi} (a+b).$$

где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала провода.

Таким образом, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} L &= 2L_{\text{внеш } a} + 2L_{\text{внеш } b} + 2M_a + 2M_b + L_{\text{внутр}} = \\ &= \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \frac{2ab}{r_0(a+d)} + b \ln \frac{2ab}{r_0(b+d)} - 2(a+b-d) \right] + \frac{\mu}{\pi} \left( \frac{a+b}{4} \right). \end{aligned}$$

### § 72. Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями

Найдем выражение для взаимной индуктивности между двумя двухпроводными линиями, образованными проводами кругового сечения. На рис. 93 цифрой 1 помечено сечение прямого провода

первой линии и цифрой 1' — сечение обратного провода этой линии. Соответственно, цифрами 2 и 2' помечены сечения прямого и обратного проводов второй линии. Пусть длина линии  $l$  много больше всех расстояний между проводами. В таком случае при подсчете величины  $M$  можно пренебречь отрезками, соединяющими провода в начале и в конце линии и изображенными на рис. 93 пунктиром. Пользуясь методом участков, находим:

$$\begin{aligned} M &= M_{12} + M_{12'} + M_{1'2'} + M_{1'2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{12}} - 1 \right) - \\ &- \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{12'}} - 1 \right) + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{1'2'}} - 1 \right) - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r_{1'2}} - 1 \right) = \\ &= \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{12'} r_{1'2}}{r_{12} r_{1'2'}}. \end{aligned}$$

В числителе под знаком логарифма стоят расстояния между прямым проводом одной линии и обратным проводом другой линии, а в знаменателе — расстояния между прямыми проводами и между обратными проводами обеих линий. Величина  $M$  может оказаться положительной или отрицательной в зависимости от того, оказывается величина, стоящая под знаком логарифма, больше, или меньше единицы. Для расположения проводов, показанного на рис. 93,  $M > 0$ . Это значит, что при обоих положительных токах в линиях потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены согласно.

Если бы мы поменяли местами прямой и обратный провода в одной из линий, т. е. изменили бы условное положительное направление тока в одной из линий, то получили бы для такого же расположения проводов  $M < 0$ . Это значит, что при обоих положительных токах потоки были бы направлены встречно.

### § 73. Индуктивность двухпроводной линии

Определим, пользуясь методом участков, индуктивность петли, образованной двумя параллельными проводами кругового сечения (рис. 94). Расстояние между осями проводов —  $D$ , радиусы их сечений —  $R$  и  $R'$ . Длина петли —  $l$ . Можем написать:

$$L = L_{внеш1} + L_{внеш1'} + 2M_{11'} + L_{внутр},$$

где

$$L_{внеш1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{R} - 1 \right); \quad L_{внеш1'} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{R'} - 1 \right);$$

$$M_{11'} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right); \quad L_{внутр} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} = \frac{\mu l}{4\pi},$$

причем  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала проводов. Получаем:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D^2}{RR'} + \frac{\mu l}{4\pi} = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{\sqrt{RR'}} + \frac{\mu}{4} \right).$$

В важном частном случае двухпроводной линии обычно  $R' = R$ . При этом

$$L = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu}{4} \right).$$

При  $\mu > \mu_0$ , например для стальных проводов, эта формула является приближенной, так как наличие ферромагнитной среды искажает поле около проводов.

Однако этим искажением можно пренебречь, если радиусы сечений проводов малы по сравнению с расстоянием между проводами. При  $\mu = \mu_0$  эта формула, как можно показать, дает при  $l \gg D$  точное значение статической индуктивности для любых соотношений между  $D$  и  $R$ .

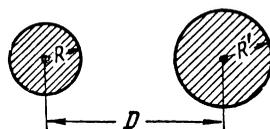


Рис. 94.

### § 74. Индуктивность трехфазной линии

В каждом проводе трехфазной линии передачи индуцируется не только э. д. с. самоиндукции, обусловленная переменным током в этом проводе, но также и э. д. с. взаимной индукции, обусловленная токами в других проводах линии. Рассмотрим трехпроводную линию, т. е. линию, в которой отсутствует нейтральный провод. Обычно активные сопротивления  $r$  и индуктивности  $L$  одинаковы для всех трех проводов. Однако взаимные индуктивности  $M_{12}$ ,  $M_{23}$  и  $M_{31}$  между проводами при несимметричном расположении проводов будут различаться друг от друга. Если токи в линии изменяются по синусоидальному закону, то можно воспользоваться символическим методом и для падения напряжений в проводах написать выражения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (r + j\omega L) \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 + j\omega M_{13} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_2 &= (r + j\omega L) \dot{I}_2 + j\omega M_{23} \dot{I}_3 + j\omega M_{21} \dot{I}_1; \\ \dot{U}_3 &= (r + j\omega L) \dot{I}_3 + j\omega M_{31} \dot{I}_1 + j\omega M_{32} \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Предположим, что токи в линии образуют симметричную систему, т. е.

$$\dot{I}_2 = a^2 \dot{I}_1, \quad \dot{I}_3 = a \dot{I}_1, \quad \text{где } a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что  $a^3 = 1$ , можем переписать уравнения в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= [r + j\omega(L + a^2 M_{12} + a M_{13})] \dot{I}_1; \\ \dot{U}_2 &= [r + j\omega(L + a^2 M_{23} + a M_{21})] \dot{I}_2; \\ \dot{U}_3 &= [r + j\omega(L + a^2 M_{31} + a M_{32})] \dot{I}_3. \end{aligned} \right\} (*)$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, все вещественны только в случае симметричного расположения проводов, когда

$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = M.$$

Действительно, принимая во внимание, что  $a^2 + a = -1$ , получаем в этом случае:

$$\dot{U}_1 = [r + j\omega(L - M)] \dot{I}_1;$$

$$\dot{U}_2 = [r + j\omega(L - M)] \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_3 = [r + j\omega(L - M)] \dot{I}_3.$$

Разность  $L - M = L'$  в последних уравнениях можно рассматривать как эквивалентную индуктивность одного провода. Индуктивность  $L$  уединенного провода длиной  $l$  и с радиусом сечения  $R$  выражается формулой:

$$L = L_{\text{внеш}} + L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{R} - 1 \right) + \frac{\mu l}{8\pi},$$

где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость материала провода.

Взаимная индуктивность  $M$  между параллельными проводами длиной  $l$  с расстоянием между осями  $D$  при  $l \gg D$  выражается формулой:

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{D} - 1 \right).$$

При этом перед формулой следует взять знак плюс, так как положительные направления токов во всех проводах мы принимаем в одну сторону вдоль линии передачи. Таким образом,

$$L' = L - M = \frac{l}{2\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu}{4} \right).$$

При несимметричном расположении проводов расстояния между осями проводов не равны друг другу:  $D_{12} \neq D_{23} \neq D_{31}$ .

Однако, если через равные интервалы вдоль линии осуществлена транспозиция проводов, то выражение для  $L'$  сохранит свой вид, если под  $M$  понимать среднее значение взаимной индуктивности для трех участков линии:

$$M = \frac{1}{3} (M_{12} + M_{23} + M_{31}) = \frac{l}{2\pi} \mu_0 \left( \ln \frac{2l}{D'} - 1 \right),$$

где

$$D' = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}.$$

В несимметричной трехфазной линии при прохождении по ней переменного тока имеют место своеобразные энергетические про-

цессы. В уравнениях (\*) при  $M_{12} \neq M_{23} \neq M_{31}$  выражения, стоящие в круглых скобках, являются комплексными. Их мнимые части после умножения на  $j\omega$  дадут вещественные величины, имеющие смысл активных сопротивлений.

Складывая выражения, стоящие в уравнениях (\*) в круглых скобках для всех трех фаз, мы получим при каждой взаимной индуктивности вещественный множитель  $a^2 + a = -1$ . Следовательно, сумма дополнительных активных сопротивлений во всех трех фазах равна нулю, т. е. если в отдельных фазах они положительны, то в других они отрицательны. Иными словами, если из одних фаз энергия отдается, то в другие она поступает в том же количестве, т. е. совершается перенос энергии путем электромагнитной индукции из одной фазы в другую.

В заключение главы отметим, что разработке методов расчета индуктивностей посвящен ряд работ советских авторов: Г. Н. Петрова, Л. А. Цейтлина, В. А. Фока и других.

---

---

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

#### § 75. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике. Скорость распространения электромагнитной волны

В предыдущих главах были исследованы частные случаи электромагнитного поля, именно электрические поля, окружающие системы неподвижных заряженных тел, и электрические и магнитные поля, окружающие системы неподвижных контуров с постоянными токами.

В общем случае изменяющихся во времени зарядов, изменяющихся во времени токов, движущихся заряженных или намагниченных тел или движущихся контуров с токами в окружающем их пространстве существует переменное электромагнитное поле. Ограничимся рассмотрением переменного электромагнитного поля в неподвижных однородных и изотропных средах. Для исследования этого поля необходимо обратиться к полной системе уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \delta = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta_{\text{пер}};$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

В декартовой системе координат первые два уравнения запишутся в виде шести уравнений соответственно трем проекциям на оси координат. Используя еще выражения для векторов  $\delta$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , получаем эти уравнения в виде:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x + \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \delta_{\text{пер} x}; \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \delta_{\text{пер} y}; \quad (\text{б})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \gamma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \delta_{\text{пер} z}; \quad (\text{в})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (\text{г})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (\text{д})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (\text{е})$$

Предположим, что проводимость диэлектрика равна нулю ( $\gamma = 0$ ) и что свободные заряды в диэлектрике отсутствуют ( $\rho = 0$ ). В такой среде могут существовать только токи электрического смещения.

Для того чтобы лучше выявить основные соотношения в электромагнитном поле, рассмотрим сначала простейший случай плоской электромагнитной волны, распространяющейся в однородном и изотропном диэлектрике. Электромагнитная волна называется плоской, когда все величины, характеризующие интенсивность электромагнитного процесса, зависят только от одной из декартовых координат, например от координаты  $z$ . Приблизительно такой характер имеет электромагнитная волна, излученная антенной, если эту волну рассматривать в небольшой области пространства на большом расстоянии от излучающего центра.

Итак, предположим, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от координат  $x$  и  $y$ , т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = 0$$

Следовательно,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  являются функциями только  $z$  и  $t$ .

Учитывая еще условия:  $\gamma = 0$  и  $\rho = 0$ , получаем уравнения поля в виде:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (\text{а}) \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (\text{г})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (\text{б}) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (\text{д})$$

$$0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad (\text{в}) \quad 0 = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (\text{е})$$

Предположим, что поле вызвано источниками, не содержащими постоянных токов и постоянных зарядов, как это и имеет место в случае излучения волн антенной. Ток и напряжение в антенне не имеют постоянных составляющих. В таком случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не могут иметь составляющих, не зависящих от времени, и уравнения (в) и (е) дают:

$$E_z = \text{const} = 0; \quad H_z = \text{const} = 0.$$

Выберем направление осей  $OX$  и  $OY$  так, чтобы вектор  $\mathbf{E}$  был направлен по оси  $OX$ . Тогда будем иметь:  $E_y = 0$ .

При этом уравнения (б) и (г) дают:  $\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$  и  $\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$ , т. е.  $H_x = \text{const} = 0$ .

Следовательно, вектор  $\mathbf{H}$  направлен по оси  $OY$ . Мы получаем первый существенный вывод: *в электромагнитной волне, свободно распространяющейся в однородном и изотропном диэлектрике, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны:*

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H}.$$

Итак, остаются два уравнения (а) и (д):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (\text{а}') \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (\text{д}')$$

Дифференцируя второе уравнение по  $z$  и первое по  $t$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z}; \quad -\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

откуда имеем:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (*)$$

причем  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ .

Уравнения (а'), (д') и (\*) по форме совершенно аналогичны уравнениям:

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

причем  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , полученным во второй части при рассмотрении переходных процессов в неискажающей однородной линии. Решение последних уравнений было получено в виде:

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt);$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)].$$

Пользуясь этим решением, мы можем написать выражения для  $E_x$  и  $H_y$ , заменив в последних выражениях  $u_1$  на  $E_x$ ,  $i_1$  на  $H_y$ ,  $x$  на  $z$ ,  $C$  на  $\epsilon$  и  $L$  на  $\mu$ . Произведя эту замену и обозначая функции от  $(z - vt)$  и от  $(z + vt)$  через  $F_1(z - vt)$  и  $F_2(z + vt)$ , будем иметь искомые выражения в виде:

$$E_x = F_1(z - vt) + F_2(z + vt);$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [F_1(z - vt) - F_2(z + vt)].$$

Так как по условию  $\dot{E}_x$  и  $H_y$  не имеют составляющих, не зависящих от времени, то и функций  $F_1$  и  $F_2$  не имеют этих составляющих.

Выясним смысл, который имеют частные решения:

$$E_{x1} = F_1(z - vt); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z - vt).$$

В любой точке, движущейся в положительную сторону оси  $OZ$  со скоростью  $\frac{dz}{dt} = v$ , значения  $E_{x1}$  и  $H_{y1}$  остаются постоянными. Действительно, положение такой точки определяется координатой  $z = vt + z_0$ , и, следовательно, величины  $E_{x1}$  и  $H_{y1}$  в этой движущейся точке имеют значения:

$$E_{x1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = \text{const};$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z_0) = \text{const}.$$

Отсюда следует, что каждое определенное значение величины  $E_{x1}$  или величины  $H_{y1}$  распространяется в сторону положительной оси  $OZ$  со скоростью  $v$ . Поэтому мы можем утверждать, что эти частные решения определяют собой электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $OZ$  (*прямую волну*). Так как с величинами  $E$  и  $H$  связана определенная плотность энергии электромагнитного поля, то движущаяся электромагнитная волна несет с собой определенное количество электромагнитной энергии.

При помощи аналогичных рассуждений мы приходим к заключению, что частные решения:

$$E_{x2} = F_2(z + vt); \quad H_{y2} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} F_2(z + vt)$$

определяют собой электромагнитную волну, движущуюся со скоростью  $v$  в отрицательном направлении оси  $OZ$  (*обратную волну*).

Итак, мы получили, что *электромагнитная волна распространяется в пространстве со скоростью*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Эта скорость зависит только от магнитных и электрических свойств среды. В пустоте она равна:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/сек} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}.$$

Абсолютные значения напряженностей магнитного и электрического полей связаны как в прямой, так и в обратной волне соотношением:

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E,$$

откуда получаем:

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2}.$$

Следовательно, если существует только прямая или только обратная волна, то энергии магнитного и электрического полей равны между собой.

Обратим внимание на аналогию, которую можно провести между рассмотренным явлением распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике, характеризующейся напряженностями  $E_x$  и  $H_y$ , и явлением распространения волн напряжения  $u$  и тока  $i$  в однородной линии при отсутствии потерь в линии. Уже было отмечено, что выражение для  $E_x$  совершенно аналогично выражению для  $u$  и, соответственно, выражение для  $H_y$  аналогично выражению для  $i$ . Это обстоятельство не является случайным. Действительно, можно рассматривать величину  $E$  как падение напряжения, отнесенное к единице длины линии напряженности электрического поля и, соответственно, величину  $H$  как ток, отнесенный к единице длины линии напряженности магнитного поля. При этом отношение  $\frac{E_{x1}}{H_{y1}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = z$  имеет размерность электрического сопротивления и может рассматриваться как волновое сопротивление среды аналогично волновому сопротивлению  $z = \sqrt{\frac{L}{C}}$  однородной линии. В случае распространения волны в пустоте имеем:

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 120\pi = 377 \text{ ом}.$$

Выражение для скорости  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  распространения электромагнитной волны в диэлектрике аналогично выражению для скорости  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  распространения волн в линии.

Можно было бы ввести вместо электромагнитных констант  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  две другие, выражающиеся через них физические константы, а именно:

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

что лучше бы выражало волновые свойства поля.

Чтобы уяснить возможность существования одновременно и прямой и обратной волн, рассмотрим переход волны из среды с абсолютной диэлектрической и абсолютной магнитной проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  в среду с проницаемостями  $\epsilon_2$  и  $\mu_2$ . Предположим, что среды разделены плоскостью и что волна распростра-

няется в направлении, нормальном к плоскости раздела. *Падающая* в первой среде на поверхность раздела волна ( $E_{\varphi_1}$ ,  $H_{\varphi_1}$ ) (прямая волна) частично проходит сквозь поверхность раздела, образуя во второй среде *преломленную* (прямую) волну ( $E_{\varphi_2}$ ,  $H_{\varphi_2}$ ), и частично отражается от поверхности раздела, образуя в первой среде *отраженную* (обратную) волну ( $E_{\psi_1}$ ,  $H_{\psi_1}$ ). Соотношения между напряженностями поля для этих волн на поверхности раздела можно написать, используя на основании вышеотмеченной аналогии соотношения между напряжениями и токами в падающих, преломленных и отраженных волнах тока и напряжения.

Имеем на поверхности раздела:

$$E_{\varphi_2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} E_{\varphi_1}; \quad E_{\psi_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} E_{\varphi_1};$$

$$H_{\varphi_2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} H_{\varphi_1}; \quad H_{\psi_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} H_{\varphi_1},$$

где  $z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$  и  $z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$  — соответствующие волновые сопротивления первой и второй среды.

Если  $z_2 = z_1$ , то отраженные волны отсутствуют.

Если  $z_2 > z_1$ , то  $E_{\varphi_1}$  и  $E_{\psi_1}$  имеют одинаковые знаки, а  $H_{\varphi_1}$  и  $H_{\psi_1}$  имеют разные знаки. В первой среде в результате частичного отражения волны напряженность электрического поля  $E_1 = E_{\varphi_1} + E_{\psi_1}$  возрастает, а напряженность магнитного поля  $H_1 = H_{\varphi_1} + H_{\psi_1}$  убывает. При  $z_2 < z_1$  мы имеем обратную картину.

Все остальные выводы, полученные при исследовании распространения волн в однородных линиях без потерь, могут быть соответствующим образом перенесены на исследуемый случай распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике.

В общем случае, когда направление распространения падающей волны составляет некоторый угол с нормалью к поверхности раздела сред, для нахождения отраженной и преломленной волн необходимо использовать все граничные условия для векторов  $E$ ,  $D$ ,  $H$  и  $B$ .

## 76. Вектор Пойнтинга

Определим мощность потока энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны. Будем предполагать, что существует только волна, движущаяся в одном направлении. В таком случае объемная плотность энергии электромагнитного поля равна:

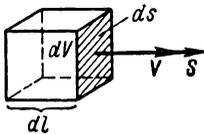
$$\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\epsilon E}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H + \frac{\mu H}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E = \sqrt{\epsilon\mu} EH = \frac{1}{v} EH$$

и, следовательно, в объеме  $dV = dl ds$  (рис. 95) заключена энергия:

$$\frac{1}{v} EH dl ds.$$

Отрезок пути  $dl$  волна проходит за промежуток времени  $dt$ , который связан с  $dl$  соотношением:  $dl = v dt$ .

Мощность потока энергии, отнесенная к единице поверхности, нормальной к вектору скорости  $\mathbf{v}$ , численно равна количеству энергии, которая проходит через единицу поверхности, нормальной к вектору  $\mathbf{v}$ , в единицу времени. Она получается равной:



$$S = \frac{EH}{v} \frac{dl ds}{ds dt}.$$

Принимая во внимание, что  $\frac{dl}{dt} = v$ , находим:

$$S = EH.$$

Рис. 95.

Эта величина может рассматриваться как вектор  $\mathbf{S}$ , направленный в сторону движения волны, т. е. в направлении вектора скорости  $\mathbf{v}$ .

Представления о потоке энергии и о мощности потока энергии, отнесенной к единице поверхности, были развиты в 1874 г. в работе Н. А. Умова, в которой он применил эти представления к случаю передачи энергии в упругих средах. На одиннадцать лет позже Пойнтинг применил эти представления к случаю передачи электромагнитной энергии и получил выражение вектора  $\mathbf{S}$  через векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Соответственно, вектор  $\mathbf{S}$  получил наименование *вектора Пойнтинга*.

Найдем связь между направлением вектора Пойнтинга и направлениями векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В прямой волне, как это следует из выражений, полученных в предыдущем параграфе,  $E_{x1}$  и  $H_{y1}$  всегда одного знака, т. е. в тот момент, когда вектор  $\mathbf{E}$  направлен в сторону положительной оси  $OX$ , вектор  $\mathbf{H}$  направлен в сторону положительной оси  $OY$ . Вектор же скорости  $\mathbf{v}$  в прямой волне направлен в сторону положительной оси  $OZ$ . Взаимное расположение векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  для случая прямой волны показано на рис. 96.

В обратной волне  $E_{x2}$  и  $H_{y2}$  всегда имеют различные знаки и вектор  $\mathbf{v}$  направлен в отрицательную сторону оси  $OZ$ . Взаимное расположение векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  в обратной волне изображено на рис. 97.

Мы видим, что направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением поступательного движения оси правого винта, головка которого вращается в плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в направлении от  $\mathbf{E}$  к  $\mathbf{H}$  по кратчайшему расстоянию.

Следовательно, вектор  $\mathbf{S}$  можно представить как векторное произведение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Он определяет собой *мощность потока электромагнитной энергии, отнесенную к единице поверхности, нормальной к направлению распространения волны*. Выражение для вектора Пойнтинга было получено в предположении, что среда однородна и изотропна и что существует только прямая или только обратная волна. В следующем параграфе будет показано, что это выражение справедливо в общем случае.

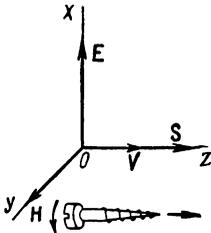


Рис. 96.

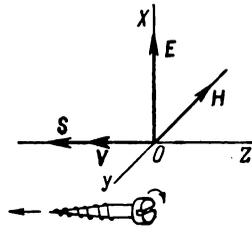


Рис. 97.

Остановимся на важном практическом случае, когда  $E_x$  и  $H_y$  изменяются во времени по закону синуса. Предположим, что существует только одна прямая волна. Имеем:

$$E_{x1} = F_1(z - vt) = E_{xm} \sin(\omega t + \psi);$$

$$H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{xm} \sin(\omega t + \psi),$$

причем  $\omega$  — угловая частота колебаний.

Последние уравнения удовлетворяются при условии, что существует равенство:  $\omega t + \psi = k(z - vt)$ , где  $k$  — постоянная величина. Так как это равенство должно удовлетворяться для любого момента времени  $t$ , то, положив  $t = 0$ , найдем  $\psi = kz$ . Следовательно,  $\omega t = -kvt$  и  $k = -\frac{\omega}{v}$ . Таким образом,

начальная фаза  $\psi$  может быть представлена в виде:  $\psi = -\frac{\omega}{v} z$ . Стало быть, имеем:

$$E_{x1} = E_{xm} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z\right); \quad H_{y1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{xm} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z\right).$$

На рис. 98 изображены векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в разных точках оси  $OZ$  для момента времени  $t = 0$ . Величины  $E$  и  $H$  распределены в пространстве по закону синуса, и все это распределение перемещается

в положительную сторону оси  $OZ$  со скоростью  $v$ . Действительно, точка, в которой  $E_x = 0$ , определяется условием:  $\omega t - \frac{\omega}{v} z = 0$  или  $z = vt$ , т. е. движется со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $OZ$ . На рис. 98 пунктирными линиями изображено распределение поля в некоторый момент времени  $t_1 > 0$ .

Расстояние, на которое распространяется электромагнитная волна в течение одного периода колебаний, называется *длиной волны*. Обозначая длину волны через  $\lambda$ , будем иметь:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

где  $f$  — частота колебаний.

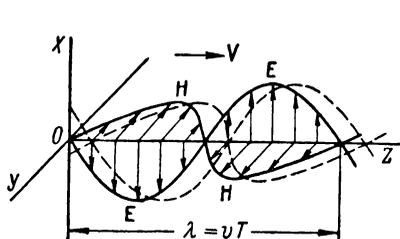


Рис. 98.

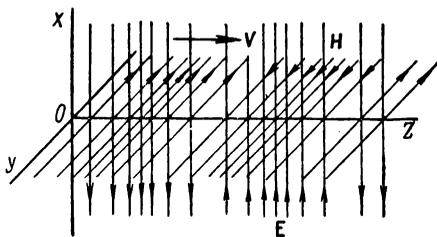


Рис. 99.

Разность фаз колебаний в двух точках, удаленных друг от друга в направлении распространения волны на расстояние  $\lambda$ , имеет значение  $\frac{\omega}{v} \lambda = \omega T = 2\pi$ . Следовательно, *длина волны есть расстояние между двумя ближайшими точками, в которых напряженность поля имеет максимальное положительное значение.*

Чтобы наглядно представить себе все поле плоской волны, необходимо вообразить два взаимно перпендикулярных семейства линий напряженности электрического и магнитного полей, заполняющих собой все пространство, в котором распространяется волна (рис. 99). В каждой плоскости, параллельной плоскости  $XOY$ , линии напряженности поля распределены равномерно, но в направлении оси  $OZ$  густота линий меняется по закону синуса. Все это распределение движется со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $OZ$ .

### § 77. Поток электромагнитной энергии

Вектор Пойнтинга, определяющий величину и направление потока электромагнитной энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, нормальной к направлению распространения волны, равен:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Покажем справедливость этого утверждения для любой среды, которая в общем случае может быть и неоднородной и анизотропной, и для любого характера поля. Свое рассмотрение мы ограничим только одним предположением, что электрические ( $\epsilon$  и  $\gamma$ ) и магнитные ( $\mu$ ) свойства среды не зависят от напряженностей электрического и магнитного полей и не являются функциями времени.

Рассмотрим некоторый произвольно выбранный объем  $V$  пространства, ограниченный замкнутой поверхностью  $s$ .

Предположим, что энергия ( $W_e + W_m$ ) электрического и магнитного полей, заключенная в объеме  $V$ , изменяется во времени. Скорость ее уменьшения равна:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \right) dV.$$

В общем случае анизотропной среды имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2}{2} \right) = \\ &= E_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned}$$

и точно так же

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \right) = \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \left( -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV.$$

Выражая плотность тока смещения в виде разности результирующей плотности тока и плотностей токов проводимости и переноса и используя первое уравнение Максвелла, находим:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \delta - \gamma \mathbf{E} - \delta_{nep} = \text{rot } \mathbf{H} - \gamma \mathbf{E} - \delta_{nep}.$$

Кроме того, второе уравнение Максвелла дает:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \left( -\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \gamma \mathbf{E}^2 + \delta_{nep} \mathbf{E} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} \right) dV.$$

Заметим, что имеет место тождество:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Действительно, векторное произведение  $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$  выражается в виде:

$$[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] = \mathbf{i} (E_y H_z - E_z H_y) + \mathbf{j} (E_z H_x - E_x H_z) + \mathbf{k} (E_x H_y - E_y H_x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] &= \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x - E_x H_z) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y - E_y H_x) = H_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + H_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \\ &+ H_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - E_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - E_y \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \\ &- E_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = H_x \operatorname{rot}_x \mathbf{E} + H_y \operatorname{rot}_y \mathbf{E} + H_z \operatorname{rot}_z \mathbf{E} - \\ &- E_x \operatorname{rot}_x \mathbf{H} - E_y \operatorname{rot}_y \mathbf{H} - E_z \operatorname{rot}_z \mathbf{H} = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Согласно этому тождеству и на основании теоремы Остроградского можем написать:

$$\int_V (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] dV = \oint_S [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds.$$

Таким образом, получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_s + W_m) = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \delta_{nep} \mathbf{E} dV + \oint_S [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds. \quad (*)$$

Первый интеграл в правой части полученного уравнения представляет собой энергию, поглощаемую в объеме  $V$  в единицу времени вследствие конечной проводимости среды, т. е. энергию, переходящую в тепло в тех частях объема  $V$ , где среда обладает удельной проводимостью  $\gamma$  и где, следовательно, существуют токи проводимости. Второй интеграл представляет собой работу, затрачиваемую в единицу времени на ускорение свободных заряженных частиц в объеме  $V$ , т. е. на увеличение кинетической энергии этих частиц в тех частях объема  $V$ , где существуют токи переноса свободных заряженных частиц. Если имеет место столкновение этих частиц с молекулами вещества, то часть сообщенной им кинетической энергии также переходит в тепло.

Наличие третьего интеграла показывает, что не вся убыль энергии электрического и магнитного полей в объеме  $V$  превращается внутри этого объема в тепло и в кинетическую энергию свободных заряженных частиц. Величина этого третьего интеграла

представляет собой мощность, численно равную той энергии, которая передается в единицу времени из объема  $V$  сквозь поверхность  $s$ .

Таким образом, мощность потока электромагнитной энергии сквозь поверхность  $s$  выражается в виде:

$$p = \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds = \oint_s \mathbf{S} ds.$$

Отсюда следует, что удельная мощность потока электромагнитной энергии, численно равная количеству энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны, может быть представлена вектором

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Уравнение (\*) получено в предположении, что в области  $V$  не совершается механической работы на перемещение в пространстве заряженных проводящих тел и проводящих контуров с токами, а также на перемещение отдельных частей среды, неоднородных в электрическом и магнитном отношении. Это предположение заключалось в том, что величины  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $\epsilon$  были приняты постоянными в каждой точке пространства. Следовательно, все части неоднородной среды и, в частности проводники, предполагались неподвижными. Кроме того, не было предположено существование в области  $V$  каких-либо источников электродвижущей силы. Уравнение (\*) представляет собой выражение закона сохранения энергии в применении к такому случаю.

В более общем случае внутри области  $V$  могут существовать источники электромагнитной энергии, в которых совершается преобразование энергии какого-либо вида (тепловой, химической энергии и т. д.) или механической работы в электромагнитную энергию. Обозначив через  $p_e$  мощность этих источников, можем написать на основании закона сохранения энергии следующее равенство:

$$p_e = \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \int_V \delta_{nep} \mathbf{E} dV + \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds. \quad (**)$$

Умножив это уравнение на  $dt$ , получим, что работа, совершаемая всеми источниками за время  $dt$ , идет на изменение запаса энергии в магнитном и в электрическом полях в объеме  $V$ , на выделение тепла в этом объеме, на увеличение кинетической энергии находящейся в объеме  $V$  свободных заряженных частиц, и что, кроме того, часть этой работы соответствует энергии, передаваемой за пределы области сквозь поверхность  $s$ .

### § 78. Излучение электромагнитных волн антенной. Опыты Г. Герца. Работы П. Н. Лебедева. Изобретение радио А. С. Поповым

Всякая цепь переменного тока, принципиально говоря, излучает электромагнитные волны. Это принципиальное положение следует из решения системы уравнений электромагнитного поля, которое может быть получено для контуров той или иной формы. В следующих параграфах будет приведено решение для случая электрического диполя с переменными зарядами. Здесь мы остановимся лишь на некоторых общих соображениях, связанных с вопросом об излучении электромагнитных волн.

Предположим, что ток в некотором контуре увеличивается от нуля до конечного значения и затем вновь уменьшается до нуля. Если увеличивать ток в контуре бесконечно медленно, то потокосцепление самоиндукции  $\Psi$  при каждом значении тока  $i$  принимает то значение, которое оно имеет при том же значении установившегося и весьма длительно существующего постоянного тока. Энергия, израсходованная внешним источником э. д. с. при увеличении тока и равная  $A = \int i \frac{d\Psi}{dt} dt = \int id\Psi$ , преобразуется при этом в энергию магнитного поля. При бесконечно медленном уменьшении тока в контуре вся энергия, запасенная в магнитном поле, возвращается обратно источнику э. д. с. Однако полный возврат энергии поля источнику э. д. с. имеет место только при бесконечно медленном изменении тока. При конечной же скорости установления и уменьшения тока часть энергии уносится излученной электромагнитной волной.

Самый факт излучения связан с тем, что скорость  $v$  распространения электромагнитного поля имеет конечное значение. Пусть в момент времени  $t = 0$  ток в контуре начинает увеличиваться. До момента  $t = 0$  ток в контуре отсутствовал. К моменту времени  $t_1$ , когда ток в контуре достигает максимального значения, электромагнитное поле успевает распространиться только на конечное расстояние от контура, равное  $vt_1$ . Если вслед за тем ток в контуре уменьшается, то энергия поля частично возвращается источнику. Однако граница электромагнитного поля продолжает распространяться в прежнем направлении с той же скоростью  $v$ , и к моменту времени  $t_2$ , когда ток в контуре вновь станет равен нулю, поле распространится на расстояние от контура, равное  $vt_2$ . Поэтому энергия поля не возвращается полностью источнику э. д. с. Часть энергии оказывается связанной с электромагнитной волной, свободно распространяющейся в пространстве.

Из сказанного ясно, что количество энергии излученной волны за некоторый промежуток времени зависит от скорости изменения тока в контуре. При постоянном токе и постоянных зарядах излучение не имеет места. Всякий контур, в котором протекает переменный ток, принципиально говоря, излучает электромагнитные

волны. Однако при промышленной частоте  $f = 50$  гц в системах, с которыми мы имеем дело в технических устройствах, количество энергии излученной волны практически ничтожно, и при расчетах мы эту энергию не принимаем во внимание. Излучение незначительно и в диапазоне звуковых частот. Поэтому в радиотехнике используются высокие частоты приблизительно от  $f = 10^5$  гц и выше.

Способность контура к излучению сильно зависит от его геометрической конфигурации. Для увеличения этой способности

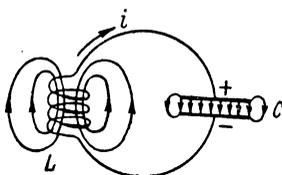


Рис. 100.

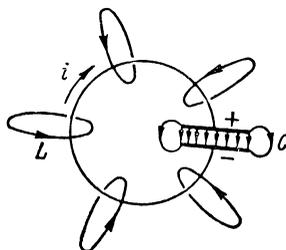


Рис. 101.

необходимо создать такие условия, чтобы магнитное и электрическое поля, связанные с переменным током и переменным напряжением в контуре, были распределены в одной и той же области пространства, окружающего контур. Так, например, контур, изображенный на рис. 100, содержащий катушку самоиндукции с плотно навитыми витками обмотки и конденсатор с небольшим расстоянием между пластинами, обладает весьма слабой способностью к излучению, так как основное магнитное поле и основное электрическое поле сосредоточены в разных областях пространства. Излучение незначительно также и в случае контура, изображенного на рис. 101. Магнитное поле распределено вдоль такого контура, но основное электрическое поле остается сосредоточенным в небольшом пространстве между обкладками конденсатора. Но если раздвинуть обкладки на возможно большее расстояние друг от друга, выпрямив соединяющий их провод так, как показано на рис. 102, то электрическое и магнитное поля оказываются распределенными в одной и той же области пространства. Такая система обладает высокой способностью к излучению.

Первые замечательные опыты, экспериментально подтвердившие теорию Максвелла, были поставлены Герцем. Основной колебательный контур, так называемый вибратор, которым пользовался Герц, по существу был подобен контуру, изображенному на рис. 102. Обкладки конденсатора, выполненные либо в виде пластин, либо в виде шаров, могли передвигаться вдоль стержней  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 103), чем достигалось изменение емкости системы. Чтобы иметь возможность зарядить конденсатор, в проводе, соединяющем

его обкладки, был образован между двумя маленькими шариками искровой промежутком  $K$ . Обкладки конденсатора Герц присоединял ко вторичным зажимам индукционной катушки  $R$ . Каждое прерывание тока в первичной обмотке катушки вызывало импульс э. д. с. во вторичной обмотке. Конденсатор заряжался до напряжения, при котором проскакивала искра между шариками. Заряженный конденсатор оказывался коротко замкнутым через искру, и в системе вибратора возникали колебания весьма высокой частоты. Частота колебаний зависела от емкости и индуктив-

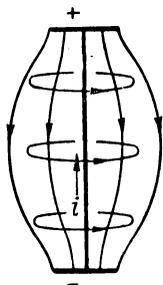


Рис. 102.

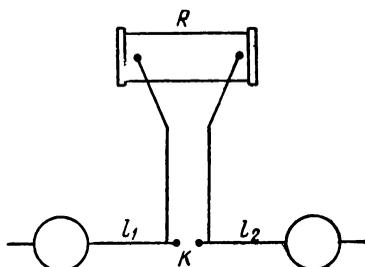


Рис. 103.

ности вибратора. Эти колебания весьма быстро затухали, так как их энергия расходовалась на излучение и на выделение тепла в контуре.

Для обнаружения электромагнитных волн, излученных вибратором, Герц применял так называемый резонатор, состоявший из колебательного контура, снабженного искровым промежутком. При настройке резонатора в резонанс с частотой электромагнитных колебаний в вибраторе, в контуре резонатора возникали достаточно сильные колебания, вызывавшие проскакивание искры в его искровом промежутке. По длине этой искры можно было судить об интенсивности электромагнитного поля в месте расположения резонатора. Герцу удалось обнаружить электромагнитное излучение на расстоянии в двенадцать метров от вибратора, имевшего геометрические размеры порядка одного метра.

Опыты Герца показали, что электромагнитные волны распространяются в соответствии с законами, которые вытекают из теории Максвелла. Эти опыты подтвердили также гипотезу Максвелла об электромагнитной природе света. Направляя излучение вибратора на большую металлическую пластину нормально к ее поверхности, Герц наблюдал стоячие волны, образующиеся в результате наложения на прямую волну волны, отраженной от пластины. Обнаруживая резонатором узлы и пучности колебаний в стоячей волне, он получал возможность измерять длину волны и, зная частоту электромагнитных колебаний в вибраторе, мог

вычислить скорость распространения электромагнитных волн. Эта скорость оказалась равной скорости света.

Герц обнаружил, что электромагнитные волны, излучаемые вибратором, отражаются от металлических зеркал по тем же законам, по которым происходит отражение от зеркал и светового луча, и наблюдал также преломление электромагнитной волны при прохождении ее сквозь большую призму, сделанную из асфальта.

Блестящие опыты по исследованию распространения и преломления в различных средах электромагнитных волн и по экспериментальному доказательству электромагнитной природы света были произведены выдающимся физиком-экспериментатором П. Н. Лебедевым. П. Н. Лебедев впервые осуществил в созданной им лаборатории вибратор весьма малых размеров, который излучал весьма короткие волны, имеющие длину волны меньше одного сантиметра. Он осуществил также резонатор с термопреобразователем, позволяющий принимать столь короткие волны. Герц, оперировавший с волнами, имевшими длину порядка метра, вынужден был создавать призмы и зеркала больших размеров. П. Н. Лебедев в своей установке получил возможность пользоваться преломляющими и отражающими волны устройствами весьма малых размеров. Это не только сделало всю экспериментальную установку негромоздкой, но и открыло новые возможности для исследования, а именно, оказалось возможным исследоватьхождение электромагнитных волн через кристаллические тела. Результаты этого замечательного экспериментального исследования П. Н. Лебедев опубликовал в 1895 г. в работе под названием «О двойном преломлении лучей электрической силы». Мировую славу принесли П. Н. Лебедеву его блестящие опыты, в которых он впервые экспериментально доказал давление света. В первых опытах, успешно завершенных в 1900 г., П. Н. Лебедев обнаружил и измерил давление света на твердые тела. В последующих еще более трудных опытах, завершившихся к 1910 г., П. Н. Лебедев экспериментально доказал существование светового давления на газы. Результаты экспериментальных работ П. Н. Лебедева оказались в согласии с выводами максвелловой теории электромагнитного поля.

Имеющее мировое значение изобретение первого радиотелеграфа было сделано выдающимся русским физиком и электротехником А. С. Поповым. А. С. Попову принадлежит заслуга создания первого радиотелеграфа и применения радиосвязи для практических целей. А. С. Попов создал первый приемник радиотелеграфных сигналов. В этом приемнике он использовал для регистрации проходящих электромагнитных волн так называемый когерер, представляющий собой стеклянную трубку с металлическим порошком. Такая трубка имеет весьма большое электрическое сопротивление, но при прохождении в месте ее расположения электромагнитных

волн ее сопротивление резко падает. Включив такую трубку в цепь источника э. д. с., можно по резкому увеличению тока судить о появлении электромагнитных волн. Однако после прекращения действия электромагнитных волн сопротивление трубки вновь не восстанавливается и для этого требуется встряхнуть трубку. А. С. Попов ввел в свой приемник устройство для автоматического встряхивания трубки, действующее под влиянием тока, возникающего в цепи трубки в результате прохождения электромагнитной волны. Таким образом, трубка автоматически приводилась в состояние готовности зарегистрировать новый сигнал. Это изобретение сразу же дало возможность регистрировать сигналы азбуки

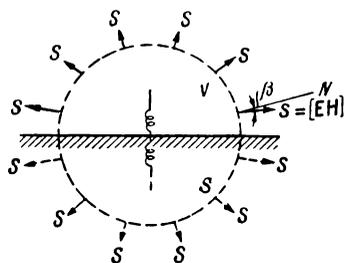


Рис. 104.

Морзе. Для увеличения чувствительности приема А. С. Попов первый предложил использовать антенну — вертикальный провод, одним концом присоединенный к приемному устройству. Первоначально А. С. Попов применил свое приемное устройство для регистрации приближающихся грозных разрядов, в связи с чем и назвал изобретенное им устройство грозоотметчиком. Затем он применил свое устройство для

осуществления радиосвязи в военно-морском деле.

Официальной датой изобретения радио принято считать 7 мая 1895 г., когда А. С. Попов выступил с публичным докладом на заседании физического отделения Русского Физико-Химического общества на тему «Об отношении металлических порошков к электромагнитным колебаниям». На этом докладе А. С. Попов продемонстрировал действие своего приемного устройства.

Современные антенны передающих и приемных радиостанций осуществляются по тому же принципу, который был положен в основу конструкции первой антенны А. С. Попова. При конструировании антенны ставится задача создания развернутого колебательного контура. Антенны, расположенные над поверхностью земли, обычно состоят из вертикальных проводов, соединенных с более или менее развитой горизонтальной сетью проводов. В случае передающей радиостанции нижний конец антенны присоединяют к одному из зажимов катушки генератора электромагнитных колебаний высокой частоты. Другой зажим катушки соединяют с землей через специальную систему заземлителя. Э. д. с. высокой частоты, возбужденная в катушке генератора, создает мощные колебания тока в антенне, контур которой обычно настраивают в резонанс с частотой колебаний в генераторе.

Мощность излучения антенны может быть вычислена следующим путем. Если антенна расположена над поверхностью хорошо проводящей земли, то можно представить себе землю замененной

зеркальным изображением антенны (рис. 104). Окружив антенну и ее зеркальное изображение замкнутой поверхностью  $s$ , применим к объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью, уравнение (\*\*\*) предыдущего параграфа. Подразумевая под величиной  $p_e$  только мощность, равную скорости перехода энергии из антенны в окружающее ее поле, т. е. исключая из рассмотрения потери энергии в самом генераторе и в проводах антенны, и полагая для всего окружающего антенну пространства  $\gamma = 0$  и  $\rho = 0$ ,  $\delta_{nep} = 0$ , получаем:

$$p_e - \frac{\partial}{\partial t} (W_s + W_m) = \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds = \oint_s \mathbf{S} ds = \oint_s S_n ds,$$

где  $S_n$  — нормальная к поверхности  $s$  составляющая вектора Пойнтинга.

Изменение запаса энергии полей ( $W_s + W_m$ ) в объеме  $V$  за целый период колебаний тока в антенне равно нулю. Поэтому средняя мощность волны, излученной антенной и ее зеркальным изображением, равна:

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^T p_e dt = \int_s \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_n dt \right) ds = \int_s S_{n\text{cp}} ds,$$

причем  $S_{n\text{cp}}$  есть среднее арифметическое за период колебаний значение нормальной составляющей вектора Пойнтинга. Таким образом, для вычисления мощности излучения необходимо определить в каждой точке поверхности  $s$  для каждого момента времени вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$  и, следовательно, найти величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  путем решения системы уравнений электромагнитного поля.

### § 79. Электродинамические векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля

Представляется возможным аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении статических и стационарных полей, выразить и в общем случае переменного электромагнитного поля векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  через вспомогательные величины — векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и скалярный потенциал  $U$  поля. Введение этих вспомогательных величин ценно тем, что они в случае однородной и изотропной среды довольно просто вычисляются по заданному распределению в пространстве и изменению во времени свободных зарядов и токов проводимости и переноса. Естественно, что при этом  $\mathbf{A}$  и  $U$  являются функциями не только координат, но и времени.

Будем исходить из совокупности уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\delta = \delta_{np} + \delta_{см} + \delta_{пер} = (\delta_{np} + \delta_{пер}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Здесь обозначены:  $\delta_{np}$  — плотность тока проводимости,  $\delta_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  — плотность тока смещения и  $\delta_{пер}$  — плотность тока переноса.

Умножая первое уравнение на  $\mu$  и используя третье, четвертое и пятое уравнения, можем при  $\mu = \text{const}$  и  $\epsilon = \text{const}$  привести эту совокупность к четырем уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu (\delta_{np} + \delta_{пер}) + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Последнее уравнение дает возможность представить вектор  $\mathbf{B}$  через *векторный потенциал*  $\mathbf{A}$  электромагнитного поля в виде:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (*)$$

так как всегда  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ . Из второго уравнения имеем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{ot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

что удовлетворяется, если положить:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} U, \quad (**)$$

так как  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$ . Величина  $U$  есть *скалярный потенциал* электромагнитного поля.

Подставив выражения (\*) и (\*\*) в первое уравнение электромагнитного поля, получаем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu (\delta_{np} + \delta_{пер}) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon \mu \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Как было показано в § 46, имеет место тождество:

$$\operatorname{rot}_x (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 A_x = \operatorname{grad}_x (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x.$$

Составляя такие же выражения для проекций  $A_y$  и  $A_z$ , умножая эти выражения на орты и складывая их, получаем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu (\delta_{np} + \delta_{nep}) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon\mu \text{grad } \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Вектор  $\mathbf{A}$  пока выбран так, что определен его вихрь ( $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ). Мы можем еще тем или иным способом определить расхождение этого вектора. Сделаем это так, чтобы упростилось последнее уравнение, а именно, чтобы в нем сократились первый член в левой части с последним членом в правой части. С этой целью положим:

$$\text{div } \mathbf{A} = - \epsilon\mu \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (***)$$

После сокращения указанных членов в правой и левой частях уравнения, получаем уравнение Даламбера для вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \mu (\delta_{np} + \delta_{nep}).$$

Это уравнение распадается на три соответствующих уравнения для проекций  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$ , причем в правых частях будут содержаться соответственно проекции векторов плотности тока.

Подставляя выражение (\*\*\*) для  $\mathbf{E}$  в оставшееся третье уравнение электромагнитного поля, получаем:

$$\text{div } \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} - \text{div grad } U = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Заменяя  $\text{div } \mathbf{A}$  его выражением через  $U$ , согласно равенству (\*\*\*) и замечая, что  $\text{div grad } U = \nabla^2 U$ , находим:

$$\nabla^2 U - \epsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon},$$

т. е. скалярный потенциал при этом также удовлетворяет уравнению Даламбера.

Заметим, что при постоянных полях, когда  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$  и  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ , уравнения Даламбера переходят в уже известные нам уравнения Пуассона для  $U$  и  $\mathbf{A}$ .

Исследуя поле в области, где нет свободных зарядов ( $\rho = 0$ ) и нет токов проводимости и переноса ( $\delta_{np} = 0$ ;  $\delta_{nep} = 0$ ), будем иметь уравнения:

$$\nabla^2 U = \epsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

которые носят название *волновых уравнений*.

Получим, пользуясь некоторыми общими соображениями, выражения для  $U$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ , и  $A_z$ , определяющие эти величины по заданному распределению зарядов и токов и их изменению во времени и являющиеся частными интегралами приведенных выше уравнений Даламбера.

Предположим, что в некотором малом элементе объема пространства содержится изменяющийся во времени заряд  $q$ . Естественно, это осуществимо физически только путем притекания или утекания свободных заряженных частиц в данный элемент объема из смежных с ним элементов объема. Однако сначала мы рассмотрим поле, создаваемое только зарядом, находящимся в данном элементе объема. Пусть элемент объема столь мал, что заряд  $q$  можно рассматривать как точечный.

Вне заряда  $q$  потенциал  $U$  удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

причем  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ . Найдем решение этого уравнения для рассматриваемого случая. Полагая, что заряд находится в начале координат и обозначая через  $r$  расстояние от заряда до точки, в которой определяется  $U$ , будем иметь:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

и аналогично

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Поле заряда  $q$  обладает сферической симметрией и, следовательно,  $U$  является функцией только  $r$  и  $t$ . При этом вектор  $\text{grad } U$  направлен по радиусу и имеет величину, равную  $\text{grad}_r U = \frac{\partial U}{\partial r}$ . При таком условии имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{x}{r};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial x} (x) \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) x \frac{\partial U}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} x \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned}$$

Составляя такие же выражения для  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  и  $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$  и складывая их, получаем:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}.$$

Волновое уравнение приобретает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial t^2}.$$

Последнее уравнение для  $rU$  совершенно аналогично уравнению (\*) для  $E_x$ , которое мы имели при исследовании плоской волны в § 75. Следовательно, по аналогии можем написать его решение в виде:

$$rU = F_1(r - vt) + F_2(r + vt).$$

Интересуясь только прямой волной, распространяющейся от заряда, ограничимся рассмотрением частного решения  $F_1(r - vt)$ , причем запишем его в виде:

$$rU = F_1\left[-v\left(t - \frac{r}{v}\right)\right] = f\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

При этом  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  есть скорость распространения волны. Итак, имеем:

$$U = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}.$$

Так как в частном случае неизменяющегося во времени заряда  $q$  эта формула должна приобрести вид:  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$ , то, следовательно,  $f\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon}$ . Здесь  $q\left(t - \frac{r}{v}\right)$  — значение заряда  $q$  в момент времени  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ , предшествующий моменту времени  $t$ , в который определяется  $U$ . При этом  $\frac{r}{v}$  есть промежуток времени, в течение которого волна, движущаяся со скоростью  $v$ , проходит путь  $r$ .

Если заряды распределены в некотором объеме  $V$  пространства с объемной плотностью  $\rho(x, y, z, t)$ , являющейся функцией координат и времени, то, применяя полученное решение к элементарному заряду  $dq = \rho dV$ , заключенному в элементе объема  $dV$ , и суммируя потенциалы в некоторой точке поля от всех элементарных зарядов, получаем:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r},$$

где  $r$  — расстояние от элемента объема  $dV$  до точки, в которой определяется  $U$ .

Последнее выражение является частным решением уравнения Даламбера для  $U$ .

Аналогичным путем получаем частные решения уравнений Даламбера для проекций вектора  $\mathbf{A}$ :

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r};$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}.$$

Здесь  $\delta_x\left(t - \frac{r}{v}\right)$ ,  $\delta_y\left(t - \frac{r}{v}\right)$  и  $\delta_z\left(t - \frac{r}{v}\right)$  — значения проекций вектора плотности тока проводимости или переноса в элементе объема  $dV$  в момент  $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ , предшествующий моменту  $t$ , в который определяются  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$ .

Полученные выражения переходят при постоянных токах в найденные ранее выражения (§ 46).

Полученный результат имеет глубокое принципиальное значение, он выражает то существенное обстоятельство, что электромагнитные возмущения распространяются от центров возмущения с конечной скоростью  $v$ , и чем дальше от центра возмущения, тем больше запаздывает его действие. Соответственно, *скалярный  $U$  и векторный  $\mathbf{A}$  потенциалы*, выражаемые последними формулами, называют *электродинамическими запаздывающими потенциалами*.

В заключение обратим внимание на то, что напряженность электрического поля (\*\*), помимо члена  $(-\text{grad } U)$ , содержит еще член  $\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$ . Составляя линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль некоторого произвольного замкнутого контура, будем иметь:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } U\right) d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

так как  $\oint \text{grad } U d\mathbf{l} = 0$  и так как интеграл  $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$  равен магнитному потоку  $\Phi$  сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования.

Таким образом, составляющая  $\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$  напряженности электрического поля имеет смысл э. д. с., индуцируемой переменным магнитным потоком, отнесенной к единице длины в направлении этой составляющей.

В случае электростатического поля и электрического стационарного поля около неподвижных проводников с постоянными токами электродвижущие силы индукции отсутствуют и напряженность электрического поля определяется только членом  $(-\text{grad } U)$ , причем  $U$  не зависит от времени.

### § 80. Электрический диполь с переменными зарядами

Рассмотрим электрическую колебательную систему, образованную двумя малыми металлическими сферами, соединенными проводником длиной  $l$ . Предположим, что вся емкость такого вибратора есть емкость между сферами и что соединительный проводник обладает только индуктивностью. При возникновении колебаний в такой системе переменный ток  $i$  в проводнике в каждый момент времени имеет одно и то же значение вдоль всего проводника. Такой вибратор на расстояниях  $r$  от него, намного превышающих  $l$ , можно рассматривать, как диполь с переменным электрическим моментом  $ql$ . Поместим диполь в начале координат и направим его ось по оси  $OZ$  (рис. 105).

Запаздывающий векторный потенциал  $\mathbf{A}$  в точке, удаленной на расстояние  $r$  от вибратора, равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{i \left( t - \frac{r}{v} \right) dl}{r} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \left( t - \frac{r}{v} \right) l}{r}. \end{aligned}$$

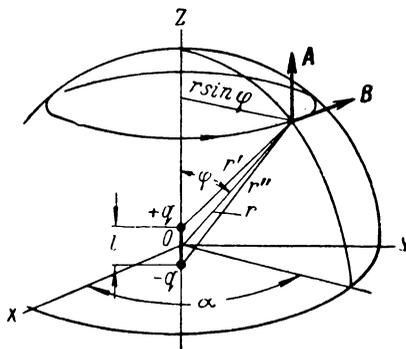


Рис. 105.

Последнее выражение получается, если учесть, что при  $r \gg l$  величину  $1/r$ , а также в соответствии с вышеотмеченным об одинаковости тока вдоль проводника и величину  $i \left( t - \frac{r}{v} \right)$ , можно вынести за знак интеграла.

Запаздывающий скалярный потенциал в той же точке равен:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{q \left( t - \frac{r'}{v} \right)}{r'} - \frac{q \left( t - \frac{r''}{v} \right)}{r''} \right].$$

При  $r \gg l$  имеем:

$$r' \approx r - \frac{l}{2} \cos \varphi; \quad r'' \approx r + \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Разлагая в ряд по степеням малой величины  $\frac{l}{2} \cos \varphi$  и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{q \left( t - \frac{r'}{v} \right)}{r'} &= \frac{q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} - \frac{l}{2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} \right); \\ \frac{q \left( t - \frac{r''}{v} \right)}{r''} &= \frac{q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} + \frac{l}{2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$U = -\frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( q \left( t - \frac{r}{v} \right) \right).$$

Условимся в дальнейшем опускать обозначение аргумента  $\left( t - \frac{r}{v} \right)$  и кратко писать:

$$q \left( t - \frac{r}{v} \right) = q, \quad i \left( t - \frac{r}{v} \right) = i.$$

Замечив, что

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{v} \frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial i}{\partial r} = -\frac{1}{v} \frac{\partial i}{\partial t},$$

будем, пользуясь этими соотношениями, производные  $\frac{\partial q}{\partial r}$  и  $\frac{\partial i}{\partial r}$  заменять умноженными на  $\left( -\frac{1}{v} \right)$  производными  $\frac{\partial q}{\partial t}$  и  $\frac{\partial i}{\partial t}$ . Кроме того, заметим, что  $\frac{\partial q}{\partial t} = i$  и  $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial i}{\partial t}$ .

Составляющие вектора магнитной индукции определяются из соотношений:

$$B_x = \text{rot}_x \mathbf{A}; \quad B_y = \text{rot}_y \mathbf{A}; \quad B_z = \text{rot}_z \mathbf{A}.$$

Замечив, что  $A_x = A_y = 0$  и  $A_z = \frac{\mu l}{4\pi r}$ , находим:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\mu l}{4\pi} \left( -\frac{i}{r^2} - \frac{1}{rv} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \frac{y}{r};$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mu l}{4\pi} \left( -\frac{i}{r^2} - \frac{1}{rv} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \frac{x}{r}; \quad B_z = 0.$$

Так как  $B_x/B_y = -y/x$ , то вектор  $\mathbf{B}$  касателен к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси  $OZ$  и имеющей центр на этой оси (рис. 105). Эти окружности являются магнитными линиями. Следовательно, в сферической системе координат  $r, \varphi, \alpha$  вектор  $\mathbf{B}$  имеет единственную составляющую  $B_\alpha$ , равную по величине  $|B_\alpha| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ . Так как  $\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \varphi$  и знак  $B_\alpha$  должен совпадать со знаком  $B_y$  при  $y = 0$  и  $x > 0$  (рис. 105), то

$$B_\alpha = \frac{\mu l}{4\pi} \left( \frac{i}{r^2} + \frac{1}{rv} \frac{\partial i}{\partial t} \right) \sin \varphi = \frac{\mu l \sin \varphi}{4\pi r v} \left( \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r} i \right). \quad (*)$$

Определим составляющие  $E_\alpha, E_r$  и  $E_\varphi$  в сферических координатах, пользуясь выражением:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } U,$$

причем заметим, что  $A_\alpha = 0$ ,  $A_r = A_z \cos \varphi$  и  $A_\varphi = -A_z \sin \varphi$  и что  $U$  можно представить в виде:

$$U = -\frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{r} \right) = -\frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{1}{rv} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{q}{r^2} \right) = \frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon} \left( \frac{i}{rv} + \frac{q}{r^2} \right),$$

Так как  $A_\alpha = 0$  и  $U$  не зависит от  $\alpha$ , то  $E_\alpha = 0$ . Далее имеем:

$$E_r = -\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu l \cos \varphi}{4\pi r} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{1}{rv^2} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{i}{r^2v} - \frac{1}{r^2v} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{2q}{r^3} \right).$$

Так как  $\frac{1}{\epsilon v^2} = \mu$ , то первое слагаемое и первый член в скобках сокращаются, и получаем:

$$E_r = \frac{l \cos \varphi}{4\pi\epsilon} \left( \frac{2i}{r^2v} + \frac{2q}{r^3} \right) = \frac{2\mu l \cos \varphi}{4\pi r} \left( \frac{v}{r} i + \frac{v^2}{r^2} q \right). \quad (**)$$

Наконец

$$E_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\mu l \sin \varphi}{4\pi r} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{l \sin \varphi}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r^2v} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{r^3} \right)$$

или

$$E_\varphi = \frac{\mu l \sin \varphi}{4\pi r} \left( \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{v}{r} i + \frac{v^2}{r^2} q \right). \quad (***)$$

Поскольку  $E_\alpha = 0$ , то  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ .

В дальнейшем будем рассматривать важный практический случай синусоидального изменения тока в диполе:  $I_m \sin \omega t$ . С учетом конечной скорости распространения электромагнитных волн в выражения для напряженности электрического поля и для магнитной индукции мы должны подставить величину  $i = I_m \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ . Замечая, что  $\frac{\omega r}{v} = \frac{2\pi r}{Tv} = \frac{2\pi r}{\lambda}$ , где  $T$  — период колебаний и  $\lambda = vT$  — длина волны, получаем:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \omega I_m \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \quad \frac{v}{r} i = \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right) \omega I_m \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right),$$

$$\frac{v^2}{r^2} q = - \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \omega I_m \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right).$$

Следовательно, в выражениях для  $B_\alpha$ ,  $E_r$  и  $E_\varphi$  амплитуда каждого последующего члена отличается от амплитуды предыдущего множителем  $\frac{\lambda}{2\pi r}$ .

### § 81. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, малых по сравнению с длиной волны

Пусть  $r \ll \lambda$ . В этом случае можно оставить только последние члены в выражениях для  $B_\alpha$ ,  $E_r$  и  $E_\varphi$ . Имеем:

$$B_\alpha = \frac{\mu I i \sin \varphi}{4\pi r^2}; \quad E_r = \frac{2lq \cos \varphi}{4\pi \epsilon r^3}; \quad E_\varphi = \frac{lq \sin \varphi}{4\pi \epsilon r^3}.$$

При этом приближенная формула для  $B_\alpha$  совпадает с формулой Био — Савара — Лапласа, справедливой для постоянного тока. Приближенные формулы для  $E_r$  и  $E_\varphi$  совпадают с формулами, выведенными ранее для статического диполя (§ 10).

Рассмотренные здесь члены общих выражений для составляющих векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  определяют только реактивную мощность в связи с тем, что мгновенные значения напряженностей магнитного и электрического полей сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол  $\pi/2$ , так как на этот угол сдвинуты по фазе  $i$  и  $q$ . Заметим, что составляющие, которыми мы здесь пренебрегли, но которые существуют и в рассматриваемой области ( $r \ll \lambda$ ), определяют активную мощность, что будет показано в следующем параграфе.

### § 82. Электромагнитное поле на расстояниях от диполя, значительно превышающих длину волны

При  $r \gg \lambda$  в выражениях для  $B_\alpha$  и для  $E_\varphi$  можно пренебречь всеми членами, кроме первых. Величиной  $E_r$  можно пренебречь полностью, так как она члена весьма малы по сравнению с первым членом составляющей  $E_\varphi$ . Имеем:

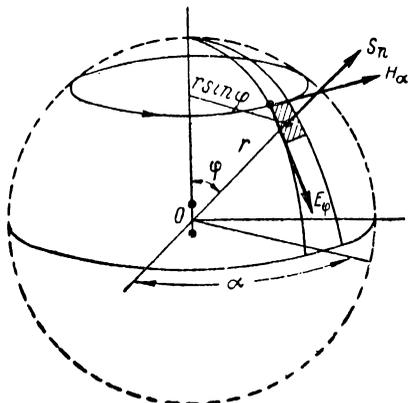


Рис. 106.

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \frac{\mu I \sin \varphi}{4\pi r v} \omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right) = \\ &= \frac{\mu I I_m}{2r \lambda} \sin \varphi \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right); \\ E_\varphi &= \frac{\mu I \sin \varphi}{4\pi r} \omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{v}\right) = \\ &= v B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} B_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\alpha. \end{aligned}$$

Волна, имеющая такой характер, называется *сферической*.

Мы приходим к замечательному соотношению, полученному ранее при исследовании плоской волны:

$$\frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

Таким образом, и в случае сферической электромагнитной волны энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

Отметим особо, что  $E$  и  $H$  имеют одинаковую фазу колебаний и, следовательно, определяют собой активную мощность. Вектор Пойнтинга, как это видно из рис. 106, в любой момент времени и в любой точке направлен по радиусу  $r$  в сторону от диполя, и, следовательно, энергия передается в направлении радиусов от диполя. Эта энергия уже не возвращается обратно к источнику и является энергией излученного электромагнитного поля.

### § 83. Мощность и сопротивление излучения диполя и антенны

Окружим диполь сферической поверхностью, имеющей центр в месте расположения диполя (рис. 106), и вычислим мощность потока электромагнитной энергии, проходящей сквозь эту поверхность. Нормальная к поверхности сферы составляющая вектора Пойнтинга равна  $S_n = E_\varphi H_\alpha$ . Отличное от нуля среднее арифметическое за период значение этой составляющей вектора Пойнтинга:

$S_{n\text{ ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_\varphi H_\alpha dt$  может получиться только от тех слагаемых

произведения  $E_\varphi H_\alpha = \frac{E_\varphi B_\alpha}{\mu}$ , которые являются произведениями членов в выражениях (\*) и (\*\*\*) в § 80 для  $B_\alpha$  и  $E_\varphi$ , находящихся в одинаковой фазе. Сюда относятся: произведение первых членов  $B_\alpha$  и  $E_\varphi$ , произведение первого члена  $B_\alpha$  и третьего члена  $E_\varphi$  и произведение вторых членов  $B_\alpha$  и  $E_\varphi$ . Легко убедиться, что два последних произведения в сумме не дают отличной от нуля средней мощности.

Таким образом, остается только произведение первых членов  $B_\alpha$  и  $E_\varphi$ , которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Имеем:

$$S_{n\text{ ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 I^2}{4r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin^2 \varphi \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) dt.$$

Учитывая, что  $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) dt = \frac{1}{2}$ , получаем:

$$S_{n\text{ ср}} = \frac{I_m^2 I^2}{8r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin^2 \varphi = \frac{I^2 I^2}{4r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin^2 \varphi,$$

где  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  — действующее значение тока.

Элемент поверхности сферы (рис. 106) равен:  $ds = rd\varphi r \sin\varphi d\alpha$ . Средняя мощность всего потока электромагнитной энергии сквозь поверхность сферы оказывается равной:

$$P = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{I^2 l^2}{4r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin^2 \varphi \right) r^2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = \frac{\pi I^2 l^2}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi.$$

Но

$$\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \int_1^{-1} -\sin^2 \varphi d \cos \varphi = \int_1^{-1} (\cos^2 \varphi - 1) d \cos \varphi = \frac{4}{3}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{l^2}{\lambda^2} I^2.$$

Итак, средняя мощность потока электромагнитной энергии, передаваемой сквозь поверхность сферы, оказалась отличной от нуля. Эта мощность численно равна энергии электромагнитного поля, *излучаемого* диполем, отнесенной к единице времени.

Множитель при  $I^2$  представляет собой активное сопротивление колебательного контура, характеризующее его способность к излучению. Его называют *сопротивлением излучения*. Для электрического диполя сопротивление излучения  $R'$  выражается формулой

$$R' = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{l^2}{\lambda^2}.$$

Реальная антенна представляет собой более сложную, чем диполь, излучающую систему. Обычно антенна состоит из проводов, расположенных над поверхностью земли. Участки антенны обладают емкостью по отношению к земле и друг относительно друга. Вследствие этого мгновенное значение тока неодинаково вдоль проводов антенны, так как ток ответвляется от проводов в диэлектрик в виде тока смещения. Однако всегда можно разделить провод на элементарные отрезки длиной  $dl$ , в пределах которых ток можно считать одинаковым в каждый данный момент времени. Эти отрезки с переменным током  $i$  представляют собой не что иное, как элементарные диполи. Электромагнитное поле всей антенны определится путем наложения полей всех диполей, т. е. путем интегрирования вдоль проводов антенны.

Наиболее просто можно использовать результаты, полученные для диполя, в случае антенны, расположенной над поверхностью весьма хорошо проводящей земли и образованной вертикальным проводом, заканчивающимся в верхней своей части сильно развитой системой горизонтальных проводов (рис. 107). При этих условиях землю можно заменить зеркальным изображе-

нием антенны, а также можно пренебречь емкостью вертикального провода. Заметим еще, что горизонтальные провода и их зеркальное изображение практически мало излучают энергию, так как токи в действительных горизонтальных проводах и в их зеркальных изображениях направлены в противоположные стороны (рис 107). Эти горизонтальные участки осуществляют для увеличения емкости системы, что приводит к увеличению тока в вертикальном проводе, а следовательно, к увеличению мощности излучения. Таким образом, рассматриваемая антенна приводится к переменному электрическому диполю, имеющему длину  $l = 2h$ , где  $h$  — высота действительной антенны. Электромагнитное поле на расстояниях  $r \gg h$  характеризуется теми же соотношениями, что и в случае диполя.

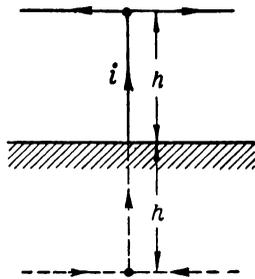


Рис. 107.

Сопrotивление излучения  $R'$  такой антенны вместе с ее зеркальным изображением найдется из последней формулы, если в ней положить  $l = 2h$ . В действительности излучает только сама антенна. Поэтому сопротивление излучения антенны определится формулой

$$R = \frac{R'}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{(2h)^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Обычно антенна расположена в воздухе и  $\mu = \mu_0$  и  $\epsilon = \epsilon_0$ . Подставив числовые значения  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ , получаем  $R = (4\pi)^2 \cdot 10 \frac{h^2}{\lambda^2} = 1580 \frac{h^2}{\lambda^2}$  ом.

### § 84. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии

Передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся в диэлектрике вдоль проводов линии. Провода линии служат направляющими электромагнитного поля.

Окружим часть линии вместе с приемником замкнутой поверхностью  $s$  (рис. 108). На основании уравнения (\*), полученного в § 77, можем написать:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_s + W_m) = \int_V \gamma E^2 dV + \oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds,$$

если в пространстве, окружающем провода линии, нет свободных зарядов ( $\rho = 0$ ;  $\delta_{nep} = 0$ ).

Если  $V$  — объем области, заключенной внутри поверхности  $s$ , то вектор  $ds$  должен быть направлен по нормали  $N$ , внешней

к этой области. Если мы желаем считать положительной энергию, передаваемую внутрь области  $V$  сквозь поверхность  $s$ , то необходимо изменить направление положительной нормали на обратное, т. е. принять положительной внутренней нормаль  $N_1$  (рис. 108). Вектор  $ds_1$  направленный по нормали  $N_1$ , равен  $ds_1 = -ds$ . Заменяя в последнем равенстве  $ds$  на  $ds_1$ , получим:

$$\oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds_1 = \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV.$$

Мы видим, что приращение энергии электрического и магнитного полей в объеме  $V$  и поглощение энергии в приемнике и в проводах линии, расположенных в этом объеме, происходит за счет передачи электромагнитной энергии в область  $V$  сквозь ограничивающую ее поверхность  $s$ .

В частном случае, когда ток в цепи постоянный, энергия полей не изменяется во времени. Следовательно, первый член в правой части последнего уравнения равен нулю, и мы имеем:

$$\oint_s [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] ds_1 = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV,$$

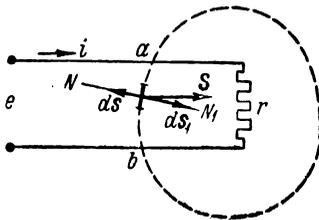


Рис. 108.

т. е. энергия, поглощаемая в цепи в форме тепла, равна энергии, передаваемой в область  $V$  через поверхность  $s$ .

Таким образом, энергия, выделяемая в проводнике в форме тепла, передается в проводник сквозь поверхность проводника из диэлектрика, окружающего проводник.

В простейшем случае отрезка  $l$  прямолинейного провода кругового сечения радиуса  $R$  (рис. 109) это положение подтверждается непосредственным вычислением напряженностей полей на поверхности провода. Вычислим поток электромагнитной энергии сквозь поверхность  $s$  отрезка провода. Имеем:  $H = \frac{i}{2\pi R}$  и  $E_t = \frac{ir}{l}$ , причем  $E_t$  — составляющая напряженности электрического поля по касательной к поверхности провода и  $r$  — сопротивление отрезка провода. Следовательно, нормальная составляющая вектора Пойнтинга равна:

$$S_n = E_t H = \frac{i^2 r}{2\pi R l}.$$

Величина  $2\pi R l = s$  есть цилиндрическая поверхность отрезка провода. Мощность, передаваемая в провод сквозь его поверхность из окружающей среды, оказывается равной:

$$S_n s = i^2 r.$$

На рис. 110 показаны направления линий напряженности магнитного и электрического полей около проводов линии передачи. Линии напряженности электрического поля несколько изогнуты, так как вследствие наличия активного сопротивления самих проводов вектор  $\mathbf{E}$  у поверхности провода имеет касательную к этой поверхности составляющую по направлению тока в проводе. Определяя направление вектора Пойнтинга в разных точках поля, получаем картину, изображенную на рисунке. Мы видим, что поток электромагнитной энергии направлен в диэлектрике от генератора к приемнику и частично направлен внутрь провода вследствие наличия активного сопротивления проводов.

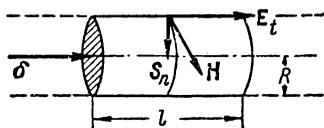


Рис. 109.

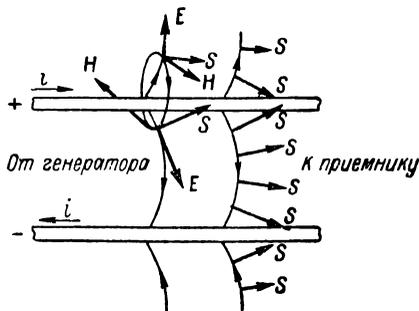


Рис. 110.

Необходимо отметить, что изгиб линий напряженности электрического поля на рис. 110 сильно преувеличен. В поле действительной линии передачи этот изгиб ничтожен, так как касательная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  у поверхности провода весьма мала по сравнению с нормальной составляющей (§ 39).

При исследовании однородных линий было показано, что скорость движения волн электрического тока и напряжения вдоль линии (ч. II) равна  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , где  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость линии на единицу ее длины. Так как энергия передается электромагнитным полем в диэлектрике, окружающем провода линии, то скорость  $v$  должна равняться скорости движения электромагнитной волны в диэлектрике. Следовательно, должно иметь место равенство:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика. В этом выражении  $L$  есть внешняя индуктивность, определяемая магнитным потоком в диэлектрике. Например, для кабеля имеем (ч. I):

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Следовательно,

$$LC = \mu\epsilon.$$

### § 85. Передача электромагнитной энергии по внутренней полости металлических труб

В предыдущем параграфе мы видели, что провода линии передачи служат направляющими электромагнитного поля, движущегося в диэлектрике, окружающем эти провода. Однако такую направляющую роль провода линии могут выполнять только при условии, что длина электромагнитной волны в диэлектрике во много раз превосходит расстояние между проводами, т. е. только при условии, что частота напряжения и тока не слишком велика. В противном случае провода линии будут весьма эффективно излучать электромагнитное поле в окружающее пространство, т. е. будут действовать подобно антенне.

Таким образом, при весьма высоких частотах, соответствующих так называемым ультракоротким волнам с длиной волны порядка нескольких сантиметров, которыми пользуется современная радиотехника, уже становится затруднительным передавать энергию по линиям обычного вида. Затруднения при этом возрастают еще потому, что при столь больших частотах в изоляции проводов возникают значительные потери энергии. При креплении проводов на отдельных изоляторах мы имеем в местах расположения изоляторов среду с повышенной диэлектрической проницаемостью, что превращает линию в своего рода фильтр, срезающий высокие частоты.

В связи со всем сказанным относительно свойств линии передачи при весьма высоких частотах представляет большой интерес возможность передачи электромагнитным полем энергии внутри металлических труб.

Стенки трубы, если они выполнены из материала с весьма высокой удельной проводимостью, не пропускают сквозь себя электромагнитные волны. В предельном случае трубы со стенками из сверхпроводящего материала электрические токи, возникающие в стенках трубы, не создают падения напряжения, и, следовательно, касательная составляющая напряженности электрического поля на внутренней поверхности стенок всюду должна быть равна нулю. Следовательно, вектор Пойнтинга не имеет составляющей, нормальной к поверхности стенки. Электромагнитное поле не проникает внутрь стенок и может, при надлежащих условиях, передавать энергию только в направлении оси трубы.

При детальном анализе условий распространения электромагнитных волн вдоль трубы, которое мы произведем в следующем параграфе, выясняется одна интересная и важная особенность, а именно: вдоль трубы возможно распространение только коротких волн, для которых длина волны в свободном пространстве одного порядка или меньше поперечных размеров полости трубы. В связи с этим такие трубы получили применение в радиотехнических устройствах ультракоротких волн для передачи электро-

магнитной энергии от генератора электромагнитных колебаний к излучающему устройству и получили название *волноводов*. Длина волноводов обычно невелика и, следовательно, потери энергии в их стенках, вызванные конечной удельной проводимостью материала стенок, незначительны. Поэтому при исследовании вопроса о распространении электромагнитных волн в волноводах мы предположим, что удельная проводимость материала стенок бесконечно велика, не допуская при этом существенных отклонений от практических условий.

### § 86. Волноводы

Для уяснения особенностей распространения электромагнитных волн в металлических трубах, рассмотрим наиболее простой и вместе с тем имеющий большое практическое значение случай волновода прямоугольного сечения. Ось  $OZ$  направим вдоль трубы. Оси  $OX$  и  $OY$  расположим так, как показано на рис. 111.

Рассмотрим случай, когда линии напряженности электрического поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси  $OZ$ , т. е. когда  $E_z = 0$ .

Предполагая, что все величины изменяются во времени по синусоидальному закону, воспользуемся символическим методом. Кроме того, предположим, что волновод имеет бесконечную длину по оси  $OZ$ . По аналогии со случаем движения волн тока и напряжения вдоль длинных однородных линий (ч. II) предположим, что изменение напряженностей полей вдоль оси  $OZ$  выражается функцией вида  $e^{-\gamma'z}$ ,\* что соответствует наличию одной прямой бегущей волны.

При этих условиях комплексные выражения мгновенных значений составляющих напряженностей электрического и магнитного полей будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; & \dot{E}_y &= \dot{E}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; & \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= \dot{H}_{mx} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; & \dot{H}_y &= \dot{H}_{my} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}; & \dot{H}_z &= \dot{H}_{mz} e^{j\omega t} e^{-\gamma'z}, \end{aligned}$$

где комплексные амплитуды  $\dot{E}_{mx}$ ,  $\dot{E}_{my}$ ,  $\dot{H}_{mx}$ ,  $\dot{H}_{my}$  и  $\dot{H}_{mz}$  являются функциями  $x$  и  $y$ .

Подставляя эти выражения в уравнения (а), (б), (в), (г), (д), (е) (§ 75) и учитывая, что в диэлектрике  $\gamma = 0$  и  $\rho = 0$  и что, кроме

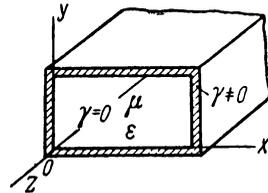


Рис. 111.

\* Через  $\gamma'$  обозначена величина, имеющая смысл коэффициента распространения, в отличие от  $\gamma$ , которая обозначает удельную электрическую проводимость вещества.

того, по условию  $\dot{E}_z = 0$ , получаем после сокращения на общий множитель  $e^{j\omega t} e^{-\gamma' z}$ :

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} + \gamma' \dot{H}_{my} = j\omega \varepsilon \dot{E}_{mx}; \quad (\text{а}) \quad \gamma' \dot{E}_{my} = -j\omega \mu \dot{H}_{mx}; \quad (\text{г})$$

$$-\gamma' \dot{H}_{mx} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = j\omega \varepsilon \dot{E}_{my}; \quad (\text{б}) \quad -\gamma' \dot{E}_{mx} = -j\omega \mu \dot{H}_{my}; \quad (\text{д})$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} = 0; \quad (\text{в}) \quad \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} = -j\omega \mu \dot{H}_{mz}. \quad (\text{е})$$

Подставляя  $E_{my}$  из (г) в (б) и  $E_{mx}$  из (д) в (а), получаем:

$$\dot{H}_{mx} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}; \quad \dot{H}_{my} = -\frac{\gamma'}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \quad (*)$$

где  $k^2 = \gamma'^2 + \omega \mu \varepsilon$ .

Уравнение (в), если в него подставить выражения (\*), удовлетворяется автоматически. Остается уравнение (е). Подставляя в него  $E_{mx}$  и  $E_{my}$  из (д) и (г) и затем вместо  $\dot{H}_{mx}$  и  $\dot{H}_{my}$  их выражения (\*), получаем уравнение для  $\dot{H}_{mz}$ :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial y^2} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0. \quad (**)$$

Будем искать  $H_{mz}$  в форме:  $H_{mz} = XY$ , где  $X$  — функция только  $x$  и  $Y$  — функция только  $y$ . Последнее уравнение принимает вид:

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 XY = 0.$$

Деля на  $XY$ , находим:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

Левая часть последнего уравнения является функцией только  $x$ , правая — функцией только  $y$ . Следовательно, уравнение удовлетворяется для любых  $x$  и  $y$  только в том случае, если и левая и правая его части равны некоторой постоянной величине  $\eta^2$ . При этом уравнение распадается на два:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \xi^2 X = 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \eta^2 Y = 0,$$

где  $\xi^2 = k^2 - \eta^2$ .

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$X = A \cos(\xi x + \varphi); \quad Y = B \cos(\eta y + \psi),$$

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos(\xi x + \varphi) \cos(\eta y + \psi),$$

где  $\dot{H}_0 = AB$ .

Постоянные  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  определяются из граничных условий на поверхностях стенок волновода. При сверхпроводящих стенках падение напряжения в стенках равно нулю и, следовательно, внутри стенок всюду  $E_m = 0$ .

Поэтому граничным условием для поля в диэлектрике внутри волновода является равенство нулю у поверхности стенки касательной к этой поверхности составляющей вектора  $\mathbf{E}$ . Используя это условие, имеем (рис. 112):

$$\dot{E}_{my} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = a,$$

$$\dot{E}_{mx} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и при } y = b.$$

Из уравнений (г), (д) и (\*) при этом получаем:

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = a,$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и при } y = b.$$

Это дает:  $\varphi = 0$ ,  $\xi = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\psi = 0$ ,  $\eta = \frac{n\pi}{b}$ , где  $m$  и  $n$  целые числа. Имеем окончательно:

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

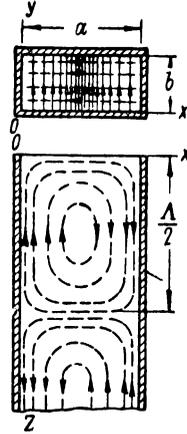


Рис. 112.

Подставляя это выражение в уравнения (\*) и используя уравнения (г) и (д), находим комплексные выражения мгновенных значений составляющих напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma' m \pi}{a k^2} \dot{H}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z},$$

$$\dot{H}_y = \frac{\gamma' n \pi}{b k^2} \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z},$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z},$$

$$\dot{E}_x = \frac{j\omega \mu n \pi}{b k^2} \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z},$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j\omega \mu m \pi}{a k^2} \dot{H}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t - \gamma' z}; \quad \dot{E}_z = 0.$$

Кроме того, уравнение (\*\*), после подстановки в него выражения  $\dot{H}_{mz}$  и его вторых производных дает:

$$\left[ -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2 \right] \dot{H}_{mz} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2.$$

Найденное решение показывает, что в волноводе может существовать ряд волн, причем каждая волна соответствует паре целых чисел  $m$  и  $n$ . Задание одновременно  $m$  и  $n$  равными нулю приводит к равенству нулю всех составляющих  $E$ . Следовательно, простейший случай получается, если одно из этих чисел равно нулю, а другое равно единице. Пусть, например,  $m = 1$  и  $n = 0$ . Согласно последнему соотношению при этом  $k = \pi/a$ , и уравнения для составляющих напряженностей поля приобретают вид:

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma'a}{\pi} \dot{H}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma'z}; \quad \dot{H}_y = 0; \quad \dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma'z};$$

$$\dot{E}_x = 0; \quad \dot{E}_y = -j \frac{\omega\mu a}{\pi} \dot{H}_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{j\omega t - \gamma'z}; \quad \dot{E}_z = 0.$$

Постоянная  $\gamma'$  имеет такой же смысл, как коэффициент распространения в теории однородных линий (ч. II). В общем случае можно ее представить в виде:  $\gamma' = \beta + j\alpha$ , где  $\beta$  характеризует затухание волны вдоль оси  $OZ$  и может быть названо коэффициентом затухания, а  $\alpha$  характеризует изменение фазы вдоль оси  $OZ$  и может быть названо коэффициентом фазы.

Из соотношений  $k^2 = \gamma'^2 + \omega^2\mu\epsilon$  и  $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2$  получаем для прямоугольного волновода со сверхпроводящими стенками:

$$\gamma'^2 = k^2 - \omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon. \quad (***)$$

При  $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > \omega^2\mu\epsilon$  получаем  $\gamma'^2 > 0$  и  $\gamma'$  — вещественное, т. е.  $\gamma' = \beta$  и  $\alpha = 0$ . В этом случае мы получаем затухающую волну.

При  $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < \omega^2\mu\epsilon$  имеем  $\gamma'^2 < 0$  и  $\gamma'$  — мнимое, т. е.  $\gamma' = j\alpha$  и  $\beta = 0$ . В этом случае мы получаем волну, распространяющуюся вдоль волновода без затухания.

Мы приходим к интересному заключению, что для волновода с заданными размерами  $a$  и  $b$  существует критическая частота, определяемая из условия  $\gamma' = 0$  выражением:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

При частотах ниже  $\omega_0$  невозможно распространение вдоль волновода волн без затухания. При частотах выше  $\omega_0$  волны распространяются без затухания.

Обозначая, как и ранее, через  $\lambda$  длину электромагнитной волны при ее распространении в свободном пространстве (вне стенок волновода), будем иметь (§ 76):

$$\lambda = vT = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\omega}.$$

Следовательно, критической частоте  $\omega_0$  соответствует *критическая длина волны*  $\lambda_0$  в свободном пространстве:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\epsilon} \omega_0} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}.$$

Величины  $\omega_0$  и  $\lambda_0$  зависят от чисел  $m$  и  $n$ , определяющих характер волны. Если  $a > b$ , то самая малая критическая частота получается при  $m = 1$  и  $n = 0$ . Она оказывается равной  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\pi}{a}$  и, следовательно, наибольшая критическая длина волны имеет значение  $\lambda_0 = 2a$ . Если  $a = 10$  см, то  $\lambda_0 = 20$  см и  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{20} = 1,5 \cdot 10^9$  гц. Из этого примера видно, что волновод способен пропускать электромагнитные волны только весьма высокой частоты.

Так как при  $\omega > \omega_0$  имеем  $\gamma' = j\alpha$  и  $e^{j\omega t - \gamma'z} = e^{j(\omega t - \alpha z)}$ , то для получения выражений для действительных мгновенных значений  $H_x, H_y, H_z, E_x$  и  $E_y$  необходимо в выражениях для их комплексов заменить множитель  $e^{j\omega t - \gamma'z}$  на  $\sin(\omega t - \alpha z)$ . Величина  $\frac{\omega}{\alpha} = v'$  есть *фазовая скорость* волны.

Длина волны  $\Lambda$  в волноводе получается из соотношения  $\alpha \Lambda = 2\pi$ . Заменяя в соотношении (\*\*\*)  $\gamma'^2$  через  $(-\alpha^2)$  и  $\omega^2 \mu\epsilon$  через  $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ , находим:

$$\alpha^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Тогда имеем:

$$\frac{2}{\Lambda} = \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \text{ или } \frac{1}{\Lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}.$$

Отсюда видно, что длина волны  $\Lambda$  в волноводе больше длины волны  $\lambda$  в свободном пространстве при той же частоте. Эта разница тем больше, чем больше  $\lambda$  приближается к критической длине волны  $\lambda_0$ , и при  $\lambda = \lambda_0$  получаем  $\Lambda = \infty$ .

Фазовая скорость может быть представлена в виде  $v' = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{2\pi} \Lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\Lambda}{\lambda} = v \frac{\Lambda}{\lambda}$ . Следовательно, фазовая скорость  $v'$

электромагнитных волн в волноводе больше скорости движения электромагнитных волн в свободном пространстве. Это, конечно, не означает, что электромагнитное поле движется со скоростью большей, чем  $v$ , так как  $v'$  есть только скорость, с которой в установившемся режиме движется фазовое распределение вдоль оси  $OZ$ .

В вышеисследованном случае вдоль оси  $OZ$  волновода имеет отличную от нуля составляющую только напряженность магнитного поля. Соответственно, волны такого типа получили наименование «магнитных волн». Их принято обозначать буквой  $H$ . Так как линии напряженности электрического

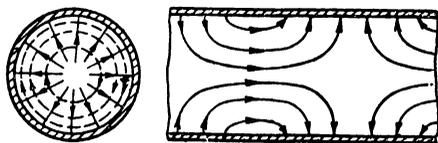


Рис. 113.

поля при этом лежат целиком в поперечных сечениях волновода, то волны этого типа называют также «поперечными электрическими волнами» и обозначают буквами  $TE$ . Для прямоугольных волноводов вводят обозначение  $H_{mn}$  (или, соответственно,  $TE_{mn}$ ), причем индексы соответствуют вышеуказанным числам  $m$  и  $n$ . На рис. 112 изображена в поперечном и продольном сечениях прямоугольного волновода картина поля для волны  $H_{10}$  (или  $TE_{10}$ ). Сплошными линиями изображены линии напряженности электрического поля, пунктирными — линии напряженности магнитного поля. При больших значениях чисел  $m$  и  $n$  картина поля получается более сложной.

Могут существовать также так называемые «электрические волны», обозначаемые буквой  $E$  с соответствующими индексами. Волны этого типа характеризуются тем, что в них вдоль оси волновода имеет отличную от нуля составляющую только напряженность электрического поля. Эти волны называют также «поперечными магнитными волнами», обозначая их при этом буквами  $TM$ .

На рис. 113 изображены линии напряженности магнитного поля (пунктирные линии) и электрического поля (сплошные линии) для простейшего случая «электрической» волны в цилиндрическом волноводе. Этот случай интересен тем, что картина поля в нем имеет много общего с картиной поля при распространении электромагнитных волн вдоль концентрического кабеля. В волноводе в отличие от кабеля отсутствует внутренний провод, и роль токов проводимости во внутреннем металлическом проводе кабеля, в волноводе играет ток смещения.

Возникновение того или иного типа волн в однородном волноводе зависит от свойств концевых устройств, в частности, от устройства, генерирующего волны в начале волновода.

Для возбуждения желаемого типа волн можно ввести в волновод металлический стерженек, расположив его ось в месте, где должно возникать наиболее сильное электрическое поле желаемой волны, и направив ось стерженька в направлении линий напряженности этого поля. Подводя напряжение высокой частоты между стерженьком и волноводом хотя бы по концентрическому кабелю, можно возбудить колебания в волноводе. Можно также ввести в волновод небольшую петлю из проволоки, обтекаемую током, расположив петлю в месте ожидаемого максимума напряженности магнитного поля, так, чтобы плоскость петли была перпендикулярна к направлению магнитных линий требуемого поля.

На приемном конце волновода можно применить аналогичные устройства. Можно также оставить этот конец открытым или снабдить его рупором для излучения волн в пространство.

При сравнении характера электромагнитных волн в волноводе и в однородной линии обнаруживаются наряду с общими их чертами и существенные различия в них. В теории однородных линий был рассмотрен только простейший тип волн, характеризующихся тем, что при отсутствии сопротивления проводов линии напряженности как магнитного, так и электрического поля располагаются целиком в плоскостях, нормальных к направлению проводов. Если направление проводов параллельно оси  $OZ$ , то для таких волн всюду  $H_z = E_z = 0$ . Эти волны называют *поперечными*, или также *основными* для линии передачи. Как мы видели, фазовая скорость распространения этих волн  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ , независимо от формы кривой тока и напряжения или от их частоты, равна скорости распространения электромагнитных волн в свободном пространстве (при отсутствии проводов). Соответственно, при периодическом процессе длина волны  $\lambda = vT$  равна длине электромагнитной волны в свободном пространстве.

Волны такого типа не могут существовать в волноводе. Действительно, если в волноводе всюду  $E_z = 0$ , т. е. если линии напряженности электрического поля лежат только в поперечных плоскостях, то только в этих плоскостях располагаются и линии тока смещения, которые могут быть замкнуты на себя или кончаться у стенок волновода и продолжаться в стенках в виде линий тока проводимости. Ясно, что такие линии тока смещения должны охватываться замкнутыми на себя линиями напряженности магнитного поля, а следовательно, вектор  $\mathbf{H}$ , вообще говоря, должен иметь отличную от нуля составляющую вдоль оси  $OZ$  ( $H_z \neq 0$ ).

Если в волноводе всюду  $H_z = 0$ , т. е. линии напряженности магнитного поля лежат целиком в поперечных плоскостях, то неизбежно должен существовать продольный ток смещения, охватываемый этими линиями, а следовательно, вообще говоря,  $E_z \neq 0$ . Таким образом волны, которые являются основными в линии передачи, не могут существовать в волноводе. В волно-

воде могут распространяться только волны, в которых либо вектор  $\mathbf{H}$ , либо вектор  $\mathbf{E}$  имеют продольные составляющие. При этом весьма существенно, что распространение этих волн вдоль волновода возможно только, если частота  $f$  выше критической частоты  $f_0$ . Критическая длина волны  $\lambda_0 = v/f_0$  имеет порядок линейных размеров поперечного сечения волновода.

Интересно отметить, что и в линии передачи возможно возникновение волн этого типа, если длина волны  $\lambda$  будет сравнима с расстоянием между проводами линии, но при этом линия будет представлять собой антенну, и электромагнитное поле будет весьма интенсивно излучаться в окружающее пространство, что приведет к быстрому затуханию волн вдоль линии. В случае линии в виде концентрического кабеля излучение этих волн не будет происходить, так как область, в которой распространяются волны, заэкранирована от внешнего пространства наружным трубчатым проводом кабеля. Однако кабель используют обычно при более низких частотах, так как он проводит упомянутые выше поперечные волны, а при частотах выше критической можно воспользоваться волноводом.

Для волн, распространяющихся вдоль волновода, можно также ввести понятие волнового сопротивления. Передача энергии вдоль волновода определяется взаимно перпендикулярными составляющими векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , перпендикулярными оси волновода. В рассмотренном выше примере прямоугольного волновода это были составляющие  $E_x$  и  $H_y$  и составляющие  $E_y$  и  $H_x$ . Положительная величина вектора Пойнтинга (в положительном направлении оси  $OZ$ ) получается от умножения  $E_x$  и  $H_y$  одного знака и от умножения  $E_y$  и  $H_x$  разных знаков. Поэтому волновое сопротивление следует определять из соотношений:

$$z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} \quad \text{или} \quad z = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}.$$

Из вышеприведенных уравнений получаем для волн типа  $H$  (типа  $TE$ ):

$$z = \frac{j\omega\mu}{\gamma'} = \frac{\omega\mu}{\alpha} = v\mu \frac{\Lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Но  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = z'$  есть волновое сопротивление в случае, когда среда, заполняющая волновод, не ограничена стенками волновода. Кроме того,

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$z = \frac{z'}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}.$$

Таким образом, волновое сопротивление  $z$  не определяется как  $z'$  только параметрами среды, а зависит от частоты  $f$  и характера волны, т. е. от чисел  $m$  и  $n$ , от которых зависит критическая частота  $f_0$ . Оно зависит также от типа волны. Так, для волн типа  $E$  (типа  $TM$ ) имеем выражение:

$$z = z' \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}.$$

Столь сложная зависимость  $z$  от многих величин, характеризующих не только передающее устройство, но и процессы в нем, есть результат того, что волновод не может быть рассмотрен как электрическая цепь с определенными параметрами. Для исследования процессов в волноводе необходимо, как это и было сделано, обратиться к системе уравнений электромагнитного поля.

---

ГЛАВА ВОСЬМАЯ  
**ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ  
 В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ**

**§ 87. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде**

Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, подходит нормально к плоской поверхности, ограничивающей с одной стороны проводящую среду (рис. 114). Будем предполагать, что проводящая среда простирается во всех остальных направлениях до бесконечности. Падающая волна частью отражается от поверхности проводящей среды, частью проникает в эту среду и поглощается в ней. Рассмотрим волну, прошедшую сквозь поверхность раздела и распространяющуюся в проводящей среде. Направим ось  $OZ$  вглубь проводящей среды нормально к ее поверхности. Плоскость  $XOY$  совместим с этой поверхностью.

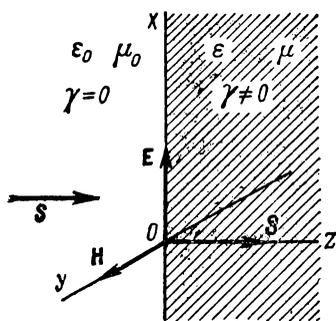


Рис. 114.

В проводящей среде практически всегда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. В таком случае уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Предположим, что величины напряженностей полей не имеют составляющих, постоянных во времени.

Направив ось  $OX$  по вектору  $\mathbf{E}$  и учитывая, что в плоской волне  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от  $x$  и  $y$ , получаем из уравнения (г) (§ 75):

$$0 = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \text{т. е. } H_x = \text{const} = 0.$$

Из уравнений (а) и (д) находим:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Предположим, что напряженность электрического и напряженность магнитного полей изменяются во времени по закону:

$$E_x = E_m \sin(\omega t + \psi_E); \quad H_y = H_m \sin(\omega t + \psi_H),$$

Выражая мгновенные значения напряженностей полей в символической форме, будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= E_m e^{j(\omega t + \psi_E)} = E_m e^{j\psi_E} e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t}; \\ \dot{H}_y &= H_m e^{j(\omega t + \psi_H)} = H_m e^{j\psi_H} e^{j\omega t} = \dot{H}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Амплитуды  $E_m$  и  $H_m$  и начальные фазы  $\psi_E$  и  $\psi_H$ , а следовательно, и комплексные амплитуды  $\dot{E}_m$  и  $\dot{H}_m$  являются функциями только одной координаты  $z$ . Подставляя выражения величин  $E_x$  и  $H_y$  в символической форме в уравнения, связывающие  $E_x$  и  $H_y$ , получаем после сокращения на общий множитель  $e^{j\omega t}$  эти уравнения в виде:

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_m; \quad \frac{d\dot{E}_m}{dz} = -j\omega\mu \dot{H}_m. \quad (*)$$

Дифференцируя первое уравнение по  $z$  и используя второе, находим:

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_m.$$

Решение этого линейного уравнения с постоянным коэффициентом имеет вид:

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{+\alpha z},$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma}.$$

Так как  $\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$ , что легко проверяется возведением этого равенства в квадрат, то, вводя еще обозначение

$$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = k,$$

получаем:

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1 + j)k.$$

Второй член в выражении для  $\dot{H}_m$  при  $A_2 \neq 0$  увеличивается до бесконечности при возрастании  $z$ , так как вещественная часть  $\alpha$  положительна. Напряженность поля не может расти до бесконечности, и, следовательно, мы должны принять  $A_2 = 0$ . Таким образом,

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z}.$$

Постоянная  $A_1$  получается из условия, что при  $z = 0$  величина  $\dot{H}_m$  имеет заданное значение  $\dot{H}_{me} = H_{me} e^{i\psi_{He}}$  на поверхности среды. Все величины, относящиеся к поверхности среды, будем отмечать индексом  $e$ . Стало быть,  $A_1 = \dot{H}_{me}$ , и решение имеет вид:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

или

$$H_y = H_{me} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz).$$

Выражение для напряженности электрического поля находим из первого уравнения (\*). Имеем:

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma} (1 + j) k \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz}$$

или

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_{me} e^{-kz} \sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right),$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) = e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\gamma} (1 + j) k = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Плотность тока изменяется по такому же закону, как напряженность электрического поля, так как  $\delta = \gamma E$ .

Волновое сопротивление в случае проводящей среды оказывается комплексным и равным:

$$Z = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1 + j) k}{\gamma} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}},$$

Располагая этим выражением, можно найти соотношения между напряженностями волн: падающей из диэлектрика на поверхность проводящей среды ( $\dot{E}_{\varphi 1}$ ,  $\dot{H}_{\varphi 1}$ ), отраженной от поверхности среды ( $\dot{E}_{\varphi 1}$ ,  $\dot{H}_{\varphi 1}$ ) и преломленной ( $\dot{E}_{\varphi 2}$ ,  $\dot{H}_{\varphi 2}$ ), т. е. прошедшей в проводящую среду. Для этой цели могут быть использованы формулы, выведенные во второй части курса при исследовании распространения периодических волн в однородной линии, замкнутой в конце на сопротивление  $Z$ . Имеем на поверхности раздела:

$$\dot{E}_{\varphi 2} = \frac{2Z}{Z + z_1} \dot{E}_{\varphi 1}; \quad \dot{E}_{\varphi 1} = \frac{Z - z_1}{Z + z_1} \dot{E}_{\varphi 1};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + Z} \dot{H}_{\varphi 1}; \quad \dot{H}_{\varphi 1} = \frac{z_1 - Z}{z_1 + Z} \dot{H}_{\varphi 1},$$

где  $z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$  — волновое сопротивление для падающей и отраженной волн в диэлектрике, причем  $\mu_1$  и  $\epsilon_1$  — абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

В предельном случае, когда удельная проводимость проводящей среды бесконечна, получаем  $Z = 0$ ,

$$\dot{E}_{\psi_1} = -\dot{E}_{\varphi_1} \text{ и } \dot{H}_{\psi_1} = \dot{H}_{\varphi_1}$$

и, следовательно, на поверхности раздела

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_{\varphi_1} + \dot{E}_{\psi_1} = 0 \text{ и } \dot{H}_1 = 2\dot{H}_{\varphi_1},$$

т. е. волна полностью отражается от поверхности сверхпроводящей среды. В диэлектрике при этом в результате интерференции падающей и отраженной волн устанавливаются стоячие волны. Этот случай аналогичен режиму короткого замыкания однородной линии передачи.

### § 88. Длина волны и затухание волны

Полученные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей прежде всего свидетельствуют о том, что амплитуды напряженностей по мере проникновения волны в глубь проводящей среды в случае плоской волны убывают по показательному закону. Кроме того, начальная фаза колебаний изменяется пропорционально  $z$ , причем по мере проникновения волны в глубь среды колебания все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности среды. Во всех точках среды, в том числе и на ее поверхности, напряженность электрического поля опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол  $\pi/4$ .

Длина волны  $\lambda$ , т. е. расстояние, на котором фаза изменяется на  $2\pi$ , определяется из условия:  $\sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} \lambda = 2\pi$ , откуда находим:

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = 2\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{j\mu\gamma}},$$

так как  $\omega = 2\pi f$ , где  $f$  — частота колебаний. Отношение амплитуд напряженностей полей на расстоянии  $z = \lambda$  от поверхности среды к их значениям на поверхности равно  $e^{-k\lambda} = e^{-2\pi} = 0,00185$ , т. е. на этом расстоянии волна практически полностью затухает.

В нижеследующей таблице приведены значения длины волны при частоте колебаний  $f = 50$  гц и при частоте  $f = 500\,000$  гц в меди, в ферромагнитном веществе (если считать  $\mu = \text{const}$ ), в морской воде и в сухой почве. Мы видим, что при промышленной частоте  $f = 50$  гц, электромагнитная волна проникает в медь на несколько сантиметров, а в ферромагнитное вещество всего лишь на несколько миллиметров. При радиочастотах глубина проникновения измеряется в меди десятками долями миллиметра, а в ферромагнитном веществе сотыми долями миллиметра. При

высоких частотах глубина проникновения волны в морской воде и даже в сухой почве незначительна.

$f$	Медь $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$ $\mu = \mu_0$ $\frac{1}{\text{ОМ} \cdot \text{М}}$	Ферромагнитное вещество $\gamma \approx 10^7$ $\mu \approx 1000\mu_0$ $\frac{1}{\text{ОМ} \cdot \text{М}}$	Морская вода $\gamma \approx 1$ $\mu = \mu_0$ $\frac{1}{\text{ОМ} \cdot \text{М}}$	Сухая почва $\gamma \approx 10^{-2}$ $\mu = \mu_0$ $\frac{1}{\text{ОМ} \cdot \text{М}}$
50 гц 500 000 гц	5,9 см 0 059 см	0,45 см $0,45 \cdot 10^{-2}$ см	450 м 4,5 м	4500 м 45 м

Величина вектора Пойнтинга имеет значение:

$$S = E_x H_y = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} H_{me}^2 e^{-2kz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz) \times \\ \times \sin\left(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{4}\right).$$

Среднее значение  $S_{cp}$  вектора Пойнтинга за период колебаний равно:

$$S_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2} e^{-2\sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} z} \cos \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, на расстояние от поверхности, равное  $z = \lambda/2$ , проникает только  $e^{-2\pi} \cdot 100\% = 0,185\%$  энергии, поглощаемой в проводящей среде. Поэтому практически можно считать, что волна затухает уже на расстоянии, в два-три раза меньшем по сравнению с приведенными в таблице.

### § 89. Явление поверхностного эффекта

Переменный электрический ток распределяется неравномерно по сечению проводов, причем плотность тока имеет наибольшие значения на поверхности провода и убывает по мере удаления от поверхности в глубь провода. Это явление называется *поверхностным эффектом*.

Переменный магнитный поток в телах, обладающих конечной проводимостью, вызывает в этих телах *вихревые токи*, которые ослабляют магнитный поток внутри проводящего тела. Этот эффект иногда называют размагничивающим действием вихревых токов. По существу и в этом случае мы имеем дело с явлением поверхностного эффекта.

Явление поверхностного эффекта можно объяснить, рассматривая проникновение электромагнитного поля в глубь провода из пространства, окружающего провод. В § 84 было показано, что потери энергии на нагревание провода током следует рассматривать как поглощение внутри провода электромагнитной энергии, передаваемой в тело провода через его поверхность из окружающего пространства. В предыдущем параграфе мы убедились, что переменная электромагнитная волна затухает по мере проникновения в глубь проводящей среды. Поэтому вполне естественно, что амплитуды плотности тока и напряженностей электрического и магнитного полей при переменном токе и при переменном потоке имеют наибольшее значение у поверхности тел из проводящего материала.

### § 90. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводов

Общую индуктивность  $L$  контура тока можно просто разделить на внутреннюю и внешнюю только в случае, когда линии магнитной индукции располагаются либо целиком внутри тела проводов контура, образуя внутренний магнитный поток  $\Phi_{внутр}$ , либо целиком вне проводов, образуя внешний поток  $\Phi_{внеш}$ . При этом контуры сечения проводов совпадают с линиями магнитной индукции. Эти условия соблюдаются точно в единственном случае прямолинейного концентрического кабеля (рис. 115), в котором прямым проводом является провод кругового сечения, а обратным проводом является соосный с ним трубчатый провод, сечение которого ограничено двумя концентрическими окружностями.

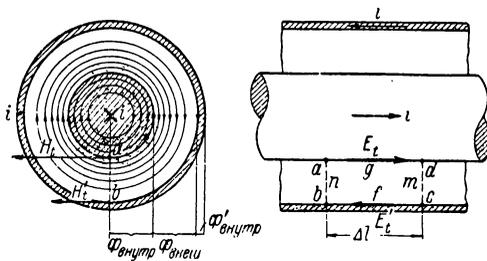


Рис. 115.

Составляя линейный интеграл напряженности электрического поля по контуру  $agdmcfbna$ , будем иметь:

$$\oint \mathbf{E} \, dl = \int_{agd} \mathbf{E} \, dl + \int_{dmc} \mathbf{E} \, dl + \int_{cfb} \mathbf{E} \, dl + \int_{bna} \mathbf{E} \, dl = - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt}.$$

Величина

$$\int_{anb} \mathbf{E} \, dl - \int_{dmc} \mathbf{E} \, dl = u_{anb} - u_{dmc},$$

равная разности напряжений между проводами контура по путям  $anb$  и  $dmc$ , представляет собой падение напряжения на участке

линии длиной  $\Delta l$ . Отрезок  $\Delta l$  мы берем столь малым, чтобы можно было считать ток  $i$  одинаковым на его длине, т. е. чтобы можно было не считаться с токами смещения между проводами. В этом случае рассматриваемое падение напряжения можно представить в форме:

$$u_{anb} - u_{amc} = ir + L \frac{di}{dt},$$

где  $r$  и  $L$  — сопротивление и индуктивность рассматриваемой пары проводов на участке длиной  $\Delta l$ .

Используя написанное выше выражение для величины  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , получаем:

$$\int_{agd} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{cfb} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{anb} \mathbf{E} d\mathbf{l} - \int_{amc} \mathbf{E} d\mathbf{l} - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt} = ir + L \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_{внеш}}{dt}$$

и, наконец, осуществляя замену  $\frac{d\Phi_{внеш}}{dt} = L_{внеш} \frac{di}{dt}$  и  $L = L_{внеш} + L_{внутр}$ , будем иметь:

$$\int_{agd} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{cfb} \mathbf{E} d\mathbf{l} = ir + L_{внутр} \frac{di}{dt}.$$

Это соотношение можно рассматривать как определяющее величины  $r$  и  $L_{внутр}$ .

Для упрощения рассмотрения сначала предположим, что обратный трубчатый провод образован из сверхпроводящего материала, т. е. имеет бесконечно большую удельную проводимость. При этом его активное сопротивление будет равно нулю. Равна нулю будет и его внутренняя индуктивность, так как согласно сказанному в § 88, длина электромагнитной волны в металле при  $\gamma = \infty$  равна нулю, т. е. электромагнитное поле не проникает внутрь провода. На поверхности обратного трубчатого провода касательная составляющая  $E_t$  напряженности электрического поля при этом равна нулю и, соответственно, падение напряжения вдоль него также равно нулю, т. е.

$$\int_{cfb} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

Величина  $E_t$  на поверхности внутреннего провода постоянна вдоль отрезка  $\Delta l$ , так как ток  $i$  не изменяется вдоль этого отрезка. Следовательно:

$$\int_{agd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_t \Delta l.$$

При синусоидальном изменении тока с угловой частотой  $\omega$  можем написать:

$$\dot{E}_{tm} \Delta l = r \dot{I}_m + j\omega L_{внутр} \dot{I}_m = (r + jx_{внутр}) \dot{I}_m.$$

Так как, согласно закону полного тока,  $I_m = H_{tm}u$ , где  $u = 2\pi R$  — периметр сечения прямого провода, а  $\dot{H}_{tm}$  — напряженность магнитного поля на его поверхности, то

$$Z_{внутр} = r + jx_{внутр} = \frac{\Delta l}{u} \frac{\dot{E}_{tm}}{\dot{H}_{tm}}.$$

Таким образом, для вычисления  $Z_{внутр}$  прямого провода в данном случае достаточно найти комплексные амплитуды касательных к поверхности провода составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности провода.

Если бы удельная проводимость материала обратного трубчатого провода, так же как и материала прямого провода, имела конечное значение, то падение напряжения вдоль пути  $cfb$  также было бы отлично от нуля:

$$\int_{cfb} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \dot{E}'_t \Delta l = r' i + L'_{внутр} \frac{di}{dt},$$

где  $r'$  и  $L'_{внутр}$  — активное сопротивление и внутренняя индуктивность обратного провода, а  $\dot{E}'_t$  — касательная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  на внутренней его поверхности. При этом ток  $i$  в обратном проводе равен  $H' u'$ , где  $H' u'$  — касательная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  на внутренней поверхности обратного провода, а  $u'$  — длина внутренней окружности, ограничивающей его сечение. При синусоидальном процессе имеем:

$$r' + j\omega L'_{внутр} = \frac{\Delta l}{u'} \frac{\dot{E}'_{tm}}{\dot{H}'_{tm}}.$$

Для сложной формы сечения провода, например для случая, изображенного на рис. 116, уже не представляется возможным столь определенно разделить магнитный поток на внешний и внутренний. На рис. 116 изображена картина поля при постоянном токе в случае провода прямоугольного сечения из неферромагнитного материала. Как видно из этой картины, кроме линий магнитной индукции, замыкающихся целиком либо внутри, либо вне провода, имеются линии, проходящие частично в теле провода и частично вне его. При переменном токе картина поля еще усложняется, так как переменный ток распределяется неравномерно по сечению и, кроме того, вся картина меняется в течение периода, так как плотность тока в разных точках сечения провода имеет различные фазы.

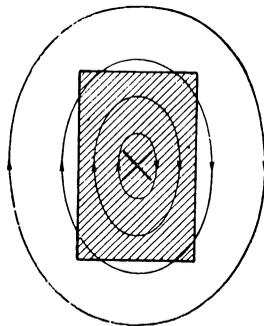


Рис. 116.

Вследствие этого нельзя предложить в общем случае столь же простой и притом точный способ вычисления активного и внутреннего индуктивного сопротивлений, как для рассмотренного выше случая концентрического кабеля.

Однако для проводов фигурного сечения из ферромагнитного вещества (рис. 117) при резком проявлении поверхностного эффекта может быть применен с весьма большой точностью аналогичный изложенному выше простой метод расчета (§ 92), так как вследствие высокой магнитной проницаемости вещества линии магнитной

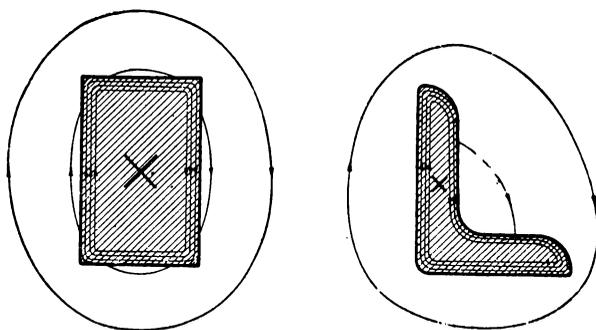


Рис. 117.

индукции для большей части внутреннего магнитного потока замыкаются внутри тела проводника и имеют форму, весьма близкую к форме контура сечения проводника. Только для незначительной части магнитного потока линии магнитной индукции проходят частично внутри проводника и частично в воздухе вне его.

Такой приближенный метод расчета имеет большое значение также в связи с тем, что внутреннее реактивное  $x_{внутр}$  сопротивление таких проводов обычно составляет большую, а часто и основную, часть всего индуктивного сопротивления.

Точная величина активного сопротивления  $r$  провода сложной формы сечения, очевидно, всегда определяется из соотношения  $r = \frac{P}{I^2}$ , причем мощность  $P$ , поглощаемая в проводе, может быть вычислена как интеграл по поверхности провода от среднего значения за период нормальной к этой поверхности составляющей вектора Пойнтинга. Однако для проводов сложной формы сечения такой общий метод расчета по большей части мало что дает практически, так как не известно точное распределение поля во все моменты времени по всей поверхности провода. Поэтому большую ценность представляют также возможные приближенные методы расчета.

### § 91. Сопротивление провода при резком проявлении поверхностного эффекта

Рассмотрим, прямолинейный провод кругового сечения (рис. 118) и предположим, что обратный провод удален от него на столь большое расстояние, что его влиянием на распределение тока в рассматриваемом проводе можно пренебречь. Пусть длина электромагнитной волны  $\lambda$  в веществе провода значительно меньше радиуса  $R$  сечения, т. е.  $\lambda \ll R$ . На рисунке величина  $\lambda$  показана толщиной дополнительно заштрихованного слоя. В таком случае, поскольку на длине  $\lambda$  волна в проводе практически полностью затухает, можно пренебречь кривизной поверхности провода, считать волну, проникающую в тело провода, плоской и воспользоваться зависимостями, полученными в § 87 при исследовании плоской волны. На поверхности провода (при  $z = 0$ ) имеем:

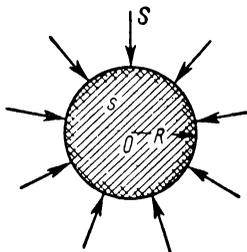


Рис. 118.

$$\dot{H}_{tm} = \dot{H}_{me}, \quad \dot{E}_{tm} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \dot{H}_{me}.$$

Следовательно, согласно формуле предыдущего параграфа:

$$Z_{внутр} = r + jx_{внутр} = (1 + j) \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}},$$

откуда

$$r = x_{внутр} = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

Отношение активного сопротивления провода при переменном токе к его сопротивлению при постоянном токе получается равным:

$$\frac{r}{r_0} = \left( \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \right) : \left( \frac{l}{\gamma s} \right) = \frac{s}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}},$$

где  $s$  — сечение провода.

Явление поверхностного эффекта, как было указано выше, следует рассматривать как результат затухания в проводе электромагнитной волны, проникающей через поверхность провода из окружающего его диэлектрика. Представляет интерес получить выражения для  $r$  и  $x_{внутр}$ , исходя из этого физического представления.

Средняя мощность потока электромагнитной энергии, передаваемой внутрь провода сквозь его поверхность и выделяющейся в проводе в форме тепла, равна  $P = S_{cp} ul$ , где  $S_{cp}$  — среднее за период значение вектора Пойнтинга на поверхности провода,  $u = 2\pi R$  — периметр сечения провода и  $ul$  — поверхность

провода, сквозь которую проникает электромагнитная волна. Полагая  $z = 0$  в выражении для  $S_{cp}$  в конце § 88, получаем:

$$S_{cp} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2}$$

и, следовательно,

$$P = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} ul \frac{H_{me}^2}{2}.$$

Амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности связана с действующим значением  $I$  тока в проводе законом полного тока:  $H_{me}u = \sqrt{2}I$ . Стало быть,

$$P = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} I^2 = rI^2.$$

Таким образом, получаем:

$$r = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}.$$

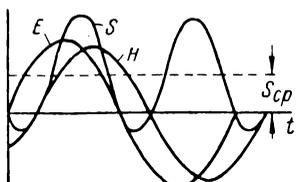


Рис. 119.

Как было получено в § 87, напряженность магнитного поля отстает по фазе от напряженности электрического поля на угол  $\pi/4$ , что соответствует одной восьмой периода колебания. На рис. 119 изображены кривые изменения величин  $E$ ,  $H$  и  $S$  на поверхности провода в функции времени. В течение большей части периода колебаний, равной трем восьмым периода изменения  $E$  и  $H$ , величина вектора Пойнтинга положительна, и, следовательно, энергия поступает в провод из внешнего пространства и идет на изменение энергии магнитного поля в объеме провода и на выделение тепла в проводе. В течение меньшей части периода колебаний, равной одной восьмой периода изменения  $E$  и  $H$ , вектор Пойнтинга имеет отрицательную величину, и, следовательно, поток энергии направлен от провода в окружающее его пространство. В течение этого промежутка времени энергия, запасенная в магнитном поле в объеме провода, частично возвращается в окружающее пространство и частично преобразуется в тепло. Эти колебания энергии с частичным возвратом ее в пространство, окружающее провод, можно рассматривать как результат наличия внутреннего реактивного сопротивления  $x_{внутр}$  провода. Как известно, между реактивным  $x$  и активным  $r$  сопротивлением цепи и разностью  $\varphi$  фаз напряжения и тока в этой цепи существует соотношение  $x/r = \operatorname{tg} \varphi$ .

В случае, который мы рассматриваем, напряженность магнитного поля на поверхности провода совпадает по фазе с током в проводе. Напряженность электрического поля на поверхности

провода представляет собой напряжение на единицу длины провода, которое может рассматриваться как напряжение, преодолевающее активное  $r$  и внутреннее реактивное  $x_{внутр}$  сопротивления провода. Так как разность  $\varphi$  фаз напряженностей электрического и магнитного полей равна  $\pi/4$ , то имеем:

$$\frac{x_{внутр}}{r} = \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

Следовательно,

$$x_{внутр} = r = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}}.$$

Таким образом, исследуя процесс передачи электромагнитным полем энергии сквозь поверхность провода, мы приходим к тем же выражениям для  $r$  и  $x_{внутр}$ , которые были получены выше иным путем.

Полученное в настоящем параграфе выражение

$$S_{ср} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2}$$

для средней мощности, выделяемой в проводе и отнесенной к единице поверхности провода, позволяет очень просто при резком проявлении поверхностного эффекта вычислить потери в проводе, если известно распределение по поверхности амплитуды касательной составляющей  $H_{tm} = H_{me}$  напряженности магнитного поля на поверхности. В вышеприведенном простейшем примере провода кругового сечения  $H_{tm} = H_{me}$  во всех точках поверхности одинаково, и мощность подсчитывалась простым умножением  $S_{ср}$  на величину поверхности провода. В более сложных случаях ее необходимо вычислять путем интегрирования по поверхности  $s$  провода:

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} \int H_{tm}^2 ds.$$

Обычно резкое проявление поверхностного эффекта имеет место при высоких частотах, например, при распространении электромагнитных волн в волноводах. Зная распределение  $H_{tm}$  по внутренней поверхности волновода, нетрудно, пользуясь последней формулой, вычислить мощность, теряемую в стенках волновода.

## § 92. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала

Все соотношения в предыдущих параграфах получены в предположении, что магнитная проницаемость среды постоянна. В случае проводов из ферромагнитного материала это условие не соблюдается. Магнитная проницаемость ферромагнитных веществ сильно зависит от напряженности магнитного поля.

Поэтому величина  $\mu$  в каждой точке среды изменяется в течение периода изменения напряженности поля. Пусть  $\mu$  есть некоторое среднее за период значение абсолютной магнитной проницаемости. Это среднее значение является функцией амплитуды  $H_m$  напряженности поля, так как гистерезисная петля изменяется с изменением  $H_m$ .

Величина  $H_m$  убывает по мере удаления от поверхности провода в глубину. Поэтому, если амплитуда напряженности поля  $H_m$  на поверхности имеет достаточно большое значение (рис. 120), то  $\mu$  сначала растет по мере удаления от поверхности в глубину провода, а затем, достигнув максимума, вновь убывает. Возрастание  $\mu$  приводит к более резкому проявлению поверхностного эффекта по сравнению с тем случаем, когда во всем проводе имеется такое же значение  $\mu_e$ , как на поверхности провода. Такой характер влияния непостоянства  $\mu$  можно предвидеть на основании вышеприведенных формул, полученных при условии  $\mu = \text{const}$ , из которых следует, что чем больше  $\mu$ , тем быстрее затухает волна.

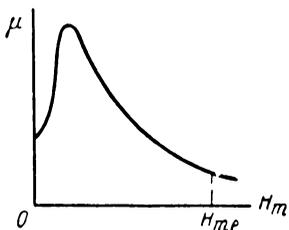


Рис. 120.

На рис. 121 приведены кривые зависимости амплитуды плотности тока  $\delta_m$  от координаты  $z$  для плоской волны в случаях:  $\mu = \mu_e = \text{const}$  и  $\mu \neq \text{const}$ . При этом  $z$  есть расстояние от поверхности ферромагнитной среды, отсчитываемое в глубину ее. Кривые, изображенные на рис. 121, построены при одинаковых в обоих случаях значениях тока. На рис. 122 приведены кривые изменения амплитуды магнитной индукции. При  $\mu \neq \text{const}$  величина  $B_m$  сначала убывает медленно вследствие явления насыщения, а на некоторой глубине резко падает практически до нуля.

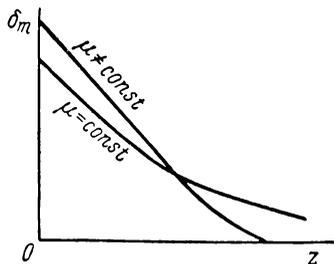


Рис. 121.

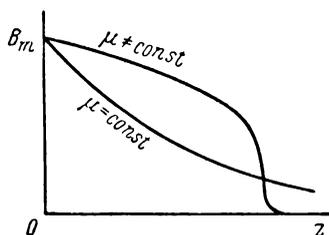


Рис. 122.

Непостоянство  $\mu$  и связанное с ним быстрое затухание волны приводят к увеличению активного сопротивления провода. Этому способствуют также потери на гистерезис. Можно показать (Л. Р. Нейман, «Поверхностный эффект в ферромагнитных телах»), что активное и внутреннее реактивное сопротивление проводов из ферромагнитного материала при резком проявлении поверхностного эффекта с большой точностью выражаются формулами, аналогичными по своей структуре формулам при  $\mu = \text{const}$ , а именно:

$$r = 1,4 \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_e}{2\gamma}} = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_e}{\gamma}} \text{ и } x_{\text{внутр}} = 0,6r$$

где  $\mu_e$  — значение абсолютной магнитной проницаемости на поверхности провода, определяемое по основной кривой намагничивания при действующем

значении напряженности магнитного поля  $H_{дейст}$  на поверхности провода. Величина  $H_{дейст}$  находится из соотношения  $H_{дейст} = \frac{I}{u}$ , вытекающего из закона полного тока, причем  $I$  — действующее значение тока в проводе и  $u$  — периметр сечения провода. Эти формулы весьма точны, если  $H_m$  больше того значения  $H_m$ , при котором  $\mu$  имеет максимум, но и при меньших значениях  $H_m$  они могут быть использованы для ориентировочных подсчетов.

Из таблицы, приведенной в § 88, видно, что электромагнитная волна в ферромагнитной среде даже в предположении  $\mu = \text{const}$  уже при частоте  $f = 50$  гц практически полностью затухает на глубине нескольких миллиметров. Непостоянство  $\mu$  способствует еще более быстрому затуханию волны. Поэтому последние формулы, полученные из уравнения плоской волны, оказываются справедливыми практически во всех случаях, когда в качестве токоведущих частей тех или иных устройств используют рельсы или иные стальные массивные проводники фасонного профиля.

### § 93. О комплексных магнитной и диэлектрической проницаемостях

При исследовании периодических электромагнитных процессов в ферромагнитных средах потери энергии, связанные с переманичиванием среды, могут быть учтены введением в уравнения электромагнитного поля *комплексной абсолютной магнитной проницаемости*:

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{B}_m}{\dot{H}_m} = \mu e^{-j\psi} = \mu \cos \psi - j\mu \sin \psi,$$

равной отношению комплексных амплитуд магнитной индукции и напряженности магнитного поля.

Понятие о комплексной магнитной проницаемости впервые было введено в 1913 г. В. К. Аркадьевым и оказалось весьма полезным при многих исследованиях и расчетах. В частности, формулы, приведенные в предыдущем параграфе, получены с использованием понятия о комплексной магнитной проницаемости и с дополнительным учетом зависимости  $\mu$  от  $H_m$ , характерной для ферромагнитных веществ.

Введение комплексной магнитной проницаемости дает возможность учесть потери на гистерезис, а также, когда это существенно, и потери, возникающие в ферромагнитной среде вследствие явления магнитной вязкости. Введение комплексной магнитной проницаемости с целью учета потерь на гистерезис соответствует замене гистерезисной петли равным ей по площади эквивалентным эллипсом, что дает возможность пользоваться при исследовании периодических процессов в ферромагнитной среде символическим методом.

Аргумент  $\psi$  комплексной магнитной проницаемости представляет собой угол запаздывания по фазе эквивалентной синусоиды магнитной индукции от эквивалентной синусоиды напряженности магнитного поля. Модуль  $\mu$  равен отношению  $B_m/H_m$  амплитуд этих эквивалентных синусоид.

Введение комплексной магнитной проницаемости дает возможность при периодических процессах написать второе уравнение Максвелла для ферромагнитной среды, в которой имеют место потери на перемагничивание, в той же форме, что и для среды, в которой эти потери отсутствуют. В частности, в случае плоской волны второе уравнение Максвелла для ферромагнитной среды приобретает вид:

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\mu H_{my},$$

тогда как для среды, в которой отсутствуют потери на перемагничивание, это уравнение имеет вид:

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -j\omega\mu_0 H_{my}.$$

При исследовании электромагнитных процессов в несовершенном диэлектрике, в котором имеют место потери энергии при изменении поляризации, в случае синусоидального изменения напряженности электрического поля во времени весьма полезным является введение комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{D}_m}{\dot{E}_m} = \epsilon e^{-i\psi} = \epsilon \cos \psi - j\epsilon \sin \psi.$$

При этом  $\psi$  есть угол, на который запаздывает по фазе синусоидально изменяющееся электрическое смещение  $D$  от синусоидально изменяющейся напряженности электрического поля  $E$ . Этот угол представляет собой так называемый угол потерь в диэлектрике.

В этом случае первое уравнение Максвелла для плоской электромагнитной волны приобретает вид:

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\dot{\epsilon}\dot{E}_{mx}.$$

Введением комплексной диэлектрической проницаемости можно учесть и потери в среде от токов проводимости, что весьма важно, когда рассматривается электромагнитное поле в несовершенном диэлектрике, имеющем отличную от нуля удельную проводимость  $\gamma$  и когда плотности токов смещения и проводимости соизмеримы друг с другом. При этом первое уравнение Максвелла принимает вид:

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = \gamma\dot{E}_{mx} + j\omega\dot{\epsilon}\dot{E}_{mx} = j\omega\left(\dot{\epsilon} - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{E}_{mx}.$$

Обозначая

$$\dot{\epsilon} - j\frac{\gamma}{\omega} = \epsilon \cos \psi - j\left(\epsilon \sin \psi + \frac{\gamma}{\omega}\right) = \epsilon' = \epsilon' e^{-i\psi'},$$

мы можем это уравнение написать в форме:

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\epsilon'\dot{E}_m,$$

совершенно аналогичной форме этого же уравнения:

$$-\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = j\omega\epsilon\dot{E}_m,$$

для случая диэлектрика, в котором отсутствуют потери.

Таким образом, использование понятий о комплексной магнитной проницаемости и о комплексной диэлектрической проницаемости дает возможность написать основные уравнения электромагнитного поля при периодических процессах в простой и симметричной форме и в общем случае, когда в среде имеют место потери энергии того или иного вида.

#### § 94. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе

Исследуем случай, когда плоский проводящий лист пронизывается переменным синусоидальным потоком  $\Phi$ , линии магнитной индукции которого направлены вдоль листа перпендикулярно заштрихованному на рис. 123 сечению. Рассмотрение этого случая представляет большой интерес, так как сердечники трансформаторов и электромагнитов, а также участки магнитных цепей электрических машин, пронизываемые переменным магнитным потоком, обычно собирают из листовой электротехнической стали. Переменный магнитный поток индуцирует электродвижущие силы в контурах, расположенных в плоскостях, нормальных к линиям магнитной индукции. В этих контурах под действием индуцированных э. д. с. возникают вихревые токи. Как магнитный поток, так и вихревой ток распределяются неравномерно по сечению листа. Обычно длина  $l$  листа и его высота  $h$  (рис. 123) значительно превосходят его толщину  $d$ . При этом можно пренебречь искривлением линий тока у краев листа и считать линии тока прямыми, направленными параллельно поверхности листа и перпендикулярно линиям магнитной индукции. Расположим оси координат так, как показано на рис. 123, т. е. так, чтобы, как и раньше, вектор  $E$  был параллелен оси  $Ox$  и вектор  $H$  был параллелен оси  $Oy$ . Начало координат поместим в середине сечения листа

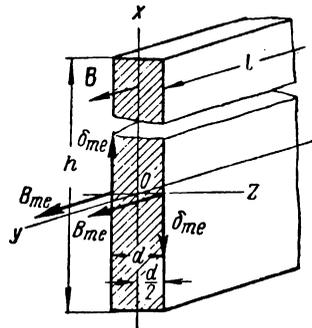


Рис. 123.

При  $h \gg d$  и  $l \gg d$  электромагнитную волну можно считать плоской. Сделаем допущение, что  $\mu = \text{const}$ . При этом остаются в силе уравнения, полученные в § 87. Следовательно, имеем:

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{+\alpha z}; \quad \dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}_m}{dz},$$

где

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1 + j) k.$$

Однако граничные условия теперь оказываются иными, нежели для случая, исследованного в § 87. Электромагнитные волны проникают в лист с двух его сторон, и на обеих поверхностях листа векторы  $\mathbf{B}$  и, соответственно, векторы  $\mathbf{H}$  должны быть одинаковы по величине и направлению. Это требование соблюдается при условии:  $A_1 = A_2 = A$ . Следовательно,

$$\dot{H}_m = A (e^{-\alpha z} + e^{+\alpha z}) = 2A \operatorname{ch} \alpha z;$$

$$\dot{B}_m = 2A\mu \operatorname{ch} \alpha z = \dot{B}_{m0} \operatorname{ch} \alpha z;$$

$$\delta_m = \gamma \dot{E}_m = -2A\alpha \operatorname{sh} \alpha z = -\frac{\dot{B}_{m0}\alpha}{\mu} \operatorname{sh} \alpha z,$$

где  $\dot{B}_{m0} = 2A\mu$  представляет собой значение  $B_m$  в середине листа (при  $z = 0$ ). Обычно нас интересует среднее значение  $B_{cp}$  индукции по сечению листа. Комплексная амплитуда этого среднего значения получается как среднее значение комплекса  $\dot{B}_m$  на толщине листа:

$$\dot{B}_{m\text{cp}} = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \dot{B}_m dz = \frac{\dot{B}_{m0}}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \operatorname{ch} \alpha z dz = \dot{B}_{m0} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}}.$$

Для нахождения самих действительных амплитуд индукции и плотности тока необходимо взять модули найденных выражений. Имеем:

$$\left| \frac{\alpha d}{2} \right| = \sqrt{2} k \frac{d}{2},$$

$$|\operatorname{sh} \alpha z|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz) \operatorname{sh}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{2};$$

$$|\operatorname{ch} \alpha z|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz) \operatorname{ch}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz}{2}.$$

Следовательно,

$$B_m = B_{m0} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz}{2}}; \quad \delta_m = |\alpha| \frac{B_{m0}}{\mu} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{2}}.$$

На рис. 124 приведена кривая  $B_m/B_{m0}$  в функции от  $2kz$ . На поверхности листа  $z = d/2$  и  $2kz = kd$ . Для электротехнической листовой стали имеем:  $\mu \approx 1000 \mu_0$ ,  $\gamma \approx 10^7 \frac{1}{\text{ом}\cdot\text{м}}$  и при  $f = 50 \text{ гц}$  и  $d = 0,5 \text{ мм}$  параметр  $kd = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} d$  имеет значение:  $kd = 0,7$ .

Из кривой на рис. 124 видно, что при этом значении  $kd$  неравномерность распределения магнитного потока еще практически не заметна.

Однако при той же толщине листа и  $f = 2000 \text{ гц}$  получаем  $kd = 4,4$ , и соответственно, отношение амплитуды индукции на поверхности  $B_{me}$  к амплитуде индукции  $B_{m0}$  в середине листа оказывается равным  $B_{me}/B_{m0} = 4,5$ . Отсюда видно, что для звуковых частот толщина листа  $0,5 \text{ мм}$  недопустимо велика. При звуковых частотах она должна быть порядка  $0,05\text{--}0,10 \text{ мм}$ . При радиочастотах уже и при таких малых толщинах листа поток распределяется весьма неравномерно по толщине листа — вихревые токи сильно ослабляют поле в середине листа. При высоких частотах находят применение сердечники, спрессованные из тончайшего ферромагнитного порошка и изолирующего материала.

Определим потери  $P_s$  на вихревые токи в листе с учетом неравномерности распределения магнитного потока. Активная мощность, расходуемая в проводящей среде и отнесенная к единице объема, равна квадрату действующего значения плотности тока, деленному на удельную проводимость среды. Следовательно,

$$\frac{dP_s}{dV} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\delta_m}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{|\alpha|^2 B_{m0}^2}{4\mu^2 \gamma} (\text{ch } 2kz - \cos 2kz).$$

Так как  $|\alpha| = \sqrt{\omega\mu\gamma}$ , то

$$\frac{dP_s}{dV} = \frac{\omega}{4\mu} B_{m0}^2 (\text{ch } 2kz - \cos 2kz).$$

Выразим  $B_{m0}$  через амплитуду средней по сечению листа индукции из выражения:

$$B_{m \text{ ср}} = B_{m0} \left| \frac{\text{sh } \frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}} \right| = B_{m0} \frac{\sqrt{\frac{\text{ch } kd - \cos kd}{2}}}{\sqrt{2} \frac{kd}{2}} = B_{m0} \frac{\sqrt{\text{ch } kd - \cos kd}}{kd}.$$

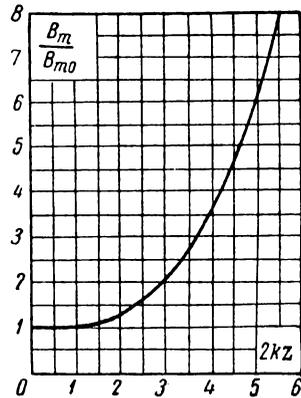


Рис. 124.

Следовательно,

$$\frac{dP_a}{dV} = B_m^2 c_p \frac{\omega}{4\mu} k^2 d^2 \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Потери  $P_a$  в объеме всего листа получим, умножая удельные потери  $\frac{dP_a}{dV}$  на длину  $l$ , на высоту  $h$  и на элемент толщины  $dz$  листа и интегрируя по толщине листа. Получаем:

$$P_a = lh \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{dP_a}{dV} dz = B_m^2 c_p lh \frac{\omega}{4\mu} kd^2 \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Таким образом, потери, отнесенные к единице объема всего листа, выражаются в виде:

$$P'_a = \frac{P_a}{lhd} = B_m^2 c_p \frac{\omega}{4\mu} kd \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}.$$

Нетрудно убедиться, что при  $kd < 1$  эта формула переходит в формулу:

$$P'_a = \frac{4}{3} k_\phi^2 f^2 \gamma d^2 B_m^2 c_p,$$

полученную во второй части с пренебрежением явлением поверхностного эффекта. В последней формуле  $k_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$  — коэффициент формы синусоиды.

### § 95. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе кругового сечения

Рассмотрим явление поверхностного эффекта при прохождении переменного тока по цилиндрическому проводу кругового сечения. Предположим, что обратный провод находится настолько далеко, что влиянием переменного магнитного потока, вызванного током в нем, на распределение тока в исследуемом проводе можно пренебречь. Естественно выбрать цилиндрические координаты  $z$ ,  $r$  и  $\theta$ , совместив ось  $OZ$  с осью провода (рис. 125). Линии электрического тока направлены параллельно оси  $OZ$ . Вследствие осевой симметрии линии магнитной индукции представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, нормальных к оси провода, с центрами на этой оси. Таким образом, вектор  $\mathfrak{B}$  имеет единственную составляющую  $\mathfrak{B}_z$  и вектор  $\mathbf{H}$  — единственную составляющую  $H_\theta$ . Поэтому в дальнейшем опустим индексы у  $\mathfrak{B}_z$  и  $H_\theta$ . Однако будем помнить, что  $\mathfrak{E}$  и  $H$  суть проекции векторов, а не их модули и, следовательно, они могут иметь как поло-

жительные, так и отрицательные значения. В силу осевой симметрии  $\delta$  и  $H$  зависят только от  $r$ .

Для нахождения связи между  $\delta$  и  $H$  воспользуемся уравнениями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \delta.$$

Магнитодвижущая сила вдоль контура  $abcd$ , ограничивающего заштрихованную на рис. 125 площадку, равна:

$$-Hr d\theta + \left( H + \frac{\partial H}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta = \frac{\partial H}{\partial r} r dr d\theta + H dr d\theta,$$

причем в правой части отброшен член третьего порядка малости.

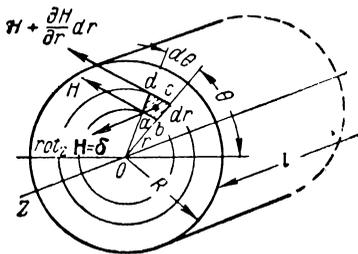


Рис. 125.

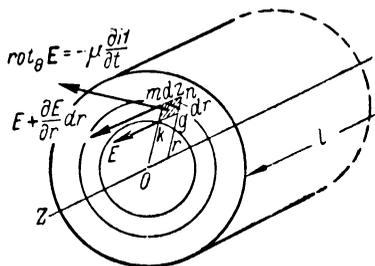


Рис 126.

Величина площадки, ограниченной контуром  $abcd$ , равна  $ds = r d\theta dr$ . Следовательно, в данном случае, когда вектор  $\mathbf{H}$  имеет только одну составляющую  $H_\theta = H$ , имеем:

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{H} = \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r},$$

и первое уравнение Максвелла представляется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = \delta. \quad (*)$$

Электродвижущая сила вдоль контура  $gkmng$ , ограничивающего заштрихованную на рис. 126 площадку, имеет значение:

$$E dz - \left( E + \frac{\partial E}{\partial r} dr \right) dz = -\frac{\partial E}{\partial r} dr dz.$$

Разделив на величину площадки  $ds = dr dz$ , получаем в данном случае, когда вектор  $\mathbf{E}$  имеет только одну составляющую  $E_z = E$ ,

$$\operatorname{rot}_\theta \mathbf{E} = -\frac{\partial E}{\partial r}.$$

Следовательно, второе уравнение Максвелла может быть написано в форме:

$$-\frac{\partial E}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} = \mu \gamma \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (**)$$

Дифференцируя уравнение (\*) по  $t$ , а уравнение (\*\*) по  $r$ , имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} = \mu \gamma \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}.$$

Из этих соотношений с учетом уравнения (\*\*) получаем уравнение для плотности тока:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Дифференцируя уравнение (\*) по  $r$  и используя уравнение (\*\*), получаем уравнение для напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = \mu \gamma \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если ток, а следовательно, также  $\delta$  и  $H$  являются синусоидальными функциями времени, то, вводя комплексные выражения мгновенных значений плотности тока и напряженности магнитного поля:

$$\delta = \delta_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad \dot{H} = \dot{H}_m e^{j\omega t}$$

в уравнения (\*) и (\*\*) и сокращая на общий множитель  $e^{j\omega t}$ , получаем их в виде:

$$\frac{d\dot{H}_m}{dr} + \frac{\dot{H}_m}{r} = \dot{\delta}_m; \quad (*)$$

$$\frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = j\omega \mu \gamma \dot{H}_m. \quad (**)$$

Соответственно, вместо уравнений с частными производными для  $\delta$  и  $H$  получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения для их комплексных амплитуд:

$$\frac{d^2 \dot{\delta}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = j\omega \mu \gamma \dot{\delta}_m; \quad \frac{d^2 \dot{H}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{H}_m}{dr} - \frac{\dot{H}_m}{r^2} = j\omega \mu \gamma \dot{H}_m.$$

Введением новой переменной

$$x = r \sqrt{-j\omega \mu \gamma}$$

последние два уравнения приводятся к более простому виду:

$$\frac{d^2 \dot{\delta}_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{\delta}_m}{dx} + \dot{\delta}_m = 0; \quad \frac{d^2 \dot{H}_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{H}_m}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \dot{H}_m = 0.$$

Эти уравнения являются частными случаями уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя, называются функциями Бесселя. Общий интеграл уравнения может быть написан в виде:

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x),$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные;  $J_n(x)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ;  $N_n(x)$  — функция Бесселя второго рода порядка  $n$ .

Уравнение для плотности тока получается из общего уравнения Бесселя, если в нем положить  $n = 0$ . Уравнение для напряженности магнитного поля получается, если положить  $n = 1$ . Следовательно, общие интегралы этих уравнений могут быть представлены в виде:

$$\dot{\delta}_m = A_0 J_0(x) + B_0 N_0(x); \quad \dot{H}_m = A_1 J_1(x) + B_1 N_1(x),$$

где  $J_0(x)$  и  $N_0(x)$  — бesselевы функции первого и второго рода нулевого порядка, а  $J_1(x)$  и  $N_1(x)$  — бesselевы функции первого и второго рода первого порядка.

Обозначим радиус сечения провода через  $R$ . Постоянные  $A_0$  и  $B_0$  и, соответственно,  $A_1$  и  $B_1$  определяются из граничных условий при  $r = 0$  и при  $r = R$ , т. е. при  $x = 0$  и при  $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$ .

Из подробного рассмотрения бesselевых функций следует, что  $J_0(0) = 1$  и  $J_1(0) = 0$ , в то время как  $N_0(0) = \infty$  и  $N_1(0) = \infty$ . Так как ни  $\dot{\delta}_m$ , ни  $\dot{H}_m$  на оси провода не могут иметь бесконечно больших значений, то  $B_0 = 0$  и  $B_1 = 0$ .

Итак, для плотности тока имеем выражение:

$$\dot{\delta}_m = A_0 J_0(x).$$

$J_0(x)$  можно представить в виде ряда:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots,$$

что легко проверить подстановкой в уравнение для  $\dot{\delta}_m$ .

Постоянная  $A_0$  равна комплексной амплитуде плотности тока  $\dot{\delta}_{m0}$  на оси провода. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_m &= \dot{\delta}_{m0} \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots\right) = \\ &= \dot{\delta}_{m0} J_0(x) = \dot{\delta}_{m0} b_0 e^{j\beta_0}. \end{aligned} \quad (***)$$

$J_0(x)$  есть комплексное число, так как  $x$  является числом комплексным. Через  $b_0$  обозначен модуль, а через  $\beta_0$  — аргумент комплексного числа  $J_0(x)$ .

Напряженность магнитного поля может быть получена из уравнения (\*\*):

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu\gamma} \frac{d\delta_m}{dr} = \frac{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}{j\omega\mu\gamma} \frac{d\delta_m}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} \frac{d\delta_m}{dx}$$

или

$$\dot{H}_m = \frac{\delta_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} \left( -\frac{dJ_0(x)}{dx} \right).$$

Дифференцируя ряд  $J_0(x)$ , находим:

$$\begin{aligned} \dot{H}_m &= \frac{\delta_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} \left( \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \dots \right) = \\ &= \frac{\delta_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} J_1(x) = \frac{\delta_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu\gamma}} b_1 e^{j\beta_1}. \end{aligned} \quad (**)$$

Полученный новый ряд представляет собой не что иное, как бесселеву функцию  $J_1(x)$  первого рода первого порядка. Через  $b_1$  обозначен модуль, а через  $\beta_1$  — аргумент комплексного числа  $J_1(x)$ .

$r \sqrt{\omega\mu\gamma}$	$b_0$	$\beta_0^\circ$	$b_1$	$\beta_1^\circ$
0	1	0	0	-45
1	1,015	14,22	0,501	-37,84
2	1,229	52,28	1,041	-16,73
3	1,950	96,52	1,800	+15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,500	173,51
8	40,817	300,92	39,070	213,69
9	77,957	341,52	74,971	253,95
10	149,831	382,10	144,586	294,27

В таблице даны значения модулей  $b_0$  и  $b_1$  и аргументов  $\beta_0$  и  $\beta_1$  комплексных величин  $J_0(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$  и  $J_1(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma})$  при нескольких значениях величины  $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ .

Так как  $b_0$  с увеличением  $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$  монотонно возрастает, то амплитуда плотности тока имеет наименьшее значение на оси провода, и отношение амплитуд тока на поверхности провода и на его оси будет тем больше, чем больше угловая частота, удельная проводимость, магнитная проницаемость и радиус провода  $R$ . Что же касается угла  $\beta_0$ , то он также монотонно возрастает с уве-

личением  $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ , и в тех случаях, когда  $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$  достигает больших значений, фаза плотности тока на некотором расстоянии от оси может оказаться прямо противоположной фазе плотности тока на оси, а при дальнейшем увеличении  $r$  может снова совпасть с фазой плотности тока на оси, и так далее. Зависимости величин  $\delta_m : \delta_{m0} = b_0$  и  $\beta_0$  от  $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$  даны на рис. 127. На рис. 128 показаны на временной диаграмме векторы, характеризующие распределение плотности тока по величине и фазе вдоль радиуса

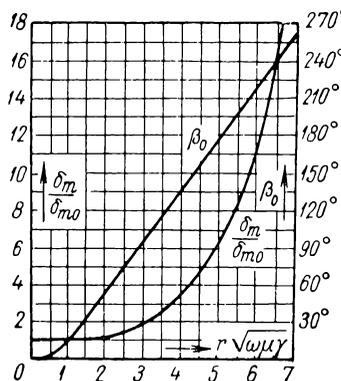


Рис. 127.

провода, причем в конце каждого вектора помечено соответствующее значение  $r\sqrt{\omega\mu\gamma}$ .

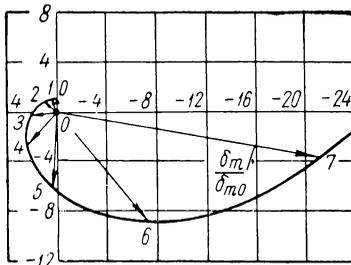


Рис. 128.

Рассмотрение рис. 127 и 128 приводит нас к тем же общим физическим положениям, которые были установлены выше и которые характеризуют явление поверхностного эффекта во всех без исключения случаях. Электромагнитная волна проникает внутрь провода сквозь его поверхность из диэлектрика, окружающего провод. По мере проникновения волны в глубь провода она постепенно затухает, и амплитуды напряженности электрического поля и, соответственно, плотности тока убывают. При этом колебания по мере проникновения в глубь провода все более запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности провода.

**§ 96. Активное и внутреннее индуктивное сопротивление цилиндрических проводов кругового сечения**

Согласно соотношению, установленному в § 90 для провода кругового сечения, имеем:

$$Z_{внутр} = r + jx_{внутр} = \frac{l\dot{E}_{me}}{u\dot{H}_{me}},$$

где  $\dot{E}_{me}$  и  $\dot{H}_{me}$  — значения  $\dot{E}_m$  и  $\dot{H}_m$  на поверхности провода, т. е. при  $r = R$ ;  $l$  — длина провода и  $u$  — периметр его сечения.

$R \sqrt{\omega \mu \gamma}$	$\frac{z_{внутр}}{r_0}$	$\varphi^\circ$	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{x_{внутр}}{r_0}$	$\frac{L_{внутр}}{L_{внутр, 0}}$
0	1	0	1	0	1
1	1,013	7,06	1,0001	0,1247	0,9976
2	1,180	24,01	1,080	0,481	0,961
3	1,625	35,81	1,318	0,951	0,846
4	2,168	39,29	1,678	1,373	0,686
5	2,680	40,39	2,043	1,737	0,556
6	3,180	41,17	2,394	2,093	0,465
7	3,679	41,78	2,744	2,450	0,400
8	4,179	42,23	3,096	2,814	0,352
9	4,679	42,57	3,446	3,165	0,313
10	5,179	42,83	3,796	3,522	0,275

Используя выражения (\*\*\*) и (\*\*) из предыдущего параграфа и связь  $\dot{\delta}_m = \gamma \dot{E}_m$ , получаем:

$$r + jx_{внутр} = \frac{l}{\gamma 2\pi R} \sqrt{-j\omega\mu\gamma} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Сопротивление провода при постоянном токе равно:  $r_0 = \frac{l}{\gamma\pi R^2}$ . Следовательно,

$$\frac{z_{внутр}}{r_0} = \frac{r}{r_0} + j \frac{x_{внутр}}{r_0} = \frac{R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}}{2} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\mu\gamma})}.$$

Так как  $\sqrt{-j} = e^{-\frac{\pi}{4}}$ , то имеем:

$$\frac{z_{внутр}}{r_0} = \frac{R\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} \frac{b_{0e}}{b_{1e}} e^{i(\beta_{0e} - \beta_{1e} - \frac{\pi}{4})} = \frac{z_{внутр}}{r_0} e^{i\varphi},$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{z_{внутр} \cos \varphi}{r_0}, \quad \frac{x_{внутр}}{r_0} = \frac{z_{внутр} \sin \varphi}{r_0}.$$

Здесь  $b_{0e}$  и  $b_{1e}$  — значения модулей  $b_0$  и  $b_1$ , а  $\beta_{0e}$  и  $\beta_{1e}$  — значения аргументов  $\beta_0$  и  $\beta_1$  комплексных величин  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  при  $r = R$ , т. е. на поверхности провода (при  $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$ ).

Угол, на который запаздывает по фазе напряженность магнитного поля относительно напряженности электрического поля на поверхности провода, равен:

$$\varphi = \beta_{0e} - \beta_{1e} - \frac{\pi}{4}.$$

Отношение внутренней индуктивности  $L_{внутр}$  при переменном токе к ее значению  $L_{внутр,0}$  при постоянном токе нетрудно найти, если принять во внимание, что  $L_{внутр} = \frac{x_{внутр}}{\omega}$  и что  $L_{внутр,0} = \frac{\mu l}{8\pi}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{L_{внутр}}{L_{внутр,0}} &= \frac{x_{внутр}}{r_0} \frac{r_0}{\omega L_{внутр,0}} = \\ &= \frac{x_{внутр}}{r_0} \frac{l}{\gamma \pi R^2} \frac{8\pi}{\omega \mu l} = \\ &= \frac{x_{внутр}}{r_0} \frac{8}{(R \sqrt{\omega \mu \gamma})^2}. \end{aligned}$$

В таблице даны отношения  $\frac{z_{внутр}}{r_0}$ ,  $\frac{r}{r_0}$ ,  $\frac{x_{внутр}}{r_0}$  и  $\frac{L_{внутр}}{L_{внутр,0}}$  и угол  $\varphi$  в зависимости от  $R \sqrt{\omega \mu \gamma}$ .

На рис. 129 приведены кривые  $\frac{r}{r_0}$ ,  $\frac{x_{внутр}}{r_0}$  и  $\frac{L_{внутр}}{L_{внутр,0}}$ , характеризующие возрастание активного и внутреннего индуктивного сопротивлений провода и уменьшение его внутренней индуктивности при увеличении параметра  $R \sqrt{\omega \mu \gamma}$ . При возрастании параметра  $R \sqrt{\omega \mu \gamma}$  отношение  $\frac{b_{0e}}{b_{1e}}$  стремится к единице и разность  $\beta_{0e} - \beta_{1e}$  стремится к  $\pi/2$ , а следовательно, угол  $\varphi$  стремится к  $\pi/4$ .

Поэтому при больших значениях параметра имеем:

$$\frac{z_{внутр}}{r_0} \approx \frac{R \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2} e^{j \frac{\pi}{4}}; \quad \frac{r}{r_0} \approx \frac{x_{внутр}}{r_0} \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}},$$

что совпадает с результатом, полученным в § 91 при рассмотрении случая резкого проявления поверхностного эффекта, если учесть, что для провода кругового сечения необходимо положить  $\frac{s}{u} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$ .

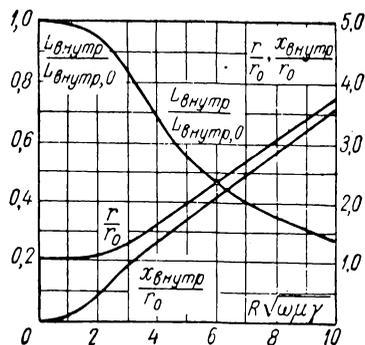


Рис. 129.

Введя обозначение  $\frac{R}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = \kappa$ , можно дать приведенные в таблицах приближенные выражения для отношений  $\frac{r}{r_0}$ ,  $\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}$  и  $\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр}, 0}}$ .

	$\kappa < 1$	$\kappa > 1$	$\kappa > 30$
$\frac{r}{r_0}$	$1 + \frac{\kappa^4}{3}$	$\kappa + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\kappa}$	$\kappa + 0,265 \approx \kappa$
	$\kappa \ll 1$		$\kappa \gg 1$
$\frac{x_{\text{внутр}}}{r_0}$	$\kappa^2 - \frac{\kappa^6}{6}$		$\kappa - \frac{3}{64\kappa} \approx \kappa$
$\frac{L_{\text{внутр}}}{L_{\text{внутр}, 0}}$	$1 - \frac{\kappa^4}{6}$		$\frac{1}{\kappa} - \frac{3}{64\kappa^5} \approx \frac{1}{\kappa}$

Если  $\kappa > 30$ , то при расчете активного сопротивления провода его условно можно заменить эквивалентным трубчатым проводом с тем же внешним радиусом и равномерным распределением тока по сечению. Для определения толщины  $b$  стенки эквивалентного трубчатого провода, называемой иногда *эквивалентной глубиной проникновения* тока, имеем:

$$\frac{l}{2\pi R b \gamma} = r = r_0 \kappa = \frac{l}{\pi R^2 \gamma} \kappa.$$

Следовательно,

$$b = \frac{R}{2\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}.$$

### § 97. Эффект близости. Поверхностная закалка индукционным методом

Если в непосредственной близости друг от друга расположено несколько проводников с переменными токами и каждый из них находится не только в собственном переменном магнитном поле, но и в магнитном поле других проводников, то распределение переменного тока в каждом проводнике будет несколько отличаться от того, которое имело бы место, если бы этот проводник

был уединен. Этот эффект носит наименование *эффекта близости*. Он приводит к дополнительному увеличению активного сопротивления проводников.

В случае двухпроводной линии передачи, в проводах которой токи протекают в противоположных направлениях, эффект близости приводит к тому, что плотность тока на сторонах проводников, обращенных друг к другу, оказывается большей, чем на противоположных сторонах. Это можно объяснить стремлением тока избрать путь, при котором полное сопротивление получается наименьшим. Хотя дополнительная неравномерность распределения тока ведет к возрастанию активного сопротивления провода, но индуктивное сопротивление при этом уменьшается, так как вследствие сближения прямого и обратного тока уменьшается эквивалентная индуктивность контура.

Поверхностный эффект и эффект близости широко используются при поверхностной закалке стальных изделий индукционным методом. В виде примера рассмотрим плоский контур, по которому протекает ток высокой частоты. Если поднести контур близко к плоской поверхности стального тела, то в этом теле вблизи его поверхности возникнут индуцированные токи. Эти токи, согласно принципу электромагнитной инерции, будут направлены противоположно току в указанном выше контуре, называемом в данном случае индуктором. Эффект близости при этом проявляется в том, что ток в теле стремится следовать за проводниками индуктора. Придавая проводникам индуктора ту или иную форму, можно соответствующим образом направлять токи в теле и получать нагревание поверхностного слоя тела для целей последующей закалки только в требуемых местах. Если поверхность тела не плоская, то и индуктору необходимо придать соответствующую форму. Метод поверхностной закалки разработан в СССР В. П. Вологдиным и другими.

## § 98. Электромагнитное экранирование

Для защиты элементов электрических цепей, например катушек самондукции, электронных ламп, электроизмерительных приборов и т. д., от влияния на них переменных электромагнитных полей применяют металлические экраны. Если защищаемый элемент цепи окружить сплошной металлической оболочкой, то при достаточной ее толщине внешнее электромагнитное поле практически не проникает внутрь оболочки, что ясно из приведенного выше рассмотрения процесса проникновения электромагнитной волны в проводящую среду. Подобные оболочки носят название *электромагнитных экранов*. Ясно, что такой экран называется также практически непроницаемым и для ~~переменного~~ электромагнитного поля, созданного элементом электрической цепи, заключенным в его полости, т. е. экран защищает также все

приборы, расположенные вне его, от влияния поля, существующего внутри него.

Физически экранирующее действие может быть объяснено возникновением токов в стенках экрана, создающих поле, которое компенсирует их вызывающее внешнее поле. Эти токи могут рассматриваться как вихревые токи.

Для получения эффективного экранирующего действия толщину стенок экрана необходимо взять порядка длины волны  $\lambda$  в веществе экрана. Действительно, в § 88 мы убедились, что на расстоянии, равном длине волны в проводящей среде, электромагнитная волна практически полностью затухает. Как видно из таблицы, приведенной в § 88, при частоте  $f = 500\,000$  *гц* длина волны в меди получается примерно равной 0,6 *мм*. Поэтому при радиочастотах нет необходимости применять для экранов ферромагнитные материалы, которые нежелательны вследствие зависимости их магнитной проницаемости от напряженности поля и явления гистерезиса. Обычно применяют экраны из хорошо проводящего материала, например из меди или алюминия. При технической частоте  $f = 50$  *гц* медный экран оказывается эффективным лишь при значительной толщине стенок, так как длина волны в меди при этой частоте имеет порядок 6 *см*. При таких низких частотах можно воспользоваться экраном из ферромагнитного материала, в котором электромагнитная волна затухает значительно быстрее, чем в меди, если, конечно, потери в ферромагнитном экране не препятствуют его применению. Ферромагнитный экран оказывает экранирующее действие и при постоянном поле, как это было показано в § 65. При переменном поле его экранирующее действие значительно возрастает вследствие дополнительного экранирующего эффекта токов, возникающих в стенках экрана.

### § 99. Экспериментальное исследование и моделирование электрических и магнитных полей

Наряду с расчетом электрических, магнитных и электромагнитных полей имеет большое практическое значение их непосредственное экспериментальное исследование в реальных устройствах, а также их экспериментальное исследование методом моделирования.

Для экспериментального обследования электрического поля, например электрического поля в воздухе около изолятора высокого напряжения, можно воспользоваться тем обстоятельством, что удлиненное тело из металла или из диэлектрика с  $\epsilon > \epsilon_0$ , внесенное во внешнее электрическое поле, стремится расположиться вдоль линий напряженности этого поля. Прикрепим маленькую стрелку из тонкой и узкой алюминиевой ленты или из соломинки в ее середине к волосу, натянутому между кон-

цами небольшой стеклянной вилки. Вилку прикрепим к концу длинного стержня из изолирующего материала, служащего для ввода стрелки в исследуемое поле. Стрелка должна свободно вращаться на волосе. При внесении стрелки в исследуемое поле она располагается вдоль линий напряженности поля.

Поместим изолятор и стрелку между источником света и белым листом бумаги и устроим освещение так, чтобы на листе бумаги получалась резкая тень от изолятора и от стрелки. При этом мы получаем возможность обрисовать на листе бумаги тень изолятора и тень стрелки. Перемещая стрелку в различные положения в поле изолятора, каждый раз будем проводить черточку на бумаге вдоль ее тени. При большом количестве черточек на бумаге отчетливо намечается направление линий напряженности исследуемого поля. Эти линии надлежит проводить так, чтобы черточки были к ним касательны. Имея картину линий напряженности поля, легко провести перпендикулярные им линии равного потенциала. Если подобрать расстояния между линиями напряженности поля и между линиями равного потенциала так, чтобы удовлетворились требования к форме ячеек сетки поля, сформулированные в § 24, то картина поля даст возможность судить и о величине напряженности поля в разных точках.

Величину напряженности поля можно измерить и непосредственно, пользуясь маленькой безэлектродной неоновой лампой. Располагая лампу в некоторой точке поля в направлении линии напряженности, увеличивают напряжение на изоляторе до тех пор, пока лампа не вспыхнет. Лампа вспыхивает при определенной напряженности поля, которая может быть определена предварительно путем помещения лампы в нарастающем известном поле. Производя опыт в разных точках исследуемого поля, определяют напряжения на изоляторе, при которых вспыхивает лампа в этих точках поля. Результаты измерений дают возможность путем пропорционального пересчета определить напряженность в разных точках поля при одном напряжении на изоляторе.

Для исследования постоянного магнитного поля или магнитного поля, изменяющегося с небольшой частотой, но не меняющего своей конфигурации, можно воспользоваться аналогичным методом, помещая в различные точки поля свободно вращающуюся стрелку из ферромагнитного материала и наблюдая положения, которые занимает стрелка в этих точках поля. Для исследования магнитного поля можно использовать также явление электромагнитной индукции. Помещая в разные точки поля небольшой виток или катушку и измеряя с помощью баллистического гальванометра электрический заряд, переносимый сквозь поперечное сечение провода катушки при убывании потока до нуля, или измеряя действующее значение или амплитуду э. д. с., индуцируемой в катушке при периодически изменяющемся потоке,

можно вычислить значение потока, сцепляющегося с витками катушки. Отыскивая положение катушки около данной точки поля, при котором поток имеет наибольшее значение, получаем направление вектора  $\mathbf{B}$ , перпендикулярное плоскости катушки. По величине потока при этом находим величину магнитной индукции в середине катушки. Катушка должна быть столь малых размеров, чтобы в пределах ее поле мало отличалось от однородного.

Исследование электрического поля постоянного тока в проводящей среде производится весьма просто. Если среда твердая, можно исследовать поле только на ее поверхности. Если же среда жидкая или рыхлая, то представляется возможным исследовать поле и внутри нее. С этой целью вводят в среду зонд, представляющий собой тонкий металлический стержень, изолированный по всей длине, кроме небольшого отрезка на конце.

Зонд принимает потенциал той точки среды, в которой находится его открытый конец. Разность потенциала зонда и потенциала какой-либо другой неизменной точки среды может быть измерена вольтметром или при малых разностях потенциалов высокочувствительным гальванометром. Сопротивление вольтметра или гальванометра должно быть достаточно велико, чтобы ток через них, выходящий из конца зонда в среду, не вызывал заметного изменения потенциала в месте расположения конца зонда. Наиболее точные результаты могут быть получены при использовании для измерения разности потенциалов компенсационного метода. Помещая конец зонда в различные точки исследуемого поля, можно найти в них потенциалы, что дает возможность построить поверхности равного потенциала или линии равного потенциала на поверхности среды или в каком-нибудь сечении среды. Линии напряженности электрического поля, а в однородной в отношении проводимости среде и линии тока, проводят перпендикулярно поверхностям равного потенциала. На поверхности среды линии тока лежат в этой поверхности и, следовательно, они перпендикулярны к линиям равного потенциала на этой поверхности.

Зная разность потенциалов двух близлежащих поверхностей равного потенциала и расстояние между ними в данном месте поля, можно без труда определить величину напряженности электрического поля в этом месте. Можно напряженность поля измерить и непосредственно, если воспользоваться двойным зондом, состоящим из двух вышеописанных одиночных зондов, открытые концы которых расположены на небольшом определенном расстоянии друг от друга. Измеряя разность потенциалов зондов и деля ее на расстояние между концами зондов, получаем значение составляющей вектора напряженности электрического поля в направлении линии, соединяющей концы зондов.

Экспериментальное исследование электрических и магнитных

полей в тех или иных технических устройствах — изоляторах, приборах, машинах, аппаратах — имеет большое значение для правильного проектирования этих устройств. Экспериментальное исследование растекания тока в проводящей среде имеет большое значение для правильного проектирования заземляющих устройств, а также для определения так называемых блуждающих постоянных токов в земле, ответвляющихся в землю от рельсовых путей городского электрического транспорта и вызывающих разведение проложенных в земле металлических труб и оболочек кабелей.

Постоянное электрическое поле в диэлектрике при отсутствии объемных зарядов, постоянное магнитное поле в области вне токов и постоянное электрическое поле в проводящей среде в области вне источников э. д. с. описываются аналогичными уравнениями, имеющими соответственно вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U); \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad (\text{a})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (\mathbf{H} = -\operatorname{grad} U_m); \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (\text{б})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U); \quad \delta = \gamma \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \delta = 0. \quad (\text{в})$$

Поэтому, если одинаковы геометрические конфигурации областей пространства, в которых существуют эти поля, если аналогичны граничные условия на границах областей и если подобны относительные распределения значений  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  внутри областей, то картины этих полей будут подобны друг другу.

Это обстоятельство может быть использовано для моделирования одного поля другим. Из вышеизложенного следует, что проще всего и с наибольшей точностью удастся экспериментально исследовать электрическое поле в проводящей среде. Поэтому, естественно, исследование постоянных электрических полей в диэлектрике и постоянных магнитных полей вне токов заменять исследованием электрического поля в проводящей среде на соответствующих моделях. Важно при этом, чтобы при моделировании было соблюдено геометрическое подобие областей, в которых существует поле, а также соблюдены требуемые граничные условия. Если среда однородна, то требование правильного распределения значений  $\gamma$  внутри области отпадает.

Для исследования плоскопараллельных полей используют металлические листы или листы из проводящей бумаги, вырезанные по определенной фигуре, изображающей область исследуемого поля. К некоторым частям границ листа подводят и отводят ток, определенным образом распределяя его вдоль этих частей границ. Остальные части границ листа будут, очевидно, линиями тока. Если моделируется, например, плоскопараллельное магнитное поле около каких-нибудь частей машин или аппаратов, то границы листа, вдоль которых подводится ток, соответствуют границам, вдоль которых распределена магнитодвижущая сила,

вызывающая магнитное поле, а границы, вдоль которых в листе ток не подводится и которые являются линиями тока, соответствуют границам, вдоль которых не распределена м. д. с. и которые, следовательно, являются линиями равного магнитного потенциала. На рис. 130 изображена область  $abcdefga$  в электрической машине, в которой существует магнитное поле в воздухе между полюсом и якорем и в пространстве между полюсами. На рис. 131 изображен фигурный лист, на котором может быть обследовано поле тока, аналогичное магнитному полю в машине.

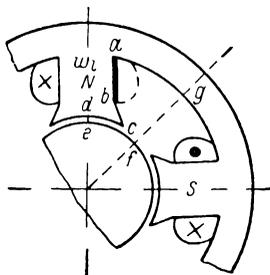


Рис. 130.

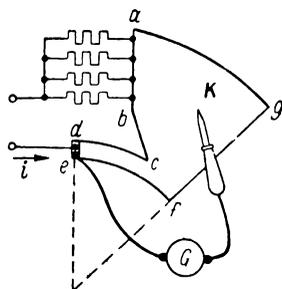


Рис. 131.

Чтобы исключить в машине область, где протекают токи, обмотка на сердечнике полюса условно предположена сжатой к линии  $ab$ . Вдоль этой линии определенным образом распределена м. д. с. Так же следует распределить ток, входящий в лист по линии  $ab$ . Линии  $bcd$  и  $efga$  в машине суть линии равного магнитного потенциала. Линии  $bcd$  и  $efga$  в листе — линии тока. Поэтому всем линиям равного магнитного потенциала в поле машины будут соответствовать линии тока в листе и всем магнитным линиям в поле машины будут соответствовать линии равного электрического потенциала в листе. Последние легко могут быть экспериментально найдены при помощи щупа  $K$  и гальванометра  $G$ .

Для обследования пространственных полей можно применить ванну со слабо проводящей жидкостью, в которую погружены металлические тела (электроды) и тела из изолирующего вещества определенной формы. К металлическим телам линии тока подходят перпендикулярно их поверхностям, тела из изолирующего вещества обтекаются линиями тока. Надлежащим образом подбирая форму тел и самой ванны, можно моделировать в такой ванне магнитное поле или электрическое поле в диэлектрике около той или иной интересующей нас системы намагниченных или заряженных тел. Во избежание появления э. д. с. поляризации около электродов пользуются переменным током низкой частоты, который распределяется в ванне практически так же, как и постоянный ток при отсутствии этих э. д. с.

В электролитической ванне можно моделировать не только постоянные и изменяющиеся с малой частотой магнитные и электрические поля, но и поля вектора скорости в газовой или жидкой среде при отсутствии турбулентного движения, а также поля других физических величин, если эти поля описываются уравнениями, аналогичными по форме уравнениям электрического поля постоянного тока в проводящей среде (в случае однородной среды — уравнением Лапласа).

Сплошную среду электрической модели можно заменить, допуская известную степень приближения, большим числом элементов, составленных из сопротивлений, т. е. заменить, как говорят, электрической решеткой или сеткой. На рис. 132 изображен элемент из шести сопротивлений, заменяющий параллелепипед, вырезанный из сплошной среды. Применение электрических сеток для приближенного решения уравнений Лапласа предложено С. А. Гершгориним в 1929 г.

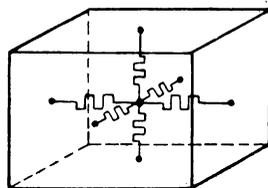


Рис. 132.

Этот метод может быть распространен и на исследования быстро-переменных полей, уже не описываемых уравнением Лапласа. Переменные электромагнитные поля отличаются от постоянных электрических и магнитных полей тем, что в них появляются токи электрического смещения и индуцируемые переменным магнитным потоком э. д. с. В электрической модели это можно учесть введением в каждый элемент модели, помимо сопротивлений, также конденсаторов и индуктивных катушек. На этом принципе Л. И. Гутенмахером разработаны так называемые электроинтеграторы. Вводя в эти элементы, кроме вышеуказанных деталей, еще усилители и дополнительные проводимости, определяющие отбор или генерирование энергии в элементе, представляется возможным решать при помощи электроинтеграторов весьма разнообразные задачи.

Отметим, наконец, что для непосредственного исследования переменного электромагнитного поля в проводящей среде, т. е. для изучения явления поверхностного эффекта, можно исследование вести в устройствах геометрически подобных действительным устройствам, но линейные размеры  $l$  которых уменьшены или увеличены в некоторое число раз. При этом; как следует из вышеизложенной теории поверхностного эффекта, необходимо, чтобы в модели и в оригинале оставалась неизменной безразмерная величина  $l \sqrt{\omega \mu \gamma}$ , называемая критерием подобия.

Для непосредственного исследования переменного электромагнитного поля в диэлектрике в геометрически подобных моделях критерием подобия является при периодических процессах величина  $l \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  и при любых процессах величина  $\frac{l}{T} \sqrt{\mu \epsilon}$ ,

где  $t$  — промежуток времени, отсчитываемый от начального момента времени. Действительно, отношение  $l/t$  в модели ( $l_1/t_1$ ) и в оригинале ( $l_2/t_2$ ) должно быть равно отношению скоростей распространения электромагнитных волн в модели  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}$  и в оригинале  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$ , откуда  $\frac{l_1}{t_1} \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = \frac{l_2}{t_2} \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \text{const.}$

В области теории и практики моделирования приоритет и большие заслуги принадлежат советским ученым: академиком Н. Н. Павловскому, А. Н. Крылову, М. В. Кирпичеву, а также С. А. Гершгорину, Л. И. Гутенмахеру, Н. В. Королькову, Д. Ю. Панову и др.

### § 100. О параметрах электрических и магнитных цепей

При исследовании электромагнитных явлений в электрических и магнитных цепях одной из основных задач является установление параметров, характеризующих эти цепи и отдельные их элементы. Теория электрических цепей базируется на введении параметров отдельных участков цепи, из которых основными являются индуктивности, емкости и сопротивления.

Помимо указанных основных параметров, вводят в рассмотрение еще множество других, находящихся в известной связи с этими параметрами или имеющих самостоятельное значение. Так, магнитные цепи принято характеризовать их магнитным сопротивлением, равным отношению магнитодвижущей силы к магнитному потоку в цепи. При синусоидальном изменении магнитного потока можно ввести более общий параметр — комплексное магнитное сопротивление, характеризующее также и потери энергии на гистерезис и на вихревые токи в магнитной цепи. При исследовании электрических цепей при синусоидальных переменных токах вводят понятия об активных и реактивных сопротивлениях и проводимостях участков цепи, которые в простейших цепях находятся в функциональной зависимости от индуктивностей, емкостей и сопротивлений отдельных элементов цепи. При синусоидальном изменении токов вводят также более общие параметры — комплексное электрическое сопротивление и комплексную проводимость. Многие элементы цепей характеризуются их специфическими параметрами. Так например, основные свойства трехэлектродной электронной лампы определяются не только ее внутренним сопротивлением, но и коэффициентом усиления.

Из всего рассмотренного выше следует, что только для статических или стационарных режимов всем этим параметрам может быть придано вполне определенное значение и что при переменных процессах использование их существенно осложняется. Так например, распределение магнитного поля около какого-либо

электрического контура при заданном электрическом токе в контуре зависит не только от формы контура, но и от распределения тока внутри проводника, образующего контур. Только при постоянном токе распределение тока при заданных электрических свойствах проводника однозначно определяется геометрической формой проводника. Соответственно, только при постоянном токе такой важнейший параметр электрической цепи, как ее индуктивность, вполне определяется при заданных магнитных свойствах среды геометрическими размерами и формой контура цепи. При изменении тока во времени изменяется распределение тока по сечению проводников, образующих контур тока, и соответственно изменяется распределение в пространстве магнитного потока, сцепленного с контуром, а следовательно, изменяется и индуктивность контура. Так, при периодических процессах, как мы имели возможность убедиться в этой главе, электрический ток распределяется преимущественно в поверхностном слое проводника, что ведет к ослаблению магнитного поля внутри проводника и к уменьшению индуктивности цепи. При синусоидальном токе индуктивность является функцией угловой частоты тока. При несинусоидальном периодическом токе она, очевидно, будет являться функцией также формы кривой тока. При непериодических изменениях тока индуктивность, принципиально говоря, будет являться, хотя бы по одной только указанной причине — неравномерности распределения тока в проводнике — сложной функцией времени.

От скорости изменения тока зависит в еще большей мере активное сопротивление проводника. Строго говоря, это утверждение относится и к емкости конденсатора, так как неравномерное распределение переменного тока по ширине обкладок конденсатора должно вызывать перераспределение потока электрического смещения в диэлектрике, а следовательно, приводить к некоторому изменению емкости конденсатора.

Критерием того, следует ли считаться с рассмотренными явлениями, служит соотношение между промежутком времени, необходимым для прохождения электромагнитной волны внутрь проводника от его поверхности до центральных частей поперечного сечения, и промежутком времени, в течение которого ток в проводнике успевает измениться на заметную величину по сравнению со своим максимальным значением. При периодических процессах этот критерий сводится к соотношению между длиной электромагнитной волны *внутри* проводника и линейными размерами поперечного сечения проводника. Если длина волны в проводящей среде имеет порядок или меньше линейных размеров поперечного сечения проводника, то явление поверхностного эффекта становится заметным. Мы видели, что длина электромагнитной волны в проводящей среде даже при сравнительно низких частотах весьма невелика.

Мы начали рассмотрение вопроса о параметрах цепей при переменных токах с анализа влияния на величины этих параметров процессов, происходящих внутри проводников, потому что эти процессы приходится учитывать уже при сравнительно медленных изменениях тока. Вопрос о параметрах цепи еще больше осложняется, когда токи и напряжения в цепи изменяются столь быстро, что за время заметного их изменения электромагнитные волны не успевают распространиться в диэлектрике вдоль всей цепи. Так как скорость распространения электромагнитных волн в диэлектрике велика, например, в воздухе она равна приблизительно  $3 \cdot 10^8 \frac{м}{сек}$ , то учитывать ее конечное значение при не очень протяженных цепях приходится лишь при весьма быстрых изменениях тока и напряжения. В тех случаях, когда можно не считаться с конечной скоростью распространения волн в диэлектрике, электрическую цепь называют *цепью с сосредоточенными параметрами*. При периодических процессах критерием допустимости рассмотрения цепи, как цепи с сосредоточенными параметрами, является малость линейных размеров цепи и ее элементов по сравнению с длиной электромагнитной волны в диэлектрике. При частоте  $f = 50$  гц длина электромагнитной волны в воздухе равна  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6 \cdot 10^6$  м = 6000 км. Поэтому при этой частоте обычные электромагнитные устройства и электрические цепи, за исключением длинных линий передачи, рассматриваются как обладающие сосредоточенными параметрами. Периодические процессы в них часто называют квазистационарными процессами.

Если цепь можно рассматривать как обладающую сосредоточенными параметрами, но приходится учитывать явление поверхностного эффекта, то вводят понятие об *эквивалентных параметрах цепи*. Эти эквивалентные параметры зависят уже не только от геометрической конфигурации элементов цепи и от электрических и магнитных свойств материалов, но и от скорости происходящих в цепи процессов. Понятие об эквивалентных параметрах обычно еще более расширяют, включая в них влияние различных факторов. Например, при определении эквивалентной индуктивности принимают во внимание влияние вихревых токов, которые возникают в расположенных вблизи от проводников цепи массивных проводящих телах, и влияние намагниченности сред. Последнее обстоятельство в случае ферромагнитных материалов приводит еще к зависимости индуктивности от тока в цепи, т. е. приводит к нелинейным связям. Нелинейные связи возникают, как мы видели, и в случаях, когда другие параметры, например сопротивления или емкости, зависят от напряжений и токов. Введение эквивалентных параметров цепи во многих случаях позволяет с достаточной точностью производить расчеты квазистационарных процессов, пользуясь методами, аналогичными методам, используемым для расчета стационарных процессов. Ярким примером

этого служит сопоставление методов расчета сложных электрических цепей с сосредоточенными постоянными параметрами при переменном токе (символический метод) и при постоянном токе.

Если протяженность электрической цепи столь велика, что промежутки времени, необходимый для прохождения электромагнитной волны вдоль цепи, становится сравнимым с промежуток времени, в течение которого токи или напряжения в отдельных участках цепи успевают заметно измениться, то такую цепь уже нельзя характеризовать сосредоточенными параметрами. В простейшем случае, когда цепь имеет большую протяженность лишь в одном направлении, вводят понятие о параметрах, *распределенных* по длине цепи. Примером таких цепей являются однородные линии. Другим примером могут служить обмотки трансформаторов и электрических машин, которые при рассмотрении вдоль них волн тока и напряжения с длительностью, измеряемой микросекундами, должны рассматриваться как *цепи с распределенными параметрами*. Для характеристики подобных цепей вводят параметры, отнесенные к единице длины цепи.

Однако и этот метод становится уже невозможным в тех случаях, когда длина электромагнитной волны в диэлектрике сравнима с размерами устройств во всех направлениях. С такими условиями мы встречаемся в технике ультракоротких волн, длины которых измеряются сантиметрами и которые находят широкое применение в современной радиотехнике. При столь быстрых процессах уже невозможно характеризовать устройство определенными параметрами: индуктивностью, емкостью и сопротивлением. Невозможно говорить также и о параметрах, распределенных вдоль какого-то одного направления. Электрические колебательные системы при столь коротких волнах приобретают весьма своеобразный вид — это полые металлические тела, внутри полостей которых возбуждаются электромагнитные волны в диэлектрике, многократно отражающиеся от стенок тел. В таких системах возможна настройка в резонанс, причем резонансные частоты определяются размерами и формой тел. Весьма своеобразную форму принимают при столь коротких волнах и устройства, служащие для передачи электромагнитной энергии, получившие название волноводов. Это металлические трубы, внутри которых распространяются электромагнитные волны в направлении осей труб. По отношению к подобным устройствам затруднительно применение понятия об электрической цепи в его обычном смысле. Для расчета электромагнитных процессов в подобных системах необходимо прибегать к решению уравнений электромагнитного поля с учетом соответствующих граничных условий.

---

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аркадьев В. К., комплексная магнитная проницаемость 207
- Вектор Пойнтинга 158
- Волна плоская электромагнитная в диэлектрике 152
- — — проводящей среде 194
  - сферическая 178
- Волноводы 185
- Герц Г., опыты по получению и распространению электромагнитных волн 165
- Диполь 36, 175
- Длина волны 160, 197
- Емкость двухпроводной линии передачи 76, 83
- между круговыми цилиндрами 77
  - трехфазной линии передачи 84
  - частичная 81
- Излучение электромагнитных волн антенной 168
- Индуктивность взаимная 136
- собственная двухпроводной линии 148
  - — кругового контура 142
  - — прямоугольной рамки 147
  - — трехфазной линии 149
- Индукция электростатическая 69
- Коэффициенты потенциальные 79
- размагничивания 134
  - электростатической индукции 79
- Лебедев П. Н., исследование электромагнитной природы света 10, 167
- Ленц Э. Х., общность электрических и магнитных явлений 14
- Максвелл, уравнения электромагнитного поля 13, 17
- Метод графического построения поля 63, 125
- зеркальных изображений 71, 121
  - средних потенциалов 87
  - участков для расчета индуктивностей 143
  - электрического моделирования 222
  - электростатической аналогии 98
- Мощность излучения 179
- Оператор Гамильтона 23
- Лапласа 42
- Опыты Герца 165
- Передача энергии вдоль проводов линии 181
- Поле безвихревое 32
- вихревое 104
  - магнитное 104
  - — линии передачи 118
  - — кругового контура с током 127
  - — линейных проводов 113
  - — постоянных токов 104
  - — вблизи железных масс 121
  - — провода кругового сечения 117
- Поле плоскопараллельное 47, 110
- постоянных токов 73
  - потенциальное 35, 73
  - электрическое двух плоскостей, сходящихся под углом 54
  - — линии передачи 55
  - — постоянных токов 73
  - электромагнитное 9
  - — переменное в диэлектрике 152, 178
  - — — проводящей среде 194
  - электростатическое 32
- Постулат Максвелла в дифференциальной форме 23
- Потенциал векторный магнитного поля 106
- комплексный поля 51
  - скалярный магнитного поля 104
  - электрический 33
- Потенциалы электродинамические 169
- — запаздывающие 174
- Поток электромагнитной энергии 160
- Принцип непрерывности магнитного потока 34
- — электрического тока 34
  - соответствия электрических и магнитных полей 114
- Проницаемость диэлектрическая комплексная 208
- магнитная комплексная 207
- Скорость распространения электромагнитной волны 155
- фазовая волны в волноводе 189
- Сопротивление активное 199
- волновое 186, 196
  - заземления 100
  - излучения 180
- Теорема Гаусса в дифференциальной форме 21
- Остроградского 25
  - Стокса 26
- Уравнение волновое 171
- Даламбера 171
  - Лапласа 41
  - Пауссона 41
- Уравнения Максвелла 13, 17
- электромагнитного поля 27
- Частота критическая в волноводе 188
- Шар диэлектрический во внешнем электрическом поле 66
- металлический во внешнем электрическом поле 71
  - ферромагнитный во внешнем магнитном поле, 132
- Экранирование магнитное 135
- Экраны электромагнитные 221
- электростатические 69
- Эффект близости 220
- Явление поверхностного эффекта 198, 205, 209, 212

Цена 5 р. 80 к.