



И. Е. ИРОДОВ

# ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

$$\begin{aligned}\lambda &= h/p \\ \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi &= 0 \\ \hat{p}_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{A} \psi &= A \psi\end{aligned}$$

**И. Е. Иродов**

---

# **ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ**

**5-е издание (электронное)**

Рекомендовано  
учебно-методическим объединением  
в области «Ядерная физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов физических специальностей  
высших учебных заведений



**Москва  
БИНОМ. Лаборатория знаний  
2015**

УДК 530.145  
ББК 22.31  
И83

**Иродов И. Е.**

И83      Задачи по квантовой физике [Электронный ресурс] / И. Е. Иродов. — 5-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 220 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2958-8

Сборник содержит около 800 задач по широкому кругу вопросов квантовой физики и ее приложений: квантовая природа электромагнитного излучения, волновые свойства частиц, элементы квантовой механики, электронная оболочка атома, молекулы, кристаллы, физика ядра, ядерные реакции и элементарные частицы. К наиболее сложным задачам даны подробные указания.

Для студентов физических и инженерно-технических специальностей вузов.

**УДК 530.145  
ББК 22.31**

**Деривативное электронное издание на основе печатного аналога:** Задачи по квантовой физике / И. Е. Иродов. — 3-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 215 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0283-3.

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

**ISBN 978-5-9963-2958-8      © БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006**

# Содержание

Предисловие . . . . .	5
Принятые обозначения . . . . .	6
<b>1. Истоки квантовой физики . . . . .</b>	<b>7</b>
Тепловое излучение. Формула Планка . . . . .	8
Корпускулярные свойства электромагнитного излучения . . . . .	12
Модель атома Резерфорда–Бора . . . . .	19
<b>2. Волновые свойства частиц . . . . .</b>	<b>25</b>
Волны де Бройля. . . . .	26
Соотношение неопределенностей Гейзенберга . . . . .	30
Уравнение Шредингера . . . . .	32
Прохождение частицы через барьер. . . . .	38
<b>3. Основы квантовой механики . . . . .</b>	<b>42</b>
Квантово-механические операторы . . . . .	44
Средние значения и вероятности . . . . .	47
Изменение во времени состояния. . . . .	50
Четность . . . . .	51
Центрально-симметричное поле. Атом водорода. . . . .	53
<b>4. Электронная оболочка атома. . . . .</b>	<b>56</b>
Состояния электронов в атоме . . . . .	58
Интенсивность и ширина спектральных линий . . . . .	62
Характеристические рентгеновские спектры. . . . .	65
Магнитные свойства атома . . . . .	68
<b>5. Двухатомная молекула . . . . .</b>	<b>73</b>
Вращательные, колебательные и электронные состояния . . . . .	74
Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние . . . . .	77
<b>6. Твердое тело . . . . .</b>	<b>80</b>
Структура кристаллов . . . . .	81
Квантовая теория теплоемкости кристаллов. . . . .	84
Свободные электроны в металлах и полупроводниках . . . . .	88

<b>7. Ядро атома . . . . .</b>	<b>94</b>
Энергия связи, спин и магнитный момент ядра . . . . .	96
Закон радиоактивного распада . . . . .	99
Альфа- и бета-распады . . . . .	101
Гамма-излучение: внутренняя конверсия, эффект Мессбауэра . . . . .	104
<b>8. Ядерные реакции . . . . .</b>	<b>107</b>
Законы сохранения в ядерных реакциях . . . . .	109
Уровни ядер. Сечения и выходы ядерных реакций . . . . .	114
Формула Брейта–Вигнера . . . . .	117
<b>9. Элементарные частицы . . . . .</b>	<b>120</b>
Взаимодействие релятивистских частиц . . . . .	121
Распад частиц . . . . .	124
Внутренние свойства элементарных частиц . . . . .	126
<b>Ответы и решения. . . . .</b>	<b>129</b>
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>207</b>
1. Значения некоторых определенных интегралов. . . . .	207
2. Плотность некоторых веществ . . . . .	207
3. Работа выхода электрона из металлов . . . . .	208
4. Край $K$ - и $L$ -полос поглощения рентгеновского излучения . . . . .	208
5. Константы двухатомных молекул . . . . .	209
6. Соотношение между некоторыми единицами . . . . .	209
7. Таблица свойств нуклидов . . . . .	210
8. Греческий алфавит . . . . .	212
9. Формулы некоторых атомных величин в гауссовой системе и СИ . . . . .	213
10. Основные физические постоянные . . . . .	214
Периодическая система элементов Д.И. Менделеева — на переднем форзаце	
Таблица элементарных частиц — на заднем форзаце	

## Предисловие к третьему изданию

Сборник предназначен в качестве учебного пособия в основном для студентов физических специальностей вузов, где изучают общий курс атомной и ядерной физики. Вместе с тем довольно широкий спектр задач, — как по тематике, так и по уровню сложности — позволяет использовать данный сборник и в обычных технических вузах, и при изучении некоторых спецкурсов.

Сборник содержит около 800 задач с ответами и достаточно подробными указаниями для решения наиболее трудных из них. Для облегчения самостоятельной работы студентов в начале каждой главы помещен краткий обзор основных понятий и соотношений, необходимых для решения задач данной главы. В конце сборника даны необходимые справочные таблицы и сводка основных физических постоянных.

Все формулы приведены как в гауссовой системе (СГС), так и в СИ. Исходные данные и числовые ответы даны с учетом точности соответствующих величин и правил действий над приближенными числами.

Основу данного учебного пособия составляет радикально переработанный «Сборник задач по атомной физике» (М., 1984). При переработке был усилен акцент на вопросах квантования; исключены вопросы, не имеющие непосредственного отношения к квантовой физике; исключены второстепенные и малоинтересные в физическом отношении задачи; включено довольно много новых задач; ряд громоздких задач, содержащих много емких пунктов, разбит на отдельные задачи и др.

В издании уточнены некоторые формулировки, а также исправлены замеченные неточности и опечатки.

*И. Иродов*

## Принятые обозначения

Векторы обозначены жирным прямым шрифтом (например,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$ ). Та же буква светлым шрифтом ( $v$ ,  $B$ ) означает модуль соответствующего вектора.

Средние значения величин отмечены скобками  $\langle \rangle$ , например,  $\langle \lambda \rangle$ ,  $\langle x \rangle$ .

Терминами Л- и Ц-системы обозначены лабораторная система отсчета и система центра масс соответственно. Все величины в Ц-системе помечены сверху значком  $\sim$  (тильда), например  $\tilde{\mathbf{p}}$ ,  $\tilde{E}$ .

Энергия:  $K$  — кинетическая,  $U$  — потенциальная,  $E$  — полная.

$Br$  — произведение индукции магнитного поля на радиус кривизны траектории частицы.

Все операторы (кроме координат и функций, зависящих только от координат) отмечены сверху значком  $\hat{\phantom{x}}$ , например  $\hat{A}$ ,  $\hat{p}_x$ .

А — ампер	Гц — герц	мин — минута
Å — ангстрем	Дж — джоуль	Мкс — максвелл
атм — атмосфера	дин — дина	Па — паскаль
б — барн	К — кельвин	Н — ньютон
Бк — беккерель	Ки — кюри	с — секунда
В — вольт	кг — килограмм	ср — стерадиан
Вб — вебер	Кл — кулон	Тл — тесла
Вт — ватт	л — литр	ч — час
Гс — гаусс	м — метр	эВ — электронвольт

## Десятичные приставки к названиям единиц

Э — экса, $10^{18}$	к — кило, $10^3$	мк — микро, $10^{-6}$
П — пета, $10^{15}$	г — гекто, $10^2$	н — нано, $10^{-9}$
Т — тера, $10^{12}$	д — деци, $10^{-1}$	п — пико, $10^{-12}$
Г — гига, $10^9$	с — санти, $10^{-2}$	ф — фемто, $10^{-15}$
М — мега, $10^6$	м — милли, $10^{-3}$	а — атто, $10^{-18}$

# 1. Истоки квантовой физики

- **Энергетическая светимость** теплового излучения:

$$M = cu/4, \quad (1.1)$$

где  $c$  — скорость света,  $u$  — плотность энергии теплового излучения.

- **Формула Вина** для спектральной плотности энергии теплового излучения и закон смещения Вина:

$$u_{\omega} = \omega^3 f(\omega/T), \quad \lambda_m T = b, \quad (1.2)$$

где  $\omega$  — круговая частота излучения;  $T$  — температура;  $\lambda_m$  — длина волны, отвечающая максимуму распределения  $u_{\lambda}$ ;  $b$  — постоянная.

- **Закон Стефана–Больцмана:**

$$M = \sigma T^4, \quad (1.3)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана.

- **Формула Планка** для спектральной плотности энергии:

$$u_{\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}. \quad (1.4)$$

- **Соотношения между полной энергией  $E$ , импульсом  $p$  и кинетической энергией  $K$  релятивистской частицы массы  $m$ :**

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \quad pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)}. \quad (1.5)$$

- **Комптоновское смещение** длины волны рассеянного фотона:

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos\vartheta), \quad (1.6)$$

где  $\lambda_C = 2\pi\hbar/mc$  — комптоновская длина волны частицы.

- **Угол  $\vartheta$ , на которой заряженная частица рассеивается** кулоновским полем неподвижного ядра, определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \delta_* \frac{q_1 q_2}{2bK}, \quad (1.7)$$



где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды взаимодействующих частиц,  $K$  — кинетическая энергия налетающей частицы,  $b$  — прицельный параметр.

Здесь и далее  $\delta_* = 1$  (СГС) или  $1/4\pi\epsilon_0$  (СИ).

• **Формула Резерфорда** для относительного числа частиц, рассеянных в элементарном телесном угле  $d\Omega$  под углом  $\vartheta$  к первоначальному направлению их движения:

$$\frac{dN}{N} = n \left( \delta_* \frac{q_1 q_2}{4K} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}, \quad (1.8)$$

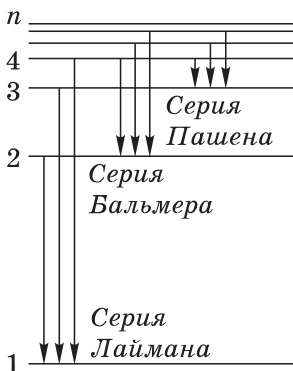


Рис. 1.1

где  $n$  — число ядер фольги на единицу площади ее поверхности,  $K$  — кинетическая энергия налетающих частиц,  $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ .

• **Схема возникновения основных серий** водородоподобных ионов показана на рис. 1.1.

• **Обобщенная формула Бальмера:**

$$\omega = RZ^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad R = \delta_*^2 \frac{\mu e^4}{2\hbar^3}, \quad (1.9)$$

где  $\omega$  — циклическая частота перехода между состояниями с квантовыми числами  $n_1$  и  $n_2$ ,  $Z$  — заряд ядра (в единицах  $e$ ),  $R$  — постоянная Ридберга,  $\mu$  — приведенная масса системы (при  $m_e \ll m_{\text{я}} \, \mu \approx m_e$ ).

• **Резонансная линия** — спектральная линия, обусловленная переходом атомов из первого возбужденного состояния в основное.

## Тепловое излучение. Формула Планка

**1.1.** Доказать, что энергетическая светимость теплового излучения определяется формулой (1.1).

**1.2.** Тепловое излучение может быть представлено распределением энергии либо по длинам волн с максимумом при  $\lambda_m$ , либо по частотам с максимумом при  $\nu_m$ . Показать, что при одной и той же температуре  $\lambda_m < c/\nu_m$ .

**1.3.** Воспользовавшись формулой Вина, показать, что:

- а) наиболее вероятная частота теплового излучения  $\omega_m \propto T$ ;
- б) энергетическая светимость  $M \propto T^4$ .

**1.4.** Показать с помощью формулы Вина, что в спектре распределения теплового излучения по длинам волн:

а) наиболее вероятная длина волны  $\lambda_m \propto 1/T$ ;

б) максимальная спектральная плотность энергии пропорциональна  $T^5$ .

**1.5.** В результате расширения Вселенной после Гигантского Взрыва возникшее электромагнитное излучение (его называют реликтовым) имеет вид теплового излучения с максимумом испускательной способности при длине волны  $\lambda_m = 1,07$  мм. Какова температура этого излучения?

**1.6.** Начальная температура теплового излучения  $T = 2000$  К. На сколько кельвинов изменилась эта температура, если наиболее вероятная длина волны в его спектре увеличилась на  $\Delta\lambda = 260$  нм?

**1.7.** При переходе от одной температуры к другой площадь под кривой функции Кирхгофа  $f(\lambda)$  уменьшилась в  $\eta = 13$  раз. Как и во сколько раз изменилась при этом длина волны, соответствующая максимуму функции  $f(\lambda)$ ?

**1.8.** Найти наиболее вероятную длину волны в спектре теплового излучения с энергетической светимостью  $M = 5,7$  Вт/см<sup>2</sup>.

**1.9.** Солнечный спектр достаточно близок к спектру теплового излучения с наиболее вероятной длиной волны  $\lambda_m = 0,48$  мкм. Найти мощность теплового излучения Солнца. Оценить время, за которое его масса уменьшится на один процент (за счет теплового излучения). Масса Солнца  $2,0 \cdot 10^{30}$  кг, его радиус  $R = 7,0 \cdot 10^8$  м.

**1.10.** Имеются две полости 1 и 2 с малыми отверстиями одинакового радиуса  $r = 5,0$  мм и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Полости отверстиями обращены друг к другу, причем расстояние между этими отверстиями  $l = 100$  мм. В полости 1 поддерживают температуру  $T_1 = 1250$  К. Найти установившуюся температуру в полости 2. Иметь в виду, что абсолютно черное тело является косинусным излучателем.

**1.11.** Зная, что давление теплового излучения  $p = u/3$ , где  $u$  — плотность энергии излучения, найти:

а) давление теплового излучения во внутренних областях Солнца, где температура  $T \approx 1,6 \cdot 10^7$  К;

б) температуру  $T$  полностью ионизированной водородной плазмы плотностью  $\rho = 0,10$  г/см<sup>3</sup>, при которой давление тепло-

вого излучения равно кинетическому давлению частиц плазмы (при высоких температурах вещества подчиняются уравнению состояния для идеальных газов).

**1.12.** Медный шарик радиусом  $r = 10,0$  мм с абсолютно черной поверхностью поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика  $T_0 = 300$  К. Через сколько времени его температура уменьшится в  $\eta = 1,50$  раза? Удельная теплоемкость меди  $c = 0,38$  Дж/(г·К).

**1.13.** Вин предложил следующую формулу для распределения энергии в спектре теплового излучения:

$$u_{\omega} = A\omega^3 e^{-a\omega/T},$$

где  $a = 7,64 \cdot 10^{-12}$  К·с. Найти с помощью этой формулы при  $T = 2000$  К:

- а) наиболее вероятную частоту излучения;
- б) среднюю частоту излучения.

**1.14.** Используя условия предыдущей задачи, найти:

- а) наиболее вероятную волну излучения;
- б) среднюю длину волны излучения.

**1.15.** Определить число собственных поперечных колебаний струны  $l$  в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , если скорость распространения колебаний равна  $v$ . Считать, что колебания происходят в одной плоскости.

**1.16.** Найти число собственных поперечных колебаний прямоугольной мембраны площадью  $S$  в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , если скорость распространения колебаний равна  $v$ .

**1.17.** Показать, что в полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда объемом  $V$  с абсолютно отражающими стенками, число собственных колебаний электромагнитного поля в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  равно  $dZ_{\omega} = (V/\pi^2 c^3) \omega^2 d\omega$ .

**1.18.** Тепловое излучение в полости можно представить как совокупность осцилляторов (собственных колебаний) с различными частотами. Полагая, что распределение осцилляторов по энергиям  $\varepsilon$  подчиняется закону Больцмана ( $\propto e^{-\varepsilon/kT}$ ), найти при температуре  $T$  среднюю энергию  $\langle \varepsilon \rangle$  осциллятора с частотой  $\omega$ , если энергия  $\varepsilon$  каждого осциллятора может иметь:

- а) любые значения (непрерывный спектр);
- б) только дискретные значения  $n\hbar\omega$ , где  $n$  — целые числа.

**1.19.** Показать, что при высокой температуре ( $kT \gg \hbar\omega$ ) выражение для средней энергии  $\langle \varepsilon \rangle$  осциллятора (см. пункт б ответа предыдущей задачи) переходит в классическое. Изобразить примерный график зависимости  $\langle \varepsilon \rangle$  от  $\omega$ .

**1.20.** Получить приближенные выражения формулы Планка при  $\hbar\omega \ll kT$  и  $\hbar\omega \gg kT$ .

**1.21.** Преобразовать формулу Планка к виду, соответствующему распределению:

- а) по линейным частотам;
- б) по длинам волн.

**1.22.** Определить с помощью формулы Планка, во сколько раз возрастет спектральная интенсивность излучения с длиной волны  $\lambda = 0,60$  мкм при увеличении температуры от  $T_1 = 2000$  К до  $T_2 = 2300$  К.

**1.23.** Вычислить с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела в интервале длин волн, отличающихся не более чем на  $\eta = 0,50\%$  от наиболее вероятной длины волны при  $T = 2000$  К.

**1.24.** Показать с помощью формулы Планка, что отношение  $\omega_m/T = \text{const}$ , где  $\omega_m$  — частота, соответствующая максимуму функции  $u_\omega$ . Найти числовое значение этой константы.

**1.25.** Вычислить с помощью формулы Планка числовое значение постоянной  $b$  в законе смещения Вина.

**1.26.** Определить с помощью формулы Планка числовое значение постоянной Стефана–Больцмана.

**1.27.** Найти с помощью формулы Планка среднее значение частоты  $\langle \omega \rangle$  в спектре теплового излучения при  $T = 2000$  К.

**1.28.** Определить с помощью формулы Планка температуру теплового излучения, средняя длина волны которого равна  $\langle \lambda \rangle = 2,67$  мкм.

**1.29.** Воспользовавшись формулой Планка, найти:

- а) число фотонов в единице объема в спектральных интервалах  $(\omega, \omega + d\omega)$  и  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ ;
- б) полное число фотонов в  $1 \text{ см}^3$  при  $T = 300$  К.

**1.30.** Вычислить с помощью формулы Планка при  $T = 1000 \text{ К}$ :

- а) наиболее вероятную энергию фотонов;
- б) среднюю энергию фотонов.

**1.31.** Показать, что число фотонов теплового излучения, падающих в единицу времени на единичную площадку стенки полости, равно  $nc/4$ ,  $c$  — скорость света,  $n$  — концентрация фотонов. Убедиться, что произведение этой величины на среднюю энергию фотона равно энергетической светимости  $M$ .

### **Корпускулярные свойства электромагнитного излучения**

**1.32.** Найти плотность потока фотонов на расстоянии  $r = 1,0 \text{ м}$  от точечного изотропного источника света мощностью  $P = 1,0 \text{ Вт}$ , если свет:

- а) моноэнергетический с длиной волны  $\lambda = 0,50 \text{ мкм}$ ;
- б) содержит две спектральные линии с длинами волн  $\lambda_1 = 0,70 \text{ мкм}$  и  $\lambda_2 = 0,40 \text{ мкм}$ , интенсивности которых относятся как  $1 : 2$  соответственно.

**1.33.** Длины волн фотонов равны  $0,50 \text{ мкм}$ ,  $0,25 \text{ нм}$  и  $2,0 \text{ пм}$ . Вычислить их импульсы в  $\text{эВ}/c$ , где  $c$  — скорость света.

**1.34.** При каком значении скорости электрона его импульс равен импульсу фотона с длиной волны  $\lambda = 1,00 \text{ пм}$ ?

**1.35.** Найти длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона с кинетической энергией  $K = 0,30 \text{ МэВ}$ .

**1.36.** Показать с помощью корпускулярных представлений, что импульс, переносимый в единицу времени плоским потоком электромагнитного излучения мощностью  $P$ , не зависит от спектрального состава этого излучения. Чему он равен?

**1.37.** Лазер излучает в импульсе длительностью  $\tau = 0,13 \text{ мс}$  узкий пучок света с энергией  $E = 10 \text{ Дж}$ . Найти среднее за время  $\tau$  давление такого пучка света, если его сфокусировать в пятнышко диаметром  $d = 10 \text{ мкм}$  на поверхности, перпендикулярной пучку, с коэффициентом отражения  $\rho = 0,50$ .

**1.38.** Короткий импульс света с энергией  $E = 7,5 \text{ Дж}$  падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения  $\rho = 0,60$ . Угол падения  $\vartheta = 30^\circ$ . Найти импульс, переданный пластинке.

**1.39.** Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, которое оказывает плоский световой поток с интенсивностью  $I = 1,0 \text{ Вт/см}^2$  на плоскую зеркальную поверхность, если угол падения  $\vartheta = 30^\circ$  и площадь освещаемой поверхности  $S = 10 \text{ см}^2$ .

**1.40.** Плоский световой поток с интенсивностью  $I \text{ (Вт/см}^2\text{)}$  освещает одну половину шара с зеркальной поверхностью. Радиус шара  $R$ . Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, испытываемую шаром.

**1.41.** Световой поток с интенсивностью  $I \text{ (Вт/см}^2\text{)}$  падает нормально на плоскую абсолютно матовую поверхность. Площадь освещаемой поверхности  $S$ , коэффициент отражения — единица. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления.

**1.42.** Над центром круглой абсолютно зеркальной пластинки радиусом  $R$  находится точечный изотропный источник света мощностью  $P$ . Расстояние между источником и пластинкой  $l$ . Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, которую испытывает пластинка.

**1.43.** Фотон испущен с поверхности звезды, масса которой  $M$  и радиус  $R$ . Считая, что фотон обладает массой с присущими ей гравитационными свойствами, найти относительное уменьшение его энергии на большом расстоянии от звезды. Вычислить гравитационное смещение длины волны  $\Delta\lambda/\lambda$  излучения, испускаемого с поверхности:

а) Солнца, у которого  $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг}$  и  $R = 7,0 \cdot 10^8 \text{ м}$ ;

б) нейтронной звезды, масса которой равна массе Солнца, а средняя плотность превышает солнечную в  $1,0 \cdot 10^{14}$  раз.

**1.44.** Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если известно, что после увеличения напряжения на рентгеновской трубке в  $\eta = 2,0$  раза эта длина волны изменилась на  $\Delta\lambda = 50 \text{ пм}$ .

**1.45.** Определить напряжение на рентгеновской трубке, если известно, что зеркальное отражение узкого пучка ее излучения от естественной грани монокристалла  $\text{NaCl}$  наблюдается при уменьшении угла скольжения вплоть до  $\alpha = 4,1^\circ$ . Соответствующее межплоскостное расстояние  $d = 281 \text{ пм}$ .

**1.46.** Вычислить скорость электронов, подлетающих к антикатоде рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра  $\lambda_{\text{мин}} = 15,7$  пм.

**1.47.** В сплошном рентгеновском спектре интенсивность  $I$  излучения с длиной волны  $\lambda = 50$  пм зависит следующим образом от напряжения  $U$  на рентгеновской трубке:

$U$ , кВ	29	28	27	26
$I$ , отн. ед	9,0	6,0	3,5	1,7

Вычислить с помощью соответствующего графика постоянную Планка  $\hbar$ .

**1.48.** Найти наиболее вероятную длину волны тормозного рентгеновского излучения со спектральным распределением  $I_{\omega} = A(\omega_{\text{макс}} - \omega)$ , где  $A$  — постоянная,  $\omega_{\text{макс}}$  — граничная частота спектра. Напряжение на трубке  $U = 31$  кВ.

**1.49.** Вычислить с помощью таблиц приложения:

а) длины волн красной границы фотоэффекта для цезия и платины;

б) максимальные скорости фотоэлектронов, освобождаемых с поверхности цинка, серебра и никеля электромагнитным излучением с длиной волны 270 нм.

**1.50.** Найти работу выхода с поверхности некоторого металла, если при поочередном освещении его электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda_1 = 0,35$  мкм и  $\lambda_2 = 0,54$  мкм максимальные скорости фотоэлектронов отличаются в  $\eta = 2,0$  раза.

**1.51.** Медный шарик, отдаленный от других тел, облучают электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda = 200$  нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик?

**1.52.** При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемой электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda_0$ , прекращается. Изменив длину волны излучения в  $n = 1,5$  раза, установили, что для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в  $\eta = 2,0$  раза. Вычислить  $\lambda_0$ .

**1.53.** Найти максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов, вырываемых с поверхности лития электромагнит-

ным излучением, напряженность электрической составляющей которого меняется по закону  $E = a(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t$ , где  $a$  — постоянная,  $\omega = 6,0 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3,60 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**1.54.** Электромагнитное излучение с длиной волны  $\lambda = 50 \text{ нм}$  вырывает с поверхности титана фотоэлектроны, которые попадают в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 15 \text{ Гс}$ , параллельное поверхности данного металла. Найти максимальный радиус кривизны  $\rho_{\text{макс}}$  фотоэлектронов, которые вылетают перпендикулярно магнитному полю.

**1.55.** Ток, возникающий в цепи вакуумного фотоэлемента при освещении цинкового электрода электромагнитным излучением с длиной волны  $262 \text{ нм}$ , прекращается, когда внешняя задерживающая разность потенциалов достигает значения  $U_0 = 1,5 \text{ В}$ . Определить значение и полярность внешней контактной разности потенциалов данного фотоэлемента.

**1.56.** Никелевый шарик, играющий роль внутреннего электрода сферического вакуумного фотоэлемента, освещают моноэнергетическим электромагнитным излучением различных длин волн. Полученные графики зависимости фототока от подаваемого напряжения  $U$  показаны на рис. 1.2. Найти с помощью этих графиков соответствующие длины волн.

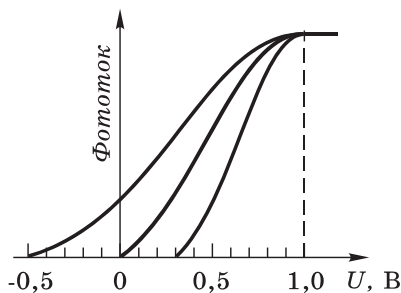


Рис. 1.2

**1.57.** Красная граница при двухфотонном фотоэффекте на некотором катоде равна  $\lambda_0 = 580 \text{ нм}$ . Найти максимальную кинетическую энергию электронов, вылетающих из этого катода при трехфотонном фотоэффекте на длине волны  $\lambda = 650 \text{ нм}$ .

**1.58.** Фотон с длиной волны  $\lambda = 17,0 \text{ пм}$  вырывает из покоящегося атома электрон, энергия связи которого  $E = 69,3 \text{ кэВ}$ . Найти импульс, переданный атому в результате этого процесса, если электрон вылетает под прямым углом к направлению налетающего фотона.



**1.59.** Воспользовавшись законами сохранения, показать, что свободный электрон не может поглотить фотон.

**1.60.** Объяснить следующие особенности эффекта Комптона:

а) необходимость использовать достаточно коротковолновое рентгеновское излучение для проверки формулы комптоновского смещения;

б) независимость величины смещения от рода вещества;

в) наличие несмещенной компоненты в рассеянном излучении;

г) увеличение интенсивности смещенной компоненты рассеянного излучения с уменьшением атомного номера вещества, а также с ростом угла рассеяния;

д) уширение обеих компонент рассеянного излучения.

**1.61.** Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda$  падает на рассеивающее вещество. Найти  $\lambda$ , если длины волн смещенных составляющих излучения, рассеянного под углами  $\vartheta_1 = 60^\circ$  и  $\vartheta_2 = 120^\circ$ , отличаются друг от друга в  $\eta = 2,0$  раза.

**1.62.** Фотон с длиной волны  $\lambda = 3,64$  пм рассеялся на покоившемся свободном электроне так, что кинетическая энергия электрона отдачи составила  $\eta = 25\%$  от энергии налетевшего фотона. Найти:

а) комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона;

б) угол  $\vartheta$ , под которым рассеялся фотон.

**1.63.** Фотон с энергией  $\hbar\omega$  рассеялся под углом  $\vartheta$  на покоившемся свободном электроне. Определить угол  $\varphi$ , под которым вылетел электрон отдачи (по отношению к направлению налетевшего фотона).

**1.64.** Найти, под какими углами  $\varphi$  к направлению падающих фотонов могут отлетать комптоновские электроны с импульсом  $p$ .

**1.65.** Фотон с энергией  $\hbar\omega = 0,46$  МэВ рассеялся под углом  $\vartheta = 120^\circ$  на покоившемся свободном электроне. Найти:

а) энергию рассеянного фотона;

б) энергию, переданную электрону.

**1.66.** Фотон с импульсом  $p = 60$  кэВ/с ( $c$  — скорость света), испытав комптоновское рассеяние под углом  $\vartheta = 120^\circ$  на покоившемся свободном электроне, вырвал затем из атома молибдена электрон, энергия связи которого  $E_{\text{св}} = 20,0$  кэВ. Найти кинетическую энергию фотоэлектрона.

**1.67.** При облучении вещества рентгеновским излучением с длиной волны  $\lambda$  обнаружено, что максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов  $K_{\text{макс}} = 0,44$  МэВ. Определить  $\lambda$ .

**1.68.** На рис. 1.3 показан идеализированный энергетический спектр электронов, вылетающих из образца одного из легких элементов при облучении его жестким моноэнергетическим рентгеновским излучением ( $K$  — кинетическая энергия электронов). Объяснить характер спектра. Найти длину волны рентгеновского излучения, а также значения  $K_1$  и  $K_2$ , если  $K_2 - K_1 = 180$  кэВ.

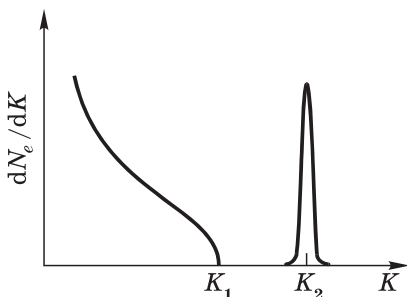


Рис. 1.3

**1.69.** Фотон испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне. Найти импульс налетавшего фотона, если энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии электрона отдачи при угле  $90^\circ$  между направлениями их разлета.

**1.70.** В результате столкновения фотона с покоившимся свободным электроном углы, под которыми рассеялся фотон и отлетел электрон отдачи, оказались одинаковыми и угол между направлениями их разлета  $\theta = 100^\circ$ . Найти длину волны налетавшего фотона.

**1.71.** Найти энергию налетающего фотона, если известно, что при рассеянии под углом  $\vartheta = 60^\circ$  на покоящемся свободном электроне последний приобрел кинетическую энергию  $K = 450$  кэВ.

**1.72.** Фотон с энергией  $\hbar\omega = 1,00$  МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на  $\eta = 25\%$ .

**1.73.** Фотон с энергией, превышающей энергию покоя электрона в  $\eta = 1,5$  раза, испытал лобовое столкновение с покоившимся свободным электроном, который находится в однородном магнитном поле. В результате электрон отдачи стал двигаться по окружности радиусом  $R = 2,9$  см. Найти индукцию  $B$  магнитного поля.

**1.74.** Фотон с энергией  $\hbar\omega$  испытал столкновение с электроном, который двигался ему навстречу. В результате столкновения направление движения фотона изменилось на противоположное, а его энергия оказалась прежней. Найти скорость электрона до и после столкновения.

**1.75.** Фотон с длиной волны  $\lambda = 4,2$  пм испытал лобовое столкновение с электроном, двигавшимся ему навстречу со скоростью  $v$ . Найти  $v$ , если после столкновения фотон движется в обратном направлении с той же длиной волны.

**1.76.** Фотон с энергией  $\varepsilon$  испытал лобовое столкновение с электроном, двигавшимся ему навстречу с кинетической энергией  $K$ . Найти энергию фотона после столкновения, если он движется в обратном направлении, при условии, что  $K \gg mc^2$ , где  $m$  — масса электрона.

**1.77.** При столкновении с релятивистским электроном фотон рассеялся на угол  $\vartheta = 60^\circ$ , а электрон остановился. Найти:

- а) комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона;
- б) кинетическую энергию электрона до столкновения, если энергия налетающего фотона составляет  $\eta = 1,0$  от энергии покоя электрона.

**1.78.** Возбужденный атом, двигавшийся с нерелятивистской скоростью  $v$ , испустил фотон под углом  $\vartheta$  к первоначальному направлению своего движения. Найти с помощью законов сохранения относительное смещение частоты фотона, обусловленное отдачей атома.

**1.79.** Заряженная частица, равномерно движущаяся в среде с показателем преломления  $n$ , излучает свет, если ее скорость  $v$  превышает фазовую скорость света  $c'$  в этой среде (эффект Вавилова–Черенкова). Показать с помощью законов сохранения, что угол, под которым происходит испускание света, определяется выражением  $\cos\vartheta = c'/v$ . Иметь в виду, что импульс фотона в среде равен  $\hbar\omega/c'$ .

**1.80.** Вычислить пороговую кинетическую энергию электрона и протона, при которой возникает излучение Вавилова–Черенкова в среде с показателем преломления  $n = 1,60$ .

**1.81.** Найти кинетическую энергию электронов, которые, проходя среду с показателем преломления  $n = 1,50$ , излучают свет под углом  $\vartheta = 30^\circ$  к направлению своего движения.

### Модель атома Резерфорда–Бора

**1.82.** На какое минимальное расстояние приблизится  $\alpha$ -частица с кинетической энергией  $K = 40$  кэВ (при лобовом соударении):

а) к покоящемуся ядру атома свинца;

б) к первоначально покоящемуся ядру  ${}^7\text{Li}$ ?

**1.83.** Вывести с помощью законов сохранения формулу (1.7).

**1.84.** Альфа-частица с импульсом  $53$  МэВ/с ( $c$  — скорость света) рассеялась под углом  $60^\circ$  в кулоновском поле неподвижного ядра атома урана. Найти прицельный параметр.

**1.85.** Альфа-частица с кинетической энергией  $K$  налетает с прицельным параметром  $90$  фм на покоящееся ядро атома свинца. Найти:

а) модуль приращения вектора импульса рассеянной  $\alpha$ -частицы, если  $K = 2,3$  МэВ;

б) при каком значении  $K$  модуль приращения вектора импульса рассеянной  $\alpha$ -частицы будет максимальным для данного прицельного параметра. Каков при этом угол рассеяния?

**1.86.** Найти минимальное расстояние, на которое протон с кинетической энергией  $K = 0,87$  МэВ приблизится к покоящемуся ядру атома ртути при рассеянии на угол  $\vartheta = 90^\circ$ . Сравнить это расстояние с соответствующим значением прицельного параметра.

**1.87.** Получить из формулы (1.7) выражение для относительного числа  $\alpha$ -частиц, рассеянных в интервале углов  $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ , и соответствующего дифференциального сечения ядра.

**1.88.** Узкий пучок протонов с кинетической энергией  $K = 100$  кэВ падает нормально на золотую фольгу толщиной  $\rho d = 1,0$  мг/см<sup>2</sup>. Протоны, рассеянные под углом  $\vartheta = 60^\circ$ , регистрирует счетчик, круглое входное отверстие которого имеет площадь  $S = 1,0$  см<sup>2</sup>, отстоит от рассеивающего участка фольги

на расстояние  $l = 10$  см и ориентировано перпендикулярно падающим на него протонам. Какая доля рассеянных протонов попадает в отверстие счетчика?

**1.89.** Вычислить сечение ядра атома золота, отвечающее рассеянию протонов с кинетической энергией  $K = 1,20$  МэВ в интервале углов от  $\vartheta = 60$  до  $180^\circ$ .

**1.90.** Альфа-частицы с кинетической энергией  $K = 1,70$  МэВ рассеиваются кулоновским полем ядер атомов свинца. Определить дифференциальные сечения этих ядер  $d\sigma/d\vartheta$  и  $d\sigma/d\Omega$ , отвечающие рассеянию на угол  $\vartheta = 90^\circ$ .

**1.91.** Дифференциальное сечение рассеяния  $\alpha$ -частиц кулоновским полем неподвижного ядра  $d\sigma/d\Omega = 7,0 \cdot 10^{-22}$  см<sup>2</sup>/ср для угла  $\vartheta_0 = 30^\circ$ . Вычислить сечение рассеяния  $\alpha$ -частиц в интервале углов  $\vartheta > \vartheta_0$ .

**1.92.** Найти вероятность того, что  $\alpha$ -частица с кинетической энергией  $K = 3,0$  МэВ при прохождении свинцовой фольги толщиной  $1,5$  мкм рассеется в интервале углов:

а)  $59-61^\circ$ ; б)  $60-90^\circ$ .

**1.93.** Узкий пучок  $\alpha$ -частиц с кинетической энергией  $K = 1,00$  МэВ падает нормально на золотую фольгу толщиной  $d = 1,0$  мкм. Поток частиц  $I = 3,6 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>. Найти число  $\alpha$ -частиц, рассеянных фольгой в течение  $\tau = 2,0$  мин под углами:

а) в интервале  $59-61^\circ$ ;

б) превышающими  $\vartheta_0 = 60^\circ$ .

**1.94.** Найти в условиях предыдущей задачи число  $\alpha$ -частиц, рассеиваемых фольгой ежесекундно под углами, меньшими  $\vartheta_0 = 10^\circ$ . Предполагается, что формула Резерфорда вблизи этого значения угла  $\vartheta_0$  еще справедлива.

**1.95.** Узкий пучок протонов с кинетической энергией  $K = 1,0$  МэВ падает нормально на латунную фольгу толщиной  $\rho d = 1,5$  мг/см<sup>2</sup>. Найти относительное число протонов, рассеивающихся на углы свыше  $\vartheta_0 = 30^\circ$ , если массовое отношение меди и цинка в фольге равно соответственно 7:3.

**1.96.** Узкий пучок моноэнергетических  $\alpha$ -частиц падает нормально на свинцовую фольгу толщиной  $2,2$  мг/см<sup>2</sup>. При этом  $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3}$  — часть первоначального потока, рассеивающегося под углами  $\vartheta > 20^\circ$ . Найти дифференциальное сечение  $d\sigma/d\Omega$  ядра свинца, отвечающее углу рассеяния  $\vartheta_0 = 60^\circ$ .

**1.97.** Оценить время, за которое электрон, движущийся вокруг ядра атома водорода по орбите радиусом  $0,5 \cdot 10^{-8}$  см, упал бы на ядро, если бы он терял энергию на излучение в соответствии с классической теорией:

$$-dE/dt = \delta_*(2e^2/3c^3)a^2,$$

где  $a$  — ускорение электрона,  $e$  — его заряд,  $c$  — скорость света,  $\delta_* = 1$  (СГС) или  $1/4\pi\epsilon_0$  (СИ). Для простоты считать, что в любой момент падения электрон движется равномерно по окружности соответствующего радиуса.

**1.98.** На рис. 1.4 показана вольт-амперная характеристика, полученная в опытах Франка и Герца по изучению неупругих столкновений электронов с атомами паров ртути. Найти с помощью этого графика первый потенциал возбуждения атома ртути и длину волны излучения, испускаемого парами ртути.

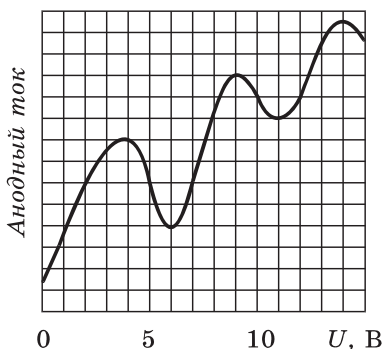


Рис. 1.4

**1.99.** Частица массы  $m$  движется по круговой орбите в центрально-симметричном потенциальном поле  $U = \kappa r^2/2$ . Найти с помощью боровского условия квантования разрешенные радиусы орбит и уровни энергии частицы.

**1.100.** Определить для водородоподобного иона радиус  $n$ -й боровской орбиты и скорость электрона на ней. Вычислить эти величины для первой боровской орбиты атома водорода и ионов  $\text{He}^+$  и  $\text{Li}^{++}$ .

**1.101.** Найти для водородоподобных ионов кинетическую энергию  $K$  электрона и его энергию связи  $E_{\text{св}}$  в основном состоянии, а также потенциал ионизации  $\phi_i$ . Вычислить эти величины для атома водорода и ионов  $\text{He}^+$  и  $\text{Li}^{++}$ .

**1.102.** Определить первый потенциал возбуждения  $\phi_1$  и длину волны резонансной линии (головной линии серии Лаймана) для атома водорода и ионов  $\text{He}^+$  и  $\text{Li}^{++}$ .

**1.103.** На сколько электронвольт надо увеличить внутреннюю энергию иона  $\text{He}^+$ , находящегося в основном состоянии, чтобы он смог испустить фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера?

**1.104.** Показать, что частота  $\omega$  фотона, соответствующая переходу электрона между соседними орбитами водородоподобных ионов, удовлетворяет неравенству  $\omega_n > \omega > \omega_{n+1}$ , где  $\omega_n$  и  $\omega_{n+1}$  — частоты обращения электрона на этих орбитах. Убедиться, что  $\omega \rightarrow \omega_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**1.105.** В спектре некоторых водородоподобных ионов известны длины волн трех линий, принадлежащих одной и той же серии: 99,2, 108,5 и 121,5 нм. Какие спектральные линии можно предсказать с помощью этих линий?

**1.106.** Вычислить длину волны  $\lambda$  спектральной линии атомарного водорода, частота которой равна разности частот следующих двух линий серии Лаймана:  $\lambda_1 = 102,60$  нм и  $\lambda_2 = 97,27$  нм. Какой серии принадлежит данная линия?

**1.107.** Вычислить для атомного водорода:

а) длины волн первых трех спектральных линий серии Бальмера;

б) минимальную разрешающую способность  $\lambda/\delta\lambda$  спектрального прибора, при которой можно разрешить первые  $N = 20$  линий серии Бальмера.

**1.108.** Атомарный водород возбуждают на  $n$ -й энергетический уровень. Определить:

а) длины волн испускаемых линий, если  $n = 4$ ; к каким сериям принадлежат эти линии?

б) сколько линий испускает водород, если  $n = 10$ ?

**1.109.** Какие линии содержит спектр поглощения атомарного водорода в диапазоне длин волн от 96,0 до 130,0 нм?

**1.110.** Определить квантовое число  $n$  возбужденного состояния атома водорода, если известно, что при переходе в основное состояние атом излучил:

а) фотон с длиной волны  $\lambda = 97,25$  нм;

б) два фотона, с  $\lambda_1 = 656,3$  нм и  $\lambda_2 = 121,6$  нм.

**1.111.** У какого водородоподобного иона разность длин волн головных линий серии Бальмера и Лаймана равна 59,3 нм?

**1.112.** В спектре некоторых водородоподобных ионов длина волны третьей линии серии Бальмера равна 108,5 нм. Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов.

**1.113.** Энергия связи электрона в атоме гелия равна  $E_0 = 24,6$  эВ. Найти энергию, необходимую для последовательного удаления обоих электронов из этого атома.

**1.114.** Вычислить скорость электронов, вырывааемых электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda = 18,0$  нм из ионов  $\text{He}^+$ , находящихся в основном состоянии.

**1.115.** С какой минимальной скоростью должен двигаться атом водорода, чтобы в результате неупругого лобового соударения с другим, покоящимся атомом водорода, один из них испустил фотон? До соударения оба атома находились в основном состоянии.

**1.116.** Атом водорода, двигавшийся со скоростью, равной  $v_0 = 3,26$  м/с, испустил фотон, соответствующий переходу из первого возбужденного состояния в основное. Найти угол между направлением вылета фотона и первоначальным направлением движения атома, если кинетическая энергия атома осталась прежней.

**1.117.** Определить скорость, которую приобрел покоившийся атом водорода в результате излучения фотона при переходе из первого возбужденного состояния в основное. На сколько процентов отличается энергия испущенного фотона от энергии данного перехода?

**1.118.** При наблюдении излучения пучка возбужденных атомов водорода под углом  $\vartheta = 45^\circ$  к направлению их движения длина волны резонансной линии оказалась смещенной на  $\Delta\lambda = 0,20$  нм. Найти скорость атомов водорода.

**1.119.** С какой минимальной скоростью должны сближаться ион  $\text{He}^+$  и атом водорода, чтобы испущенный ионом  $\text{He}^+$  фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера, смог возбудить атом водорода из основного состояния? Использовать точную формулу доплеровского эффекта.

**1.120.** Согласно постулату Бора–Зоммерфельда, при периодическом движении частицы в потенциальном поле должно выполняться следующее правило квантования:  $\oint p dq = 2\pi\hbar n$ , где  $q$  и  $p$  — обобщенные координата и импульс,  $n$  — целые числа.



Найти с помощью этого правила разрешенные значения энергии  $E$  частицы массы  $m$ , которая движется:

а) в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками;

б) по окружности радиуса  $r$ ;

в) в одномерном потенциальном поле  $U = \kappa x^2/2$ , где  $\kappa$  — положительная постоянная;

г) по круговой орбите в центральном поле, где потенциальная энергия частицы  $U = -\alpha/r$ ,  $\alpha$  — положительная постоянная.

**1.121.** Учитывая движение ядра атома водорода и боровское условие квантования, найти:

а) возможные расстояния между электроном и ядром;

б) энергию связи электрона;

в) на сколько процентов отличается энергия связи и постоянная Ридберга, полученные без учета движения ядра, от соответствующих уточненных значений этих величин.

**1.122.** Вычислить отношение массы протона к массе электрона, если известно, что отношение постоянных Ридберга для тяжелого и легкого водорода  $\eta = 1,000272$ , а отношение масс ядер  $n = 2,00$ .

**1.123.** Найти для атомов легкого и тяжелого водорода разность:

а) энергий связи электронов в основных состояниях;

б) первых потенциалов возбуждения;

в) длин волн резонансных линий.

**1.124.** Вычислить для мезоатома водорода (в нем вместо электрона движется мезон, имеющий тот же заряд, но массу в 207 раз большую):

а) расстояние между мезоном и ядром в основном состоянии;

б) длину волны резонансной линии;

в) энергии связи основных состояний мезоатомов водорода, ядра которых протон и дейтрон.

**1.125.** Найти для позитрония (система из электрона и позитрона, вращающаяся вокруг ее центра масс):

а) расстояние между частицами в основном состоянии;

б) потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения;

в) постоянную Ридберга и длину волны резонансной линии.

## 2. Волновые свойства частиц

- Соотношения де Бройля для энергии и импульса частицы:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \quad (2.1)$$

где  $\omega$  — частота дебройлевской волны,  $k = 2\pi/\lambda$ .

- Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar. \quad (2.2)$$

- Временное и стационарное уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U\Psi, \quad \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0, \quad (2.3)$$

где  $\Psi$  — полная волновая функция,  $\psi$  — ее координатная часть,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа,  $E$  и  $U$  — полная и потенциальная энергии.

• **Квантовый гармонический осциллятор.** Собственные значения энергии  $E_n$  и собственные функции  $\psi_n$  частицы массы  $m$  в одномерном потенциальном поле  $U(x) = \kappa x^2/2$ :

$$\begin{aligned} E_n &= \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega = \sqrt{\kappa/m}; \\ \psi_0 &= A_0 \exp(-\alpha^2 x^2/2), \quad \psi_1 = A_1 x \exp(-\alpha^2 x^2/2); \\ \psi_2 &= A_2(2\alpha^2 x^2 - 1) \exp(-\alpha^2 x^2/2), \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $A_0, A_1, A_2$  — нормировочные коэффициенты,  $\alpha^2 = \sqrt{\kappa m}/\hbar$ .

- Коэффициент прозрачности  $D$  потенциального барьера  $U(x)$ :

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx\right), \quad (2.5)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты точек, между которыми  $U > E$ .

## Волны де Бройля

**2.1.** Вычислить дебройлевскую длину волны электрона и протона, движущихся с кинетической энергией  $1,00$  кэВ. При каких значениях кинетической энергии их длина волны будет равна  $100$  пм?

**2.2.** При увеличении энергии электрона на  $\Delta E = 200$  эВ его дебройлевская длина волны изменилась в  $\eta = 2,0$  раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

**2.3.** Найти длину волны молекул водорода, движущихся с наиболее вероятной скоростью в газе при температуре  $0^\circ\text{C}$ .

**2.4.** Определить кинетическую энергию протона, длина волны которого такая же, как у  $\alpha$ -частицы с  $B\rho = 25$  кГс·см, где  $B$  — магнитная индукция,  $\rho$  — радиус кривизны траектории (окружности).

**2.5.** Какую дополнительную энергию необходимо сообщить электрону с импульсом  $15,0$  кэВ/с ( $c$  — скорость света), чтобы его длина волны стала равной  $50$  пм?

**2.6.** Протон с длиной волны  $\lambda = 1,7$  пм упруго рассеялся под углом  $90^\circ$  на первоначально покоившейся частице, масса которой в  $n = 4,0$  раза больше массы протона. Определить длину волны рассеянного протона.

**2.7.** Нейтрон с кинетической энергией  $K = 0,25$  эВ испытал упругое соударение с первоначально покоившимся ядром атома  ${}^4\text{He}$ . Найти длины волн обеих частиц в их Ц-системе до и после соударения.

**2.8.** Два атома,  ${}^1\text{H}$  и  ${}^4\text{He}$ , движутся в одном направлении, причем длина волны каждого атома  $\lambda = 60$  пм. Найти длины волн обоих атомов в их Ц-системе.

**2.9.** Две одинаковые частицы движутся с нерелятивистскими скоростями перпендикулярно друг другу. Длины волн частиц равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Найти длину волны каждой частицы в их Ц-системе.

**2.10.** Релятивистская частица массы  $m$  движется с кинетической энергией  $K$ . Найти:

а) дебройлевскую длину волны частицы;

б) значения  $K$ , при которых погрешность в длине волны, определяемой по нерелятивистской формуле, не превышает одного процента для электрона, для протона.

**2.11.** Найти кинетическую энергию, при которой дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны  $\lambda_c$ .

**2.12.** На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой  $m$ , чтобы можно было исследовать структуры с линейными размерами  $l$ ? Решить этот вопрос для электронов и протонов, если  $l \sim 1$  фм.

**2.13.** Вычислить длину волны релятивистских электронов, подлетающих к антикатоде рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна  $\lambda_k = 10,0$  пм.

**2.14.** Воспользовавшись формулой распределения Максвелла, найти функцию распределения молекул газа по дебройлевским длинам волн, а также их наиболее вероятную длину волны. Масса каждой молекулы  $m$ , температура газа  $T$ . Вычислить наиболее вероятную длину волны молекул водорода при  $T = 300$  К.

**2.15.** Функция распределения атомов по скоростям в пучке имеет вид:

$$f(u) \propto u^3 \exp(-u^2),$$

где  $u$  — отношение скорости атома в пучке к наиболее вероятной скорости  $v_{\text{вер}}$  в источнике ( $v_{\text{вер}} = \sqrt{2kT/m}$ ). Найти функцию распределения по дебройлевским длинам волн. Вычислить наиболее вероятную длину волны в пучке атомов гелия при температуре источника 300 К.

**2.16.** Поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной  $b = 2,0$  мкм. Найти скорость электронов, если на экране, отстоящем от щели на  $l = 50$  см, ширина центрального дифракционного максимума  $\Delta x = 0,36$  мм.

**2.17.** Найти кинетическую энергию электронов, падающих нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, если на экране, отстоящем от диафрагмы на  $l = 75$  см, расстояние между соседними максимумами  $\Delta x = 7,5$  мкм. Расстояние между щелями  $d = 25$  мкм.

**2.18.** Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения  $\vartheta = 30^\circ$  на естественную грань монокристалла алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани монокристалла,  $d = 0,20$  нм. При некотором ускоряющем напряжении  $U_0$  наблюдали максимум зеркального отражения. Найти  $U_0$ , если известно, что следующий максимум зеркального отражения возникал при увеличении ускоряющего напряжения  $U_0$  в  $\eta = 2,25$  раза.

**2.19.** Пучок электронов с кинетической энергией  $K = 180$  эВ падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол  $\alpha = 55^\circ$  с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения 4-го порядка. Найти межплоскостное расстояние, соответствующее этому отражению.

**2.20.** Пучок электронов с кинетической энергией  $K = 10$  кэВ проходит через тонкую поликристаллическую фольгу и образует систему дифракционных колец на экране, отстоящем от фольги на  $l = 10,0$  см. Найти межплоскостное расстояние, для которого максимум отражения третьего порядка соответствует кольцу с радиусом  $r = 1,6$  см.

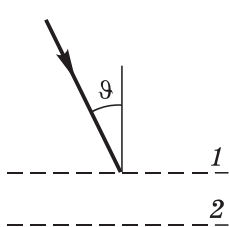


Рис. 2.1

**2.21.** Электроны с кинетической энергией  $K = 100$  эВ падают под углом  $\vartheta = 30^\circ$  к нормали (рис. 2.1) на систему из двух параллельных сеток, между которыми имеется задерживающая разность потенциалов  $U = 51$  В. Найти:

- показатель преломления области 2 относительно области 1;
- значение  $U_{кр}$ , при котором данные электроны не проникнут в область 2.

**2.22.** Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $U$ , падает на поверхность никеля, внутренний потенциал которого  $U_i = 15$  В. Вычислить:

- показатель преломления никеля при  $U = 150$  В;
- отношение  $U/U_i$ , при котором показатель преломления отличается от единицы не более чем на  $1,0\%$ .

**2.23.** Пучок электронов с кинетической энергией  $K = 60$  эВ падает на поверхность платины, внутренний потенциал которой  $U_i = 12$  В. Угол падения  $\vartheta = 60^\circ$ . Найти угол преломления.

**2.24.** Формула Брегга–Вульфа с учетом преломления электронных волн в кристалле имеет такой вид:  $2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \vartheta} = k\lambda$ , где  $d$  — межплоскостное расстояние,  $n$  — показатель преломления,  $\vartheta$  — угол скольжения,  $k$  — порядок отражения. Найти с помощью этой формулы внутренний потенциал  $U_i$  монокристалла серебра, если пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $U = 85$  В, образует максимум 2-го порядка при зеркальном отражении от кристаллических плоскостей с  $d = 204$  пм под углом  $\vartheta = 30^\circ$ .

**2.25.** Частица массы  $m$  движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы  $l$ . Найти значения энергии частицы, имея в виду, что возможны лишь такие состояния, для которых в яме укладывается целое число дебройлевских полуволн.

**2.26.** Интерпретировать квантовые условия Бора на основе волновых представлений: показать, что стационарным боровским орбитам соответствует целое число дебройлевских волн. Найти длину волны электрона на  $n$ -й орбите.

**2.27.** Полагая, что волновая функция  $\Psi(x, t)$ , описывающая движение частицы, представляет собой суперпозицию дебройлевских волн с одинаковыми амплитудами и мало отличающимися друг от друга волновыми числами в интервале  $(k_0 \pm \Delta k)$ :

а) преобразовать  $\Psi(x, t)$  к виду

$$\Psi(x, t) = A(x, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)];$$

б) получить выражение для скорости перемещения данной группы волн, т. е. максимума функции  $A(x, t)$ .

**2.28.** Показать, что групповая скорость волнового пакета, соответствующего свободно движущейся частице, равна скорости самой частицы. Рассмотреть нерелятивистский и релятивистский случаи.

**2.29.** Поток электронов падает на экран с двумя щелями 1 и 2 (рис. 2.2). В точке  $P$  расположено входное отверстие счетчика. Пусть  $\psi_1$  — амплитуда волны, достигшей точки  $P$ , если откры-

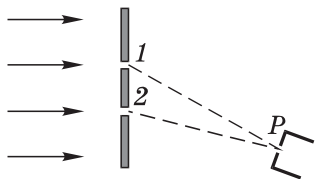


Рис. 2.2

та только щель 1, а  $\psi_2$  — то же, но если открыта только щель 2. Отношение  $\psi_2/\psi_1 = \eta = 3,0$ . Если открыта только щель 1, то счетчик регистрирует  $N_1 = 100$  электронов в секунду. Сколько электронов ежесекундно будет регистрировать счетчик, если:

- а) открыта только щель 2;
- б) открыты обе щели и в точке  $P$  наблюдается интерференционный максимум;
- в) то же, что в предыдущем пункте, но в точке  $P$  — минимум?

**2.30.** В некоторый момент координатная часть волновой функции имеет вид  $\psi(x) = A \exp(ikx - x^2/4\sigma^2)$ , где  $A$ ,  $k$ ,  $\sigma$  — постоянные. Изобразить примерный вид зависимости:

- а) действительной части  $\psi$  от  $x$ ;
- б)  $|\psi|^2$  от  $x$ .

**2.31.** Определить распределение плотности вероятности местонахождения частицы и эффективный размер области ее локализации, если состояние частицы в данный момент описывается волновой функцией  $\psi(x)$ , представляющей собой суперпозицию дебройлевских волн с одинаковыми амплитудами  $a$  и мало отличающимися друг от друга волновыми числами в интервале  $(k_0 \pm \Delta k)$ .

## Соотношение неопределенностей Гейзенберга

**2.32.** Показать, что измерение координаты  $x$  частиц с помощью узкой щели шириной  $b$  вносит неопределенность в их импульсы  $\Delta p_x$  такую, что  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ .

**2.33.** Поток электронов с дебройлевской длиной волны  $\lambda = 11$  мкм падает нормально на прямоугольную щель шириной  $b = 0,10$  мм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей угловую ширину пучка за щелью (в угловых градусах).

**2.34.** Убедиться, что измерение координаты  $x$  частицы с помощью микроскопа (рис. 2.3) вносит неопределенность в ее им-

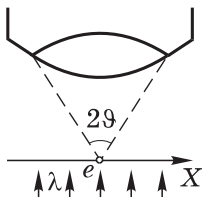


Рис. 2.3

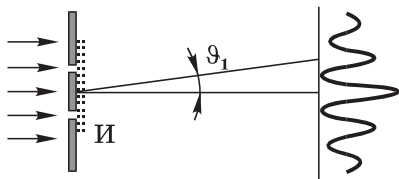


Рис. 2.4

пульс  $\Delta p_x$  такую, что  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ . Иметь в виду, что разрешение микроскопа  $d = \lambda / \sin \theta$ , где  $\lambda$  — длина волны используемого света.

**2.35.** Плоский поток частиц падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, образуя на экране дифракционную картину (рис. 2.4). Показать, что попытка определить, через какую щель прошла та или иная частица (например, с помощью введения индикатора И), приводит к разрушению дифракционной картины. Для простоты считать углы дифракции малыми.

**2.36.** Оценить наименьшие погрешности, с которыми можно определить скорость электрона и протона, локализованных в области размером 1 мкм.

**2.37.** Оценить неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома порядка 0,1 нм. Сравнить полученное значение со скоростью электрона на первой боровской орбите.

**2.38.** В некоторый момент область локализации свободного электрона  $\Delta x_0 = 0,10$  нм. Оценить ширину области локализации этого электрона спустя промежуток времени  $t = 1,0$  с.

**2.39.** Оценить минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером  $l = 0,10$  нм.

**2.40.** Электрон с кинетической энергией  $K = 10$  эВ локализован в области размером  $l = 1,0$  мкм. Оценить относительную неопределенность скорости электрона.

**2.41.** Частица массы  $m$  локализована в области размером  $l$ . Оценить кинетическую энергию  $K$  частицы, при которой ее относительная неопределенность будет порядка 0,01.

**2.42.** Прямолинейная траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку малых капелек тумана, размер



которых  $d \approx 1$  мкм. Можно ли, наблюдая след электрона с кинетической энергией  $K = 1$  кэВ, обнаружить отклонение в его движении от классических законов?

**2.43.** Ускоряющее напряжение на электронно-лучевой трубке  $U \approx 10$  кВ. Расстояние от электронной пушки до экрана  $l \approx 20$  см. Оценить неопределенность координаты электрона на экране, если след электронного пучка на экране имеет диаметр  $d \approx 0,5$  мм.

**2.44.** Атом испустил фотон с длиной волны  $\lambda = 0,58$  мкм за время  $\tau \approx 10^{-8}$  с. Оценить неопределенность  $\Delta x$ , с которой можно установить координату фотона в направлении его движения, а также относительную неопределенность его длины волны.

**2.45.** Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Оценить силу давления частицы на стенки при минимально возможном значении ее энергии, которая равна  $E_{\min}$ .

**2.46.** Оценить минимально возможную энергию  $E$  частицы массы  $m$ , движущейся в одномерном потенциальном поле  $U(x) = \kappa x^2/2$  (гармонический осциллятор с частотой  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ ).

**2.47.** Оценить с помощью соотношения неопределенностей энергию связи электрона в основном состоянии атома водорода и соответствующее расстояние электрона от ядра.

**2.48.** Оценить минимально возможную энергию электронов в атоме гелия и соответствующее расстояние электронов от ядра.

**2.49.** Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии порядка  $1,6 \cdot 10^{-4}$ . Оценить, во сколько раз неопределенность координаты такой частицы больше ее дебройлевской длины волны.

**2.50.** Параллельный пучок атомов водорода со скоростью  $v = 1,2$  км/с падает нормально на диафрагму с узкой щелью, за которой на расстоянии  $l = 100$  см расположен экран. Оценить ширину щели, при которой эффективная ширина изображения на экране будет минимальной.

## Уравнение Шредингера

**2.51.** Какие решения временного уравнения Шредингера называют стационарными? Показать, что такие решения получаются в том случае, когда  $U$  не зависит от времени явно.

**2.52.** Как изменится полная волновая функция  $\Psi(x, t)$ , описывающая стационарные состояния, если изменить начало отсчета потенциальной энергии на некоторую величину  $\Delta U$ ?

**2.53.** Найти решение временного уравнения Шредингера для свободной частицы, движущейся с импульсом  $p$  в положительном направлении оси  $X$ .

**2.54.** То же, что в предыдущей задаче, но частица движется с импульсом  $p$  в произвольном направлении.

**2.55.** Показать, что энергия свободно движущейся частицы может иметь любые значения (непрерывный спектр).

**2.56.** Установить связь между волновыми функциями  $\Psi(x, t)$  и  $\Psi'(x', t)$ , характеризующими свободное движение нерелятивистской частицы массы  $m$  в инерциальных  $K$ - и  $K'$ -системах отсчета, если  $K'$ -система движется со скоростью  $v_0$  в положительном направлении оси  $X$   $K$ -системы. Можно считать для простоты, что скорость частицы в  $K$ -системе совпадает по направлению с  $v_0$ .

**2.57.** Частица массы  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Показать, что собственные значения энергии частицы и ее нормированные собственные функции ( $0 < x < l$ ) имеют вид

$$E_n = (\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2) n^2, \quad \psi_n(x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi n x / l), \quad n = 1, 2, \dots$$

**2.58.** Частица массы  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти энергию  $E$  частицы в стационарном состоянии:

а) описываемом волновой функцией  $\psi \propto \sin kx$ , где  $k$  — заданная постоянная,  $x$  — расстояние от одного края ямы;

б) если ширина ямы  $l$  и число узлов волновой функции  $\psi(x)$  равно  $N$ .

**2.59.** Частица находится в одномерной потенциальной прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы  $l$ . Найти нормированные  $\psi$ -функции стационарных состояний частицы, взяв начало отсчета координаты  $x$  в середине ямы.

**2.60.** Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти:

а) массу частицы, если ширина ямы  $l$  и разность энергий 3-го и 2-го энергетических уровней равна  $\Delta E$ ;

б) квантовое число  $n$  энергетического уровня частицы, если интервалы энергии до соседних с ним уровней (верхнего и нижнего) относятся как  $\eta : 1$ , где  $\eta = 1, 4$ .

**2.61.** Частица массы  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти число  $dN$  энергетических уровней в интервале энергий  $(E, E + dE)$ , если уровни расположены весьма густо.

**2.62.** Частица массы  $m$  находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Найти:

а) силу давления, которую оказывает частица на стенку;

б) работу, которую необходимо совершить, чтобы медленно сжать яму в  $\eta$  раз.

**2.63.** Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Найти вероятность пребывания частицы в области  $l/3 < x < 2l/3$ .

**2.64.** Частица массы  $m$  находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно  $P_m$ . Найти ширину  $l$  ямы и энергию  $E$  частицы в данном состоянии.

**2.65.** Частица массы  $m$  находится в основном состоянии в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты  $x, y$  частицы лежат в пределах  $0 < x < a, 0 < y < b$ , где  $a$  и  $b$  — стороны ямы. Найти собственные значения энергии и нормированные собственные функции частицы.

**2.66.** Определить в условиях предыдущей задачи вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области  $0 < x < a/3, 0 < y < b/3$ .

**2.67.** Частица массы  $m$  находится в двумерной квадратной яме с бесконечно высокими стенками. Сторона ямы равна  $l$ . Найти значения энергии  $E$  частицы для первых четырех уровней.

**2.68.** Частица массы  $m$  находится в основном состоянии в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти энергию  $E$  частицы, если максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно  $P_m$ .

**2.69.** Воспользовавшись условием и решением задачи 2.65, найти число состояний частицы в интервале энергий  $(E, E + dE)$ , если энергетические уровни расположены весьма густо.

**2.70.** Частица массы  $m$  находится в трехмерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Длина ребер ямы равна  $a, b, c$ . Найти собственные значения энергии частицы.

**2.71.** Частица массы  $m$  находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найти:

а) разность энергий 3-го и 4-го уровней, если длина ребра ямы равна  $l$ ;

б) число состояний, соответствующих 6-му уровню.

**2.72.** Воспользовавшись условием и решением задачи 2.70, найти число состояний частицы в интервале энергий  $(E, E + dE)$ , если уровни расположены весьма густо.

**2.73.** Показать, что в точке, где потенциальная энергия частицы  $U(x)$  имеет конечный разрыв,  $\psi$ -функция остается гладкой, т. е. ее первая производная по координате непрерывна.

**2.74.** Частица массы  $m$  находится в одномерном потенциальном поле  $U(x)$ , показанном на рис. 2.5, где  $U(0) = \infty$ . Найти:

а) уравнение, определяющее возможные значения энергии частицы в области  $E < U_0$ ; привести его к виду

$$\sin kl = \pm kl \sqrt{\hbar^2 / 2ml^2 U_0}, \quad k = \sqrt{2mE} / \hbar.$$

Показать с помощью графического решения этого уравнения, что возможные значения энергии частицы образуют дискретный спектр;

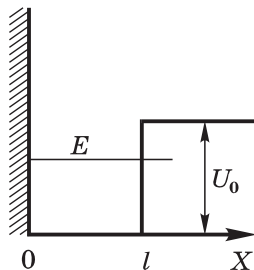


Рис. 2.5

б) минимальные значения величины  $l^2 U_0$ , при которых появляются первый и  $n$ -й дискретные уровни. Сколько уровней содержит яма, у которой  $l^2 U_0 = 75 \hbar^2 / m$ ?

**2.75.** В предыдущей задаче энергия единственного уровня  $E = U_0/2$ . Воспользовавшись решением этой задачи, определить:

а) значение величины  $l^2 U_0$  у такой ямы;

б) наиболее вероятное значение координаты частицы; изобразить примерный график функции  $\psi^2(x)$ ;

в) вероятность нахождения частицы в области  $x > l$ .

**2.76.** Частица массы  $m$  находится в одномерной потенциальной яме, конфигурация которой показана на рис. 2.6, где

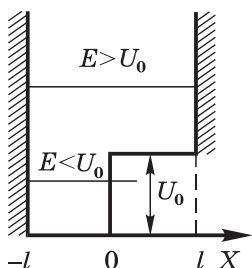


Рис. 2.6

$U(\pm l) = \infty$ . Показать, что при  $E > U_0$  уравнение, определяющее возможные значения энергии  $E$ , имеет вид

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 l = -k_1 \operatorname{tg} k_2 l,$$

где  $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ ,  $k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$ .

**2.77.** Частица массы  $m$  находится в одномерной потенциальной яме, описанной в предыдущей задаче (см. рис. 2.6). Если энергия частицы  $E < U_0$ , то уравнение, определяющее возможные значения  $E$ , имеет вид

$$x \operatorname{tg} kl = -k \operatorname{th} xl,$$

где  $\operatorname{th}$  — гиперболический тангенс.

а) Получить это уравнение.

б) Найти интервал значений величины  $l^2 U_0$ , при которых в области  $E < U_0$  не будет ни одного уровня; будет только один уровень.

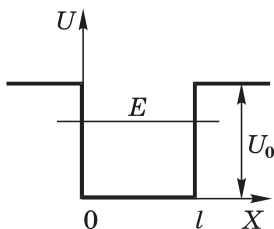


Рис. 2.7

**2.78.** Частица массы  $m$  находится в одномерном симметричном потенциальном поле (рис. 2.7). Найти уравнение, определяющее возможные значения энергии  $E$  частицы в области  $E < U_0$ . Привести его к виду

$$kl = n\pi - 2 \arcsin(\hbar k / \sqrt{2mU_0}),$$

где  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ,  $n$  — целое число. Показать с помощью графического решения

этого уравнения, что возможные значения энергии  $E$  частицы дискретны.

**2.79.** Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найти значение величины  $l^2 U_0$ , при котором:

а) энергия основного состояния частицы  $E = U_0/2$ ;

б) появляется второй уровень,  $n$ -й уровень. Сколько дискретных уровней содержит данная яма, если  $l^2 U_0 = 75\hbar^2/m$ ?

**2.80.** Частица массы  $m$  находится в одномерной потенциальной яме (рис. 2.8). Найти энергию  $E_1$  основного состояния, если на краях ямы  $\psi$ -функция вдвое меньше, чем в середине ямы.

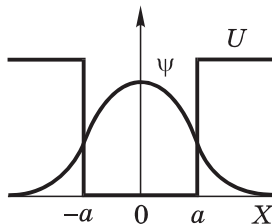


Рис. 2.8

**2.81.** Частица массы  $m$  находится в некотором одномерном потенциальном поле  $U(x)$  в стационарном состоянии, для которого волновая функция имеет вид

$\psi(x) = A \exp(-\alpha x^2)$ , где  $A$  и  $\alpha$  — заданные постоянные ( $\alpha > 0$ ).

Имея в виду, что  $U(0) = 0$ , найти  $U(x)$  и энергию  $E$  частицы.

**2.82.** То же, что в предыдущей задаче, но  $\psi(x) = A x e^{-\alpha x}$  при  $x > 0$ ,  $\psi = 0$  при  $x < 0$  и  $U(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**2.83.** Найти с помощью уравнения Шредингера энергию гармонического осциллятора с частотой  $\omega$  в стационарном состоянии:

а)  $\psi(x) = A \exp(-a^2 x^2)$ ;    б)  $\psi(x) = B x \exp(-a^2 x^2)$ ,

где  $A$ ,  $B$ ,  $a$  — постоянные.

**2.84.** Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора с частотой  $\omega$  можно представить в виде  $\psi''_{\xi} + (\lambda - \xi^2) \psi = 0$ , где  $\xi = \alpha x$ ,  $\alpha$  — постоянная,  $\lambda$  — параметр. Имея в виду, что собственные значения параметра  $\lambda$  равны  $2n + 1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , найти собственные значения энергии осциллятора.

**2.85.** Вычислить нормировочные коэффициенты собственных функций (2.4) квантового гармонического осциллятора:

а)  $A_0$ ;    б)  $A_1$ ;    в)  $A_2$ .

**2.86.** Найти наиболее вероятное значение координаты  $x$  квантового гармонического осциллятора в состоянии  $\psi_1(x)$ .

Изобразить примерный график распределения плотности вероятности  $w(x)$  различных значений  $x$  в этом состоянии.

**2.87.** То же, что в предыдущей задаче, но для состояния  $\psi_2(x)$ .

**2.88.** Найти с помощью формул (2.4):

а) среднеквадратичное значение координаты  $x$  в состоянии с волновой функцией  $\psi_0$ ;

б) среднее значение модуля  $x$  в состоянии  $\psi_1$ .

**2.89.** Частица находится в основном состоянии  $\psi_0(x) = A \exp(-\alpha^2 x^2/2)$  в одномерном потенциальном поле  $U(x) = \kappa x^2/2$ . Найти:

а) координату  $x_0$ , соответствующую классической границе поля в этом состоянии;

б) вероятность пребывания частицы вне классических границ поля (воспользоваться значениями интегралов в Приложении).

**2.90.** Зная собственные функции и собственные значения энергии квантового гармонического осциллятора, найти собственные значения энергии частицы массы  $m$ , движущейся в одномерном потенциальном поле  $U(x) = \kappa x^2/2$  при  $x > 0$  и  $U = \infty$  при  $x \leq 0$ .

**2.91.** Частица массы  $m$  движется в трехмерном потенциальном поле  $U(x, y, z) = (\kappa/2)(x^2 + y^2 + z^2)$ , где  $\kappa$  — постоянная. Найти:

а) собственные значения энергии частицы;

б) кратность вырождения  $n$ -го энергетического уровня.

Указание. Воспользоваться формулами для одномерного квантового осциллятора.

### Прохождение частицы через барьер

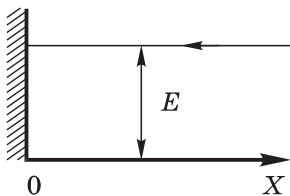


Рис. 2.9

**2.92.** Стационарный поток частиц, имеющих массу  $m$  и энергию  $E$ , падает на абсолютно непроницаемую стенку (рис. 2.9):  $U(x) = 0$  при  $x > 0$  и  $U(x) \rightarrow \infty$  при  $x \leq 0$ . Определить распределение плотности вероятности местонахождения частиц  $w(x)$ . Найти координаты то-

чек, в которых  $w(x) = \text{макс}$ . Изобразить примерный график зависимости  $w(x)$ .

**2.93.** Частица массы  $m$  падает слева на прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0$  (рис. 2.10). Энергия частиц равна  $E$ , причем  $E < U_0$ . Найти эффективную глубину  $x_{\text{эф}}$  проникновения частицы под барьер, т. е. расстояние от границы барьера до точки, в которой плотность вероятности  $w$  нахождения частицы уменьшается в  $e$  раз. Вычислить  $x_{\text{эф}}$  для электрона, если  $U_0 - E = 1,0$  эВ.

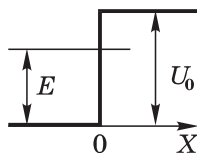


Рис. 2.10

**2.94.** Воспользовавшись условием предыдущей задачи:

а) показать, что при  $E < U_0$  коэффициент отражения  $R$  барьера равен единице;

б) найти распределение плотности вероятности  $w(x)$  местонахождения частицы для случая  $E = U_0/2$ . Изобразить примерный график функции  $w(x)$ .

**2.95.** Частица массы  $m$  падает на прямоугольный барьер высотой  $U_0$  (рис. 2.11). Энергия частицы равна  $E$ , причем  $E > U_0$ . Найти коэффициент отражения  $R$  и коэффициент прозрачности  $D$  этого барьера. Убедиться, что значения этих коэффициентов не зависят от направления падающей частицы (слева направо или справа налево).

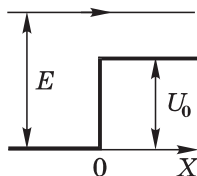


Рис. 2.11

**2.96.** Исходя из условия предыдущей задачи, найти распределение плотности вероятности  $w(x)$  местоположения частицы для случая  $E = 4U_0/3$ . Изобразить примерный график зависимости  $w(x)$ .

**2.97.** Частица массы  $m$  движется слева направо в потенциальном поле (рис. 2.12), которое в точке  $x = 0$  испытывает скачок  $U_0$ . Слева от точки  $x = 0$  энергия частицы равна  $E$ . Найти коэффициент отражения  $R$  для случаев:

а)  $E \ll U_0$ ;    б)  $E \gg U_0$ .

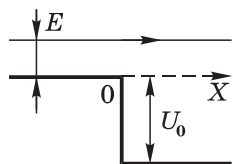


Рис. 2.12

**2.98.** Частица массы  $m$  падает на прямоугольную потенциальную яму шириной  $l$  и глубиной  $U_0$  (рис. 2.13). Энергия частицы вне ямы равна  $E$ . Найти:



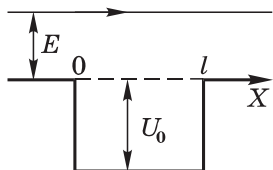


Рис. 2.13

а) коэффициент прозрачности  $D$  ямы для данной частицы;

б) значение  $D$  для электрона при  $E = U_0 = 1,0$  эВ, если  $l = 0,10$  нм.

**2.99.** Воспользовавшись условием и решением предыдущей задачи, найти значения  $E$ , при которых частица будет

беспрепятственно проходить через яму (см. рис. 2.13). Убедиться, что это будет происходить при условии, что ширина ямы  $l$  равна целому числу дебройлевских полуволен частицы внутри ямы. Вычислить  $E_{\min}$  для электрона в случае  $U_0 = 10$  эВ и  $l = 0,25$  нм.

**2.100.** Исходя из условия задачи 2.98 (см. рис. 2.13) и зная выражение для коэффициента прозрачности  $D$  в данном случае, найти длину  $l$  ямы, при которой коэффициент отражения  $R$  максимален. Величины  $E$  и  $U_0$  предполагаются заданными.

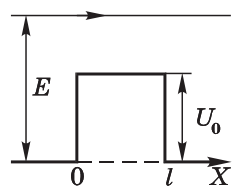


Рис. 2.14

**2.101.** Частица массы  $m$  падает на прямоугольный потенциальный барьер (рис. 2.14), причем ее энергия  $E > U_0$ . Найти:

а) коэффициент прозрачности  $D$  барьера в данном случае и выражение для  $D$  при  $E \rightarrow U_0$ ;

б) первые два значения  $E$ , при которых электрон будет беспрепятственно проходить через такой барьер, если  $U_0 = 10,0$  эВ и  $l = 0,50$  нм.

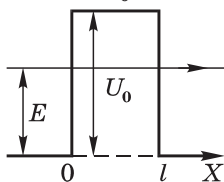


Рис. 2.15

**2.102.** Частица массы  $m$  падает на прямоугольный потенциальный барьер (рис. 2.15), причем ее энергия  $E < U_0$ . Найти:

а) коэффициент прозрачности  $D$  барьера; упростить полученное выражение для  $D$  в случае  $D \ll 1$ ;

б) вероятность прохождения электрона и протона с  $E = 5,0$  эВ сквозь этот барьер, если  $U_0 = 10,0$  эВ и  $l = 0,10$  нм.

**2.103.** Исходя из условия предыдущей задачи и считая, что частицы падают на барьер слева (см. рис. 2.15):

а) изобразить примерный график распределения плотности вероятности  $w(x)$  местонахождения частиц;

б) найти отношение плотностей вероятности  $w(0)/w(l)$  местонахождения частиц в точках  $x = 0$  и  $l$  для случая  $E = U_0/2$ . Вычислить это отношение для электрона, если  $l = 0,10$  нм и  $U_0 = 10$  эВ.

**2.104.** Найти с помощью формулы (2.5) вероятность прохождения частицы массы  $m$  с энергией  $E$  сквозь потенциальный барьер, показанный на рис. 2.16.

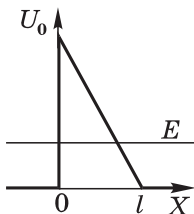


Рис. 2.16

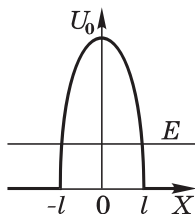


Рис. 2.17

**2.105.** То же, что в предыдущей задаче, но потенциальный барьер имеет вид, как на рис. 2.17, где  $U(x) = U_0(1 - x^2/l^2)$ .

### 3. Основы квантовой механики

- Оператор  $\hat{A}$  линейный, если

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2, \quad (3.1)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — произвольные функции.

- Операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутативны, если их коммутатор

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0. \quad (3.2)$$

- Оператор  $\hat{A}$  эрмитов (самосопряженный), если

$$\int \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int \psi_2 \hat{A}^* \psi_1^* dx, \quad (3.3)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — произвольные функции.

- Разложение функции  $\psi$  по собственным функциям  $\psi_n$  дискретного спектра некоторого оператора:

$$\psi(x) = \sum c_n \psi_n(x), \quad c_n = \int \psi \psi_n^* dx. \quad (3.4)$$

- Среднее значение физической величины  $A$  в состоянии  $\psi$ :

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dV, \quad (3.5)$$

где  $\hat{A}$  — соответствующий оператор,  $\psi$  — нормированная волновая функция,  $dV$  — элемент объема.

- Уравнение Шредингера в операторной форме:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (3.6)$$

где  $\hat{H}$  — оператор полной энергии (гамильтониан).

- Производная по времени от оператора  $\hat{A}$ :

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}], \quad (3.7)$$

где  $[\hat{H}, \hat{A}]$  — коммутатор операторов,  $\hat{H}$  — гамильтониан.

- Операторы проекции и квадрата импульса:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2 \nabla^2, \quad (3.8)$$

где  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

- Оператор полной энергии (гамильтониан):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U. \quad (3.9)$$

- Операторы проекций и квадрата момента импульса:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \nabla_{\vartheta, \varphi}^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\nabla_{\vartheta, \varphi}^2$  — угловая часть оператора Лапласа (см. ниже).

- Оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_{\vartheta, \varphi}^2, \\ \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

- Собственные значения и собственные функции оператора  $\hat{L}^2$ :

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Theta_{l|m|}(\vartheta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (3.13)$$

Функции  $\Theta(\vartheta)$  для  $s$ -,  $p$ - и  $d$ -состояний приведены в таблице 3.1 (с точностью до нормировочного множителя).

• Уравнение Шредингера для радиальной части волновой функции  $R(r)$  в центрально-симметричном поле  $U(r)$ :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - U - \frac{L^2}{2mr^2} \right) R = 0. \quad (3.14)$$

Функции  $R(r)$  для водородоподобных систем приведены в табл. 3.2 (с точностью до нормировочного множителя).

**Таблица 3.1**

Состояние	$l, m$	$\Theta_{l m }(\vartheta)$
$s$	$0, 0$	$1$
$p$	$\begin{cases} 1, 0 \\ 1, 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{cases}$
	$\begin{cases} 2, 0 \\ 2, 1 \\ 2, 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3 \cos^2 \vartheta - 1 \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin^2 \vartheta \end{cases}$

**Таблица 3.2**

Состояние	$n, l$	$R(\rho), \rho = \frac{r}{r_1}$
$1s$	$1, 0$	$e^{-\rho}$
$2s$	$2, 0$	$(2 - \rho) e^{-\rho/2}$
$2p$	$2, 1$	$\rho e^{-\rho/2}$
$3s$	$3, 0$	$(21 - 81\rho + 2\rho^2) e^{-\rho/3}$
$3p$	$3, 1$	$\rho(6 - \rho) e^{-\rho/3}$
$3d$	$3, 2$	$\rho^2 e^{-\rho/3}$

## Квантово-механические операторы

**3.1.** Проверить следующие операторные равенства:

а)  $\frac{d}{dx} x = 1 + x \frac{d}{dx}$ ; б)  $x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = x \frac{d}{dx} - 1$ ;

в)  $\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + 2 \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$ ;

г)  $\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + x^2 + 2x \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$ ;

д)  $\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}$ ;

е)  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

**3.2.** Найти результат действия операторов  $\frac{d^2}{dx^2} x^2$  и  $\left(\frac{d}{dx} x\right)^2$  на функции: а)  $\cos x$ ; б)  $e^x$ .

**3.3.** Найти собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если:

а)  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\psi_A = \sin 2x$ ;

б)  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ ,  $\psi_A = \exp(-x^2/2)$ ;

$$\text{в)} \hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}, \quad \psi_A = \frac{\sin \alpha x}{x}.$$

**3.4.** Найти собственные функции  $\psi$  и собственные значения следующих операторов:

а)  $-i \frac{d}{dx}$ , если  $\psi(x) = \psi(x+a)$ ,  $a$  — постоянная;

б)  $-\frac{d^2}{dx^2}$ , если  $\psi = 0$  при  $x = 0$  и  $l$ .

**3.5.** Показать, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  линейные, то операторы  $\hat{A} + \hat{B}$  и  $\hat{A}\hat{B}$  также линейные.

**3.6.** Доказать следующие коммутационные соотношения:

а)  $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$ ;

б)  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ .

**3.7.** Доказать, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют, то:

а)  $(\hat{A} + \hat{B})^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$ ;  $(\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} - \hat{B}) = \hat{A}^2 - \hat{B}^2$ ;

б)  $[(\hat{A} + \hat{B}), (\hat{A} - \hat{B})] = 0$ .

**3.8.** Оператор  $\hat{A}^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2$ . Доказать, что если операторы  $\hat{A}_1$  и  $\hat{A}_2$  коммутируют с оператором  $\hat{B}$ , то с ним коммутирует и оператор  $\hat{A}^2$ .

**3.9.** Доказать, что если коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ , то:

а)  $[\hat{A}, \hat{B}^2] = 2\hat{B}$ ; б)  $[\hat{A}, \hat{B}^3] = 3\hat{B}^2$ ; в)  $[\hat{A}^2, \hat{B}^2] = 2(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$ .

**3.10.** Проверить следующие равенства для коммутаторов:

а)  $[x, \hat{p}_x] = i\hbar$ ,  $[x, \hat{p}_y] = 0$ ,  $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$ ;

б)  $[f(x), \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $[f(x), \hat{p}_x^2] = 2i\hbar \frac{\partial f}{\partial x} \hat{p}_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ;

в)  $[x^2, [x, \hat{p}_x^2]] = -4\hbar^2 x$ .

Здесь  $f(x)$  — произвольная функция координаты.

**3.11.** Проверить следующие правила коммутации для гамильтониана  $\hat{H}$  в потенциальном поле  $U(x)$ :

а)  $[\hat{H}, x] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$ ; б)  $[\hat{H}, \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial U}{\partial x}$ ;

в)  $[\hat{H}, \hat{p}_x^2] = 2i\hbar \frac{\partial U}{\partial x} \hat{p}_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ .

**3.12.** Оператор  $\hat{A}$  коммутирует с операторами  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$ . Можно ли отсюда заключить, что операторы  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  коммутативны?

**3.13.** Доказать следующие теоремы:

а) если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  имеют общие собственные функции, то такие операторы коммутируют;

б) если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют, то они имеют общие собственные функции (доказательство провести для случая, когда вырождение отсутствует).

**3.14.** Найти общую собственную функцию следующих операторов:

а)  $x$  и  $\hat{p}_y$ ;    б)  $\hat{p}_x$ ,  $\hat{p}_y$  и  $\hat{p}_z$ ;    в)  $\hat{p}_x$  и  $\hat{p}_x^2$ .

**3.15.** В некотором состоянии  $\psi_A$  система имеет определенное значение физической величины  $A$ . Имеет ли в этом состоянии определенное значение также и величина  $B$ , если соответствующие им операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутативны?

**3.16.** Доказать, что если оператор  $\hat{A}$  эрмитов, то его собственные значения вещественны.

**3.17.** Доказать эрмитовость следующих операторов:

а)  $\hat{p}_x$ ;    б)  $x\hat{p}_x$ .

Указание: иметь в виду, что на бесконечности волновые функции и их производные обращаются в нуль.

**3.18.** Воспользовавшись эрмитовостью оператора  $\hat{p}_x$  и указанием к предыдущей задаче, доказать эрмитовость операторов:

а)  $\hat{p}_x^2$ ;    б)  $\hat{H}$ .

**3.19.** Доказать, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  эрмитовы и коммутирующие, то оператор  $\hat{A}\hat{B}$  эрмитов.

**3.20.** Доказать, что если оператор  $\hat{A}$  эрмитов, то и оператор  $\hat{A}^n$  также эрмитов, где  $n$  — целое положительное.

**3.21.** Доказать, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  эрмитовы, то операторы  $\hat{A} + \hat{B}$  и  $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  также эрмитовы.

**3.22.** Доказать, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  эрмитовы и некоммутирующие, то оператор:

а)  $[\hat{A}, \hat{B}]$  не эрмитов;    б)  $i[\hat{A}, \hat{B}]$  эрмитов.

**3.23.** Найти собственные значения и нормированные собственные функции операторов:

а)  $\hat{L}_z$ ;    б)  $\hat{L}_z^2$ .

**3.24.** Найти собственные значения оператора  $\hat{L}^2$ , соответствующие его собственной функции  $Y(\vartheta, \varphi) = A(\cos \vartheta + 2 \sin \vartheta \cos \varphi)$ .

**3.25.** Доказать что оператор  $\hat{L}_z$  эрмитов. Доказательство провести:

а) в полярных координатах; б) в декартовых координатах.

**3.26.** Доказать эрмитовость оператора  $\hat{L}^2$ , имея в виду, что операторы  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  и  $\hat{L}_z$  эрмитовы.

**3.27.** Проверить следующие правила коммутации:

а)  $[x, \hat{L}_x] = 0$ ; б)  $[y, \hat{L}_x] = -i\hbar z$ ; в)  $[z, \hat{L}_x] = i\hbar y$ .

**3.28.** Доказать следующие правила коммутации:

а)  $[\hat{L}_x, \hat{p}_x] = 0$ ; б)  $[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar \hat{p}_z$ ; в)  $[\hat{L}_x, \hat{p}_z] = -i\hbar \hat{p}_y$ .

**3.29.** С помощью правил коммутации, приведенных в предыдущей задаче, показать, что:

а)  $[\hat{L}_x, \hat{p}_x^2] = 0$ ; б)  $[\hat{L}_x, \hat{p}^2] = 0$ ; в)  $[\hat{L}_x^2, \hat{p}^2] = 0$ .

**3.30.** Доказать, что оператор  $\hat{L}^2$  коммутирует с оператором кинетической энергии  $\hat{K}$ .

**3.31.** Проверить следующие правила коммутации:

а)  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ ; б)  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$ ; в)  $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$ .

**3.32.** С помощью правил коммутации, приведенных в предыдущей задаче, показать, что оператор  $\hat{L}^2$  коммутирует с операторами  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  и  $\hat{L}_z$ .

**3.33.** Модель пространственного ротатора — это частица с массой  $\mu$ , движущаяся все время на одном и том же расстоянии  $r_0$  от центра. Найти собственные значения энергии такого ротатора, считая известными собственные значения оператора  $\hat{L}^2$ .

## Средние значения и вероятности

**3.34.** Доказать, что если физическая величина  $A$  описывается эрмитовым оператором  $\hat{A}$ , то:

а) ее среднее значение вещественно;

б) среднее значение квадрата этой физической величины  $\langle A^2 \rangle = \int |\hat{A}\psi|^2 dV$ .



**3.35.** Показать для одномерного случая, что

$$\langle p_x \rangle = \frac{i\hbar}{2} \int \left( \psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) dx.$$

**3.36.** Доказать, что в стационарном состоянии дискретного спектра среднее значение проекции импульса частицы равно нулю.

Указание: воспользоваться выражением оператора  $\hat{p}_x$  через коммутатор операторов  $\hat{H}$  и  $x$  (см. задачу 3.11, а).

**3.37.** Найти среднюю кинетическую энергию частицы в одномерной прямоугольной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 < x < l$ ), если частица находится в состоянии:

а)  $\psi(x) = A \sin^2(\pi x/l)$ ;    б)  $\psi(x) = Ax(l-x)$ .

**3.38.** Вычислить средние значения кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора с частотой  $\omega$  в основном состоянии  $\psi(x) = A \exp(-\alpha^2 x^2)$ , где  $\alpha^2 = \kappa/2\hbar\omega$ ,  $\kappa$  — постоянная ( $U = \kappa x^2/2$ ).

**3.39.** В некоторый момент частица находится в состоянии

$$\psi(x) = A \exp(ikx - x^2/a^2),$$

где  $A$  и  $a$  — постоянные. Найти средние значения:

а) координаты  $x$ ;    б) проекции импульса  $p_x$ .

**3.40.** Вычислить средние значения  $\langle (\Delta x)^2 \rangle$  и  $\langle (\Delta p_x)^2 \rangle$  и их произведение:

а) для частицы, находящейся на 1-м уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 < x < l$ );

б) в основном состоянии осциллятора,  $\psi(x) = A \exp(-\alpha^2 x^2)$ .

**3.41.** Определить среднее значение физической величины, описываемой оператором  $\hat{L}_z^2$  в состоянии  $\psi(\varphi) = A \sin^2 \varphi$ .

**3.42.** Вычислить средние значения  $\langle (\Delta \varphi)^2 \rangle$  и  $\langle (\Delta L_z)^2 \rangle$  и их произведение для системы, находящейся в состоянии  $\psi(\varphi) = A \sin \varphi$ .

**3.43.** Показать, что в состоянии  $\psi$ , где оператор  $\hat{L}_z$  имеет определенное собственное значение, средние значения  $\langle L_x \rangle$  и  $\langle L_y \rangle$  равны нулю.

Указание: воспользоваться коммутационными соотношениями из задачи 3.31.

**3.44.** Вычислить среднее значение квадрата момента импульса в состоянии  $\psi(\vartheta, \varphi) = A \sin \vartheta \cos \varphi$ .

**3.45.** Возможные значения проекции момента импульса на произвольную ось равны  $m\hbar$ , где  $m = l, l-1, \dots, -l$ . Имея в виду, что эти проекции равновероятны и оси равноправны, показать: в состоянии с определенным значением  $l$  среднее значение квадрата момента импульса  $\langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$ .

**3.46.** Доказать, что собственные функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  эрмитова оператора  $\hat{A}$ , принадлежащие различным собственным значениям  $A_1$  и  $A_2$  дискретного спектра, ортогональны.

**3.47.** Непосредственным вычислением убедиться в ортогональности собственных функций:

а) оператора  $\hat{H}$  для частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками;

б) оператора  $\hat{L}_z$ .

**3.48.** Система находится в состоянии, описываемом нормированной  $\psi$ -функцией, которую можно разложить по собственным функциям эрмитова оператора  $\hat{A}$ , т. е.  $\psi(x) = \sum c_k \psi_k(x)$ .

Считая функции  $\psi_k$  нормированными на единицу:

а) получить выражение, определяющее коэффициенты  $c_k$ ;

б) показать, что среднее значение физической величины  $\langle A \rangle = \sum A_k |c_k|^2$ , где  $A_k$  — собственные значения оператора  $\hat{A}$ .

Каков физический смысл величин  $|c_k|^2$ ?

**3.49.** В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 < x < l$ ) находится частица в состоянии  $\psi(x)$ . Определить вероятность ее пребывания:

а) в основном состоянии, если  $\psi(x) = A \sin^2(\pi x/l)$ ;

б) на  $n$ -м уровне, если  $\psi(x) = Ax(l-x)$ . Вычислить значения вероятностей для первых трех уровней.

**3.50.** Определить возможные собственные значения оператора  $\hat{L}_z$  и их вероятности для системы, находящейся в состоянии:

а)  $\psi(\varphi) = A \sin^2 \varphi$ ;    б)  $\psi(\varphi) = A(1 + \sin \varphi)$ .

**3.51.** Имея в виду, что собственные функции оператора волнового числа  $\hat{k}$  ( $\hat{k} = \hat{p}/\hbar$ ) есть  $\psi_k(x) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{ikx}$ , найти распределение вероятностей различных значений волнового числа  $k$  для

частицы на  $n$ -м уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с абсолютно непроницаемыми стенками.

### Изменение во времени состояния

**3.52.** Выяснить, является ли волновая функция, представляющая собой суперпозицию стационарных состояний,  $\Psi(x, t) = \sum \psi_k(x) \exp(i\omega_k t)$ , решением временного и стационарного уравнений Шредингера?

**3.53.** Частица массы  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти волновую функцию частицы в момент  $t$ , если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) она имела вид  $\Psi(x, 0) = Ax(l - x)$ .

**3.54.** Плоским ротатором называют систему из двух жестко связанных частиц, вращающуюся в плоскости вокруг своего центра масс. Оператор энергии такого ротатора имеет вид  $\hat{H} = (\hbar^2/2I) \partial^2/\partial\varphi^2$ , где  $I$  — момент инерции системы. Полагая, что в начальный момент волновая функция ротатора имела вид  $\Phi(\varphi, 0) = A \cos^2\varphi$ , найти эту функцию в момент  $t$ .

**3.55.** Вычислив с помощью временного уравнения Шредингера производную по времени от среднего значения физической величины  $A$ , изображаемой оператором  $\hat{A}$ , показать, что:

$$\text{а) } \frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H}); \quad \text{б) } \frac{d}{dt}\langle A \rangle = \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle.$$

**3.56.** Доказать операторные равенства:

$$\text{а) } \frac{d}{dt}(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{d\hat{A}}{dt} + \frac{d\hat{B}}{dt}; \quad \text{б) } \frac{d}{dt}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{d\hat{A}}{dt}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dt}.$$

**3.57.** Доказать справедливость следующих уравнений движения в операторной форме:

$$\text{а) } dx/dt = \hat{p}_x/m; \quad \text{б) } d\hat{p}_x/dt = -\partial U/\partial x.$$

**3.58.** Согласно теореме Эренфеста, средние значения механических величин подчиняются законам классической механики. Доказать, что при движении частицы в потенциальном поле  $U(x)$ :

$$\text{а) } \langle dx/dt \rangle = \langle p_x \rangle/m; \quad \text{б) } \langle dp_x/dt \rangle = -\langle \partial U/\partial x \rangle.$$

**3.59.** Доказать, что для частицы, движущейся в потенциальном поле  $U(x)$ , выполняются следующие операторные равенства:

$$\text{а) } \frac{d}{dt}(x^2) = \frac{1}{m}(x\hat{p}_x + \hat{p}_x x); \quad \text{б) } \frac{d}{dt}(x\hat{p}_x) = \frac{\hat{p}_x^2}{m} - x \frac{\partial U}{\partial x};$$

$$\text{в) } \frac{d}{dt}(\hat{p}_x^2) = -\left(\hat{p}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \hat{p}_x\right).$$

**3.60.** Показать, что производная по времени от оператора  $\hat{L}_x$  равна оператору проекции момента внешних сил, т. е.

$$\frac{d}{dt} \hat{L}_x = \hat{M}_x = -\left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

**3.61.** Частица находится в состоянии, описываемом собственной функцией  $\psi$  оператора  $\hat{A}$ , который не зависит от времени явно. Показать, что соответствующее собственное значение  $A$  этого оператора будет сохраняться во времени, если оператор  $\hat{A}$  коммутирует с гамильтонианом  $\hat{H}$ .

**3.62.** Какие из механических величин (энергия  $E$ , проекции импульса, проекции и квадрат момента импульса) сохраняются при движении частицы:

а) в отсутствие поля (свободное движение);

б) в однородном потенциальном поле  $U(z) = az$ , где  $a$  — постоянная;

в) в центрально-симметричном потенциальном поле  $U(r)$ ;

г) в одном переменном поле  $U(z, t) = a(t)z$ ?

**3.63.** Частица находится в некотором состоянии  $\Psi(x, t)$ , причем  $\Psi(x, t)$  не является собственной функцией оператора  $\hat{A}$ . Зная, что оператор  $\hat{A}$  не зависит от времени явно и коммутирует с гамильтонианом  $\hat{H}$ , показать:

а) среднее значение величины  $A$  сохраняется;

б) вероятности определенных значений величины  $A$  также не зависят от времени.

## Четность

**3.64.** Преобразование инверсии заключается в одновременном изменении знака всех декартовых координат:  $x \rightarrow -x'$ ,

$y \rightarrow -y'$ ,  $z \rightarrow -z'$ . Записать преобразование инверсии в цилиндрической и сферической системах координат.

**3.65.** Найти соответственные значения оператора инверсии  $\hat{P}$ , действие которого на функцию заключается, как известно, в изменении знака всех декартовых координат.

**3.66.** Доказать, что оператор инверсии  $\hat{P}$  коммутирует с операторами момента импульса  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$ ,  $\hat{L}_z$  и  $\hat{L}^2$ .

**3.67.** Показать, что четность состояния частицы в центрально-симметричном поле определяется четностью орбитального квантового числа  $l$ , а именно  $P = (-1)^l$ .

Указание: иметь в виду, что при замене  $\vartheta$  на  $\pi - \vartheta$  в функции  $Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$  функция  $\Theta(\vartheta) \rightarrow \Theta(\pi - \vartheta) = (-1)^{l-m} \Theta(\vartheta)$ .

**3.68.** Показать, что четность состояния системы невзаимодействующих частиц в центрально-симметричном поле  $P = (-1)^{\sum l_i}$ , где  $l_i$  — орбитальные квантовые числа частиц.

**3.69.** Показать, что гамильтониан  $\hat{H}$  для центрально-симметричного поля при инверсии координат не меняется, т. е. оператор инверсии  $\hat{P}$  и гамильтониан  $\hat{H}$  коммутируют между собой.

**3.70.** Частица находится в центрально-симметричном поле в состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , которая удовлетворяет общему уравнению Шредингера. Показать, что если в момент  $t$  функция  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  была четной, то четность ее сохраняется и в последующие моменты времени.

**3.71.** Доказать, что закон сохранения четности является следствием инвариантности гамильтониана по отношению к преобразованию инверсии.

**3.72.** Атом находится в четном состоянии с  $L = 0$ . Пусть энергетически возможен распад этого атома на свободный электрон и ион, остающийся в нечетном состоянии с тем же значением  $L = 0$ . Показать, что закон сохранения четности запрещает такой процесс.

**3.73.** Можно ли утверждать, что закон сохранения четности вытекает из закона сохранения момента импульса?

**3.74.** Рассмотреть вопрос сохранения четности состояния частицы в полях, приведенных в задаче 3.62.

## Центрально-симметричное поле. Атом водорода

**3.75.** Преобразовать оператор полной энергии для частицы в центрально-симметричном поле  $U(r)$  к виду

$$\hat{H} = \hat{K}_r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + U(r).$$

Какой вид имеет оператор  $\hat{K}_r$ ?

**3.76.** Частица массы  $\mu$  движется в центрально-симметричном потенциальном поле  $U(r)$ . Найти:

а) уравнение Шредингера для угловой и радиальной частей волновой функции  $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$ . Считая собственные значения оператора  $\hat{L}^2$  известными, привести уравнение для функции  $R(r)$  к виду (3.14);

б) зависимость волновой функции от азимутального угла  $\varphi$ .

**3.77.** Частица находится в центрально-симметричном потенциальном поле в состоянии  $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . Каков физический смысл функции  $|Y_{lm}|^2$ ? Воспользовавшись табл. 3.1, вычислить нормировочные коэффициенты функций:

а)  $Y_{1,0}$ ; б)  $Y_{2,1}$ .

**3.78.** Частица массы  $m$  находится в сферически-симметричной потенциальной яме радиуса  $r_0$ , где  $U(r) = 0$  при  $r < r_0$  и  $U = \infty$  при  $r = r_0$ . Найти:

а) возможные значения энергии и нормированные собственные функции частицы в  $s$ -состояниях ( $l = 0$ ), где  $\psi$ -функция зависит только от  $r$ . При решении уравнения Шредингера воспользоваться подстановкой  $\psi = \chi/r$ ;

б) наиболее вероятное значение  $r_{\text{вер}}$  и вероятность  $w$  нахождения частицы в области  $r < r_{\text{вер}}$  в основном состоянии. Изобразить примерные графики функций  $\psi^2(r)$  и  $r^2\psi^2(r)$  в этом состоянии.

**3.79.** Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найти средние значения  $\langle r \rangle$ ,  $\langle r^2 \rangle$  и среднего квадратического отклонения  $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$  для частицы, находящейся на  $n$ -м  $s$ -уровне ( $l = 0$ ).

**3.80.** Частица массы  $m$  находится в сферически-симметричной потенциальной яме радиуса  $r_0$ , где  $U(r) = 0$  при  $r < r_0$  и  $U = \infty$  при  $r = r_0$ . Воспользовавшись решением задачи 3.78, найти:

а) радиальную часть  $\psi$ -функции,  $R_1(r)$ , описывающей  $p$ -состояние частицы ( $l = 1$ ). Для этого продифференцировать уравнение (3.14), определяющее функции  $R_0(r)$   $s$ -состояний, и полученное выражение сравнить с уравнением, определяющим функцию  $R_1(r)$ ;

б) энергию первого  $p$ -уровня, сравнить ее с энергией основного состояния.

**3.81.** Частица массы  $m$  находится в сферически-симметричной потенциальной яме, где  $U(r) = 0$  при  $r < r_0$  и  $U(r) = U_0$  при  $r \geq r_0$ .

а) Найти с помощью подстановки  $\psi(x) = \chi(r)/r$  уравнение, определяющее собственные значения энергии частицы в  $s$ -состояниях ( $l = 0$ ) в области  $E < U_0$ ; привести это уравнение к виду

$$\sin kr_0 = \pm kr_0 \sqrt{\hbar^2 / 2mr_0^2 U_0}, \quad k = \sqrt{2mE} / \hbar.$$

б) Убедиться, что данная яма не всегда имеет дискретные уровни (связанные состояния). Определить интервал значений величины  $r_0^2 U_0$ , при которых яма содержит только один  $s$ -уровень.

в) Полагая  $r_0^2 U_0 = 8\pi^2 \hbar^2 / 27m$ , вычислить наиболее вероятное значение  $r_{\text{вер}}$  для частицы в  $s$ -состоянии, а также вероятность нахождения ее в области  $r > r_0$ .

**3.82.** Привести уравнение (3.14), определяющее радиальную часть волновой функции электрона в кулоновском поле ядра  $Z$ , к безразмерному виду. В качестве единиц измерения взять атомную единицу длины (первый боровский радиус) и атомную единицу энергии (энергию связи электрона в атоме водорода).

**3.83.** Используя подстановку  $R(r) = \chi(r)/r$ , найти асимптотический вид радиальной части волновой функции  $R(r)$  для связанных состояний электрона в кулоновском поле ядра:

а) на больших и б) на малых расстояниях от ядра.

**3.84.** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi = A \exp(-r/r_1)$ . Найти:

а) нормировочный коэффициент  $A$ ;

б) энергию  $E$  электрона и  $r_1$  (с помощью уравнения Шредингера).

**3.85.** Электрон в атоме водорода находится в состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi = A(1 + ar)e^{\alpha r}$ , где  $A$ ,  $a$ ,  $\alpha$  — постоянные. Найти:

а) постоянные  $a$ ,  $\alpha$  и энергию  $E$  электрона (с помощью уравнения Шредингера);

б) нормировочный коэффициент  $A$ .

**3.86.** Найти для  $1s$ -электрона атома водорода:

а) наиболее вероятное расстояние его от ядра  $r_{\text{вер}}$  и вероятность нахождения электрона в области  $r < r_{\text{вер}}$ ;

б) вероятность нахождения его вне классических границ поля.

**3.87.** Определить для  $1s$ -электрона в атоме водорода средние значения его расстояния от ядра:  $\langle r \rangle$ ,  $\langle r^2 \rangle$  и  $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$ .

**3.88.** Найти для основного состояния атома водорода среднее значение следующих величин:

а) модуля силы взаимодействия между электроном и ядром;

б) потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром.

**3.89.** Определить среднее значение кинетической энергии и средней квадратической скорости электрона в основном состоянии атома водорода.

**3.90.** Воспользовавшись табл. 3.2, найти для  $2p$ - и  $3d$ -электронов атома водорода:

а) наиболее вероятное расстояние от ядра;

б) среднее квадратическое отклонение  $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$ .

**3.91.** Найти средний электростатический потенциал, создаваемый  $1s$ -электроном в центре атома водорода.

**3.92.** Определить средний электростатический потенциал на расстоянии  $r$  от ядра атома водорода, находящегося в основном состоянии  $\psi = (1/\sqrt{\pi r_1^3}) \exp(-r/r_1)$ .

Указание: для нахождения потенциала  $\phi_e$ , создаваемого «электронным облаком», дважды проинтегрировать уравнение Пуассона  $\nabla^2 \phi_e = -\alpha_* \rho$ , где  $\alpha_* = 4\pi$  (СГС) или  $1/\epsilon_0$  (СИ).



## 4. Электронная оболочка атома

• **Спектральные обозначения термов:**  $\chi\{L\}_J$ , где  $\chi$  — мультиплетность ( $\chi = 2S + 1$ ),  $L, S, J$  — квантовые числа.

$$L = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

символ: S, P, D, F, G, H, I, ...

• **Правила отбора квантовых чисел  $S, L$  и  $J$ :**

$$\Delta S = 0, \quad \Delta L = \pm 1, \quad \Delta J = 0, \pm 1, \quad J = 0 \rightarrow J = 0. \quad (4.1)$$

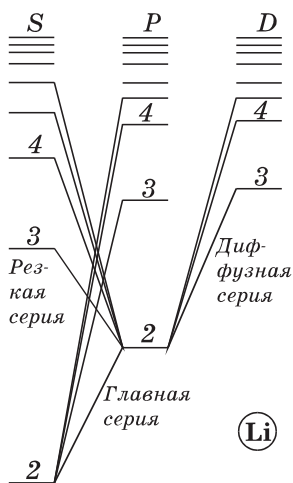


Рис. 4.1

• **Термы атома (иона) с одним валентным электроном:**

$$T = \frac{RZ_{\text{эф}}^2}{(n - \Delta)^2}, \quad (4.2)$$

где  $R$  — постоянная Ридберга,  $Z_{\text{эф}}$  — эффективный заряд (в единицах  $e$ ) остова атома (иона), в поле которого движется внешний электрон,  $n$  — главное квантовое число валентного электрона,  $\Delta$  — квантовый дефект.

Схема уровней такого атома (иона) показана на рис. 4.1 (без учета тонкой структуры).

• **Механические моменты атома (орбитальный, спиновый и полный):**

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)},$$

$$M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}. \quad (4.3)$$

В задачах этой главы связь между моментами предполагается нормальной,  $L$ - $S$  (спин-орбитальная связь).

• **Правила Хунда:**

наименьшей энергией обладает терм с максимальным значением спина  $S$  при данной электронной конфигурации и максимально возможным при этом  $S_{\text{макс}}$  значением  $L$ ;

для основного (нормального) терма  $J = |L - S|$ , если подболочка заполнена менее чем наполовину, и  $J = L + S$  в остальных случаях.

• **Эквивалентными** называют электроны с одинаковыми квантовыми числами  $n$ , и  $l$ .

• **Распределение Больцмана:**

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right), \quad (4.4)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — статистический вес (кратность вырождения) уровней 1 и 2.

• **Вероятности радиационных переходов между уровнями 1 и 2** ( $E_2 > E_1$ ), т. е. число переходов в секунду в расчете на один атом ( $Z/N$ ), для спонтанного и индуцированного излучения и поглощения:

$$\begin{aligned} Z_{21}^{\text{сп}}/N_2 &= A_{21}, & Z_{21}^{\text{инд}}/N_2 &= B_{21}u_{\omega}, \\ Z_{12}^{\text{полг}}/N_1 &= B_{12}u_{\omega}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $A_{21}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{12}$  — коэффициенты Эйнштейна,  $u_{\omega}$  — спектральная плотность излучения, отвечающая частоте  $\omega$  перехода между рассматриваемыми уровнями.

• **Связь между коэффициентами Эйнштейна:**

$$B_{21} = \frac{g_1}{g_2} B_{12} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} A_{21}. \quad (4.6)$$

• **Соотношение между средним временем жизни  $\tau$  и шириной  $\Gamma$  уровня:**

$$\tau \Gamma \sim \hbar. \quad (4.7)$$

• **Схема рентгеновских термов и переходов** показана на рис. 4.2.

• **Закон Мозли для  $K_{\alpha}$ -линий:**

$$\omega_{K_{\alpha}} = \frac{3}{4} R (Z - \sigma)^2, \quad (4.8)$$

где  $R$  — постоянная Ридберга,  $Z$  — порядковый номер атома,  $\sigma$  — поправка, равная для легких элементов единице.

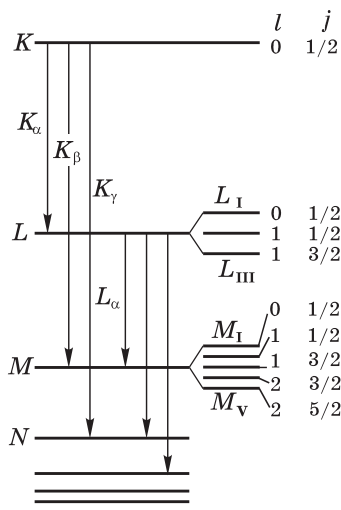


Рис. 4.2

- **Магнитный момент атома и фактор (множитель) Ланде:**

$$\mu = g \sqrt{J(J+1)} \mu_B, \quad g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \quad (4.9)$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора:  $\mu_B = e\hbar/2mc$  (СГС) или  $e\hbar/2m$  (СИ).

- **Формула зеемановского расщепления спектральных линий:**

$$\Delta\omega = (m_1 g_1 - m_2 g_2) \mu_B B / \hbar, \quad (4.10)$$

где  $m_i$  и  $g_i$  — магнитные квантовые числа и множители Ланде соответствующих термов.

- **Обозначения зеемановских компонент:**

$\pi$ -компонента ( $\Delta m = 0$ ),  $\sigma$ -компонента ( $\Delta m = \pm 1$ ).

- **Правила отбора квантовых чисел (кроме указанных выше):**

$$\Delta m_S = 0, \quad \Delta m_L = 0, \pm 1, \quad \Delta m_J = 0, \pm 1,$$

если  $\Delta J = 0$ , то переход  $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$  не осуществляется.

## Состояния электронов в атоме

**4.1.** Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома натрия, у которого квантовые дефекты основного терма  $3S$  и терма  $3P$  равны соответственно 1,37 и 0,88.

**4.2.** Вычислить квантовые дефекты  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -термов атома лития, если известно, что энергия связи валентного электрона в основном состоянии равна 5,39 эВ, первый потенциал возбуждения 1,85 В и длина волны головной линии диффузной серии 610 нм. Какой из перечисленных термов наиболее близок к водородоподобным и чем это обусловлено?

**4.3.** Найти энергию связи валентного электрона в основном состоянии атома лития, если известно, что длины волн головной линии резкой серии и ее коротковолновой границы равны 813 и 349 нм.

**4.4.** Сколько спектральных линий, разрешенных правилами отбора, возникает при переходе атома лития в основное состояние из состояния:

а)  $4S$ ; б)  $4P$ ?

**4.5.** Вычислить для иона  $\text{Be}^+$  квантовые дефекты  $S$ - и  $P$ -термов, а также длину волны головной линии резкой серии, если известно, что длины волн головной линии главной серии и ее коротковолновой границы равны 321,0 и 68,3 нм.

**4.6.** Термы атомов и ионов с одним валентным электроном можно представить в виде  $T = R(Z - a)^2/n^2$ , где  $Z$  — заряд ядра (в единицах  $e$ ),  $a$  — поправка экранирования,  $n$  — главное квантовое число валентного электрона. Вычислить с помощью этой формулы поправку  $a$  и квантовое число  $n$  валентного электрона в основном состоянии атома лития, если известно, что ионизационные потенциалы атома лития и иона  $\text{Be}^+$  равны соответственно 5,39 и 17,0 В и поправка  $a$  для них одинакова.

**4.7.** Найти расщепление в электронвольтах уровня  $4P$  атома калия, если известно, что длины волн компонент дублета резонансной линии равны 769,898 и 766,491 нм. Сравнить полученное значение с энергией резонансного перехода.

**4.8.** Головная линия резкой серии атомарного цезия представляет собой дублет с длинами волн 1469,5 и 1358,8 нм. Найти частотные интервалы  $\Delta\omega$  между компонентами следующих линий этой серии.

**4.9.** Выписать спектральные обозначения термов электрона в атоме водорода для  $n = 3$ . Сколько различных термов имеет уровень атома водорода с главным квантовым числом  $n$ ?

**4.10.** Найти возможные значения полных механических моментов электронных оболочек атомов в состояниях  $^4P$  и  $^5D$ .

**4.11.** Выписать возможные термы атомов, содержащих кроме заполненных оболочек:

- а) два электрона ( $s$  и  $p$ );
- б) два электрона ( $p$  и  $d$ );
- в) три электрона ( $s$ ,  $p$  и  $d$ ).

**4.12.** Сколько различных типов термов возможно у двухэлектронной системы, состоящей из  $d$ -электрона и  $f$ -электрона?

**4.13.** Выписать возможные типы термов атома, содержащего кроме заполненных оболочек два  $p$ -электрона с различными главными квантовыми числами.

**4.14.** Определить возможную мультиплетность:

- а) терма  $D_{3/2}$ ;
- б) термов атомов лития, бериллия, бора и углерода, если возбуждаются электроны только внешних, незамкнутых, оболочек.

**4.15.** Найти максимально возможный полный механический момент электронной оболочки атома в  $F$ -состоянии, если известно, что этому состоянию соответствуют пять термов одинаковой мультиплетности, но с различными значениями квантового числа  $J$ .

**4.16.** Известно, что в  $P$ - и  $D$ -состояниях двух различных атомов число возможных значений квантового числа  $J$  одинаково и равно трем. Определить спиновый механический момент атомов в этих состояниях.

**4.17.** Найти угол между спиновым и полным механическими моментами в векторной модели атома:

а) находящегося в состоянии  ${}^3D$  с максимально возможным значением полного механического момента;

б) содержащего, кроме заполненных подоболочек, три электрона ( $p$ ,  $d$  и  $f$ ) и имеющего максимально возможный для этой конфигурации полный механический момент.

**4.18.** Атом находится в состоянии  ${}^4F$ , имея при этом максимально возможный полный механический момент. Определить кратность вырождения этого состояния по  $J$ . Каков физический смысл полученной величины?

**4.19.** Определить максимально возможный орбитальный механический момент атома, находящегося в состоянии, мультиплетность которого пять и кратность вырождения по  $J$  равна семи. Указать спектральный символ этого состояния.

**4.20.** Найти максимально возможный угол между спиновым и полным механическим моментами в векторной модели атома, находящегося в состоянии, мультиплетность которого равна трем и кратность вырождения по  $J$  — пяти.

**4.21.** Определить число возможных состояний:

- а) атома с заданными значениями квантовых чисел  $L$  и  $S$ ;
- б) двухэлектронной системы из  $p$ -электрона и  $d$ -электрона;
- в) электронной конфигурации  $nd^3$ .

**4.22.** Найти число электронов в атомах, у которых заполнены:

а)  $K$ - и  $L$ -оболочки,  $3s$ -подоболочка и наполовину  $3p$ -подоболочка;

б)  $K$ -,  $L$ - и  $M$ -оболочки,  $4s$ -,  $4p$ - и  $4d$ -подоболочки.  
Что это за атомы?

**4.23.** Найти максимальное число электронов, имеющих в атоме следующие одинаковые квантовые числа:

а)  $n, l$ ; б)  $n$ .

**4.24.** Выписать электронные конфигурации, и с помощью правил Хунда найти основной терм атомов:

а) углерода и азота; б) серы и хлора.

Электронные конфигурации этих атомов соответствуют застройке электронных оболочек в нормальном порядке.

**4.25.** Используя правила Хунда, найти основной терм атома, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого:

а)  $nd^2$ ; б)  $nd^3$ .

**4.26.** Определить основной терм атома, незамкнутая подоболочка которого заполнена ровно наполовину пятью электронами.

**4.27.** Найти кратность вырождения основного состояния атома, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого  $nd^6$ .

**4.28.** Найти с помощью правил Хунда число электронов в единственной незаполненной подоболочке атома, основной терм которого:

а)  ${}^3F_2$ ; б)  ${}^2P_{3/2}$ ; в)  ${}^6S_{5/2}$ .

**4.29.** Воспользовавшись правилами Хунда, написать основной терм атома, единственная незамкнутая подоболочка которого заполнена на одну треть и  $S = 1$ .

**4.30.** Найти возможные типы термов атома, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого:

а)  $np^2$ ; б)  $np^3$ ; в)  $nd^2$ .

**4.31.** Убедиться на нижеследующих примерах, что две электронные конфигурации, у одной из которых столько эквивалентных электронов, сколько не хватает другой для заполнения подоболочки, имеют одинаковые наборы возможных типов термов:

а)  $p^1$  и  $p^5$ ; б)  $p^2$  и  $p^4$ ; в)  $d^1$  и  $d^9$ .

Объяснить этот факт.

**4.32.** Выписать возможные типы термов для следующих электронных конфигураций:

а)  $ns^1, n'p^2$ ; б)  $np^1, n'p^2$ . Здесь  $n \neq n'$ .

## Интенсивность и ширина спектральных линий

**4.33.** Определить отношение числа атомов газообразного лития в состоянии  $2P$  к числу атомов в основном состоянии при  $T = 3000$  К. Длина волны резонансной линии ( $2P \rightarrow 2S$ )  $\lambda = 670,8$  нм.

**4.34.** Найти долю атомов водорода, находящихся в состоянии с главным квантовым числом  $n = 2$  при  $T = 3000$  К.

**4.35.** Квантовая система состоит из  $N$  атомов, которые могут находиться в двух невырожденных состояниях с разностью энергий  $\Delta E$ . Найти соответствующий вклад этих состояний в теплоемкость системы как функцию температуры,  $C_V(T)$ . Упростить полученное выражение для случаев  $kT \ll \Delta E$  и  $kT \gg \Delta E$ .

**4.36.** Показать, что число атомов, возбужденных на некоторый уровень, убывает со временем по закону  $N = N_0 e^{-t/\tau}$ , где  $\tau$  — среднее время жизни атома на этом уровне.

**4.37.** Интенсивность резонансной линии убывает в  $\eta = 65$  раз на расстоянии  $l = 10$  мм вдоль пучка атомов, движущихся со скоростью  $v = 2,0$  км/с. Вычислить среднее время жизни атомов в состоянии резонансного возбуждения. Оценить ширину уровня  $\Gamma$ .

**4.38.** Разряженные пары ртути, атомы которой находятся в основном состоянии, освещают резонансной линией ртутной лампы ( $\lambda = 253,65$  нм). При этом обнаружено, что мощность испускания этой линии парами ртути  $P = 35$  мВт. Найти число атомов в состоянии резонансного возбуждения, среднее время жизни которого  $\tau = 0,15$  мкс.

**4.39.** Газообразный литий, содержащий  $N = 3,0 \cdot 10^{16}$  атомов, находится при температуре  $T = 1500$  К. При этом мощность испускания резонансной линии  $\lambda = 670,8$  нм ( $2P \rightarrow 2S$ ) равна  $P = 0,25$  Вт. Найти среднее время жизни атомов лития в состоянии резонансного возбуждения.

**4.40.** Система атомов со своим излучением находится в термодинамическом равновесии при температуре  $T$ . Пусть переходу между двумя энергетическими уровнями атомов,  $E_1$  и  $E_2$ , со статистическими весами  $g_1$  и  $g_2$  соответствует частота  $\omega$  и коэффициенты Эйнштейна  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  и  $B_{12}$ . Имея в виду, что при рав-

новесии системы числа прямых и обратных переходов ( $E_1 \rightleftharpoons E_2$ ) в единицу времени одинаковы, найти выражение для спектральной плотности энергии теплового излучения:

а) с учетом индуцированного испускания; определить также связь между коэффициентами Эйнштейна;

б) пренебрегая индуцированным испусканием (при каких условиях это можно сделать?).

**4.41.** Атомарный водород находится в термодинамическом равновесии со своим излучением. Вычислить:

а) отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучений атомов с уровня  $2P$  при температуре  $T = 3000$  К;

б) температуру, при которой эти вероятности одинаковы.

**4.42.** Через газ, находящийся при температуре  $T$ , проходит пучок света с частотой  $\omega$ , равной резонансной частоте перехода атомов газа ( $\hbar\omega \gg kT$ ). Показать с учетом индуцированного излучения, что коэффициент поглощения газа

$$\kappa(T) = \kappa_0(1 - e^{-\hbar\omega/kT}),$$

где  $\kappa_0$  — коэффициент поглощения при  $T = 0$  К.

**4.43.** При каких условиях возможно усиление электромагнитного излучения, проходящего через вещество? Найти отношение заселенности уровней  $^1D_2$  и  $^1P_1$  ( $E_D > E_P$ ) атомов газа, при котором пучок моноэнергетического излучения с частотой, равной частоте перехода между этими уровнями, будет проходить через газ не ослабляясь.

**4.44.** Пусть в квантовой системе (рис. 4.3) производится «накачка» на уровень 2, причем обратный переход возможен только через уровень 1. Показать, что в этом случае усиление света с частотой  $\omega_{21}$  возможно при условии  $g_1 A_{10} > g_2 A_{21}$ , где  $g_1$  и  $g_2$  — статистические веса уровней 1 и 2,  $A_{10}$  и  $A_{21}$  — коэффициенты Эйнштейна для соответствующих переходов.

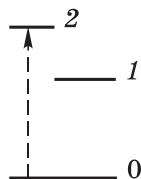


Рис. 4.3

**4.45.** Пусть  $q$  — число атомов, возбуждаемых каждую секунду на уровень 2 (см. рис. 4.3). Найти число атомов на уровне 1 через промежуток времени  $t$  после начала возбуждения. Коэффициенты Эйнштейна  $A_{20}$ ,  $A_{21}$  и  $A_{10}$  предполагаются известными. Индуцированными переходами пренебречь.



**4.46.** Среднее время жизни  $2p$ -состояния атомов водорода  $\tau = 1,6$  нс. Чему равно это время для  $2p$ -состояния ионов  $\text{He}^+$ ?

**4.47.** Спектральная линия  $\lambda = 532,0$  нм возникает в результате перехода между двумя возбужденными состояниями атома, средние времена жизни которых равны 12 и 20 нс. Оценить естественную ширину этой линии,  $\Delta\lambda$ .

**4.48.** Распределение интенсивности излучения в пределах спектральной линии с *естественным* уширением имеет вид

$$I_{\omega} = I_0 \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2},$$

где  $I_0$  — спектральная интенсивность в центре линии (при  $\omega = \omega_0$ );  $\gamma$  — постоянная, характерная для каждой линии (для линии, обусловленной переходом из возбужденного состояния непосредственно в основное,  $\gamma = 1/\tau$ ,  $\tau$  — среднее время жизни возбужденного состояния). Найти с помощью этой формулы:

- а) естественную ширину линии  $\delta\omega$  с известным значением  $\gamma$ ;
- б) среднее время жизни атомов ртути в состоянии  $6^1P$ , если известно, что при переходе в основное состояние испускается линия  $\lambda = 185,0$  нм с естественной шириной  $\delta\lambda = 1,5 \cdot 10^{-5}$  нм.

Примечание: шириной линии называют ширину её контура на половине высоты.

**4.49.** Воспользовавшись формулой из предыдущей задачи:

а) показать, что в пределах ширины линии, т. е. ширины её контура на половине высоты, заключена половина полной интенсивности линии;

б) найти полную интенсивность линии, естественная ширина которой  $\delta\omega$  и спектральная интенсивность в ее центре  $I_0$ .

**4.50.** Распределение интенсивности излучения в спектральной линии с *доплеровским* уширением имеет вид

$$I_{\omega} = I_0 \exp\left(-\frac{a(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right),$$

где  $a = mc^2/2kT$ ,  $I_0$  — спектральная интенсивность в центре линии (при  $\omega = \omega_0$ ),  $m$  — масса атома,  $T$  — температура газа.

а) Получить эту формулу, используя распределение Максвелла.

**б)** Показать, что доплеровская ширина спектральной линии  $\lambda_0$ , т. е. ширина контура линии на половине высоты, равна

$$\delta\lambda_{\text{доп}} = 2\lambda_0 / \sqrt{(\ln 2)/a}.$$

**4.51.** Длина волны резонансной линии ртути  $\lambda = 253,65$  нм. Среднее время жизни резонансного уровня  $\tau = 0,15$  мкс. Оценить отношение доплеровского уширения этой линии при  $T = 300$  К к ее естественной ширине. Воспользоваться формулой для  $\delta\lambda_{\text{доп}}$  из предыдущей задачи.

**4.52.** Для получения спектральных линий без доплеровского уширения используют узкий слаборасходящийся пучок возбужденных атомов и наблюдения ведут в направлении, перпендикулярном пучку. Оценить угол раствора пучка атомов натрия, при котором доплеровское уширение резонансной линии  $\lambda = 589,6$  нм на порядок меньше ее естественной ширины, если скорость атомов  $v = 1000$  м/с и среднее время жизни в состоянии резонансного возбуждения  $\tau = 16$  нс.

### Характеристические рентгеновские спектры

**4.53.** Используя закон Мозли, вычислить длины волн и энергии фотонов, соответствующих  $K_\alpha$ -линиям алюминия и кобальта.

**4.54.** Определить длину волны  $K_\alpha$ -линии элемента периодической системы, начиная с которого следует ожидать появления  $L$ -серии характеристического рентгеновского излучения.

**4.55.** Считая поправку  $\sigma$  в законе Мозли равной единице, найти:

**а)** каким элементам принадлежат  $K_\alpha$ -линии с длинами волн 193,5; 178,7; 165,6 и 143,4 пм; какова длина волны  $K_\alpha$ -линии элемента, пропущенного в этом ряду;

**б)** сколько элементов содержится в ряду между элементами, у которых длины волн  $K_\alpha$ -линий равны 375,3 и 251,2 пм.

**4.56.** Для элементов конца периодической системы поправка в законе Мозли значительно отличается от единицы. Убедиться в этом на примере олова, цезия и вольфрама, длины волн  $K_\alpha$ -линий которых равны соответственно 49,2, 40,2 и 21,0 пм.

**4.57.** Определить напряжение на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длин волн  $K_\alpha$ -линии и ко-

ротоковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна 84 пм.

**4.58.** При увеличении напряжения на рентгеновской трубке от  $U_1 = 10$  кВ до  $U_2 = 20$  кВ разность длин волн  $K_\alpha$ -линии и коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра увеличилась в  $\eta = 3,0$  раза. Какой элемент используется в качестве антикатада?

**4.59.** Как будет вести себя спектр рентгеновского излучения при постепенном увеличении напряжения на рентгеновской трубке? Вычислить с помощью таблиц Приложения минимальное напряжение на рентгеновских трубках с антикатадами из ванадия и вольфрама, при которых начинают появляться  $K_\alpha$ -линии этих элементов.

**4.60.** Какие серии характеристического рентгеновского спектра возбуждаются в молибдене и серебре  $K_\alpha$ -излучением серебра?

**4.61.** Найти порядковый номер легкого элемента, у которого в спектре поглощения рентгеновского излучения разность частот  $K$ - и  $L$ -краев поглощения  $\Delta\omega = 6,85 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ .

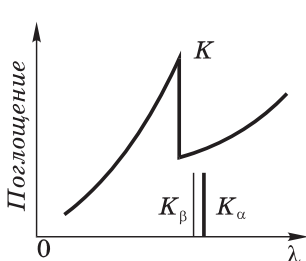


Рис. 4.4

**4.62.** На рис. 4.4 показаны коротковолновый край  $K$ -полосы поглощения рентгеновского излучения и положения  $K_\alpha$ - и  $K_\beta$ -линий испускания.

а) Объяснить природу скачка поглощения.

б) Рассчитать и построить в масштабе схему  $K$ -,  $L$ - и  $M$ -уровней атома, для которого  $\lambda_{K_\alpha} = 275$  пм,  $\lambda_{K_\beta} = 251$  пм и

$\lambda_K = 249$  пм. Что это за атом? Какова

длина волны его  $L_\alpha$ -линии испускания?

**4.63.** Зная длины волн коротковолновых границ поглощения  $K$ - и  $L$ -серий ванадия, вычислить (без учета тонкой структуры):

а) энергию связи  $K$ - и  $L$ -электронов;

б) длину волны  $K_\alpha$ -линии ванадия.

**4.64.** Найти энергию связи  $L$ -электронов титана, если известно, что разность длин волн между головной линией  $K$ -серии и ее коротковолновой границей  $\Delta\lambda = 26,0$  пм.

**4.65.** У некоторого легкого элемента длины волн  $K_\alpha$ - и  $K_\beta$ -линий равны  $\lambda_\alpha = 275$  пм и  $\lambda_\beta = 251$  пм. Что это за элемент? Чему равна длина волны головной линии его  $L$ -серии?

**4.66.** Рентгеновские термы в первом приближении можно представить в виде  $T = R(Z - a)^2/n^2$ , где  $R$  — постоянная Ридберга,  $Z$  — порядковый номер атома,  $a$  — поправка экранирования,  $n$  — главное квантовое число удаленного электрона. Вычислить поправку  $a$  для  $K$ - и  $L$ -термов титана, длина волны края  $K$ -полосы которого  $\lambda_K = 249$  пм.

**4.67.** Найти кинетическую энергию электронов, вырываемых с  $K$ -оболочки атомов молибдена  $K_\alpha$ -излучением серебра.

**4.68.** При облучении углерода  $K_\alpha$ -излучением алюминия возникает спектр фотоэлектронов, содержащий несколько моноэнергетических групп. Найти энергию связи тех электронов углерода, которые вырываются с кинетической энергией, равной 1,21 кэВ.

**4.69.** При облучении атомов криптона рентгеновским излучением с длиной волны  $\lambda$  обнаружено, что в некоторых случаях из атомов вылетают по два электрона: фотоэлектрон, освобождаемый с  $K$ -оболочки, и электрон, освобождаемый в результате эффекта Оже с  $L$ -оболочки. Энергия связи  $K$ - и  $L$ -электронов соответственно равна 14,4 и 2,0 кэВ. Вычислить:

а) кинетическую энергию обоих электронов, если  $\lambda = 65$  пм;

б) длину волны  $\lambda$ , при которой энергии обоих электронов одинаковы.

**4.70.** Учитывая тонкую структуру рентгеновских термов,

а) показать, что спектры испускания характеристического рентгеновского излучения дублетные;

б) выяснить, почему в спектре поглощения рентгеновского излучения край  $K$ -полосы простой,  $L$ -полосы — тройной,  $M$ -полосы — пятикратный.

**4.71.** Указать спектральный символ рентгеновского терма атома, у которого с одной из замкнутых оболочек удален электрон с  $l = 1$  и  $j = 3/2$ .

**4.72.** Выписать спектральные обозначения возможных рентгеновских термов атома, у которого удален один электрон из  $L$ -оболочки; из  $M$ -оболочки.

**4.73.** Определить число спектральных линий, обусловленных переходами между  $K$ - и  $L$ -;  $K$ - и  $M$ -;  $L$ - и  $M$ -оболочками атома.

**4.74.** Вычислить с помощью таблиц Приложения:

а) длины волн дублета  $K_{\alpha}$ -линии вольфрама;

б) разность длин волн дублета  $K_{\alpha}$ -линии свинца.

**4.75.** Вычислить с помощью таблиц Приложения энергию связи  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_{1/2}$  и  $2p_{3/2}$  электронов атома урана.

### Магнитные свойства атома

**4.76.** Имея в виду, что отношение магнитного момента к механическому для спинового момента вдвое больше, чем для орбитального, получить с помощью векторной модели атома формулу (4.9).

**4.77.** Вычислить множитель Ланде для атомов:

а) с одним валентным электроном в состояниях  $S$ ,  $P$  и  $D$ ;

б) в состоянии  $^3P$ ;

в) в  $S$ -состояниях;

г) в синглетных состояниях.

**4.78.** Выписать спектральные обозначения терма, у которого:

а)  $S = 1/2$ ,  $J = 5/2$ ,  $g = 6/7$ ; б)  $S = 1$ ,  $L = 2$ ,  $g = 4/3$ .

**4.79.** Найти магнитный момент  $\mu_B$  атома в состоянии: проекции  $\mu_B$  атома в состоянии:

а)  $^1F$ ; б)  $^2D_{3/2}$ .

**4.80.** Максимальное значение проекции магнитного момента атома, находящегося в состоянии  $D_2$ , равно четырём магнетонам Бора. Определить мультиплетность этого терма.

**4.81.** Определить возможные значения магнитного момента атома в состоянии  $^4P$ .

**4.82.** Вычислить магнитный момент атома водорода в основном состоянии.

**4.83.** Убедиться, что магнитные моменты атомов в состояниях  $^4D_{1/2}$  и  $^6G_{3/2}$  равны нулю. Интерпретировать этот факт на основе векторной модели атома.

**4.84.** Найти механические моменты атомов в состояниях  $^5F$  и  $^7H$ , если известно, что в этих состояниях магнитные моменты равны нулю.

**4.85.** Вычислить с помощью правил Хунда магнитный момент основного состояния атома, в котором незаполненная подоболочка содержит:

а) пять  $p$ -электронов; б) три  $d$ -электрона.

**4.86.** Показать с помощью векторной модели и соотношения  $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{M}$ , где  $\mathbf{J}$  — механический момент атома и  $\mathbf{M}$  — момент внешних сил, что угловая скорость прецессии вектора  $\mathbf{J}$  в магнитном поле с индукцией  $B$  равна  $\omega = g\mu_B B/\hbar$ ,  $g$  — множитель Ланде.

**4.87.** Найти угловые скорости прецессии механических моментов атома в магнитном поле с индукцией  $B = 1,00$  кГс, если атом находится:

а) в состоянии  $^1P$ ,  $^2P_{3/2}$  и  $^5F_1$ ;

б) в основном состоянии, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого  $np^4$  (использовать правила Хунда).

**4.88.** Механический момент атома в состоянии  $^3F$  прецессирует в магнитном поле с индукцией  $B = 500$  Гс с угловой скоростью  $\omega = 5,5 \cdot 10^9$  рад/с. Определить магнитный момент атома.

**4.89.** Объяснить с помощью векторной модели, почему механический момент атома, находящегося в состоянии  $^6F_{1/2}$ , прецессирует в магнитном поле с индукцией  $B$  с угловой скоростью, вектор которой  $\boldsymbol{\omega}$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{B}$ .

**4.90.** Атом в состоянии  $^2P_{1/2}$  находится на оси кругового контура с током  $I = 10,0$  А. Расстояние между атомом и центром контура  $z = 50$  мм, радиус контура  $R = 50$  мм. Вычислить силу взаимодействия между атомом и этим током.

**4.91.** Определить магнитный момент парамагнитного газа, состоящего из  $N$  атомов в состоянии  $^2S_{1/2}$  при температуре  $T$  в магнитном поле с индукцией  $B$ . Упростить полученное выражение для случая  $\mu_B B \ll kT$ .

**4.92.** Показать, что при температуре  $T$  в слабом магнитном поле с индукцией  $B$  средняя проекция магнитного момента атома  $\langle \mu_B \rangle = \mu^2 B/kT$ , где  $\mu = g\sqrt{J(J+1)} \mu_B$ .

**4.93.** В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов серебра (в нормальном состоянии) проходит через поперечное резко неоднородное магнитное поле и попадает на экран Э (рис. 4.5). При

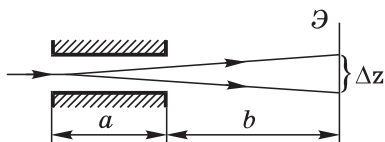


Рис. 4.5

каком значении градиента индукции магнитного поля расщепление пучка на экране  $\Delta z = 2,0$  мм, если  $a = 10$  см,  $b = 20$  см и скорость атомов  $v = 300$  м/с.

#### 4.94. Узкий пучок атомов

пропускают по методу Штерна и Герлаха через поперечное резко неоднородное магнитное поле. Найти:

а) максимальные значения проекций магнитных моментов атомов в состояниях  $^4F$ ,  $^6S$  и  $^5D$ , если известно, что пучок расщепляется соответственно на 4, 6 и 9 компонент;

б) на сколько компонент расщепится пучок атомов, находящихся в состояниях  $^3D_2$  и  $^5F_1$ ?

4.95. В одном из опытов по расщеплению узкого пучка по методу Штерна и Герлаха использовали атомы ванадия в основном состоянии  $^4F_{3/2}$ . Найти расстояние между крайними компонентами пучка на экране (см. рис. 4.5), если  $a = 10$  см,  $b = 20$  см,  $\partial B / \partial z = 23$  кГс/см и кинетическая энергия атомов  $K = 40$  мэВ.

4.96. Атом находится в магнитном поле с индукцией  $B = 3,00$  кГс. Определить:

а) полное расщепление в электронвольтах терма  $^1D$ ;

б) спектральный символ синглетного терма, полная ширина расщепления которого составляет 104 мкэВ.

4.97. Построить схему возможных переходов в магнитном поле между следующими состояниями:

а)  $^1D \rightarrow ^1P$ ; б)  $^1F \rightarrow ^1D$ .

Сколько компонент содержит спектральная линия, соответствующая каждому из этих двух переходов?

4.98. Спектральная линия  $\lambda = 612$  нм обусловлена переходом между двумя синглетными термами атома. Определить интервал  $\Delta\lambda$  между крайними компонентами этой линии в магнитном поле с индукцией  $B = 10,0$  кГс.

4.99. Интервал между крайними компонентами спектральной линии  $\lambda = 525,0$  нм, обнаруживающей простой эффект Зеемана, составляет  $\Delta\lambda = 22$  пм. Найти интервал в электронвольтах между соседними подуровнями зеемановского расщепления соответствующих термов.

**4.100.** Спектральным прибором с разрешающей способностью  $\lambda/\delta\lambda = 1,0 \cdot 10^5$  необходимо разрешить компоненты спектральной линии  $\lambda = 536,0$  нм, обусловленной переходом между двумя синглетными термами атома. При каком минимальном значении индукции магнитного поля это возможно, если наблюдение ведется:

а) параллельно и б) перпендикулярно направлению поля?

**4.101.** Магнитное поле в случае сложного эффекта Зеемана считается слабым, если магнитное расщепление терма значительно меньше естественного мультиплетного расщепления. При каком значении индукции магнитного поля интервал между соседними компонентами термов  $3^2P_{1/2}$  и  $3^2P_{3/2}$  атома натрия будет составлять  $\eta = 10\%$  от естественного расщепления  $3^2P$ -состояния, если длины волн дублета резонансной линии натрия равны 589,593 и 588,996 нм?

**4.102.** Воспользовавшись выражением для магнитного момента атома, получить формулу расщепления спектральных линий для сложного эффекта Зеемана в слабом магнитном поле — формулу (4.10).

**4.103.** Какой эффект Зеемана (простой, сложный) обнаруживают в слабом магнитном поле спектральные линии:

а)  $1P \rightarrow 1S$ ,  $2D_{5/2} \rightarrow 2P_{3/2}$ ,  $3D_1 \rightarrow 3P_0$ ,  $5I_5 \rightarrow 5H_4$ ;

б) атомов Н, He, Li, Be, В и С?

**4.104.** Построить схему возможных переходов между термами  $2P_{3/2}$  и  $2S_{1/2}$  в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии:

а) смещения зеемановских компонент в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ;

б) интервал частот  $\Delta\omega$  между крайними компонентами, если индукция магнитного поля  $B = 5,00$  кГс.

**4.105.** Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и вычислить смещения (в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ) зеемановских компонент спектральной линии:

а)  $2D_{3/2} \rightarrow 2P_{3/2}$ ; б)  $2D_{5/2} \rightarrow 2P_{3/2}$ .

**4.106.** Вычислить смещения (в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ) в слабом магнитном поле зеемановских  $\pi$ -компонент спектральной линии:

а)  $3D_3 \rightarrow 3P_2$ ; б)  $3D_2 \rightarrow 3P_2$ .



**4.107.** Показать с помощью векторной модели, что в сильном магнитном поле, когда связь  $L-S$  полностью разрывается, энергия магнитного взаимодействия атома  $\Delta E_B = (m_L + 2m_S)\mu_B B$ . Показать, что это приводит к простому эффекту Зеемана.

**4.108.** При каком значении индукции магнитного поля интервал между  $\sigma$ -компонентами резонансной линии лития будет в  $\eta = 10$  раз превосходить естественное расщепление этой линии? Длины волн дублета этой линии равны 670,795 и 670,780 нм.

**4.109.** Показать, что частота перехода между соседними подуровнями зеемановского расщепления терма совпадает с частотой прецессии механического момента атома в магнитном поле.

**4.110.** Для исследования магнитного резонанса вещество из атомов с собственными магнитными моментами подвергают одновременному воздействию двух магнитных полей: постоянного поля с индукцией  $B$  и перпендикулярного ему слабого переменного поля с частотой  $\omega$ . Показать, что наблюдаемые при этом резкие максимумы поглощения энергии возникают при  $\omega = g\mu_B B/\hbar$ .

**4.111.** Газ из атомов в состоянии  $^2D_{3/2}$  подвергли одновременному воздействию постоянного магнитного поля с индукцией  $B$  и перпендикулярного ему переменного магнитного поля с частотой 2,8 ГГц. При каком значении  $B$  возникает резонансное поглощение энергии?

**4.112.** Найти магнитный момент атомов никеля (в состоянии  $^3F$ ), которые обнаруживают резонансное поглощение энергии при одновременном воздействии постоянного магнитного поля с индукцией  $B = 2,00$  кГс и перпендикулярного ему переменного магнитного поля с частотой  $\nu = 3,50$  ГГц.

## 5. Двухатомная молекула

- Вращательная энергия двухатомной молекулы:

$$E_J = \hbar B J(J+1), \quad B = \hbar/2I, \quad (5.1)$$

где  $B$  — вращательная постоянная,  $I$  — момент инерции молекулы,  $J$  — вращательное квантовое число ( $J = 0, 1, 2, \dots$ ).

- Правило отбора  $J$ :  $\Delta J = \pm 1$ .
- Колебательная энергия двухатомной молекулы:

$$E_v = \hbar\omega(v + 1/2)[1 - x(v + 1/2)], \quad (5.2)$$

где  $\omega = \sqrt{\kappa/\mu}$  — частота колебаний,  $\kappa$  — коэффициент квазиупругой силы,  $\mu$  — приведенная масса молекулы,  $v = 0, 1, 2, \dots$  — колебательное квантовое число,  $x$  — коэффициент ангармоничности (для гармонического осциллятора  $x = 0$ ).

- Правило отбора  $v$ :

$$\Delta v = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } x = 0, \\ \pm 1, \pm 2, \dots & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

• Зависимость энергии взаимодействия от расстояния между ядрами двухатомной молекулы показана на рис. 5.1, где  $D$  — энергия диссоциации.

- Средняя энергия квантового гармонического осциллятора:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (5.3)$$

• На рис. 5.2 показана схема возникновения красного и фиолетового спутников при комбинационном рассеянии света.

• Состояние электрона в двухатомной молекуле характеризуют квантовыми числами  $n, l, \lambda, \sigma$ , где  $n$  и  $l$  — главное и орбитальное квантовые числа,  $\lambda = |l_z|$  — квантовое число, определяющее модуль проекции орбитального момента  $l$  на ось молекулы,  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\sigma$  — спиновое квантовое число,  $\sigma = \pm 1/2$ .

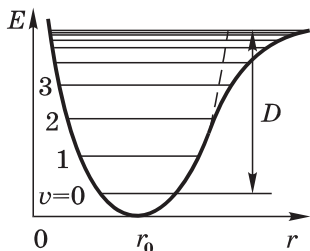


Рис. 5.1

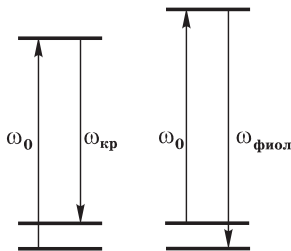


Рис. 5.2

Электроны с одинаковыми  $n$  и  $l$  называют *эквивалентными*.

● **Квантовые числа**, характеризующие суммарные значения проекций механических моментов  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{J}$  на ось двухатомной молекулы:

$$\Lambda = \left| \sum_i \pm \lambda_i \right|, \quad \Lambda = 0, 1, 2, \dots, L;$$

$$\Sigma = \sum_i (\pm \sigma_i), \quad \Sigma = S, S-1, \dots, -S;$$

$$\Omega = \Lambda + \Sigma, \quad \Omega = (\Lambda + S), (\Lambda + S - 1), \dots, (\Lambda - S).$$

Для термов с  $\Lambda = 0$  ориентация спина относительно оси отсутствует, и квантовые числа  $\Sigma$  и  $\Omega$  физического смысла не имеют.

● **Обозначения состояний отдельных электронов и электронной оболочки молекулы:**

символ:  $\sigma, \pi, \delta, \phi, \dots$

$\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$

символ:  $\Sigma, \Pi, \Lambda, \Phi, \dots$

$\Lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$

## Вращательные, колебательные и электронные состояния

**5.1.** Найти с помощью таблиц Приложения для молекул  $\text{H}_2$  и  $\text{NO}$ :

а) энергию, необходимую для возбуждения их на первый вращательный уровень ( $J = 1$ );

б) угловую скорость вращения в состоянии с  $J = 1$ .

**5.2.** Найти для молекулы  $\text{HCl}$  квантовые числа  $J$  двух соседних вращательных уровней, с разностью энергий 7,86 мэВ.

**5.3.** Для двухатомной молекулы известны интервалы между тремя последовательными вращательными уровнями:  $\Delta E_1 = 0,20$  мэВ и  $\Delta E_2 = 0,30$  мэВ. Найти вращательную энергию среднего уровня.

**5.4.** Определить механический момент молекулы кислорода в состоянии с вращательной энергией 2,16 мэВ.

**5.5.** Найти температуры, при которых средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул  $\text{H}_2$  и  $\text{N}_2$  равна их вращательной энергии в состоянии с квантовым числом  $J = 1$ .

**5.6.** Вычислить с учетом кратности вырождения  $g$  вращательных уровней ( $g = 2J + 1$ ) отношение количеств молекул водорода, находящихся в чисто вращательных состояниях с  $J = 1$  и  $J = 2$  при  $T = 300$  К.

**5.7.** Имея в виду, что кратность вырождения вращательных уровней  $g = 2J + 1$ , найти вращательное квантовое число  $J_m$  наиболее заселенного вращательного уровня молекул кислорода при  $T = 300$  К. Изобразить примерный график заселенности вращательных уровней  $N_J/N_0$  в зависимости от  $J$  при этой температуре.

**5.8.** Найти коэффициенты квазиупругой силы молекулы  $\text{H}_2$  и молекулы  $\text{CO}$ .

**5.9.** Хорошим приближенным выражением для энергии взаимодействия атомов в двуатомной молекуле является формула Морзе:

$$U(r) = U_0 [1 - e^{-\alpha(r-r_0)}]^2,$$

где  $U_0$  и  $\alpha$  — положительные постоянные,  $r_0$  — равновесное межъядерное расстояние. Получить выражения для постоянных  $U_0$  и  $\alpha$  через энергию диссоциации  $D$  молекулы, ее собственную частоту  $\omega$  и приведённую массу  $\mu$ .

**5.10.** Найти энергию, необходимую для возбуждения молекулы водорода из основного состояния на первый колебательный уровень ( $v = 1$ ). Во сколько раз эта энергия больше энергии возбуждения данной молекулы на первый вращательный уровень ( $J = 1$ )?

**5.11.** Определить температуру, при которой средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул равна энергии, необходимой для возбуждения молекул  $\text{Cl}_2$  из основного состояния на первый колебательный уровень ( $v = 1$ ).

**5.12.** Найти разность энергий состояний с квантовыми числами  $v' = 1$ ,  $J' = 0$ , и  $v = 0$ ,  $J = 5$  у группы  $\text{OH}$ .

**5.13.** Вычислить для молекулы  $\text{HF}$  число вращательных уровней, расположенных между основным и первым возбуж-

денным колебательными уровнями, считая вращательные состояния не зависящими от колебательных.

**5.14.** Определить максимально возможное колебательное квантовое число, соответствующую колебательную энергию и энергию диссоциации двухатомной молекулы, собственная частота колебаний которой  $\omega$  и коэффициент ангармоничности  $x$ . Вычислить эти величины для молекулы водорода.

**5.15.** Вычислить коэффициент ангармоничности молекулы хлора, если известны ее частота колебаний и энергия диссоциации (см. таблицы Приложения).

**5.16.** Вычислить разность энергий диссоциации молекул, состоящих из тяжелого и легкого водорода,  $D_2$  и  $H_2$ , если известна частота колебаний молекулы  $H_2$ . Иметь в виду, что глубина потенциальной ямы для обеих молекул одинакова.

**5.17.** Найти отношение количеств молекул  $HBr$ , находящихся в чисто колебательных состояниях (без вращения) с квантовыми числами  $v = 2$  и  $v = 1$  при  $T = 910$  К. При какой температуре это отношение станет равным  $1 : 10$ ?

**5.18.** Определить с учетом вырождения вращательных уровней (см. задачу 5.6) отношение количеств молекул водорода в состояниях с квантовыми числами  $v' = 1$ ,  $J' = 0$  и  $v = 0$ ,  $J = 5$  при  $T = 1500$  К.

**5.19.** Вывести формулу (5.3).

**5.20.** Вычислить с помощью формулы (5.3) температуру, при которой:

а) средняя колебательная энергия молекулы хлора вдвое превышает ее нулевую колебательную энергию;

б) уровень, соответствующий средней колебательной энергии молекулы кислорода, совпадает с пятым вращательным уровнем этой молекулы ( $J = 5$ ,  $v = 0$ ).

**5.21.** Исходя из формулы (5.3), получить выражение для молярной колебательной теплоемкости двухатомного газа при постоянном объеме. Найти приближенный вид этого выражения для низких и высоких температур ( $kT \ll \hbar\omega$  и  $kT \gg \hbar\omega$ ).

**5.22.** Вычислить с помощью формулы (5.3) молярную колебательную теплоемкость при постоянном объеме газа, состоящего из молекул хлора при температурах 150, 300 и 450 К. Изобразить примерный график зависимости  $C_{\text{кол}}(T)$ .

**5.23.** Определить с помощью принципа Паули максимальное число эквивалентных  $\sigma$ -,  $\pi$ -, и  $\delta$ -электронов в двухатомной молекуле.

**5.24.** Двухатомная молекула имеет следующие электронные конфигурации (пять случаев):

- а) два эквивалентных  $\sigma$ -электрона;
- б) два неэквивалентных  $\sigma$ -электрона;
- в) один  $\sigma$ - и один  $\pi$ -электрон;
- г) два эквивалентных  $\pi$ -электрона;
- д) два неэквивалентных  $\pi$ -электрона.

Найти в каждом случае возможные электронные состояния молекулы, т. е. их символы  $^{2S+1}(\Lambda)$ .

**5.25.** Показать, что электронные конфигурации  $\pi^3$  и  $\delta^3$  (по три эквивалентных электрона) двухатомных молекул образуют те же состояния, что и конфигурации из одного  $\pi$ - и  $\delta$ -электрона соответственно.

**5.26.** Указать четность мультиплетностей электронных состояний следующих двухатомных молекул: CO, O<sub>2</sub>, NO и группы OH.

**5.27.** Определить возможные значения проекции суммарного механического момента электронной оболочки двухатомной молекулы на её ось в следующих электронных состояниях:  $^1\Sigma$ ,  $^3\Sigma$  и  $^2\Pi$ .

**5.28.** Найти возможные типы электронных термов двухатомной молекулы, незамкнутая электронная подоболочка которой содержит (три случая):

- а) один  $\sigma$ - и один  $\delta$ -электрон;
- б) один  $\sigma$ -, один  $\pi$ - и один  $\delta$ -электрон;
- в) один  $\sigma$ - и два эквивалентных  $\pi$ -электрона.

**5.29.** Определить возможные типы электронных термов группы OH, образующиеся из нормальных термов атомов кислорода ( $^3P$ ) и водорода ( $^2S$ ).

## Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние

**5.30.** Найти момент инерции группы CH и расстояние между ее ядрами, если частотные интервалы между соседними линиями чисто вращательного спектра этих молекул равны  $\Delta\omega = 5,50 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

**5.31.** Известны длины волн двух соседних линий чисто вращательного спектра молекул  $\text{HCl}$ : 117 и 156 мкм. Определить:

- а) постоянную вращения  $B$  и момент инерции этих молекул;
- б) вращательные квантовые числа уровней, между которыми происходят переходы, соответствующие этим линиям.

**5.32.** Определить, на сколько изменяется механический момент молекулы  $\text{CO}$  при испускании спектральной линии  $\lambda = 1,29$  мм, которая принадлежит чисто вращательному спектру.

**5.33.** Сколько линий содержит чисто вращательный спектр группы  $\text{OH}$ ?

**5.34.** В колебательно-вращательном спектре поглощения молекул  $\text{HBr}$  частоты нулевых линий, соответствующих запрещенным переходам ( $\Delta J = 0$ ) между основным и ближайшими возбужденными колебательными уровнями ( $v = 0$  и  $v' = 1, 2$ ), равны  $4,82 \cdot 10^{14}$  и  $9,48 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Определить частоту колебаний и коэффициент ангармоничности этих молекул.

**5.35.** Рассмотрим колебательно-вращательную полосу спектра двухатомной молекулы, для которой справедливо правило отбора  $\Delta J = \pm 1$ . Показать, что если вращательная постоянная одинакова для состояний, между которыми происходит переход, то частоты спектральных линий полосы равны

$$\omega = \omega_0 \pm 2Bk, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\omega_0$  — частота нулевой линии, запрещенной правилом отбора для  $J, B$  — вращательная постоянная.

**5.36.** Вычислить момент инерции и коэффициент ангармоничности молекулы  $\text{HF}$ , если частоты  $\omega$  четырех последовательно расположенных спектральных линий вращательной структуры полосы колебательного спектра равны (в единицах  $10^{14} \text{ с}^{-1}$ ): 7,302, 7,382, 7,540, 7,619. Известно, что эти линии отвечают переходам  $\Delta J = \pm 1$  и  $v' = 1 \rightarrow v = 0$ . Частота колебаний данной молекулы  $\omega = 7,801 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Вращательную постоянную считать одинаковой для всех уровней.

**5.37.** Найти относительный изотопический сдвиг  $\Delta\lambda/\lambda$  линий чисто вращательного спектра смеси молекул  $\text{H}^{35}\text{Cl}$  и  $\text{H}^{37}\text{Cl}$ .

**5.38.** Найти частоту колебаний  $\omega$  и коэффициент квазиупругой силы молекулы серы, если известно, что в колебательном

спектре комбинационного рассеяния света длины волн красного и фиолетового спутников, ближайших к несмещенной линии, равны 346,6 и 330,0 нм. Ангармоничностью пренебречь.

**5.39.** Определить частоту колебаний  $\omega$  молекулы HF, если в колебательном спектре комбинационного рассеяния света с длиной волны  $\lambda = 435,0$  нм разность длин волн ближайших к несмещенной линии красного и фиолетового спутников  $\Delta\lambda = 154,0$  нм. Ангармоничность молекулы  $x = 0,0218$ .

**5.40.** Найти отношение интенсивностей фиолетового и красного спутников, ближайших к несмещенной линии, в колебательном спектре комбинационного рассеяния света молекул хлора при  $T = 300$  К. Во сколько раз изменится это отношение при увеличении температуры вдвое?

**5.41.** Показать, что для молекул, у которых правило отбора вращательного квантового числа  $\Delta J = \pm 1$ , во вращательном спектре комбинационного рассеяния света действует правило отбора  $\Delta J = 0, \pm 2$ .

**5.42.** Во вращательном спектре комбинационного рассеяния света частоты смещенных компонент (красных и фиолетовых спутников) двухатомных молекул определяются в случае правила отбора  $\Delta J = 0, \pm 2$  формулой

$$\omega = \omega_0 \pm 2B(2k + 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\omega_0$  — частота несмещенной компоненты,  $B$  — вращательная постоянная.

**а)** Получить эту формулу.

**б)** Определить момент инерции и расстояние между ядрами молекулы кислорода, если разность частот двух соседних красных спутников  $\Delta\omega = 1,09 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

**5.43.** Во вращательном спектре комбинационного рассеяния света с длиной волны  $\lambda = 546,1$  нм разность длин волн красного и фиолетового спутников, ближайших к несмещенной линии, составляет для молекул азота  $\Delta\lambda = 0,72$  нм. Имея в виду правило отбора  $\Delta J = 0, \pm 2$ , найти вращательную постоянную  $B$  и момент инерции данных молекул.



## 6. Твердое тело

- **Период идентичности** — расстояние между соседними одинаковыми атомами вдоль определенного направления в кристаллической решетке.

- **Межплоскостное расстояние** для простой кубической решетки:

$$d = a / \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}, \quad (6.1)$$

где  $a$  — постоянная решетки,  $h, k, l$  — миллеровские индексы рассматриваемой системы плоскостей.

- **Формула Брэгга–Вульфа:**

$$2d \sin \vartheta = n\lambda, \quad (6.2)$$

где  $\vartheta$  — угол скольжения,  $n$  — порядок отражения,  $\lambda$  — длина волны.

- **Условия, при которых возможны отражения  $n$ -го порядка от системы плоскостей ( $h^*k^*l^*$ ), где  $h^* = nh, k^* = nk, l^* = nl$ :**

для объемно центрированных решеток — если сумма  $h^* + k^* + l^*$  четная;

для гранецентрированных решеток — если  $h^*, k^*, l^*$  имеют одинаковую четность.

- **Структура кристаллов NaCl и CsCl** показана на рис. 6.1.

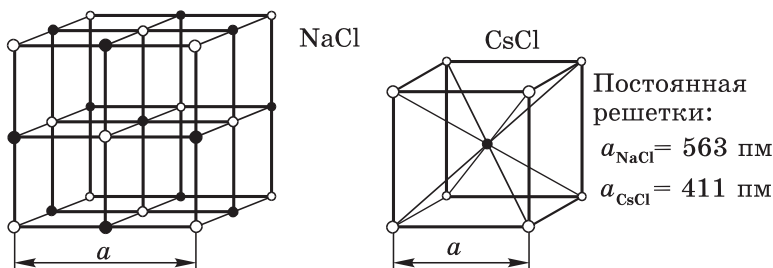


Рис. 6.1

- **Формула Дебая** — молярная колебательная энергия кристалла:

$$E = 9R\Theta \left[ \frac{1}{8} + \left( \frac{T}{\Theta} \right)^4 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right], \quad (6.3)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\Theta$  — характеристическая (дебаевская) температура:

$$\Theta = \hbar \omega_{\text{макс}} / k,$$

$\omega_{\text{макс}}$  — максимальная частота колебаний, определяемая из условия, что полное число колебаний равно числу колебательных степеней свободы кристалла.

- Молярная колебательная теплоемкость кристалла при  $T \ll \Theta$ :

$$C = (12\pi^4/5)R(T/\Theta)^3. \quad (6.4)$$

- Концентрация свободных электронов с энергией в интервале  $(E, E + dE)$ :

$$n(E)dE = f(E)g(E)dE = \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\sqrt{E}dE}{1 + \exp[(E - E_F)/kT]}, \quad (6.5)$$

где  $f(E) = 1/(1 + e^{(E - E_F)/kT})$  — функция Ферми-Дирака,  $g(E)$  — плотность состояний,  $E_F$  — уровень Ферми. Для металлов

$$E_F = E_{F0} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_{F0}} \right)^2 \right], \quad E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3},$$

где  $E_{F0}$  — уровень Ферми при  $T = 0$  К,  $n$  — концентрация свободных электронов.

В этих формулах за начало отсчета  $E$  и  $E_F$  принято дно зоны проводимости.

- Постоянная Холла для полупроводников:

$$R_H = \frac{E_{\perp}}{jB} = \frac{\kappa_*}{e} \frac{n_e b_e^2 - n_d b_d^2}{(n_e b_e + n_d b_d)}, \quad (6.6)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $n_e$  и  $n_d$  — концентрации электронов и дырок,  $b_e$  и  $b_d$  — их подвижности, коэффициент  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ).

## Структура кристаллов

**6.1.** Кристаллические решетки натрия и меди кубические объемно- и гранецентрированные соответственно. Зная, кроме того, плотность этих металлов, найти постоянные их кристаллических решеток.

**6.2.** Найти плотность кристаллов NaCl и CsCl (см. рис. 6.1).

**6.3.** Получить формулу (6.1).

**6.4.** Зная постоянную  $a$ , вычислить межплоскостные расстояния  $d_{100}$ ,  $d_{110}$ ,  $d_{111}$  и их отношение для:

а) простой; б) объемноцентрированной и в) гранецентрированной кубических решеток.

**6.5.** Вычислить периоды идентичности вдоль прямых  $[111]$  и  $[011]$  в решетке кристалла  $\text{AgBr}$ , плотность которого  $6,5 \text{ г/см}^3$ . Решетка кубическая типа  $\text{NaCl}$ .

**6.6.** Определить отношение периодов идентичности вдоль направлений  $[100]$ ,  $[110]$  и  $[111]$  для простой, объемно- и гранецентрированной кубических решеток.

**6.7.** Определить структуру элементарной ячейки вольфрама, принадлежащего к кубической системе с осями симметрии 4-го порядка, если известно, что межплоскостное расстояние для системы плоскостей  $(100)$   $d_1 = 158 \text{ пм}$ , а для плоскостей  $(110)$   $d_2 = 223 \text{ пм}$ .

**6.8.** Параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda$  падает в произвольном направлении на плоскую прямоугольную решетку с периодами  $a$  и  $b$ . Какая картина будет наблюдаться на экране, расположенном параллельно решетке? Найти направления на дифракционные максимумы.

**6.9.** Плоский пучок рентгеновского излучения падает на трехмерную прямоугольную простую решетку с периодами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найти направления на дифракционные максимумы, если направление падающего пучка параллельно ребру  $a$  элементарной ячейки. Для каких длин волн будут наблюдаться максимумы?

**6.10.** Плоский пучок рентгеновского излучения падает в произвольном направлении на простую кубическую решетку с постоянной  $a$ . Для каких длин волн возможны дифракционные максимумы?

**6.11.** Показать на примере простой кубической решетки, что формула Брэгга–Вульфа является следствием условий Лауэ.

**6.12.** Найти постоянную решетки  $\text{AgBr}$  (тип решетки  $\text{NaCl}$ ), если известно, что  $K_\alpha$ -линия ванадия отражается в первом порядке от системы плоскостей  $(100)$  под углом скольжения  $\vartheta = 25,9^\circ$ .

**6.13.** Вычислить длину волны рентгеновского излучения, которое отражается во втором порядке от системы плоскостей

(100) кристалла NaCl (см. рис. 6.1) под углом скольжения  $\vartheta = 25,0^\circ$ . Найти также угол, под которым это излучение отражается в максимальном порядке от данной системы плоскостей.

**6.14.** Монокристалл NaCl (см. рис. 6.1) снимают по методу Лауэ вдоль оси 4-го порядка (ось  $z$ ) на фотопластинку, отстоящую от кристалла на  $L = 50$  мм. Найти для максимумов, соответствующих отражениям от плоскостей (031) и (221):

- а) их расстояния до центра лауэграммы;
- б) длины волн рентгеновского излучения.

**6.15.** Пучок рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda$  падает на кристалл NaCl (см. рис. 6.1), поворачивающийся вокруг оси симметрии 4-го порядка, причем направление падающего пучка перпендикулярно оси вращения. Определить  $\lambda$ , если направления на максимумы 2-го и 3-го порядков от системы плоскостей (100) образуют между собой угол  $\alpha = 60^\circ$ .

**6.16.** Пучок рентгеновского излучения с  $\lambda = 71$  пм падает на вращающийся монокристалл металла с кубической решеткой, который расположен на оси цилиндрической съемочной камеры радиусом 57,3 мм. Направление падающего пучка перпендикулярно оси вращения (ось камеры). Полученная рентгенограмма состоит из системы мак-

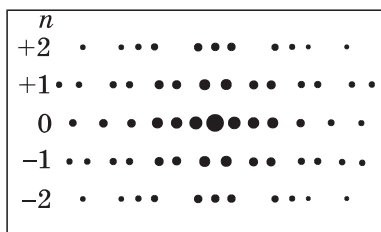


Рис. 6.2

симумов, расположенных по слоевым линиям (рис. 6.2). Установить тип решетки металла (объемно- или гранецентрированная) и ее постоянную  $a$ , если расстояние между слоевыми линиями  $n = +2$  и  $n = -2$  при вращении вокруг направлений  $[110]$  и  $[111]$  равно соответственно 65,0 и 23,5 мм.

**6.17.** Какие порядки отражения моноэнергетического рентгеновского излучения пропадут при переходе от простой кубической решетки к объемно- и гранецентрированной? Постоянные всех трех решеток предполагаются одинаковыми. Рассмотреть случаи отражения от плоскостей (100), (110) и (111).

**6.18.** Установить миллеровские индексы  $h, k, l$  плоскостей, отражение от которых дает первые пять линий дебайграммы для грани- и объемноцентрированной кубических решеток.

**6.19.** Вычислить углы дифракции 2 $\theta$  для первых пяти линий дебайграммы, снятой на излучении  $\lambda = 154$  пм на образце:

а) алюминия (решетка кубическая гранецентрированная с постоянной  $a = 404$  пм);

б) ванадия (решетка кубическая объемноцентрированная,  $a = 303$  пм).

**6.20.** Определить индексы отражений  $h^*$ ,  $k^*$ ,  $l^*$  и соответствующие им межплоскостные расстояния для трех линий дебайграммы алюминия, которым отвечают углы дифракции (2 $\theta$ ) 17°30', 33°50' и 54°20' при  $\lambda = 71$  пм. Решетка алюминия кубическая гранецентрированная с периодом  $a = 404$  пм.

**6.21.** Узкий пучок электронов с кинетической энергией  $K = 25$  кэВ проходит сквозь тонкую поликристаллическую пленку и образует на плоском экране на расстоянии  $L = 200$  мм от пленки систему дифракционных колец. Диаметр первого кольца  $D = 13,0$  мм. Вычислить постоянную решетки. Известно, что решетка кубическая гранецентрированная.

**6.22.** В электронограмме дебаевского типа от поликристаллической пленки с кубической решеткой отношение диаметров первых двух дифракционных колец равно 1 : 1,4. Имея в виду, что диаметры этих колец значительно меньше расстояния между пленкой и экраном, определить тип решетки (гране- или объемноцентрированная).

## Квантовая теория теплоемкости кристаллов

**6.23.** Определить колебательную энергию и теплоемкость кристалла при температуре  $T$ , считая каждый атом решетки квантовым гармоническим осциллятором и полагая, что кристалл состоит из  $N$  одинаковых атомов, колеблющихся независимо друг от друга с одинаковой частотой  $\omega$ . Упростить полученное выражение для теплоемкости при  $kT \gg \hbar\omega$  и  $kT \ll \hbar\omega$ .

**6.24.** Рассмотрим одномерную модель кристалла — цепочку из  $N$  одинаковых атомов, у которой крайние атомы неподвижны. Пусть  $a$  — период цепочки,  $m$  — масса атома,  $\kappa$  — коэффициент квазиупругой силы. Учитывая взаимодействие лишь между соседними атомами, найти:

а) уравнение колебаний данной цепочки и спектр собственных значений волнового числа  $k$ ;

б) зависимость частоты колебаний цепочки от волнового числа, а также полное число возможных колебаний и соответствующую ей длину волны;

в) зависимость фазовой скорости от волнового числа и отношение фазовых скоростей, соответствующих самым длинным и самым коротким волнам;

г) число колебаний цепочки в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

**6.25.** Считая скорость распространения колебаний не зависящей от частоты  $\omega$  и равной  $v$ , найти для одномерного кристалла — цепочки из  $N$  одинаковых атомов длиной  $L$ :

а) число продольных колебаний в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ ;

б) дебаевскую температуру  $\Theta$ ;

в) молярную колебательную энергию и молярную теплоемкость при температуре  $T$ ; упростить полученное выражение для теплоемкости, если  $T \gg \Theta$  и  $T \ll \Theta$ .

**6.26.** Для двумерного кристалла число нормальных колебаний одной поляризации в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  определяется формулой

$$dZ_{\omega} = (S/2\pi v^2) \omega d\omega,$$

где  $S$  — площадь кристалла,  $v$  — скорость распространения колебаний. Считая  $v$  не зависящим от  $\omega$ , найти для плоской квадратной решетки из одинаковых атомов, содержащей  $n_0$  атомов на единицу площади:

а) дебаевскую температуру  $\Theta$ ;

б) молярную колебательную энергию и молярную теплоемкость при температуре  $T$ ; упростить полученное выражение для теплоемкости при  $T \gg \Theta$  и  $T \ll \Theta$ .

**6.27.** То же, что в предыдущей задаче, но для трехмерного кристалла — кубической решетки, содержащей  $n_0$  одинаковых атомов на единицу объема. Известно, что для трехмерного кристалла число нормальных колебаний одной поляризации в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  определяется формулой

$$dZ_{\omega} = (V/2\pi^2 v^3) \omega^2 d\omega,$$

где  $V$  — объем кристалла.

**6.28.** Считая, что скорости распространения продольных и поперечных колебаний не зависят от частоты и равны соответственно  $v_l$  и  $v_t$ , найти число колебаний  $dZ$  в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  и дебаевскую температуру:

а) двумерного кристалла — кубической решетки из  $N$  одинаковых атомов, если площадь решетки  $S$ ;

б) трехмерного кристалла — кубической решетки из  $N$  одинаковых атомов, если объем решетки  $V$ .

**6.29.** Вычислить дебаевскую температуру железа, в котором скорости распространения продольных и поперечных колебаний равны соответственно 5,85 и 3,23 км/с.

**6.30.** Оценить скорость звука в кристалле с дебаевской температурой  $\Theta = 300$  К и межатомным расстоянием  $a = 0,25$  нм.

**6.31.** Вычислить с помощью формулы Дебая:

а) отношение  $\Delta E/E_0$ , где  $\Delta E$  — энергия, которую необходимо сообщить кристаллу при нагревании его от 0 К до  $\Theta$ , а  $E_0$  — энергия нулевых колебаний;

б) энергию, которую необходимо сообщить молю кристалла алюминия, чтобы нагреть его от  $\Theta/2$  до  $\Theta = 374$  К.

**6.32.** Используя формулу Дебая, вычислить молярную теплоемкость кристаллической решетки при температурах  $\Theta/2$  и  $\Theta$ . На сколько процентов отличается теплоемкость при температуре  $\Theta$  от классического значения?

**6.33.** Вычислить дебаевскую температуру  $\Theta$  и энергию (Дж/моль) нулевых колебаний серебра, если известно, что при температурах 16 и 20 К его теплоемкость равна соответственно 0,87 и 1,70 Дж/(К·моль).

**6.34.** На рис. 6.3 показан график, характеризующий зависимость теплоемкости кристалла от температуры (по Дебаю). Здесь  $C_{\text{кл}}$  — классическая теплоемкость,  $\Theta$  — дебаевская температура. С помощью этого графика найти:

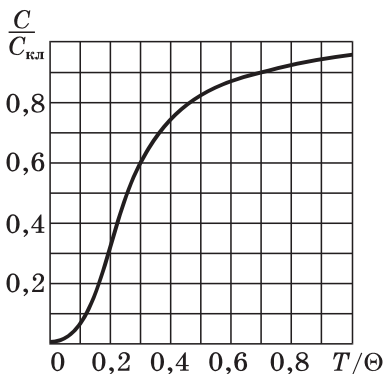


Рис. 6.3

а) дебаевскую температуру для серебра, если при  $T = 65 \text{ К}$  его молярная теплоемкость равна  $15 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})$ ;

б) молярную теплоемкость алюминия при  $T = 100 \text{ К}$ , если при  $T = 280 \text{ К}$  она равна  $22,5 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})$ ;

в) максимальную частоту колебаний  $\omega_{\text{макс}}$  для меди, у которой при  $T = 125 \text{ К}$  теплоемкость отличается от классической на  $25\%$ .

**6.35.** Оценить максимальные значения энергии и импульса фонона (звукового кванта) в алюминии, дебаевская температура которого  $\Theta = 374 \text{ К}$ .

**6.36.** В кристалле из  $N$  одинаковых атомов число фононов в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  при температуре  $T$  равно

$$n(\omega)d\omega = 9N \left( \frac{\hbar}{k\Theta} \right)^3 \frac{\omega^2 d\omega}{\exp[\hbar\omega/kT - 1]},$$

где  $\Theta$  — дебаевская температура кристалла.

а) Получить это выражение с помощью формулы для  $dZ_{\omega}$  из задачи **6.27**.

б) Определить наиболее вероятные значения энергии и частоты фононов при температуре  $\Theta/2$ .

в) Найти температуру, начиная с которой наиболее вероятная частота фононов равна их максимальной частоте. Температура  $\Theta$  предполагается известной.

г) Найти характер зависимости полного числа фононов в кристалле от температуры  $T$  при  $T \ll \Theta$  и  $T \gg \Theta$ .

**6.37.** Рассеяние света прозрачным твердым телом можно рассматривать как результат процесса рассеяния фотонов на фононах, считая при этом, что фотоны в веществе обладают импульсом  $\hbar\omega/c'$ , где  $c'$  — скорость света в среде. Используя законы сохранения энергии и импульса, показать, что свет, рассеянный под углом  $\vartheta$ , будет содержать кроме несмещенной компоненты две смещенные, относительный сдвиг которых  $\Delta\omega/\omega = 2(v/c')\sin(\vartheta/2)$ , где  $\omega$  — частота падающего света,  $v$  — скорость звука в среде.

**6.38.** Некоторые вещества (например, парамагнитные соли) при очень низких температурах обнаруживают теплоемкость  $C_i$ , во много раз превосходящую решеточную теплоемкость  $C_{\text{реш}}$ . Установлено, что теплоемкость  $C_i$  обусловлена внутренними степенями свободы, в частности взаимодействием спинов с внутрик-



ристаллическими полями. Полагая, что каждый атом независимо от других может ориентироваться своим спином параллельно или антипараллельно относительно некоторого направления и что разность энергий атома в этих состояниях равна  $\Delta E$ , найти:

- а) зависимость  $C_i$  от температуры  $T$ ;
- б) отношение  $kT/\Delta E$ , при котором  $C_i$  имеет максимум;
- в) отношение  $C_{i\text{макс}}/C_{\text{реш}}$  для случая, когда  $C_{i\text{макс}}$  отвечает температуре  $T = \Theta/100$ , где  $\Theta$  — дебаевская температура.

### Свободные электроны в металлах и полупроводниках

**6.39.** Найти с помощью соотношения неопределенностей число свободных электронов с кинетическими энергиями в интервале  $(K, K + dK)$  в металле при температуре  $T = 0$  К. Металл взять в форме прямоугольного параллелепипеда объемом  $V$ . При определении числа квантовых состояний считать, что физически различны только те состояния, у которых проекции импульса электрона различаются не меньше, чем на  $\Delta p_x = 2\pi\hbar/l_x$ , где  $l_x$  — ребро параллелепипеда (аналогично для  $\Delta p_y$  и  $\Delta p_z$ ).

**6.40.** Получить с помощью формулы (6.5) выражение для максимальной кинетической энергии  $K_{\text{макс}}$  свободных электронов в металле при температуре 0 К, если их концентрация равна  $n$ . Вычислить  $K_{\text{макс}}$  для серебра, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон.

**6.41.** Найти с помощью формулы (6.5) при температуре 0 К:

- а) среднюю кинетическую энергию свободных электронов в металле, если их максимальная кинетическая энергия  $K_{\text{макс}}$ ;
- б) суммарную кинетическую энергию свободных электронов в  $1 \text{ см}^3$  золота, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон.

**6.42.** Найти долю свободных электронов в металле при температуре 0 К, кинетическая энергия которых больше половины максимальной.

**6.43.** Вычислить температуру идеального газа, у которого средняя кинетическая энергия частиц равна средней кинетической энергии свободных электронов в меди при температуре 0 К. Считать, что на каждый атом приходится один свободный электрон.

**6.44.** Найти интервал в электронвольтах между соседними уровнями свободных электронов в металле при температуре 0 К вблизи уровня Ферми, если объем металла  $V = 1,00 \text{ см}^3$  и концентрация свободных электронов  $n = 2,0 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

**6.45.** Часто при расчетах пренебрегают различием значений  $E_F$  и  $E_{F0}$ . Оценить, на сколько процентов отличается  $E_F$  от  $E_{F0}$  для вольфрама при температуре, близкой к его температуре плавления ( $3370^\circ\text{C}$ ). Считать, что на каждый атом приходится два свободных электрона.

**6.46.** Найти для металла при температуре 0 К, максимальная скорость свободных электронов которого равна  $v_m$ , средние значения:

- а) скорости свободных электронов;
- б) их обратной скорости,  $1/v$ .

**6.47.** Вычислить наиболее вероятную и среднюю скорости свободных электронов в меди при температуре 0 К, если известно, что их концентрация равна  $8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

**6.48.** Показать на примере простой кубической решетки, содержащей по одному свободному электрону на атом, что минимальная дебройлевская длина волны свободных электронов при 0 К приблизительно равна удвоенному расстоянию между соседними атомами.

**6.49.** Получить функцию распределения свободных электронов по дебройлевским длинам волн в металле при температуре 0 К. Изобразить ее график.

**6.50.** Концентрация свободных электронов в металлическом натрии  $n = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Найти давление  $p$  электронного газа при 0 К. Показать, что  $p = \frac{2}{3}E$ , где  $E$  — объемная плотность его кинетической энергии.

**6.51.** Электропроводность металла  $\sigma = ne^2\tau/m$ , где  $n$  — концентрация свободных электронов,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $\tau$  — время релаксации, которое связано со средней длиной свободного пробега электрона соотношением  $\langle\lambda\rangle = \tau\langle v\rangle$ ,  $\langle v\rangle$  — средняя скорость свободных электронов. Вычислить  $\tau$ ,  $\langle\lambda\rangle$  и подвижность свободных электронов меди, если  $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и удельное сопротивление  $\rho = 1,60 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . Сравнить полученное значение  $\langle\lambda\rangle$  со средним расстоянием между соседними атомами меди.

**6.52.** Вычислить коэффициент преломления металлического натрия для электронов с кинетической энергией  $K = 135$  эВ. Считать, что на каждый атом приходится один свободный электрон.

**6.53.** Пусть свободные электроны под действием некоторой причины сместились на расстояние  $x$  перпендикулярно поверхности металлической пластины. В результате возникнут поверхностные заряды и соответствующая возвращающая сила, что приведет к возбуждению плазменных колебаний. Определить частоту  $\omega_0$  этих колебаний в меди, концентрация свободных электронов у которой  $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Какова энергия плазменных волн в меди?

**6.54.** Опыт показывает, что щелочные металлы становятся прозрачными в ультрафиолетовой части спектра. Исходя из модели свободных электронов, найти граничную длину волны света, начиная с которой будет наблюдаться это явление у металлического натрия. Концентрация свободных электронов у него  $n = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

**6.55.** Щелочные металлы обнаруживают парамагнетизм, не зависящий от температуры. Он может быть объяснен так. При включении внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$  свободные электроны с антипараллельными вектору  $\mathbf{B}$  спинами начнут поворачиваться вдоль  $\mathbf{B}$ , но при этом в соответствии с принципом Паули они будут переходить на более высокие незанятые уровни. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока уменьшение магнитной энергии электронов не сравняется с увеличением их кинетической энергии. Найти отсюда парамагнитную восприимчивость металла в слабом магнитном поле, если концентрация свободных электронов  $n = 2,00 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

**6.56.** Средняя энергия свободных электронов в металле при температуре  $T$  равна

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_{F0} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_{F0}} \right)^2 \right].$$

Найти с помощью этой формулы для серебра с концентрацией свободных электронов  $6,0 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ :

а) отношение теплоемкостей электронного газа и кристаллической решетки при  $T = 300 \text{ К}$ , если дебаевская температура равна  $210 \text{ К}$ ;

б) температуру  $T$ , при которой теплоемкость электронного газа станет равной теплоемкости решетки.

**6.57.** Концентрация свободных электронов в металле со скоростями в интервале  $(v, v + dv)$  определяется следующим выражением:

$$n(v)dv = 2 \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{dv}{1 + \exp[(E - E_F)/kT]}, \quad dv = dv_x dv_y dv_z.$$

а) Получить это выражение исходя из формулы (6.5).

б) Найти при температуре  $0 \text{ К}$  концентрацию свободных электронов с проекциями скоростей в интервале  $(v_x, v_x + dv_x)$ , если максимальная скорость свободных электронов равна  $v_m$ .

**6.58.** Доказать с помощью формулы из предыдущей задачи, что при контакте двух различных металлов их уровни Ферми находятся на одной высоте.

**6.59.** Электроды вакуумного фотоэлемента (один цезиевый, другой медный) замкнуты снаружи накоротко. Цезиевый электрод освещают монохроматическим электромагнитным излучением. Найти:

а) длину волны излучения, при которой появится фототок;

б) максимальную скорость фотоэлектронов, подлетающих к медному электроду, если длина волны излучения равна  $220 \text{ нм}$ .

**6.60.** Показать с помощью формулы из задачи **6.57**, что число термоэлектронов, вылетающих ежесекундно с единицы поверхности металла со скоростями в интервале  $(v, v + dv)$ , равно

$$v(v)dv = 2\pi(m/2\pi\hbar)^3 e^{-(A+K)/kT} v^3 dv,$$

где  $K$  — кинетическая энергия термоэлектрона,  $A$  — работа выхода с поверхности металла. Иметь в виду, что  $A \gg kT$ .

**6.61.** Найти с помощью формулы из предыдущей задачи:

а) среднюю кинетическую энергию термоэлектронов;

б) плотность тока термоэмиссии с поверхности металла;

в) работу выхода с поверхности металла, если увеличение температуры от  $1500$  до  $2000 \text{ К}$  приводит к возрастанию термоэмиссионного тока в  $5,0 \cdot 10^3$  раз.

**6.62.** Определив концентрации свободных электронов и дырок, показать, что при достаточно низких температурах уровень Ферми в чистом беспримесном полупроводнике находится посредине запрещенной зоны.

**6.63.** Концентрация свободных электронов в полупроводнике  $n$ -типа при достаточно низких температурах равна

$$n_e = \sqrt{2n_0} (mkT/2\pi\hbar^2)^{3/4} e^{-\Delta E/2kT},$$

где  $n_0$  — концентрация донорных атомов,  $E$  — их энергия активации.

**а)** Получить это выражение с помощью формулы (6.5).

**б)** Найти положение уровня Ферми.

**6.64.** Красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия при очень низких температурах соответствует длине волны  $\lambda_0 \approx 1,7$  мкм. Вычислить температурный коэффициент сопротивления этого полупроводника при  $T = 300$  К.

**6.65.** Найти минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон–дырка в чистом теллуре при температуре 0 К, если известно, что его электропроводимость возрастает в  $\eta = 5,2$  раза при увеличении температуры от  $T_1 = 300$  К до  $T_2 = 400$  К.

**6.66.** На рис. 6.4 показан график зависимости логарифма электропроводимости от обратной температуры ( $T$ , К) для

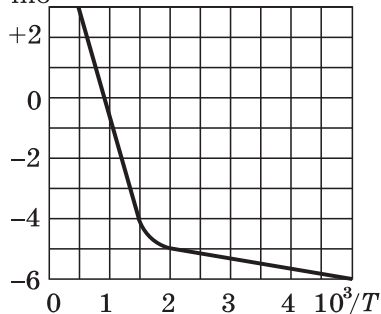


Рис. 6.4

кремния с примесью бора (полупроводник  $n$ -типа). Объяснить характер этого графика. Найти с его помощью ширину запрещенной зоны кремния и энергию активации атомов бора.

**6.67.** Образец из чистого беспримесного германия, у которого ширина запрещенной зоны 0,72 эВ, а подвижности электронов и дырок 3600 и 1800 см<sup>2</sup>/(В·с), находится при температуре 300 К в поле электромагнитного излучения. При этом его удельное сопротивление 43 Ом·см. Определить, какая доля электропроводимости образца обусловлена фотопроводимостью.

Указание: использовать решение задачи 6.62.

**6.68.** Удельное сопротивление чистого беспримесного германия при комнатной температуре  $\rho_0 = 50$  Ом·см. После включения источника света оно стало  $\rho_1 = 40$  Ом·см, а через  $t = 8,0$  мс, после выключения источника,  $\rho_2 = 45$  Ом·см. Найти среднее время жизни электронов и дырок.

**6.69.** Вычислить с помощью формулы из задачи 6.63 энергию активации донорных атомов в полупроводнике  $n$ -типа, если известно, что подвижность электронов  $500$  см<sup>2</sup>/(В·с), концентрация донорных атомов  $5,0 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup> и удельное сопротивление при температуре 50 К равно 1,5 кОм·см.

**6.70.** При  $T = 300$  К некоторый образец германия  $n$ -типа имеет удельное сопротивление  $\rho = 1,70$  Ом·см и постоянную Холла  $R_H = 7,0 \cdot 10^{-17}$  ед. СГС =  $6,3 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/Кл. Найти:

- а) концентрацию и подвижность электронов проводимости;
- б) их среднюю длину свободного пробега.

**6.71.** Пластинку из полупроводника  $p$ -типа шириной  $d = 10$  мм и длиной  $l = 50$  мм поместили в магнитное поле с индукцией  $B = 5,0$  кГс. К концам пластинки приложили постоянное напряжение  $U = 10,0$  В. При этом холловская разность потенциалов оказалась  $U_H = 50$  мВ и удельное сопротивление  $\rho = 2,5$  Ом·см. Определить постоянную Холла, концентрацию и подвижность дырок.

**6.72.** Рассмотрев характер движения электронов и дырок в полупроводнике с током во внешнем магнитном поле, найти зависимость постоянной Холла от концентрации и подвижности носителей тока.

**6.73.** Вычислить разность подвижностей электронов и дырок в чистом беспримесном германии, если известно, что в магнитном поле с индукцией  $B = 3,0$  кГс отношение поперечной напряженности электрического поля  $E_{\perp}$  к продольной  $E$  равно  $\eta = 0,060$ .

**6.74.** В некотором образце германия, у которого подвижность электронов в 2,1 раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдается. Найти для этого образца:

- а) отношение концентраций электронов проводимости и дырок;
- б) какая часть электропроводимости обусловлена электронами.

## 7. Ядро атома

- Радиус ядра, фм:

$$R = 1,4 A^{1/3}, \quad (7.1)$$

где  $A$  — массовое число ядра.

- Энергия связи ядра:

$$E_{\text{св}} = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - M, \quad (7.2)$$

где  $Z$  — зарядовый номер ядра,  $A$  — массовое число,  $m_{\text{H}}$ ,  $m_n$  и  $M$  — массы атома водорода, нейтрона и соответствующего атома.

Для расчетов удобнее пользоваться формулой

$$E_{\text{св}} = Z\Delta_{\text{H}} + (A - Z)\Delta_n - \Delta, \quad (7.3)$$

где  $\Delta_{\text{H}}$ ,  $\Delta_n$ ,  $\Delta$  — избыток массы ( $M - A$ ) атома водорода, нейтрона и атома, соответствующего данному ядру.

- Формула Вейцекера (полуэмпирическая) для энергии связи ядра, МэВ:

$$E_{\text{св}} = 14A - 13A^{2/3} - 0,584 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 19,3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{33,5}{A^{3/4}} \delta, \quad (7.4)$$

$$\text{где } \delta = \begin{cases} +1 & \text{при четных } A \text{ и } Z, \\ 0 & \text{при нечетном } A \text{ (} Z \text{ любое)}, \\ -1 & \text{при четном } A \text{ и нечетном } Z. \end{cases}$$

- Полный механический момент атома:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}, \quad F = J + I, \quad J + I - 1, \dots, |J - I|, \quad (7.5)$$

где  $\mathbf{J}$  — механический момент электронной оболочки атома,  $\mathbf{I}$  — механический момент ядра (спин ядра).

Для разрешенных переходов  $\Delta F = 0, \pm 1$ ;  $F = 0 \rightarrow F = 0$ .

- Магнитный момент ядра (точнее, его максимальная проекция):

$$\mu = gI\mu_{\text{я}}, \quad (7.6)$$

где  $g$  — гиромагнитный множитель,  $I$  — спин ядра,  $\mu_{\text{я}}$  — ядерный магнетон.

● **Гиромагнитный множитель нуклона**, находящегося в состоянии  $(l, j)$ , определяется как

$$g_j = g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l + 1}, \quad (7.7)$$

где знак плюс для  $j = l + 1/2$  и знак минус для  $j = l - 1/2$ ;  $g_s$  и  $g_l$  — спиновый и орбитальный гиромагнитные множители нуклона. Значения  $g_s$  для протона и нейтрона приведены в Приложении,  $g_l = 1$  для протона и  $g_l = 0$  для нейтрона.

● **Модель ядерных оболочек** (рис. 7.1). Здесь  $j$  — квантовое число полного момента нуклона; цифры в кружках — число нуклонов одного сорта (протонов или нейтронов), которые заполняют все уровни, расположенные ниже соответствующей пунктирной линии — границы оболочки. Заполнение уровней протонами и нейтронами происходит независимо и в соответствии с принципом Паули.

● **Четность  $P$  частицы** с орбитальным моментом  $l$  и внутренней четностью  $P_i$  определяется как

$$P = P_i (-1)^l. \quad (7.8)$$

● **Четность  $P$  системы** из двух частиц (и вообще из двух подсистем) с внутренними четностями  $P_1$  и  $P_2$  и с относительным орбитальным моментом  $l$ :

$$P = P_1 P_2 (-1)^l. \quad (7.9)$$

● **Четность системы  $n$  нуклонов** (или электронов) с орбитальными моментами  $l_1, l_2, \dots, l_n$ :

$$P = (-1)^{l_1 + l_2 + \dots + l_n}, \quad (7.10)$$

поскольку внутренние четности нуклона (и электрона) равны  $+1$ .

● **Основной закон радиоактивного распада:**

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T}, \quad (7.11)$$

где  $\lambda$  — постоянная распада,  $\tau$  — среднее время жизни радиоактивного ядра,  $T$  — его период полураспада.

● **Удельная активность** — это активность единицы массы вещества.

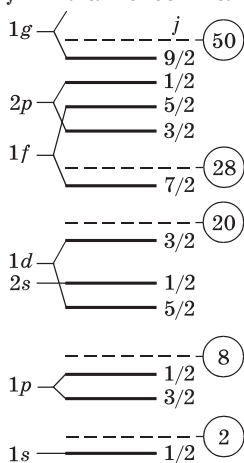


Рис. 7.1



## Энергия связи, спин и магнитный момент ядра

7.1. Найти с помощью формулы (7.3):

а) энергию связи на один нуклон в ядрах  ${}^6\text{Li}$  и  ${}^{23}\text{Na}$ ;

б) энергию связи ядра, которое имеет одинаковое число протонов и нейтронов, а радиус — в  $\eta = 1,10$  раза больший, чем у ядра  ${}^{27}\text{Al}$ .

7.2. Определить с помощью табличных значений масс атомов:

а) энергию связи нейтрона и  $\alpha$ -частицы в ядре  ${}^{21}\text{Ne}$ ;

б) энергию, необходимую для разделения ядра  ${}^{16}\text{O}$  на четыре одинаковые частицы.

7.3. Найти энергию возбуждения ядра  ${}^{207}\text{Pb}$ , возникающего при захвате ядром  ${}^{206}\text{Pb}$  нейтрона с пренебрежимо малой кинетической энергией.

7.4. Вычислить энергию связи нейтрона в ядре  ${}^{14}\text{N}$ , если известно, что энергия связи ядер  ${}^{14}\text{N}$  и  ${}^{13}\text{N}$  равна соответственно 104,66 и 94,10 МэВ.

7.5. Найти энергию, необходимую для разделения ядра  ${}^{16}\text{O}$  на  $\alpha$ -частицу и ядро  ${}^{12}\text{C}$ , если известно, что энергии связи ядер  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  и  ${}^4\text{He}$  равны соответственно 127,62, 92,16 и 28,30 МэВ.

7.6. Определить энергию, выделяющуюся при образовании двух  $\alpha$ -частиц в результате синтеза ядер  ${}^2\text{H}$  и  ${}^6\text{Li}$ , если известно, что энергия связи на один нуклон в ядрах  ${}^2\text{H}$ ,  ${}^4\text{He}$  и  ${}^6\text{Li}$  равна соответственно 1,11, 7,08 и 5,33 МэВ.

7.7. Вычислить с помощью формулы Вейцекера энергию связи следующих ядер:

а)  ${}^{40}\text{Ca}$ ; б)  ${}^{50}\text{V}$ ; в)  ${}^{107}\text{Ag}$ .

7.8. а) Определить с помощью формулы Вейцекера заряд  $Z$  ядра, имеющего наименьшую массу среди ядер с одинаковыми нечетными значениями массового числа  $A$ .

б) Предсказать с помощью полученной формулы характер активности (электронная или позитронная) следующих  $\beta$ -активных ядер:  ${}^{103}\text{Ag}$ ,  ${}^{127}\text{Sn}$  и  ${}^{141}\text{Cs}$ .

7.9. Воспользовавшись формулой Вейцекера, найти отношение  $Z^2/A$ , при котором деление ядра с четными  $Z$  и  $A$  на два одинаковых осколка с нечетными  $Z'$  и  $A'$  становится энергетически возможным.

**7.10.** Сколько компонент сверхтонкой структуры имеют основные термы следующих атомов:  ${}^3\text{H}({}^2S_{1/2})$ ,  ${}^6\text{Li}({}^2S_{1/2})$ ,  ${}^9\text{Be}({}^1S_0)$ ,  ${}^{15}\text{N}({}^4S_{3/2})$ ,  ${}^{35}\text{Cl}({}^2P_{3/2})$ ? В скобках указан основной терм электронной оболочки атома.

**7.11.** Определить спин ядра  ${}^{59}\text{Co}$ , основной терм атома которого  ${}^4F_{9/2}$  содержит восемь компонент сверхтонкого расщепления.

**7.12.** Найти число компонент сверхтонкого расщепления спектральных линий  ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$  и  ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$  для атомов  ${}^{39}\text{K}$ . Спин ядра предполагается известным (см. таблицы Приложения).

**7.13.** Два терма одного и того же атома имеют различные квантовые числа  $J_1$  и  $J_2$ . Какое квантовое число ( $J$  или  $I$ ) можно определить по числу компонент  $N$  сверхтонкого расщепления каждого терма в том случае, когда числа компонент для обоих термов:

а) одинаковы ( $N_1 = N_2$ );    б) различны ( $N_1 \neq N_2$ )?

**7.14.** Отношение интенсивностей компонент сверхтонкого расщепления спектральной линии  ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$  натрия равно приблизительно 10 : 6. Имея в виду, что сверхтонкая структура вызвана расщеплением терма  ${}^2S_{1/2}$  (расщепление терма  ${}^2P_{1/2}$  пренебрежимо мало), найти спин ядра  ${}^{23}\text{Na}$ .

**7.15.** Электронная оболочка атома создает в месте расположения ядра магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}_0$ , направление которого совпадает с направлением механического момента электронной оболочки  $\mathbf{J}$ . Добавочная энергия взаимодействия магнитного момента ядра с этим полем зависит от ориентации механических моментов  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{I}$ , которая определяется правилами пространственного квантования. Исходя из этих соображений, показать, что интервалы между соседними подуровнями, характеризуемыми квантовыми числами  $F$ ,  $F + 1$ ,  $F + 2$ , ..., относятся как  $(F + 1) : (F + 2) : \dots$ .

**7.16.** Терм  ${}^2D_{3/2}$  атома  ${}^{209}\text{Bi}$  имеет четыре компоненты сверхтонкого расщепления, причем отношение интервалов между соседними компонентами равно 4 : 5 : 6. Найти с помощью правила интервалов (см. предыдущую задачу) спин ядра, а также число компонент сверхтонкого расщепления спектральной линии  ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2D_{3/2}$ .

**7.17.** Найти полное число компонент зеемановского расщепления подуровней сверхтонкой структуры термина  $^2P_{3/2}$  атома  $^{35}\text{Cl}$  в *слабом* магнитном поле.

**7.18.** В сильном магнитном поле каждый из подуровней термина  $^2S_{1/2}$  атомов  $^{42}\text{K}$  и  $^{85}\text{Rb}$  расщепляется соответственно на пять и шесть компонент. Найти спин ядер этих атомов.

**7.19.** Вычислить угловые скорости прецессии электрона, протона и нейтрона в магнитном поле с индукцией  $B = 1,00$  кГс.

**7.20.** В опытах по изучению магнитным резонансным методом магнитных свойств атомов  $^{25}\text{Mg}$  в основном состоянии  $^1S_0$  обнаружено резонансное поглощение энергии, когда индукция постоянного магнитного поля  $B = 5,4$  кГс и частота переменного магнитного поля  $\nu_0 = 1,40$  МГц. Определить гиромантический множитель и, зная спин, магнитный момент ядра.

**7.21.** Магнитным резонансным методом исследовали магнитные свойства молекул  $^7\text{Li}^{19}\text{F}$ , у которых механический момент электронной оболочки равен нулю. При значении индукции магнитного поля  $B = 5,00$  кГс были обнаружены два резонансных пика на частотах переменного магнитного поля  $\nu_1 = 8,30$  МГц и  $\nu_2 = 20,0$  МГц, которые, как показали контрольные опыты, относятся соответственно к ядрам лития и фтора. Найти магнитные моменты этих ядер. Их спины считать известными.

**7.22.** В газовой модели ядра принимается, что нуклоны образуют газ, заполняющий объем ядра и подчиняющийся распределению Ферми. Оценить из этих соображений максимальную кинетическую энергию нуклонов в ядре, считая такой газ полностью вырожденным. Для оценки принять, что число протонов в ядре равно числу нейтронов.

**7.23.** С помощью модели ядерных оболочек написать конфигурации основных состояний ядер  $^7\text{Li}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{25}\text{Mg}$ .

**7.24.** Определить с помощью модели ядерных оболочек спин и четность основных состояний ядер  $^{13}\text{C}$  и  $^{13}\text{N}$ .

**7.25.** Найти с помощью модели ядерных оболочек спин и четность основного состояния следующих ядер:

а)  $^3\text{H}$ ; б)  $^3\text{He}$ ; в)  $^{15}\text{N}$  и  $^{15}\text{O}$ .

**7.26.** Определить с помощью модели ядерных оболочек спин и четность основных состояний ядер:  $^{17}\text{O}$ ,  $^{29}\text{Si}$ ,  $^{39}\text{K}$ ,  $^{45}\text{Sc}$  и  $^{63}\text{Cu}$ .

**7.27.** Используя векторную модель, показать, что гироманнитный множитель нуклона, находящегося в состоянии  $l, j$ , определяется формулой (7.7).

**7.28.** Воспользовавшись формулой (7.7), вычислить в состояниях  $s_{1/2}$ ,  $p_{1/2}$ , и  $p_{3/2}$  магнитные моменты:

а) нейтрона; б) протона.

**7.29.** Определить с помощью формулы (7.7) квантовое число  $j$  протона в  $f$ -состоянии, если известно, что в этом состоянии его магнитный момент  $\mu = 5,79 \mu_{\text{я}}$ .

**7.30.** Определить с помощью модели ядерных оболочек магнитные моменты в основном состоянии следующих ядер:

а)  $^3\text{H}$  и  $^3\text{He}$ ; б)  $^{17}\text{O}$  и  $^{39}\text{K}$ .

**7.31.** Спин ядра  $^{19}\text{F}$  вопреки предположению о равномерном заполнении ядерных оболочек равен не  $5/2$ , а  $1/2$ . Считая, что магнитный момент ядра, равный  $2,63 \mu_{\text{я}}$ , определяется непарным протоном, определить уровень, на котором этот протон находится.

### Закон радиоактивного распада

**7.32.** Найти вероятность распада радиоактивного ядра за промежуток времени  $t$ , если его постоянная распада равна  $\lambda$ .

**7.33.** Показать, что среднее время жизни радиоактивных ядер  $\tau = 1/\lambda$ , где  $\lambda$  — их постоянная распада.

**7.34.** Какая доля первоначального количества ядер  $^{90}\text{Sr}$ :

а) останется через 10 и 100 лет;

б) распадается за одни сутки; за 15 лет?

**7.35.** Вычислить постоянную распада, среднее время жизни и период полураспада радиоактивного нуклида, активность которого уменьшается в 1,07 раза за 100 сут.

**7.36.** Определить возраст древних деревянных предметов, у которых удельная активность  $^{14}\text{C}$  составляет  $\eta = 0,60$  удельной активности этого же нуклида в только что срубленных деревьях.

**7.37.** Свежеприготовленный препарат содержит  $m = 1,4$  мкг радиоактивного  $^{24}\text{Na}$ . Какую активность он будет иметь через сутки?

**7.38.** Определить число радиоактивных ядер в свежеприготовленном препарате  $^{82}\text{Br}$ , если известно, что через сутки его активность становится  $A = 7,4 \cdot 10^9$  Бк (0,20 Ки).

**7.39.** Найти период полураспада  $^{238}\text{U}$  относительно спонтанного деления, если известно, что число таких распадов в  $m = 1,00$  г чистого  $^{238}\text{U}$  равно  $\delta N = 25$  за  $\delta t = 60$  мин. Какое число  $\alpha$ -распадов за то же время происходит в этом образце?

**7.40.** Вычислить удельную активность чистого  $^{239}\text{Pu}$ .

**7.41.** Сколько миллиграммов  $\beta$ -активного  $^{89}\text{Sr}$  следует добавить к  $m = 1,0$  мг неактивного стронция, чтобы удельная активность препарата стала равной  $5,07 \cdot 10^{13}$  Бк/г (1370 Ки/г)?

**7.42.** В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего  $^{24}\text{Na}$  активностью  $A_0 = 2,1 \cdot 10^3$  Бк. Активность  $1,0 \text{ см}^3$  крови, взятой через  $t = 5,0$  ч после этого, оказалась  $A = 0,28$  Бк. Найти объем крови человека.

**7.43.** Радионуклид  $A$  образуется с постоянной скоростью так, что ежесекундно возникает  $q$  радиоактивных ядер. Постоянная распада этих ядер равна  $\lambda$ . Считая, что в момент  $t = 0$  число данных ядер  $N(0) = 0$ , найти закон накопления их со временем, т. е.  $N(t)$ .

**7.44.** Радионуклид  $^{27}\text{Mg}$  образуется с постоянной скоростью  $q = 5,0 \cdot 10^{10}$  ядро/с. В момент  $t = 0$  число ядер  $^{27}\text{Mg}$  равно нулю. Найти количество этих ядер, которое накопится в препарате через промежуток времени:

а) значительно превосходящий его период полураспада;

б) равный периоду полураспада.

**7.45.** Радионуклид  $^{124}\text{Sb}$  образуется с постоянной скоростью  $q = 1,0 \cdot 10^9$  ядро/с. С периодом полураспада  $T = 60$  сут он превращается в стабильный нуклид  $^{124}\text{Te}$ . Найти, через сколько времени после начала образования активность нуклида  $^{124}\text{Sb}$  станет  $A = 3,7 \cdot 10^8$  Бк (10 мКи).

**7.46.** В условиях предыдущей задачи определить, какая масса нуклида  $^{124}\text{Te}$  накопится в препарате за  $t = 120$  сут после начала его образования.

**7.47.** При радиоактивном распаде ядер нуклида  $A_1$  образуется радионуклид  $A_2$ . Их постоянные распада равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Полагая, что в момент  $t = 0$  препарат содержал только ядра нуклида  $A_1$  в количестве  $N_{10}$ , определить:

а) количество ядер нуклида  $A_2$  в момент  $t$ ;

б) момент времени  $t_m$ , когда количество ядер нуклида  $A_2$  оказывается максимальным.

**7.48.** То же, что в предыдущей задаче, но при условии  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .

### Альфа- и бета-распады

**7.49.** Покоящееся ядро  $^{213}\text{Po}$  испустило  $\alpha$ -частицу с кинетической энергией  $K_\alpha = 8,34$  МэВ. При этом дочернее ядро оказалось непосредственно в основном состоянии. Найти полную энергию, освобождаемую в этом процессе. Какую долю этой энергии составляет кинетическая энергия дочернего ядра? Какова скорость дочернего ядра?

**7.50.** Ядра нуклида  $^{210}\text{Po}$  испускают  $\alpha$ -частицы с кинетической энергией  $K = 5,30$  МэВ, причем практически все дочерние ядра образуются непосредственно в основном состоянии. Определить:

а) количество теплоты, которое выделяет  $m = 10,0$  мг препарата  $^{210}\text{Po}$  за период, равный среднему времени жизни этих ядер;

б) первоначальную активность препарата  $^{210}\text{Po}$ , если за время, равное его периоду полураспада, препарат выделил  $2,2$  кДж теплоты.

**7.51.** Распад ядер нуклида  $^{210}\text{Po}$  происходит из основного состояния и сопровождается испусканием двух групп  $\alpha$ -частиц: основной с кинетической энергией  $5,30$  МэВ и слабой (по интенсивности) с кинетической энергией  $4,50$  МэВ. Найти энергию  $\alpha$ -распада этих ядер и энергию  $\gamma$ -квантов, испускаемых дочерними ядрами.

**7.52.** Распад ядер нуклида  $^{226}\text{Th}$  происходит из основного состояния и сопровождается испусканием  $\alpha$ -частиц с кинетическими энергиями  $6,33$ ,  $6,23$ ,  $6,10$  и  $6,03$  МэВ. Рассчитать и построить схему уровней дочернего ядра.

**7.53.** При распаде ядер нуклида  $^{212}\text{Po}$  испускаются четыре группы  $\alpha$ -частиц: основная группа с кинетической энергией  $K_0 = 8,780$  МэВ и длиннопробежные с кинетическими энергиями  $K_i = 9,492$ ,  $10,422$  и  $10,543$  МэВ. Рассчитать и построить схему уровней ядра нуклида  $^{212}\text{Po}$ , если известно, что дочерние

ядра во всех случаях возникают непосредственно в основном состоянии.

**7.54.** Для испущенной ядром  $\alpha$ -частицы, кинетическая энергия  $K$  которой значительно меньше высоты кулоновского барьера, коэффициент прозрачности барьера

$$D \approx \exp(-\kappa/\sqrt{K}), \quad \kappa = \delta_* 2\pi Ze^2 \sqrt{2m}/\hbar,$$

где  $Ze$  — заряд дочернего ядра,  $m$  — масса  $\alpha$ -частицы,  $\delta_* = 1$  (СГС) или  $1/4\pi\epsilon_0$  (СИ). Вычислить с помощью этой формулы отношение проницаемостей для  $\alpha$ -частиц, испускаемых ядрами нуклида  $^{226}\text{Th}$ , с кинетическими энергиями 6,33 и 6,22 МэВ.

**7.55.** При  $\alpha$ -распаде ядер нуклида  $^{212}\text{Po}$  с первого возбужденного уровня наблюдаются два конкурирующих процесса: непосредственное испускание  $\alpha$ -частиц (длиннопробежная группа) или испускание  $\alpha$ -частиц после перехода возбужденного ядра в основное состояние (основная группа  $\alpha$ -частиц). При этом на каждые  $1,0 \cdot 10^6$   $\alpha$ -частиц основной группы испускается 35 длиннопробежных  $\alpha$ -частиц указанной группы. Найти постоянную распада данного возбужденного уровня по отношению к испусканию длиннопробежных  $\alpha$ -частиц, если среднее время жизни этого уровня  $\tau = 1,8$  пс.

**7.56.** Найти ширину первого возбужденного уровня ядер нуклида  $^{214}\text{Po}$  по отношению к испусканию  $\gamma$ -квантов, если известно, что при распаде с этого уровня на каждую  $\alpha$ -частицу основной группы испускается  $4,3 \cdot 10^{-7}$  длиннопробежных  $\alpha$ -частиц и 0,286  $\gamma$ -квантов. Постоянная распада по отношению к испусканию длиннопробежных  $\alpha$ -частиц равна  $2,0 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

**7.57.** Как определяются значения энергии, освобождаемой при  $\beta^-$ -распаде,  $\beta^+$ -распаде и  $K$ -захвате, если известны массы материнского и дочернего атомов и масса электрона?

**7.58.** Зная массу дочернего нуклида и энергию  $\beta$ -распада  $Q$ , найти массу нуклида:

- а)  $^6\text{He}$ , испытывающего  $\beta^-$ -распад,  $Q = 3,50$  МэВ;
- б)  $^{22}\text{Na}$ , испытывающего  $\beta^+$ -распад,  $Q = 1,82$  МэВ.

**7.59.** Установить, возможны ли следующие процессы:

- а)  $\beta^-$ -распад ядер нуклида  $^{51}\text{V}$  ( $-0,05602$ );

б)  $\beta^+$ -распад ядер нуклида  $^{39}\text{Ca}$  ( $-0,02929$ );

в)  $K$ -захват в нуклиде  $^{63}\text{Zn}$  ( $-0,06679$ ).

В скобках указан избыток массы нуклида ( $M - A$ ), а.е.м.

**7.60.** Ядро нуклида  $^{32}\text{P}$  испытывает  $\beta^-$ -распад, в результате которого дочернее ядро оказывается непосредственно в основном состоянии. Определить максимальную кинетическую энергию  $\beta$ -частиц и соответствующую кинетическую энергию дочернего ядра.

**7.61.** Вычислить максимальное значение импульса электронов, испускаемых ядрами нуклида  $^{10}\text{Be}$ , если известно, что дочерние ядра оказываются непосредственно в основном состоянии.

**7.62.** Ядро нуклида  $^{11}\text{C}$  испытывает позитронный распад, в результате которого дочернее ядро оказывается непосредственно в основном состоянии. Вычислить:

а) максимальную кинетическую энергию позитрона и соответствующую кинетическую энергию дочернего ядра;

б) значения энергии позитрона и нейтрино в том случае, когда дочернее ядро не испытывает отдачи.

**7.63.** Ядро нуклида  $^6\text{He}$  испытывает  $\beta^-$ -распад, в результате которого дочернее ядро оказалось непосредственно в основном состоянии. Энергия распада  $Q = 3,50$  МэВ. Под каким углом к направлению вылета электрона испущено антинейтрино, если электрон с энергией  $K = 0,60$  МэВ вылетел под прямым углом к направлению движения ядра отдачи?

**7.64.** Вычислить энергию  $\gamma$ -квантов, сопровождающих  $\beta$ -распад ядер нуклида  $^{28}\text{Al}$  (рис. 7.2), если известна максимальная кинетическая энергия  $\beta$ -частиц (см. Приложение).

**7.65.** Определить число  $\gamma$ -квантов на один  $\beta$ -распад ядер нуклида  $^{38}\text{Cl}$  (рис. 7.3), если относительное число  $\beta$ -распадов с данным парциальным спектром  $\beta$ -частиц равно: 31% ( $\beta_1$ ), 16% ( $\beta_2$ ) и 53% ( $\beta_3$ ).

**7.66.** При  $\beta$ -распаде ядер нуклида  $^{56}\text{Mn}$  из основного состояния испускаются три парциальных спектра  $\beta$ -частиц, максимальная кинетическая энергия которых равна 0,5 МэВ. Определить энергию  $\gamma$ -квантов, сопровождающих  $\beta$ -распад.

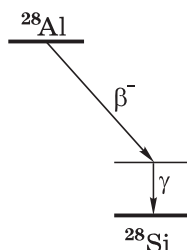


Рис. 7.2

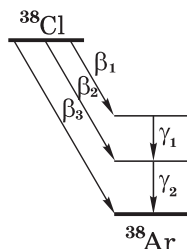


Рис. 7.3



тическая энергия которых 0,72, 1,05 и 2,86 МэВ. Сопровождающие распад  $\gamma$ -кванты имеют энергию 0,84, 1,81, 2,14, 2,65 и 2,98 МэВ. Рассчитать и построить схему уровней дочернего ядра.

**7.67.** Ядра нуклида  $^{37}\text{Ar}$  испытывают  $K$ -захват, в результате которого дочерние ядра оказываются непосредственно в основном состоянии. Пренебрегая энергией связи  $K$ -электрона, определить кинетическую энергию и скорость дочернего нуклида.

**7.68.** Найти энергию нейтрино при  $K$ -захвате в атомах  $^{131}\text{Cs}$ , если полная энергия, выделяющаяся в этом процессе, равна 355 кэВ. Энергия связи  $K$ -электрона в дочернем атоме 35 кэВ, причем дочернее ядро оказывается непосредственно в основном состоянии.

**7.69.**  $K$ -захват в атомах  $^7\text{Be}$  частично происходит через возбужденное состояние дочернего ядра, которое испускает при этом  $\gamma$ -квант с энергией 479 кэВ.

а) Определить кинетическую энергию дочернего ядра после испускания  $\gamma$ -кванта, если угол между направлениями движения нейтрино и ядра отдачи равен  $90^\circ$ .

б) Какова эта энергия в том случае, когда дочернее ядро возникает непосредственно в основном состоянии?

### **Гамма-излучение: внутренняя конверсия, эффект Мессбауэра**

**7.70.** Изомерное ядро  $^{81}\text{Se}^m$  с энергией возбуждения 103 кэВ переходит в основное состояние, испуская или  $\gamma$ -квант, или конверсионный электрон с  $K$ -оболочки атома (энергия связи  $K$ -электрона 12,7 кэВ). Найти скорость ядра отдачи в обоих случаях.

**7.71.** Изомерное ядро  $^{109}\text{Ag}^m$ , переходя в основное состояние, испускает или  $\gamma$ -квант с энергией  $\hbar\omega = 87,0$  кэВ, или конверсионный  $K$ -электрон с  $B\rho = 860$  Гс·см. Вычислить энергию связи  $K$ -электрона.

**7.72.** Атомы  $^{203}\text{Tl}$ , возникающие в результате  $\beta$ -распада ядер атомов  $^{203}\text{Hg}$ , испускают четыре группы конверсионных электронов с кинетическими энергиями 266,3, 264,2, 263,6 и 193,3 кэВ. Какой оболочке атома Tl ( $K$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ) соответству-

ет каждая группа? Энергия связи электронов на этих оболочках соответственно равна 85,7, 15,4, 14,8 и 12,7 кэВ. Вычислить также энергию  $\gamma$ -квантов, сопровождающих этот распад.

**7.73.** Возбужденные ядра  $^{141}\text{Pr}$ , возникающие при  $\beta$ -распаде ядер  $^{141}\text{Ce}$ , переходят в основное состояние, испуская или  $\gamma$ -кванты, или конверсионные электроны. Определить энергию возбуждения ядра  $^{141}\text{Pr}$ , если конверсионные  $K$ -электроны имеют  $B_p = 1135$  Гс·см, а энергия связи  $K$ -электронов равна  $E_K = 42$  кэВ.

**7.74.** Возбужденные ядра  $^{117}\text{Sn}$ , возникающие при  $\beta$ -распаде ядер  $^{117}\text{In}$ , переходят в основное состояние, испуская последовательно два  $\gamma$ -кванта. Этот процесс сопровождается испусканием конверсионных  $K$ -электронов, для которых  $B_p = 3050$  и  $1300$  Гс·см. Энергия связи  $K$ -электронов 29 кэВ. Определить энергию  $\gamma$ -квантов.

**7.75.** Найти число конверсионных электронов, испускаемых ежесекундно препаратом  $^{59}\text{Fe}$  активностью  $3,7 \cdot 10^7$  Бк (1,0 мКи). Схема  $\beta$ -распада ядер  $^{59}\text{Fe}$  приведена на рис. 7.4. Коэффициенты внутренней конверсии  $\gamma$ -квантов равны  $1,8 \cdot 10^{-4}$  ( $\gamma_1$ ),  $1,4 \cdot 10^{-4}$  ( $\gamma_2$ ) и  $7 \cdot 10^{-3}$  ( $\gamma_3$ ). Вероятности испускания  $\gamma$ -квантов  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  относятся соответственно как 1 : 15.

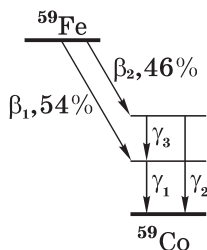


Рис. 7.4

Примечание. Коэффициентом внутренней конверсии называют отношение вероятности испускания конверсионного электрона к вероятности испускания  $\gamma$ -кванта.

**7.76.** Свободное ядро  $^{191}\text{Ir}$  с энергией возбуждения  $E^* = 129$  кэВ перешло в основное состояние, испустив  $\gamma$ -квант. Найти относительное изменение энергии данного  $\gamma$ -кванта, возникающее вследствие отдачи ядра.

**7.77.** Свободное ядро  $^{119}\text{Sn}$  с энергией возбуждения  $E^* = 23,8$  кэВ переходит в основное состояние, испуская  $\gamma$ -квант. Ширина данного уровня  $\Gamma = 2,4 \cdot 10^{-8}$  эВ. Возможно ли резонансное поглощение такого  $\gamma$ -кванта другим свободным ядром  $^{119}\text{Sn}$ , находящимся в основном состоянии, если первоначально оба ядра покоились?

**7.78.** С какой скоростью должны сближаться источник и поглотитель, состоящие из свободных ядер  $^{191}\text{Ir}$ , чтобы можно было наблюдать максимальное поглощение  $\gamma$ -квантов с энергией  $\hbar\omega = 129$  кэВ?

**7.79.** Как показал Мессбауэр, в спектре  $\gamma$ -квантов, которые испускают возбужденные ядра, входящие в состав твердого тела, каждая  $\gamma$ -линия содержит две компоненты: очень узкую с энергией, равной энергии перехода в ядрах, и несравненно более широкую, смещенную относительно первой. Для  $\gamma$ -линии  $^{57}\text{Fe}$ , соответствующей энергии 14,4 кэВ, относительный сдвиг смещенной компоненты  $\Delta\lambda/\lambda = 1,35 \cdot 10^{-7}$ . Убедиться, что эта компонента обусловлена эффектом отдачи ядер при испускании  $\gamma$ -квантов.

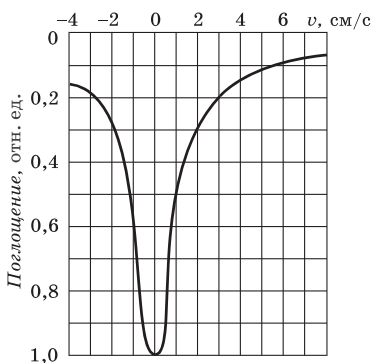


Рис. 7.5

**7.80.** На рис. 7.5 приведена зависимость поглощения  $\gamma$ -линии Мёссбауэра с энергией 129 кэВ от относительной скорости источника и поглотителя ( $^{191}\text{Ir}$ ). Имея в виду, что испускание данной линии связано с переходом возбужденных ядер непосредственно в основное состояние, найти ширину и время жизни соответствующего возбужденного уровня.

**7.81.** Источник  $\gamma$ -квантов расположен над поглотителем на расстоянии 20,0 м. С какой скоростью необходимо перемещать вверх источник, чтобы в месте расположения поглотителя полностью скомпенсировать гравитационное изменение энергии  $\gamma$ -кванта, обусловленное полем тяжести Земли?

**7.82.** Относительные значения ширины  $\gamma$ -линии Мессбауэра для  $^{57}\text{Fe}$  и  $^{67}\text{Zn}$  равны соответственно  $3,0 \cdot 10^{-13}$  и  $5,0 \cdot 10^{-16}$ . На какую высоту от поверхности Земли необходимо поднять источник ( $^{57}\text{Fe}$  и  $^{67}\text{Zn}$ ), чтобы при регистрации на поверхности Земли гравитационное смещение линии Мессбауэра превосходило ширину этих линий (испускания и поглощения)?

## 8. Ядерные реакции

- Суммарная кинетическая энергия двух частиц в Ц-системе:

$$\tilde{K} = \mu v_{\text{отн}}^2 / 2 = \tilde{p}^2 / 2\mu, \quad \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad (8.1)$$

где  $\mu$  — приведенная масса системы,  $v_{\text{отн}}$  — относительная скорость частиц,  $\tilde{p}$  — их импульсы в Ц-системе.

• **Векторная диаграмма импульсов** для упругого рассеяния нерелятивистской частицы массы  $m$  на первоначально покоящейся частице массы  $M$  (рис. 8.1). Здесь  $p_m$  и  $p'_m$  — импульсы налетающей частицы до и после столкновения,  $p'_M$  — импульс частицы отдачи,  $O$  — центр окружности с радиусом, равным импульсу  $\tilde{p}$  частиц в Ц-системе. Точка  $O$  делит отрезок  $AC$  на две части в отношении  $AO : OC = m : M$ . Угол  $\tilde{\vartheta}$  — угол рассеяния налетающей частицы в Ц-системе.

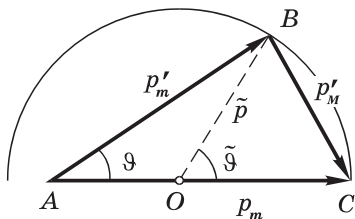


Рис. 8.1

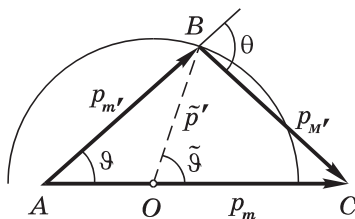


Рис. 8.2

• **Векторная диаграмма импульсов** для нерелятивистских частиц, участвующих в реакции  $M(m, m')M'$ , показана на рис. 8.2. Здесь

$$\tilde{p}' = \sqrt{2\mu'(\tilde{K} + Q)}, \quad (8.2)$$

$\mu'$  — приведенная масса возникающих частиц,  $Q$  — энергия реакции,  $\tilde{K}$  — суммарная кинетическая энергия частиц до реакции (в Ц-системе). Точка  $O$  делит отрезок  $AC$  на две части,  $AO : OC = m' : M'$ , угол  $\tilde{\vartheta}$  — угол вылета частицы  $m'$  в Ц-системе,  $\theta$  — угол разлета возникающих частиц в Л-системе.

• Энергетическая схема ядерной реакции

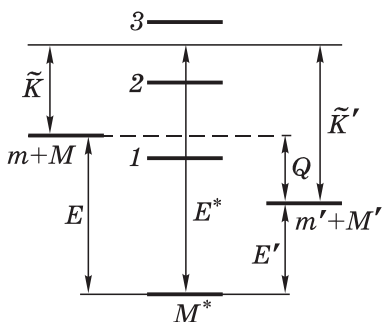
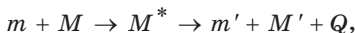


Рис. 8.3

протекающей через промежуточное ядро  $M^*$ , показана на рис. 8.3. Здесь  $m + M$  и  $m' + M'$  — суммы масс частиц до и после реакции,  $\tilde{K}$  и  $\tilde{K}'$  — суммарные кинетические энергии частиц до и после реакции (в Ц-системе),  $E^*$  — энергия возбуждения промежуточного ядра,  $Q$  — энергия реакции,  $E$  и  $E'$  — энергия связи частиц  $m$  и  $m'$  в промежуточном ядре. На рисунке показаны также уровни промежуточного ядра (1, 2, 3).

• **Пороговая кинетическая энергия** налетающей частицы (в Л-системе), при которой становится возможной эндотермическая реакция:

$$K_{\text{пор}} = \frac{m + M}{M} |Q|, \quad (8.3)$$

где  $m$  и  $M$  — массы налетающей частицы и ядра мишени,  $Q$  — энергия реакции.

• **Принцип детального равновесия:** для реакции



сечения прямого процесса  $\sigma_{12}$  и обратного  $\sigma_{21}$  связаны соотношением

$$(2s_1 + 1)(2I_1 + 1)\sigma_{12}\tilde{p}_1^2 = (2s_2 + 1)(2I_2 + 1)\sigma_{21}\tilde{p}_2^2, \quad (8.4)$$

если оба процесса протекают при одном и том же значении полной энергии взаимодействующих частиц в Ц-системе. Здесь  $s_i$  и  $I_i$  — спины частиц,  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$  — импульсы частиц в Ц-системе.

• **Прицельный параметр нейтрона:**

$$b = \lambda \sqrt{l(l+1)}, \quad (8.5)$$

где  $\lambda = \lambda/2\pi$  — его длина волны,  $l$  — орбитальное квантовое число.

• **Формула Брейта–Вигнера** для изолированного уровня — сечение образования промежуточного ядра на тепловых  $s$ -нейтронах ( $l = 0$ ):

$$\sigma_a = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(K - K_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad g = \frac{2J + 1}{2(2I + 1)}, \quad (8.6)$$

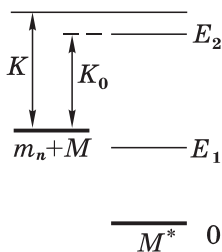


Рис. 8.4

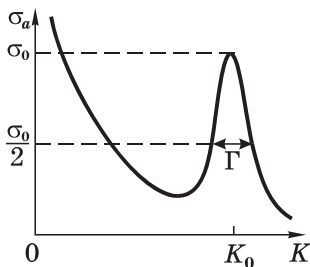


Рис. 8.5

где  $\lambda$  и  $K$  — длина волны и кинетическая энергия налетающего нейтрона,  $K_0$  — кинетическая энергия нейтрона, соответствующая рассматриваемому уровню промежуточного ядра  $M^*$  (рис. 8.4),  $g$  — статистический фактор,  $I$  — спин ядра-мишени,  $J$  — спин рассматриваемого уровня промежуточного ядра,  $\Gamma$  и  $\Gamma_n$  — полная и нейтронная ширина уровня. Ширина  $\Gamma_n$  зависит от длины волны налетающего нейтрона:

$$\lambda \Gamma_n = \lambda_0 \Gamma_{n0},$$

где  $\lambda$  и  $\Gamma_{n0}$  — длина волны нейтрона и нейтронная ширина уровня при  $K = K_0$ .

График зависимости  $\sigma_a(K)$  показан на рис. 8.5.

## Законы сохранения в ядерных реакциях

**8.1.** Нерелятивистская частица массы  $m$  с кинетической энергией  $K$  испытала упругое рассеяние на первоначально покоившемся ядре массы  $M$ . Найти в Ц-системе импульс каждой частицы и их суммарную кинетическую энергию.

**8.2.** Альфа-частица с кинетической энергией  $K_0 = 1,0$  МэВ упруго рассеялась на покоившемся ядре  ${}^6\text{Li}$ . Определить кинетическую энергию ядра отдачи, отлетевшего под углом  $\vartheta = 30^\circ$  к первоначальному направлению движения  $\alpha$ -частицы.

**8.3.** Найти кинетическую энергию налетающей  $\alpha$ -частицы, если в результате упругого рассеяния ее на дейтроне:

- а)  $B\rho$  каждой частицы оказалось равным  $60$  кГс·см;
- б) угол между направлениями разлета обеих частиц  $\theta = 120^\circ$  и энергия, которую приобрел дейтрон,  $K_d = 0,40$  МэВ.

**8.4.** Нерелятивистский дейтрон упруго рассеялся на покоившемся ядре под углом  $30^\circ$ . Под таким же углом к направлению движения налетающего дейтрона отлетело и ядро отдачи. Какому атому принадлежит это ядро?

**8.5.** Построить векторные диаграммы импульсов для упругого рассеяния нерелятивистской  $\alpha$ -частицы на первоначально покоящемся ядре

а)  ${}^6\text{Li}$ ; б)  ${}^4\text{He}$ ; в)  ${}^2\text{H}$ ,

если угол рассеяния  $\alpha$ -частицы в Ц-системе равен  $60^\circ$ . В каком случае связь между энергией рассеянной  $\alpha$ -частицы и углом ее рассеяния неоднозначна? Найти для этих трех случаев значения максимально возможного угла рассеяния  $\alpha$ -частицы.

**8.6.** Какую долю кинетической энергии теряет нерелятивистская  $\alpha$ -частица при упругом рассеянии под углом  $\tilde{\vartheta} = 60^\circ$  (в Ц-системе) на первоначально покоящемся ядре нуклида  ${}^{12}\text{C}$ ?

**8.7.** Протон с кинетической энергией  $K = 0,90$  МэВ испытал упругое лобовое соударение с покоившимся дейтроном. Найти кинетическую энергию протона после соударения.

**8.8.** Нерелятивистский нейтрон упруго рассеялся под углом  $\vartheta_n$  на покоившемся ядре нуклида  ${}^4\text{He}$ , в результате чего последнее отлетело под углом  $\vartheta_\alpha = 60^\circ$  к направлению движения налетающего нейтрона. Определить угол  $\vartheta_n$ .

**8.9.** Нерелятивистская  $\alpha$ -частица упруго рассеялась на ядре нуклида  ${}^6\text{Li}$ . Определить угол рассеяния  $\alpha$ -частицы в Л-системе, если в Ц-системе  $\tilde{\vartheta}_\alpha = 30^\circ$ .

**8.10.** Дейтроны с кинетической энергией  $K = 0,30$  МэВ упруго рассеиваются на первоначально покоящихся протонах. Найти кинетическую энергию дейтронов, рассеиваемых на максимально возможный угол в Л-системе. Чему равен этот угол?

**8.11.** Найти энергию реакции  ${}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$ , если известно, что средняя энергия связи на один нуклон в ядрах  ${}^7\text{Li}$  и  ${}^4\text{He}$  равна соответственно 5,60 и 7,06 МэВ.

**8.12.** Определить энергии следующих реакций:

а)  ${}^{14}\text{N}(\alpha, d){}^{16}\text{O}$ ; б)  ${}^3\text{H}(p, \gamma){}^4\text{He}$ ;

в)  ${}^{12}\text{C}(\alpha, d){}^{14}\text{N}$ ; г)  ${}^6\text{Li}(d, n\alpha){}^3\text{He}$ .

**8.13.** Вычислить с помощью таблиц Приложения массу нуклида  ${}^{17}\text{N}$ , если известно, что энергия реакции  ${}^{17}\text{O}(n, p){}^{17}\text{N}$  равна  $Q = -7,89$  МэВ.

**8.14.** Найти скорости продуктов реакции  ${}^{10}\text{B}(n, \alpha){}^7\text{Li}$ , протекающей в результате взаимодействия нейтронов с первоначально покоящимися ядрами бора, если кинетическая энергия нейтронов пренебрежимо мала.

**8.15.** Найти кинетическую энергию нейтронов, возникающих при фоторасщеплении бериллия по реакции  ${}^9\text{Be}(\gamma, n){}^8\text{Be}$ ,  $Q = -1,65$  МэВ,  $\gamma$ -квантами с энергией  $\hbar\omega = 1,78$  МэВ.

**8.16.** При облучении дейтериевой мишени  $\gamma$ -квантами с энергией  $\hbar\omega = 2,62$  МэВ испускаются фотопротоны, у которых  $B_p = 63,7$  кГс·см. Пренебрегая различием масс нейтрона и протона, найти энергию связи дейтрона.

**8.17.** Вычислить энергию следующих реакций:

а)  ${}^2\text{H}(d, p){}^3\text{H}$ , если энергия налетающих дейтронов равна  $K_d = 1,20$  МэВ, и протон, вылетевший под прямым углом к направлению движения дейтрона, имеет кинетическую энергию  $K_p = 3,30$  МэВ;

б)  ${}^{14}\text{N}(\alpha, p){}^{17}\text{O}$ , если энергия налетающих  $\alpha$ -частиц равна  $K_\alpha = 4,00$  МэВ, и протон, вылетевший под углом  $\vartheta = 60^\circ$  к направлению движения  $\alpha$ -частиц, имеет энергию  $K_p = 2,08$  МэВ.

**8.18.** Дейтроны с кинетической энергией  $K_d = 10,0$  МэВ, взаимодействуя с ядрами углерода, возбуждают реакцию  ${}^{13}\text{C}(d, \alpha){}^{11}\text{B}$ ,  $Q = +5,16$  МэВ. Определить угол между направлениями разлета продуктов реакции, если возникающие ядра разлетаются симметрично.

**8.19.** Получить формулу (8.3).

**8.20.** Вычислить пороговую кинетическую энергию  $\alpha$ -частиц и нейтронов в следующих реакциях:

а)  ${}^7\text{Li}(\alpha, n){}^{10}\text{B}$ ;    б)  ${}^{12}\text{C}(\alpha, d){}^{14}\text{N}$ ;

в)  ${}^{12}\text{C}(n, \alpha){}^9\text{Be}$ ;    г)  ${}^{17}\text{O}(n, \alpha){}^{14}\text{C}$ .

**8.21.** Вычислить пороговую кинетическую энергию налетающей частицы в реакции  $p + {}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n$ , если налетающей частицей является

а) протон; б) ядро трития.

**8.22.** Определить кинетические энергии ядер  ${}^7\text{Be}$  и  ${}^{15}\text{O}$ , возникающих в реакциях:

а)  ${}^7\text{Li}(p, n){}^7\text{Be}$ ,  $Q = -1,65$  МэВ;

б)  ${}^{19}\text{F}(n, p + 4n){}^{15}\text{O}$ ,  $Q = -35,8$  МэВ

при пороговом значении кинетической энергии протона и нейтрона.

**8.23.** Литиевую мишень облучают пучком протонов с кинетической энергией, в  $\eta = 1,50$  раза превышающей пороговое



значение реакции  ${}^7\text{Li}(p, n){}^7\text{Be} - 1,65$  МэВ. Найти кинетическую энергию нейтронов, вылетающих в результате данной реакции под углом  $90^\circ$  к пучку протонов.

**8.24.** Оценить минимальную кинетическую энергию налетающей  $\alpha$ -частицы, необходимую для ее прохождения над кулоновским потенциальным барьером ядра  ${}^7\text{Li}$ . Возбудит ли  $\alpha$ -частица такой энергии реакцию  ${}^7\text{Li}(\alpha, n){}^{10}\text{B}$ ?

**8.25.** Нейтроны с кинетической энергией  $K = 10,0$  МэВ возбуждают реакцию  ${}^{10}\text{B}(n, d){}^9\text{Be}$ , для которой  $K_{\text{пор}} = 4,8$  МэВ. Найти для обратного процесса кинетическую энергию налетающих дейтронов при условии, что полные энергии взаимодействующих частиц в Ц-системе одинаковы для обоих процессов.

**8.26.** Получить в Ц-системе выражение для импульса частиц, возникающих в результате реакции  $M(m, m') M' + Q$ , если кинетическая энергия налетающей частицы  $K_m$  (в Л-системе).

**8.27.** Определить кинетическую энергию ядер кислорода, вылетающих в результате реакции  ${}^{14}\text{N}(p, n){}^{14}\text{O} - 5,9$  МэВ под углом  $30^\circ$  к направлению движения бомбардирующих протонов, кинетическая энергия которых 10,0 МэВ. Решение получить с помощью построенной в масштабе векторной диаграммы импульсов.

**8.28.** Найти максимальную кинетическую энергию  $\alpha$ -частиц, возникающих в результате реакции  ${}^{16}\text{O}(d, \alpha){}^{14}\text{N} + 3,1$  МэВ при кинетической энергии бомбардирующих дейтронов 2,0 МэВ.

**8.29.** Определить ширину энергетического спектра нейтронов, возникающих в реакции  ${}^{11}\text{B}(\alpha, n){}^{14}\text{N} + 0,30$  МэВ, если кинетическая энергия бомбардирующих  $\alpha$ -частиц равна 5,0 МэВ.

**8.30.** Литиевую мишень облучают  $\alpha$ -частицами с кинетической энергией  $K_\alpha = 10,0$  МэВ. В результате ядерной реакции  ${}^7\text{Li}(\alpha, n){}^{10}\text{B}$ ,  $Q = -2,79$  МэВ из мишени вылетают нейтроны. Найти кинетическую энергию нейтронов, вылетающих под углами  $0, 90$  и  $180^\circ$  к направлению движения бомбардирующих  $\alpha$ -частиц.

**8.31.** При каких значениях кинетической энергии  $K$  налетающих  $\alpha$ -частиц нейтроны, возникающие в реакции  ${}^7\text{Li}(\alpha, n){}^{10}\text{B} - 2,79$  МэВ, будут испускаться только в переднюю полусферу ( $\vartheta \leq 90^\circ$ )?

**8.32.** Найти максимально возможные углы вылета (в Л-системе) продуктов следующих реакций;

а)  ${}^9\text{Be}(p, n){}^9\text{B} - 1,84 \text{ МэВ}$ , если  $K_p = 4,00 \text{ МэВ}$ ;

б)  ${}^4\text{He}(n, d){}^3\text{H} - 17,5 \text{ МэВ}$ , если  $K_n = 24,0 \text{ МэВ}$ .

Здесь  $K$  — кинетическая энергия бомбардирующей частицы.

**8.33.** Пучок нейтронов с кинетической энергией  $7,50 \text{ МэВ}$  возбуждает в углеродной мишени реакцию  ${}^{12}\text{C}(n, \alpha){}^9\text{Be} - 5,70 \text{ МэВ}$ . Найти относительное число  $\alpha$ -частиц, вылетающих в переднюю полусферу ( $\vartheta_\alpha \leq 90^\circ$ ), считая, что в Ц-системе угловое распределение продуктов реакции изотропно.

**8.34.** Найти пороговую энергию  $\gamma$ -кванта, при которой становится возможной эндознергетическая реакция фоторасщепления первоначально покоящегося ядра массы  $M$ , если энергия реакции равна  $Q$ .

**8.35.** Вычислить кинетическую энергию нейтронов при пороговом значении энергии  $\gamma$ -кванта для следующих реакций фоторасщепления:

а)  ${}^2\text{H}(\gamma, n)\text{H}$ ;    б)  ${}^7\text{Li}(\gamma, n){}^6\text{Li}$ .

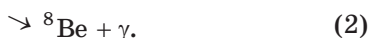
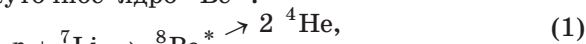
**8.36.** Показать, что для реакции фоторасщепления ядра  $\gamma + M \rightarrow m_1 + m_2$  в случае, когда энергия фотона  $\hbar\omega \ll Mc^2$  и продукты реакции нерелятивистские, импульсы возникающих частиц определяются в Ц-системе формулой  $\tilde{p}' \approx \sqrt{2\mu'(Q + \hbar\omega)}$ , где  $\mu'$  — приведенная масса возникающих частиц,  $Q$  — энергия реакции,  $\hbar\omega$  — энергия  $\gamma$ -кванта.

**8.37.** Гамма-кванты с энергией  $6,40 \text{ МэВ}$ , взаимодействуя с ядрами трития, возбуждают реакцию  ${}^3\text{H}(\gamma, n){}^2\text{H} - 6,26 \text{ МэВ}$ . Считая, что в Ц-системе распределение нейтронов по углам изотропно, найти вероятность вылета дейтрона в переднюю полусферу в Л-системе ( $\vartheta_d \leq 90^\circ$ ). Можно воспользоваться формулой из предыдущей задачи.

**8.38.** Бериллиевую мишень облучали узким пучком дейтронов с кинетической энергией  $K_d = 190 \text{ МэВ}$ . В направлении этого пучка за мишенью наблюдали пучок нейтронов с угловой шириной  $\theta = 16^\circ$ . Найти, используя предположение о механизме реакции срыва, разброс нейтронов по энергии.

**8.39.** Найти возможное значение спина основного состояния ядра  $^{17}\text{O}$ , возникающего в реакции срыва при взаимодействии дейтронов с ядрами нуклида  $^{16}\text{O}$ , если известно, что орбитальный момент захватываемых нейтронов  $l_n = 2$ . Сравнить результат со значением спина по оболочечной модели ядра.

**8.40.** Рассмотрим следующие два канала реакции, протекающей через промежуточное ядро  $^8\text{Be}^*$ :



Спин и четность основных состояний ядер  ${}^7\text{Li}$  и  ${}^8\text{Be}$  равны соответственно  $3/2^-$  и  $0^+$ , спин  $\alpha$ -частицы 0, внутреннюю четность протона считать положительной. Установить с помощью законов сохранения момента импульса и четности для случаев, когда орбитальный момент протона  $l = 0$  и 1, возможные значения спина  $I$  и четности  $P$  промежуточного ядра.

**8.41.** Воспользовавшись условием предыдущей задачи, определить состояния (спин и четность) промежуточного ядра, которые соответствуют обоим каналам реакции.

## Уровни ядер. Сечения и выходы ядерных реакций

**8.42.** Найти энергию возбуждения покоящегося ядра массы  $M$ , которую оно получит при захвате  $\gamma$ -кванта с энергией  $\hbar\omega$ .

**8.43.** Определить энергию возбуждения ядра  ${}^4\text{He}$ , возникшего в результате захвата протона с кинетической энергией  $K = 2,0$  МэВ первоначально покоившимся ядром  ${}^3\text{H}$ .

**8.44.** Какой минимальной кинетической энергией должен обладать нейтрон, чтобы при неупругом рассеянии на ядре  ${}^9\text{Be}$  сообщить последнему энергию возбуждения  $E^* = 2,40$  МэВ?

**8.45.** Мишень из нуклида  ${}^7\text{Li}$  бомбардируют пучком нейтронов с кинетической энергией  $K = 1,00$  МэВ. Определить энергию возбуждения ядер, возникающих в результате неупругого рассеяния нейтронов, если кинетическая энергия нейтронов, неупруго рассеянных под прямым углом к падающему пучку,  $K' = 0,33$  МэВ.

**8.46.** Вычислить кинетическую энергию протонов, неупруго рассеянных под прямым углом на первоначально покоящихся ядрах нуклида  ${}^{20}\text{Ne}$ . Известно, что нижние уровни

ядра  $^{20}\text{Ne}$  соответствуют энергии возбуждения  $E_i^* = 1,5, 2,2$  и  $4,2$  МэВ. Кинетическая энергия бомбардирующих протонов  $K = 4,3$  МэВ.

**8.47.** Найти значения кинетической энергии нейтронов, при которых сечения взаимодействия с ядрами нуклида  $^{16}\text{O}$  максимальны, если нижние уровни промежуточного ядра соответствуют энергиям возбуждения  $E^* = 0,87, 3,00, 3,80, 4,54, 5,07$  и  $5,36$  МэВ.

**8.48.** При бомбардировке мишени из углерода дейтронами возбуждается реакция  $^{13}\text{C}(d, n)^{14}\text{N}$ , выход которой имеет максимумы для следующих значений кинетической энергии  $K$  дейтронов:  $0,60, 0,90, 1,55$  и  $1,80$  МэВ. Найти энергию  $E^*$  соответствующих уровней промежуточного ядра, через которые идет данная реакция.

**8.49.** Борную мишень облучают пучком дейтронов с кинетической энергией  $1,50$  МэВ. В результате реакции  $(d, p)$  на ядрах  $^{10}\text{B}$  установлено, что под прямым углом к пучку дейтронов из мишени испускаются протоны с кинетической энергией  $7,64, 5,51$  и  $4,98$  МэВ. Найти энергию  $E^*$  уровней возбужденных ядер  $^{11}\text{B}$ , которые отвечают этим значениям энергии.

**8.50.** Найти отношение интенсивностей моноэнергетических групп нейтронов, неупруго рассеянных под прямым углом к падающему пучку ядрами нуклида  $^{27}\text{Al}$ , нижние уровни которых соответствуют энергии возбуждения  $0,84, 1,02$  и  $1,85$  МэВ. Кинетическая энергия бомбардирующих нейтронов  $1,40$  МэВ. Известно, что сечение неупругого рассеяния нейтронов вблизи порога пропорционально скорости неупруго рассеянных нейтронов.

**8.51.** Выразить сечение реакции  $A(a, b)B$ , зная сечение образования промежуточного ядра  $\sigma_a$  и ширину его уровня, через который она идет,  $\Gamma$  и  $\Gamma_b$ , где  $\Gamma$  — полная ширина уровня,  $\Gamma_b$  — парциальная ширина, отвечающая испусканию частицы  $b$ .

**8.52.** Определить среднее время жизни возбужденных ядер, возникающих при захвате нейтронов с кинетической энергией  $250$  кэВ ядрами нуклида  $^6\text{Li}$ , если известно среднее время жизни данных ядер по отношению к испусканию нейтронов и  $\alpha$ -частиц:  $\tau_n = 1,1 \cdot 10^{-20}$  с,  $\tau_\alpha = 2,2 \cdot 10^{-20}$  с (других процессов нет).

**8.53.** При облучении дейтронами с кинетической энергией  $10$  МэВ бериллиевой мишени она становится интенсивным ис-

точником нейтронов в реакции  ${}^9\text{Be}(d, n){}^{10}\text{B}$ . Выход реакции  $w = 5,0 \cdot 10^{-3}$ . Найти число нейтронов, испускаемых каждую секунду при дейтронном токе  $I = 100$  мкА.

**8.54.** Какова должна быть толщина кадмиевой пластинки, чтобы поток тепловых нейтронов при прохождении через нее уменьшился в  $\eta = 100$  раз? Сечение поглощения нейтрона ядром атома кадмия  $\sigma_a = 2,54$  кб.

**8.55.** Найти выход реакции  $(n, \alpha)$  при облучении пучком тепловых нейтронов мишени толщиной  $d = 5,0$  мм, состоящей из лития природного изотопного состава, если данная реакция идет на ядрах  ${}^6\text{Li}$ , которых содержится  $\eta = 7,52\%$ , и сечение реакции  $\sigma = 945$  б.

**8.56.** При облучении дейтронами с кинетической энергией 1,0 МэВ тонкой мишени из тяжелого льда выход и сечение реакции  ${}^2\text{H}(d, n){}^3\text{He}$  равны соответственно  $0,8 \cdot 10^{-2}$  и 20 мб. Определить сечение данной реакции для кинетической энергии дейтронов 2,0 МэВ, если выход при этой энергии составляет  $4,0 \cdot 10^{-5}$ .

**8.57.** Выход реакции  $(\gamma, n)$  при облучении медной пластинки толщиной  $d = 1,0$  мм  $\gamma$ -квантами с энергией 17 МэВ равен  $w = 4,2 \cdot 10^{-4}$ . Найти сечение данной реакции.

**8.58.** Через камеру, в которой находится газообразный азот при нормальных условиях, проходит узкий пучок моноэнергетических нейтронов с кинетической энергией 0,025 эВ. Поток нейтронов  $\Phi = 2,0 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>. Найти сечение реакции  $(n, p)$ , если известно, что за время  $t = 5,0$  мс на длине пучка  $l = 10$  мм возникает  $N = 95$  протонов.

**8.59.** Железную мишень облучают пучком протонов с кинетической энергией 22 МэВ. В результате реакции  $(p, n)$ , выход которой  $w = 1,2 \cdot 10^{-3}$ , образуется радионуклид  ${}^{56}\text{Co}$  с периодом полураспада  $T = 77,2$  сут. Определить активность мишени через  $t = 2,5$  ч после начала облучения при токе протонов  $I = 21$  мкА.

**8.60.** Мишень из металлического натрия длительно облучали пучком дейтронов с кинетической энергией 14 МэВ при токе  $I = 10$  мкА. Найти выход реакции  $(d, p)$ , в результате которой образуется радиоактивный нуклид  ${}^{24}\text{Na}$ , если активность мишени через 10 ч после окончания облучения составляет  $5,9 \cdot 10^{10}$  Бк (1,6 Ки).

**8.61.** Тонкую пластинку фосфора толщиной  $1,0 \text{ г/см}^2$  облучали в течение  $\Delta t = 4,0 \text{ ч}$  потоком нейтронов  $\Phi = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  с кинетической энергией  $2,0 \text{ МэВ}$ . Через  $t = 1,0 \text{ ч}$  после окончания облучения активность пластинки оказалась  $A = 3,9 \cdot 10^6 \text{ Бк}$  ( $105 \text{ мкКи}$ ). Известно, что активность обусловлена нуклидом  $^{31}\text{Si}$ , который возникает в результате реакции  $(n, p)$ . Определить сечение данной реакции.

**8.62.** При облучении дейтронами дейтериевой мишени протекает реакция  $^2\text{H}(d, n)^3\text{He}$ ,  $Q = +3,26 \text{ МэВ}$ . Используя принцип детального равновесия, найти спин ядра  $^3\text{He}$ , если сечение этого процесса при кинетической энергии дейтронов  $K = 10,0 \text{ МэВ}$  равно  $\sigma_1$ , а сечение обратного процесса при соответствующей энергии бомбардирующих нейтронов равно  $\sigma_2 = 1,8 \sigma_1$ . Спины нейтрона и дейтрона считать известными (см. таблицы Приложения).

**8.63.** Найти с помощью принципа детального равновесия сечение  $\sigma_1$  реакции  $^6\text{Li}(\alpha, p)^9\text{Be} - 2,13 \text{ МэВ}$  при кинетической энергии бомбардирующих  $\alpha$ -частиц  $K = 3,70 \text{ МэВ}$ , если сечение обратной реакции при соответствующей энергии протонов равно  $\sigma_2 = 50 \text{ мкб}$ .

**8.64.** Показать с помощью принципа детального равновесия, что сечение эндонергетической реакции типа  $A(p, n)B$ , возникающей при облучении мишени протонами с кинетической энергией  $K_p$ , вблизи порога пропорционально  $\sqrt{K_p - K_{p \text{ пор}}}$ , если для тепловых нейтронов сечение обратной реакции пропорционально  $1/v_n$  где  $v_n$  — скорость нейтронов.

**8.65.** Сечение реакции фоторасщепления дейтрона  $^2\text{H}(\gamma, n)\text{H}$ ,  $Q = -2,22 \text{ МэВ}$ , при энергии  $\gamma$ -квантов  $\hbar\omega = 2,70 \text{ МэВ}$  равно  $\sigma_1 = 150 \text{ мкб}$ . Найти с помощью принципа детального равновесия сечение  $\sigma_2$  обратного процесса при соответствующей кинетической энергии  $K_n$  бомбардирующих нейтронов. Вычислить это значение  $K_n$ .

### Формула Брейта–Вигнера

**8.66.** Получить с помощью квазиклассических рассуждений выражение для прицельного параметра  $b$  бомбардирующего нейтрона с кинетической энергией  $K$ . Вычислить первые три воз-

возможных значения  $b$  для нейтронов с кинетической энергией 1,00 МэВ.

**8.67.** Найти максимальное значение прицельного параметра при взаимодействии нейтронов с кинетической энергией 3,5 МэВ с ядрами атомов серебра.

**8.68.** Показать, что для нейтронов с длиной волны  $\lambda$  геометрическое сечение ядра  $S \approx \pi(R + \lambda)^2$ , где  $R$  — радиус ядра. Оценить  $S$  для нейтрона с кинетической энергией 10 МэВ, налетающего на ядро атома золота.

**8.69.** Найти вероятность того, что в результате взаимодействия медленных нейтронов ( $l = 0$ ) с ядрами, спин которых  $I = 1$ , промежуточные ядра образуются в состоянии со спином  $J = 3/2$ . Считать, что спины нейтронов и ядер имеют всевозможные взаимные ориентации.

**8.70.** Исходя из формулы Брейта–Вигнера для сечения образования составного ядра  $\sigma_a$ , получить выражения для сечений процессов упругого рассеяния и радиационного захвата нейтрона.

**8.71.** Выразить с помощью формулы Брейта–Вигнера сечение образования промежуточного ядра  $\sigma_a$  в зависимости от кинетической энергии  $K$  нейтрона, если известны сечение  $\sigma_0$  данного процесса при  $K = K_0$  и значения  $K_0$  и  $\Gamma$ .

**8.72.** Вычислить сечение реакции  $^{115}\text{In}(n, \gamma)^{116}\text{In}$  для кинетической энергии нейтронов  $K = 0,50$  эВ, если сечение в резонансе  $\sigma_0 = 27,6$  кб,  $K_0 = 1,44$  эВ и  $\Gamma = 0,085$  эВ. Известно также, что нейтронная ширина  $\Gamma_n$  значительно меньше радиационной  $\Gamma_\gamma$ .

**8.73.** При взаимодействии тепловых нейтронов с кинетической энергией  $K = 0,025$  эВ с ядрами нуклида  $^{113}\text{Cd}$  найдено, что сечение рассеяния составляет  $\eta = 0,22\%$  от сечения радиационного захвата. Определить отношение вероятности распада составного ядра с испусканием нейтронов к вероятности испускания  $\gamma$ -квантов при резонансном значении кинетической энергии нейтронов  $K_0 = 0,178$  эВ.

**8.74.** Воспользовавшись формулой Брейта–Вигнера, найти в случае  $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$ :

а) значения кинетической энергии нейтрона ( $K_{\text{макс}}$  и  $K_{\text{мин}}$ ), при которых сечения радиационного захвата  $\sigma_{n\gamma}$  имеют макси-

мум и минимум ( $K_0$  и  $\Gamma$  предполагаются известными). Установить, в каком случае  $K_{\text{макс}} \approx K_0$ ;

б) значения отношения  $\Gamma/K_0$ , при которых селективность радиационного захвата нейтрона отсутствует.

**8.75.** Найти с помощью формулы Брейта–Вигнера для сечения радиационного захвата нейтрона отношение  $\sigma_{\text{мин}}/\sigma_0$ , где  $\sigma_{\text{мин}}$  — минимальное сечение процесса ( $n, \gamma$ ) в области  $K < K_0$ , а  $\sigma_0$  — сечение этого процесса при  $K = K_0$ , если  $\Gamma \ll K_0$  и  $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$ .

**8.76.** Определить с помощью формулы Брейта–Вигнера ширину  $\Gamma$  уровня промежуточного ядра, возникающего при захвате нейтрона ядром  $^{113}\text{Cd}$ , если сечение радиационного захвата при кинетической энергии нейтрона  $K = 2K_0$  в 15 раз меньше сечения этого процесса при  $K = K_0$ , где  $K_0 = 0,178$  эВ. Считать, что  $\Gamma$  не зависит от энергии нейтронов и  $\Gamma_n \ll \Gamma$ .

**8.77.** Показать с помощью формулы Брейта–Вигнера, что если ширина  $\Delta K$  резонансного максимума кривой  $\sigma_a(K)$  на половине его высоты мала ( $\Delta K \ll K_0$ ), то  $\Delta K \approx \Gamma$ .

**8.78.** Резонансная энергия нейтронов, взаимодействующих с ядрами нуклида  $^{59}\text{Co}$ , равна  $K_0 = 132$  эВ, соответствующая нейтронная ширина  $\Gamma_{n0} = 0,90$  Г, причем  $\Gamma \ll K_0$ . Найти с помощью формулы Брейта–Вигнера:

а) резонансное сечение упругого рассеяния нейтронов;

б) спин состояния промежуточного ядра, через которое идет процесс, если полное резонансное сечение  $\sigma_0 = 10$  кб.

**8.79.** Найти отношение резонансного сечения упругого рассеяния нейтронов ядрами нуклида  $^{55}\text{Mn}$  к геометрическому сечению данных ядер, если  $K_0 = 337$  эВ,  $\Gamma_{n0} \approx \Gamma \ll K_0$  и спин уровня промежуточного ядра, через который идет процесс,  $J = 2$ .

**8.80.** Сечение радиационного захвата нейтронов ядрами  $^{149}\text{Sm}$  в резонансе ( $K_0 = 0,097$  эВ) равно  $\sigma_0 = 1,2 \cdot 10^5$  б. Найти нейтронную ширину  $\Gamma_{n0}$  при резонансной энергии нейтронов, если  $\Gamma_{n0} \ll \Gamma = 0,064$  эВ и спин ядра  $^{149}\text{Sm}$  равен  $I = 7/2$ .

**8.81.** Оценить время жизни промежуточного ядра, возникающего при захвате нейтрона ядром нуклида  $^{103}\text{Rh}$ , если при резонансной энергии нейтронов  $K_0 = 1,26$  эВ сечение процесса ( $n, \gamma$ ) равно  $\sigma_0 = 2700$  б,  $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_{n0} = 7,8 \cdot 10^{-4}$  эВ и фактор  $g = 1/4$ .



## 9. Элементарные частицы

• В этом разделе во всех формулах энергия, импульс и масса выражены в энергетических единицах:  $p$  и  $m$  — сокращенные записи  $pc$  и  $mc^2$ .

• **Лоренц-инвариант:**

$$E^2 - p^2 = m^2, \quad (9.1)$$

где  $E$  и  $p$  — полная энергия и суммарный импульс системы,  $m$  — ее масса.

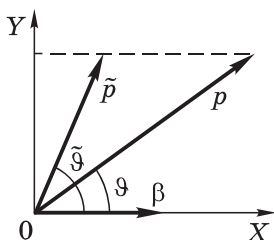


Рис. 9.1

• **Лоренцевы преобразования импульса и полной энергии** при переходе от Л-системы к Ц-системе (рис. 9.1):

$$\tilde{p}_x = \frac{p_x - E\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \tilde{E} = \frac{E - p_x\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.2)$$

где  $\beta$  — скорость (в единицах  $c$ ) Ц-системы относительно Л-системы.

• **Пороговая кинетическая энергия частицы  $m$ , налетающей на первоначально покоящуюся частицу  $M$ , для возбуждения реакции  $m + M \rightarrow \sum m_i$ :**

$$K_{m \text{ пор}} = \frac{(\sum m_i)^2 - (m + M)^2}{2M}. \quad (9.3)$$

• **При двухчастичном распаде частицы массы  $M$  импульсы возникающих частиц в Ц-системе равны**

$$\tilde{p} = \frac{1}{2M} \sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}, \quad (9.4)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы возникающих частиц.

• **При двухчастичном распаде релятивистской частицы массы  $M$  с импульсом  $p$  максимальный угол вылета частицы массы  $m$  определяется формулой**

$$\sin \vartheta_{\text{макс}} = \frac{M}{m} \frac{\tilde{p}}{p}, \quad (9.5)$$

где  $\tilde{p}$  — импульс частицы  $m$  в Ц-системе.

• **Обозначения квантовых чисел:**  $Q$  — электрический заряд (в единицах  $e$ ),  $L$  — лептонный заряд ( $L_e$  — электронный,  $L_\mu$  — мюонный),  $B$  — барионный заряд,  $T$  — изотопический спин (изоспин).  $T_z$  — его проекция,  $S$  — странность,  $C$  — очарование (шарм).

• **Связь между квантовыми числами** сильно взаимодействующих частиц и резонансов:

$$Q = T_z + (B + S + C)/2. \quad (9.6)$$

• **При взаимодействии частиц выполняются законы сохранения** лептонного и барионного зарядов. В сильных взаимодействиях — также законы сохранения странности  $S$ , изоспина  $T$  и его проекции  $T_z$ .

• **Обобщенный принцип Паули.** Для системы из двух изотопически тождественных частиц:

$$(-1)^{l+s+T} = \begin{cases} -1 & \text{для частиц с полуцелым спином,} \\ +1 & \text{для частиц с нулевым спином,} \end{cases} \quad (9.7)$$

где  $l$  — орбитальный момент,  $s$  — спин системы,  $T$  — ее изоспин.

• **Квантовые числа кварков:**

Кварк	$Q$	$B$	$T$	$T_z$	$S$	$C$
$u$	$2/3$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	$0$	$0$
$d$	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	$-1/2$	$0$	$0$
$s$	$-1/3$	$1/3$	$0$	$0$	$-1$	$0$
$c$	$2/3$	$1/3$	$0$	$0$	$0$	$1$

Спин каждого кварка равен  $1/2$ . Соответствующие антикварки  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{c}$  имеют противоположные по знаку значения  $Q$ ,  $B$ ,  $T_z$ ,  $S$  и  $C$ .

## Взаимодействие релятивистских частиц

**9.1.** Вычислить импульсы (в ГэВ/с,  $c$  — скорость света): протона, мюона и электрона, кинетические энергии которых  $K = 1,0$  ГэВ.

**9.2.** При каком значении показателя преломления вещества черенковского счетчика последний, будучи установлен в пучке заряженных  $\pi$ - и  $K$ -мезонов с импульсом  $p = 400$  МэВ/с, будет регистрировать только  $K$ -мезоны?

**9.3.** Релятивистская частица массы  $m$  с кинетической энергией  $K$  налетает на покоящуюся частицу той же массы. Найти

суммарную кинетическую энергию  $\tilde{K}$  частиц в их Ц-системе, импульс каждой частицы в Ц-системе и скорость этой системы.

**9.4.** Какую кинетическую энергию необходимо сообщить протону, налетающему на покоящийся протон, чтобы суммарная кинетическая энергия  $\tilde{K}$  частиц в их Ц-системе была такой же, как при столкновении двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями  $K = 30$  ГэВ?

**9.5.** Релятивистская частица массы  $m_1$  с кинетической энергией  $K$  налетает на покоящуюся частицу массы  $m_2$ . Найти:

а) суммарную кинетическую энергию  $\tilde{K}$  частиц в их Ц-системе;

б) импульс каждой частицы в Ц-системе.

**9.6.** Определить в Ц-системе кинетические энергии частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , если известно, что суммарная кинетическая энергия частиц в этой системе отсчета равна  $\tilde{K}$ .

**9.7.** Показать, что при упругом рассеянии релятивистской частицы массы  $m_1$  на первоначально покоившейся частице массы  $m_2$  ( $m_2 < m_1$ ) максимальный угол отклонения налетающей частицы определяется формулой  $\sin \vartheta_{\text{макс}} = m_2/m_1$ .

**9.8.** Отрицательный мюон с кинетической энергией  $K = 100$  МэВ испытал упругое лобовое соударение с покоившимся электроном. Найти кинетическую энергию электрона отдачи.

**9.9.** Позитрон с кинетической энергией, равной его энергии покоя, аннигилирует на покоящемся свободном электроне. В результате возникают два  $\gamma$ -кванта, энергия одного из которых в  $\eta = 2,00$  раза больше энергии другого. Вычислить угол между направлениями разлета обоих  $\gamma$ -квантов.

**9.10.** Получить выражение, определяющее пороговую энергию  $\gamma$ -кванта для образования пары в поле покоящегося ядра массы  $M$ , если каждая частица пары имеет массу  $m$ . Вычислить пороговую энергию  $\gamma$ -кванта для рождения пары  $\pi^+\pi^-$  в поле покоящегося протона.

**9.11.** Показать, что  $\gamma$ -квант не может образовать пару вне поля ядра, даже если такой процесс энергетически возможен.

**9.12.** Найти суммарную кинетическую энергию пары электрон-позитрон, которую образует  $\gamma$ -квант с пороговым значением энергии в поле покоящегося протона.

**9.13.** Вычислить энергию  $\gamma$ -кванта, образовавшего в поле покоящегося тяжелого ядра пару электрон—позитрон, если для каждой частицы пары значение  $B\rho = 3,0$  кГс·см и начальный участок их траекторий имеет одну и ту же касательную.

**9.14.** Вывести формулу (9.3) для пороговой кинетической энергии налетающей частицы.

**9.15.** Вычислить пороговую кинетическую энергию бомбардирующих частиц в следующих реакциях (налетающей частицей является первая):

- |  |   |
|--|---|
| 1) $p + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \pi^0$ ;      | 5) $\pi^- + p \rightarrow n + K^0 + \tilde{K}^0$ ;                  |
| 2) $p + {}^{10}\text{B} \rightarrow {}^{11}\text{B} + \pi^+$ ; | 6) $\tilde{p} + p \rightarrow p + \tilde{\Sigma}^0 + \tilde{K}^+$ ; |
| 3) $\tilde{p} + p \rightarrow \tilde{\Lambda} + \Lambda$ ;     | 7) $p + p \rightarrow p + p + p + \tilde{p}$ ;                      |
| 4) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+$ ;                    | 8) $p + p \rightarrow p + p + \Sigma^- + \tilde{\Sigma}^-$ .        |

**9.16.** Найти кинетические энергии мезонов, возникающих в водородной мишени при пороговом значении энергии налетающей частицы:

- а)  $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ ;      б)  $p + p \rightarrow p + \Sigma^0 + K^+$ .

**9.17.** Пусть в прямом процессе релятивистская частица  $a$  налетает на покоящуюся частицу  $A$ , а в обратном — частица  $b$  на покоящуюся частицу  $B$  ( $a + A \rightleftharpoons B + b$ ). Считая, что полная энергия взаимодействующих частиц одинакова в Ц-системе для обоих процессов, т. е.  $\tilde{E}_a + \tilde{E}_A = \tilde{E}_b + \tilde{E}_B$ , найти:

а) связь между кинетическими энергиями налетающих частиц  $K_a$  и  $K_b$  в Л-системе в прямом и обратном процессах, если известны массы частиц  $A$  и  $B$  и пороговая кинетическая энергия частицы  $a$ ;

б) для реакции  $\gamma + p \rightleftharpoons n + \pi^+$  кинетическую энергию  $\pi$ -мезона в обратном процессе, если энергия  $\gamma$ -кванта в прямом процессе  $\hbar\omega = 200$  МэВ; массы протона и нейтрона считать одинаковыми.

**9.18.** Протоны с кинетической энергией  $K = 500$  МэВ бомбардируют водородную мишень, возбуждая реакцию  $p + p \rightarrow d + \pi^+$ . Найти максимально возможный угол вылета дейтронов (относительно направления движения налетающих протонов).

**9.19.** Исследование зависимости сечения взаимодействия  $\pi^+$ -мезонов с протонной мишенью от кинетической энергии  $\pi$ -мезонов позволило обнаружить максимумы сечения при 198,

600 и 900 МэВ. Эти максимумы соответствуют нестабильным частицам — *резонансам*. Определить их массы.

## Распад частиц

**9.20.** Какая доля нейтронов с кинетической энергией  $K = 0,025$  эВ распадается на длине пучка  $l = 200$  см?

**9.21.** Определить собственное среднее время жизни:

а) мюонов, если при значении кинетической энергии  $K = 7m_\mu$  их среднее время жизни  $\tau = 17,6$  мкс;

б)  $\pi^+$ -мезонов, если, имея импульс  $p = 55$  МэВ/с, они пролетают в среднем расстояние  $l = 300$  см до момента распада.

**9.22.** Найти вероятность распада  $\pi^+$ -мезона в полете от места рождения до мишени (расстояние 6,00 м), если кинетическая энергия мезона равна 100 МэВ.

**9.23.** Некоторая частица может распадаться двумя путями (каналами) с образованием различных продуктов распада. Оба пути характеризуются средними временами жизни  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Оценить неопределенность массы частицы  $\Delta m$ .

**9.24.** Вычислить энергию, выделяющуюся при  $\beta$ -распаде покоящегося нейтрона.

**9.25.** Остановившаяся  $\Sigma^-$ -частица распалась на нейтрон и  $\pi$ -мезон. Найти кинетическую энергию и импульс нейтрона.

**9.26.** Вычислить максимальные значения кинетической энергии и импульса электрона, возникающего при распаде остановившегося мюона.

**9.27.** Гиперядро  ${}^5\text{He}_\Lambda$  испытывает распад  ${}^5\text{He}_\Lambda \rightarrow {}^4\text{He} + p + \pi^-$ . Вычислить энергию связи  $\Lambda$ -гиперона в данном гиперядре, если его энергия распада  $Q = 34,9$  МэВ.

**9.28.** Пи-мезон с кинетической энергией  $K_\pi = 50$  МэВ распался на лету на мюон и нейтрино. Под каким углом вылетел мюон, если угол вылета нейтрино равен  $90^\circ$ ?

**9.29.** Пи-ноль-мезон с кинетической энергией, равной его энергии покоя, распадается на лету на два  $\gamma$ -кванта. Найти:

а) минимально возможный угол между направлениями разлета  $\gamma$ -квантов;

б) в каких пределах может находиться энергия каждого кванта.

**9.30.** Релятивистский  $K^0$ -мезон с кинетической энергией  $K$  распадается на лету на два  $\pi^0$ -мезона. Найти:

а) при каком значении  $K$  один из возникающих  $\pi$ -мезонов может оказаться в состоянии покоя;

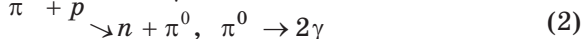
б) угол между направлениями симметрично разлетающихся  $\pi$ -мезонов, если  $K = 100$  МэВ.

**9.31.**  $\Sigma^+$ -гиперон с импульсом  $p_\Sigma = 900$  МэВ/с распадается на лету на положительный  $\pi$ -мезон и нейтральную частицу. Мезон вылетает с импульсом  $p_\pi = 200$  МэВ/с под углом  $\vartheta = 60^\circ$  к первоначальному направлению движения гиперона. Найти массу нейтральной частицы и энергию данного распада.

**9.32.** В результате распада некоторой нейтральной частицы обнаружены протон и  $\pi^-$ -мезон, угол между направлениями разлета которых  $\theta = 60^\circ$ . Импульсы обнаруженных частиц равны соответственно 450 и 135 МэВ/с. Полагая, что других продуктов распада нет, найти массу распавшейся частицы.

**9.33.** Получить в Ц-системе выражение (9.4).

**9.34.** При взаимодействии медленных  $\pi^-$ -мезонов с ядрами водородной мишени наблюдались следующие реакции:



Энергетический спектр возникающих  $\gamma$ -квантов изображен на рис. 9.2, где  $E_1 = 54$  МэВ,  $E_2 = 84$  МэВ и  $E_3 = 130$  МэВ.

а) Какому каналу реакции принадлежит каждый максимум?

б) Считая известными массы протона и нейтрона, определить массу  $\pi^-$ -мезона.

в) Найти массу  $\pi^0$ -мезона.

**9.35.** Изучение реакции взаимодействия быстрых  $\pi$ -мезонов с протонами привело к обнаружению нестабильной квазичастицы  $\rho$ , имеющей настолько малое время жизни, что ее образова-

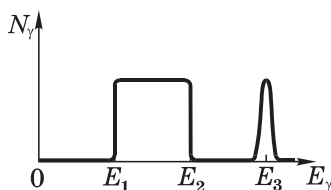


Рис. 9.2

ние и распад происходят практически в одной точке. Каким образом, рассмотрев много случаев этой реакции, можно установить, что процесс  $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + n$  идет частично через связанное состояние  $(\pi^- \pi^+)$ , т. е.  $\pi^- + p \rightarrow \rho + n$ ,  $\rho \rightarrow \pi^- + \pi^+$ ? Предполагается, что в каждом случае известны полные энергии  $E_i$  и импульсы  $\mathbf{p}_i$  возникающих  $\pi$ -мезонов в Л-системе.

**9.36.** При изучении реакции  $K^+ + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^-$  под действием  $K$ -мезонов с кинетической энергией  $K_K = 790$  МэВ обнаружено, что эта реакция частично идет через связанное состояние  $(\pi^- \Lambda)$  в две стадии:

$$K^- + p \rightarrow (\pi^- \Lambda) + \pi^+, \quad (\pi^- \Lambda) \rightarrow \pi^- + \Lambda,$$

причем возникающие  $\pi^+$ -мезоны имеют в Ц-системе кинетическую энергию  $\tilde{K}_\pi = 300$  МэВ. Определить массу  $(\pi^- \Lambda)$ -резонанса и его энергию распада.

### Внутренние свойства элементарных частиц

**9.37.** Предположим, что протон часть времени пребывает в состоянии «идеальный протон» с магнитным моментом  $\mu_\pi$  и остальную часть времени — в состоянии «идеальный нейтрон» ( $\mu = 0$ ) плюс  $\pi$ -мезон ( $p \rightleftharpoons n + \pi^+$ ). Какую часть времени протон находится в состоянии «идеальный протон»?

**9.38.** Определить с помощью принципа детального равновесия (см. введение к предыдущей главе) спин  $\pi^+$ -мезона, если известно, что в реакции  $p + p \rightarrow d + \pi^+$  полное сечение прямого процесса  $\sigma_{pp}$  для протонов с кинетической энергией  $K_p = 500$  МэВ (в Л-системе) в 9,0 раза меньше полного сечения  $\sigma_{pd}$  обратного процесса при соответствующей энергии. Спины протона и дейтрона считать известными.

**9.39.** При взаимодействии  $\gamma$ -квантов с водородной мишенью протекает реакция  $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ . Полное сечение этой реакции  $\sigma_{\gamma p} = 0,20$  мб при энергии  $\gamma$ -квантов  $E_\gamma = 250$  МэВ. Определить с помощью принципа детального равновесия (см. введение к предыдущей главе) сечение обратного процесса ( $\pi^0$ -мезоны бомбардируют водородную мишень) при соответствующей кинетической энергии мезона.

**9.40.** Выяснить с помощью законов сохранения лептонного и барионного зарядов, возможны ли следующие процессы:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$ ;                 | 4) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \pi^0$ ; |
| 2) $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$ ;       | 5) $\pi^- + n \rightarrow K^- + K^0$ ;         |
| 3) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ ; | 6) $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$ .    |

**9.41.** Какие из приведенных ниже реакций запрещены законом сохранения странности:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K_0$ ;                    | 4) $\bar{p} + n \rightarrow \Lambda + \bar{\Sigma}^+$ ; |
| 2) $\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$ ;                   | 5) $\Sigma^- + p \rightarrow \Lambda + n$ ;             |
| 3) $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^0 + \bar{K}^0 + n$ ; | 6) $\pi^- + n \rightarrow \Xi^- + K^+ + K^-$ ?          |

**9.42.** Являются ли реакции распада  $K^+$ -мезона на  $\mu^+ + \nu_\mu$  и  $\pi^+ + \pi^0$  реакциями слабого взаимодействия?

**9.43.** Какие каналы приведенных ниже реакций запрещены и по какой причине:

- |   |  |
|---|--|
| а) $\Sigma^- \rightarrow \nu + \pi^-$ (1) | б) $\Xi^- \rightarrow p + 2\pi^-$ (1)                            |
| $\rightarrow \Lambda + \pi^-$ (2)         | $\rightarrow \Lambda + \pi^-, \Lambda \rightarrow p + \pi^-$ (2) |

**9.44.** Найти возможные значения изоспина  $T$  и его проекции  $T_z$  для системы: нуклон-нуклон;  $\pi$ -мезон-нуклон.

**9.45.** Найти с помощью обобщенного принципа Паули изоспин  $T$  системы:

- а)  $np$  в состояниях  $^3P$  и  $^3D$ ;  
 б)  $\pi^+\pi^0$  в состояниях  $^1P$  и  $^1D$ ;  
 в)  $\pi^+\pi^-$  в состояниях  $^1P$  и  $^1D$ .

**9.46.** Найти изменение изоспина  $T$  и его проекции  $T_z$  в следующих процессах:

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| а) $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$ ;    | в) $K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^+$ ; |
| б) $\pi^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Xi^-$ ; | г) $K^0 \rightarrow 2\pi^0$ .        |

**9.47.** Определить для мезон-нуклонных резонансов значения изоспина  $T$ , странности  $S$ , барионного заряда  $B$ , а также полного момента  $I$  и четности  $P$ , если относительный орбитальный момент  $l = 1$ .

**9.48.** При облучении медленными ( $l = 0$ )  $\pi^-$ -мезонами дейтериевой мишени идет реакция  $\pi^- + d \rightarrow 2n$ . Имея в виду, что четность дейтрона положительная, показать с помощью законов сохранения момента импульса и четности, что  $\pi^-$ -мезон имеет отрицательную четность.



**9.49.** Экспериментально установлено, что изоспин  $\rho$ -частицы, представляющей собой связанное состояние двух  $\pi$ -мезонов, равен единице.

**а)** Имея в виду, что распад  $\rho \rightarrow 2\pi$  относится к сильному взаимодействию, предсказать с помощью закона сохранения момента импульса спин и четность  $\rho$ -частицы; внутренние четности  $\pi$ -мезонов одинаковые.

**б)** Выписать возможные распады  $\rho^+$ -,  $\rho^0$ - и  $\rho^-$ -частиц на два  $\pi$ -мезона.

**9.50.** Зная квантовые числа кварков, сконструировать:

**а)** из трех кварков следующие барионы:  $p$ ,  $n$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^0$  и  $\Xi^-$ ;

**б)** из кварка и антикварка следующие мезоны:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$  и  $K^0$ .

**9.51.** Найти отношение магнитных моментов нейтрона и протона, считая, что магнитный момент кварка пропорционален его электрическому заряду. Иметь в виду, что для частицы, образованной из трех кварков, вероятность состояния, у которого спины двух одинаковых кварков параллельны, в два раза больше, чем вероятность состояния, у которого спины двух одинаковых кварков антипараллельны.

**9.52.** Воспользовавшись таблицей кварков, сконструировать:

**а)** из кварка и антикварка очарованные мезоны с очарованием  $C = +1$  и  $-1$ ;

**б)** из трех кварков очарованные барионы с очарованием 1, 2 и 3.

## Ответы и решения

**1.1.** Возьмем бесконечно малый объем  $dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$ , расположенный на расстоянии  $r$  от элементарной площадки  $dS$  (рис. 1). Энергия в этом объеме равна  $u dV$ . В силу изотропности теплового излучения энергия, приходящаяся на телесный угол  $d\Omega$ , под которым видна площадка  $dS$ ,

$$dE = u dV \, d\Omega / 4\pi, \quad \text{где } d\Omega = dS \cos\vartheta / r^2.$$

За время  $\delta t$  через площадку  $dS$  пройдет энергия от элементов  $dV$ , расположенных от площадки  $dS$  на расстоянии, не большем  $r = c \delta t$ . Следовательно, энергия, проходящая через эту площадку за время  $\delta t$ , равна

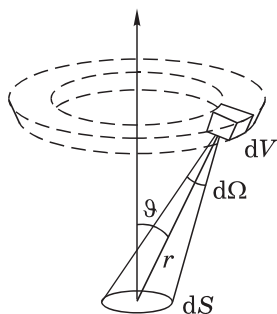


Рис. 1

$$\delta E = \int dE = \frac{u dS}{4\pi} \int_0^{c\delta t} dr \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{cu}{4} dS \delta t.$$

Отсюда  $M = \delta E / dS \delta t = cu/4$ .

**1.2.** Из соотношений  $u_\lambda d\lambda = -u_\nu d\nu$ ,  $\lambda = c/\nu$ ,  $d\lambda/d\nu = -c/\nu^2$  получим  $u_\nu = u_\lambda c/\nu^2$ . Возьмем производную

$$\frac{du_\nu}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^3} \left( 2u_\lambda + \lambda \frac{du_\lambda}{d\lambda} \right).$$

При  $\lambda = \lambda_m$  производная  $du_\lambda/d\lambda = 0$ , и  $du_\nu/d\nu < 0$ , т. е.  $\lambda_m$  соответствует спадающей (с ростом  $\nu$ ) части кривой  $u_\nu$ . Значит,  $\nu(\lambda_m) > \nu_m$ , т. е.  $c/\lambda_m > \nu_m$ , или  $\lambda_m < c/\nu_m$ .

**1.3. а)** Из условия  $du_\omega/d\omega = 0$  получим следующее уравнение:  $3f(x) + x f'_x(x) = 0$ , где  $x = \omega/T$ . Корень этого уравнения есть некоторое значение  $x_0$ , следовательно,  $\omega_m \propto T$ ;

**б)** согласно (1.1)  $M \propto u$ , а  $u = \int_0^\infty \omega^3 f(\omega/T) d\omega = T^4 \int_0^\infty x^3 f(x) dx$ , где  $x = \omega/T$ . Отсюда видно, что  $M \propto T^4$ .

**1.4. а)** Преобразовав формулу Вина от  $u_\omega$  к  $u_\lambda$ , найдем  $u_\lambda = \lambda^{-5} F(\lambda T)$ . Из условия  $du_\lambda/d\lambda = 0$  получим уравнение  $5F(x) + xF'_x(x) = 0$ , где  $x = \lambda T$ . Корень этого уравнения равен некоторому значению  $x_0$ , значит,  $\lambda_m \propto 1/T$ ;

**б)**  $u_{\lambda_{\max}} = \lambda_m^{-5} F(\lambda_m T) \propto \lambda_m^{-5} \propto T^5$ , где  $\lambda_m T = \text{const}$ .

**1.5.**  $T = b/\lambda_m = 2,7 \text{ К}$ , где  $b$  — постоянная в законе смещения Вина.

**1.6.** Уменьшилась на  $\Delta T = T/(1 + b/T\Delta\lambda) = 3,0 \cdot 10^2 \text{ К}$ .

**1.7.** Увеличилась в  $\sqrt[4]{\eta} = 1,9$  раза.

**1.8.**  $\lambda_m = b\sqrt[4]{\sigma/M} = 2,9 \text{ мкм}$ .

**1.9.**  $P = 4\pi R^2 \sigma (b/\lambda_m)^4 = 4,6 \cdot 10^{20} \text{ Вт}$  ( $5 \cdot 10^9 \text{ кг/с}$ );  $\sim 10^{11}$  лет.

**1.10.** При тепловом равновесии поток энергии излучения, проникающего в полость 2, равен потоку энергии, выходящей из этой полости:  $L_1 \Delta\Omega \Delta S = M_2 \Delta S$ , где  $L_1$  — яркость отверстия полости 1,  $M_2$  — энергетическая светимость отверстия полости 2,  $\Delta S$  — площадь каждого отверстия,  $\Delta\Omega = \Delta S/l^2$ . Для косинусного (ламбертовского) излучателя  $L_1 = M_1/\pi$ . Остается учесть, что  $M = \sigma T^4$ , и мы получим  $T_2 = T_1 \sqrt{r/l} = 2,8 \cdot 10^2 \text{ К}$ .

**1.11. а)**  $p = 4\sigma T^4/3c = 1,6 \cdot 10^4 \text{ ГПа}$  ( $1,6 \cdot 10^8 \text{ атм}$ );

**б)**  $T = \sqrt[3]{3c\rho k/2\sigma m} = 1,9 \cdot 10^7 \text{ К}$ ,  $m$  — масса атома водорода.

**1.12.**  $t = c\rho r(\eta^3 - 1)/9\sigma T_0^3 = 1,6 \text{ ч}$ ,  $\rho$  — плотность меди.

**1.13. а)**  $\omega_{\text{вер}} = 3T/a = 0,785 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ;

**б)**  $\langle \omega \rangle = \int_0^\infty \omega u_\omega d\omega / \int_0^\infty u_\omega d\omega = 4T/a = 1,05 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**1.14. а)**  $\lambda_m = 2\pi ca/5T = 1,44 \text{ мкм}$ ;

**б)**  $\langle \lambda \rangle = 2\pi ca/3T = 2,40 \text{ мкм}$ . Здесь распределение энергии излучения по длинам волн  $u_\lambda \propto \lambda^{-5} \exp(-2\pi ca/\lambda T)$ .

**1.15.** Ищем решение волнового уравнения  $\xi''_x = (1/v^2) \ddot{\xi}$  в виде  $\xi = X(x) \sin \omega t$ . После подстановки последнего выражения в волновое уравнение получим

$$X''_x + k^2 X = 0, \quad k = \omega/v.$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия  $X(0) = 0$  запишем сразу как  $X = a \sin kx$ . Постоянную  $k$  находим из другого граничного условия  $X(l) = 0$ , откуда  $k = \pi n/l$ , где  $n$  — целые положительные числа (отрицательные числа не приводят к новым линейно независимым решениям). Видно, что каждому значению  $n$  отвечает определенное значение  $k$ , а значит, и  $\omega$ . Поэтому в интервале частот  $d\omega$  число собственных колебаний  $dZ = dn$ , или  $dZ = (l/\pi\omega)d\omega$ .

**1.16.** Будем исходить из двумерного волнового уравнения  $\xi''_x + \xi''_y = (1/v^2) \ddot{\xi}$ . Его решение ищем в виде  $\xi = X(x)Y(y) \sin \omega t$ . После подстановки его в волновое уравнение получим

$$X''_x/X + Y''_y/Y = (\omega/v)^2. \quad (1)$$

Левая часть этого уравнения содержит функции, зависящие только от  $x$  и  $y$ . Поскольку эти переменные независимы, каждая из этих функций должна быть постоянной. Обозначив их соответственно  $k_1^2$  и  $k_2^2$ , можем записать

$$X''_x + k_1^2 X = 0, \quad Y''_y + k_2^2 Y = 0, \quad (2)$$

причем согласно (1) постоянные  $k_1$  и  $k_2$  удовлетворяют условию

$$k_1^2 + k_2^2 = (\omega/v)^2. \quad (3)$$

Решения уравнений (2) с учетом граничных условий  $X(0) = 0$  и  $Y(0) = 0$  запишем сразу в виде  $X = \sin(k_1 x)$ ,  $Y = \sin(k_2 y)$  (амплитуды мы опустили, ибо для нашей задачи они не существенны). Постоянные  $k_1$  и  $k_2$  находим из граничных условий  $X(a) = 0$  и  $Y(b) = 0$ , где  $a$  и  $b$  — длины сторон мембраны. Итак,

$$\xi = \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin \omega t, \quad (4)$$

где

$$k_1 = n_1 \pi / a, \quad k_2 = n_2 \pi / b, \quad (5)$$

а  $n_1$  и  $n_2$  — целые положительные числа (отрицательные не приводят к новым линейно независимым решениям).

Выражение (4) — это общий вид стоячей волны на мембране. Каждой паре целых положительных чисел  $n_1$  и  $n_2$  соответствует одна стоячая волна (собственное колебание).

Изобразим определенное собственное колебание точкой на плоскости с осями  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда (3) есть уравнение окружности с радиусом  $k = \omega/v$ . Число собственных колебаний с частотой, меньшей  $\omega$ , равно числу точек (рис. 2) внутри круга радиусом  $k = \omega/v$  в его первой четверти (так как все  $n_i > 0$ ). Площадь ячейки, содержащей одну точку, есть  $\delta k_1 \delta k_2 = (\pi^2/ab) \delta n_1 \delta n_2 = \pi^2/S$ , ибо  $\delta n_1 \delta n_2 = 1$ .

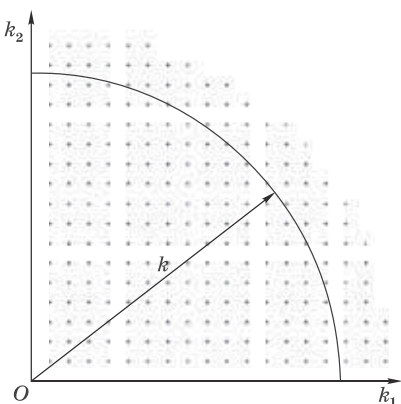


Рис. 2

Поделив площадь четверти круга радиусом  $k = \omega/v$  на площадь одной ячейки, найдем

$$Z_{\omega} = \frac{\pi k^2/4}{\pi^2/S} = \frac{S}{4\pi v^2} \omega^2.$$

Отсюда  $dZ_{\omega} = (S/2\pi v^2) \omega d\omega$ .

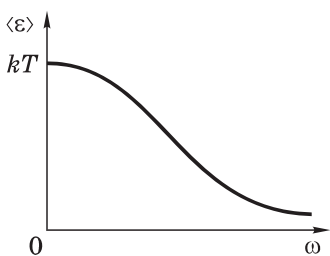
**1.17.** Вывод аналогичен решению предыдущей задачи. Но в данном случае вместо  $1/4$  площади круга следует взять  $1/8$  объема шара и, кроме того, полученное выражение надо еще умножить на два, поскольку каждой частоте соответствуют две стоячие волны со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации.

$$\text{1.18. а) } \langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \bigg/ \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = kT;$$

$$\text{б) } \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum n \hbar \omega e^{-n \hbar \omega / kT}}{\sum e^{-n \hbar \omega / kT}} = \frac{\sum n \hbar \omega e^{-\alpha n \hbar \omega}}{\sum e^{-\alpha n \hbar \omega}},$$

где  $\alpha = 1/kT$ . Здесь суммирование проводится по  $n$  от 0 до  $\infty$ . Последнее выражение можно преобразовать к более простому виду следующим образом:

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \ln \sum e^{-\alpha n \hbar \omega} \right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \frac{1}{1 - e^{-\alpha \hbar \omega}} = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}.$$



**1.19.** При  $kT \gg \hbar \omega$   $\langle \varepsilon \rangle \rightarrow kT$ . См. рис.3.

$$\text{1.20. } u_{\omega} = (kT/\pi^2 c^3) \omega^2;$$

$$u_{\omega} = (\hbar \omega^3 / \pi^2 c^3) e^{-\hbar \omega / kT}.$$

$$\text{1.21. а) } u_n = \frac{16\pi^2 \hbar}{c^3} \frac{n^3}{e^{2\pi \hbar n / kT} - 1};$$

$$\text{б) } u_{\lambda} = 16\pi^2 c \hbar \frac{\lambda^{-5}}{e^{2\pi c \hbar / kT \lambda} - 1}.$$

$$\text{1.22. } I_2/I_1 = (e^{\alpha/T_1} - 1)/(e^{\alpha/T_2} - 1) = 4,8,$$

Рис. 3

где  $\alpha = 2\pi c \hbar / k\lambda$ .

$$\text{1.23. } \Delta P = \frac{8\pi^2 c^2 \hbar T^4 \eta}{b^4 (e^{2\pi c \hbar / kb} - 1)} = 0,60 \text{ Вт/см}^2.$$

**1.24.** Из условия  $du_{\omega}/d\omega = 0$  получим уравнение  $1 - x/3 = e^{-x}$ , где  $x = \hbar \omega / kT$ . Корень этого уравнения  $x_0 \approx 2,82$ . Значит,  $\omega_m/T = x_0 k/\hbar = 3,69 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ .

**1.25.** Из условия  $du_{\lambda}/d\lambda = 0$  получим уравнение  $1 - x/5 = e^{-x}$ , где  $x = 2\pi c \hbar / kT \lambda$ . Корень этого уравнения  $x_0 \approx 4,965$ . Отсюда,  $b = \lambda_m T = 2\pi c \hbar / x_0 k \approx 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}$ .

**1.26.** Энергетическая светимость  $M = (c/4) \int u_{\omega} d\omega = \sigma T^4$ , где  $\sigma = (\pi^2/60)k^4/c^2\hbar^3 = 5,66 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

**1.27.**  $\langle \omega \rangle = 3,83 kT/\hbar = 1,00 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**1.28.**  $T = 2,33 c\hbar/k\langle \lambda \rangle = 2,00 \text{ КК}$ .

**1.29. а)**  $n_{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ ;  $n_{\lambda} d\lambda = 8\pi \frac{\lambda^{-4} d\lambda}{e^{2\pi c \hbar/kT \lambda} - 1}$ ;

**б)**  $n = 0,244 (kT/\hbar c)^3 = 5,5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ .

**1.30. а)** Из условия  $dn_{\omega}/d\omega = 0$  получим  $2 - x = 2e^{-x}$ , где  $x = \hbar\omega/kT$ . Корень этого уравнения  $x_0 \approx 1,6$ . Отсюда  $\hbar\omega_{\text{вер}} = 1,6kT = 0,14 \text{ эВ}$ ;

**б)**  $\langle \hbar\omega \rangle = 2,7kT = 0,23 \text{ эВ}$ .

**1.31.** Из  $n$  фотонов, заключенных в единице объема, число фотонов, которые движутся внутри элементарного телесного угла  $d\Omega$ , есть  $dn = n d\Omega/4\pi$ . Выделим только те фотоны, которые движутся в телесном угле  $d\Omega$ , составляющем угол  $\vartheta$  с нормалью к площадке  $\Delta S$ . Эти фотоны движутся практически параллельно друг к другу, и поэтому за время  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  достигнут из них все те фотоны, которые заключены в косом цилиндре с основанием  $\Delta S$  и высотой  $c\Delta t \cos \vartheta$  (рис. 4):

$$dN = dn \Delta S \cos \vartheta c \Delta t.$$

Проинтегрируем это выражение по  $\vartheta$  (от 0 до  $\pi/2$ ) и по  $\varphi$  (от 0 до  $2\pi$ ), имея в виду, что  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . В результате получим

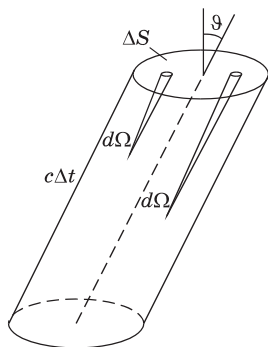


Рис. 4

$$\Delta N = \frac{1}{4} n c \Delta t \Delta S.$$

Отсюда следует, что число фотонов, падающих ежесекундно на единицу поверхности, равно  $nc/4$ . Умножив это выражение на среднюю энергию фотонов  $\langle \hbar\omega \rangle$ , найдем  $\frac{1}{4} n \langle \hbar\omega \rangle c = uc/4 = M$ .

**1.32. а)**  $j = P\lambda/8\pi^2 \hbar c r^2 = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ;

**б)**  $j = P(\lambda_1 + 2\lambda_2)/24\pi^2 \hbar c r^2 = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**1.33.**  $2,5 \text{ эВ}/c$ ,  $5 \text{ кэВ}/c$  и  $0,6 \text{ МэВ}/c$ .

**1.34.**  $v = c / \sqrt{1 + (mc\lambda/2\pi\hbar)^2} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м}/c$ .

**1.35.**  $\lambda = 2\pi c\hbar / \sqrt{K(K + 2mc^2)} = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ см}$ .

**1.36.**  $dp/dt = \int (\hbar\omega/c) dN_{\omega} = P/c$ , где  $dN_{\omega} = P_{\omega} d\omega/\hbar\omega$  — поток фотонов с частотами в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

$$1.37. \langle p \rangle = 4E(1 + \rho)/\pi d^2 c \tau = 5 \text{ МПа } (\approx 50 \text{ атм}).$$

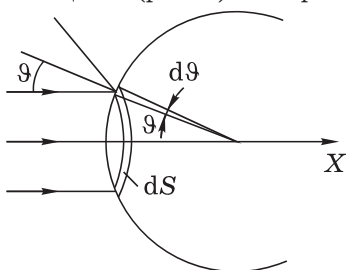
$$1.38. p = (E/c)\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\vartheta} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ г·см/с}.$$

1.39. При зеркальном отражении каждого фотона поверхности передается импульс  $\Delta p = 2(\hbar\omega/c) \cos \vartheta$ . Тогда искомая сила

$$F = dp/dt = \int \Delta p dN_\omega = 2(I/c)S \cos^2 \vartheta = 0,05 \text{ мкН},$$

где  $dN_\omega$  — поток падающих фотонов с частотами в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ :  $dN_\omega = (I_\omega d\omega/\hbar\omega)S \cos \vartheta$ .

1.40. От спектрального состава света переносимый импульс не зависит (см. задачу 1.36), поэтому для простоты будем считать его монохроматическим. Сначала найдем силу  $dF$ , действующую на элементарное кольцо  $dS$  (рис. 5) в направлении оси  $X$ . При зеркальном отражении



каждый фотон передает поверхности импульс  $\Delta p = 2p \cos \vartheta$ ,  $x$ -составляющая которого  $\Delta p_x = 2p \cos^2 \vartheta$ , где  $p = \hbar\omega/c$ . Поток фотонов  $dN$ , падающих каждую секунду на кольцо  $dS$ , равен  $dN = (I/\hbar\omega)dS \cos \vartheta$ , где  $dS = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$ . Тогда

$$dF = \Delta p_x dN = 4\pi R^2 (I/c) \cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Проинтегрировав это выражение по  $\vartheta$  от 0 до  $\pi/2$ , получим  $F = \pi R^2 I/c$ . Инте-

ресно, что полученный результат такой же, как и в случае абсолютно поглощающей поверхности.

$$1.41. F = 3IS/2c.$$

$$1.42. F = P/2c(1 + l^2/R^2).$$

1.43.  $-d(\hbar\omega) = \gamma(mM/r^2)dr$ ;  $\Delta\omega/\omega = 1 - \exp(-\gamma M/Rc^2)$ , где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $m = \hbar\omega/c^2$  — «масса» фотона;

$$а) \Delta\lambda/\lambda \approx \gamma M/Rc^2 = 2,1 \cdot 10^{-6}; \quad б) \Delta\lambda/\lambda = 0,10.$$

$$1.44. \lambda = \Delta\lambda\eta/(\eta - 1) = 0,10 \text{ нм}.$$

$$1.45. U = \pi \hbar c / ed \sin \alpha = 31 \text{ кВ}.$$

$$1.46. v = c \sqrt{\alpha(\alpha + 2)} / (\alpha + 1) = 0,50 c, \text{ где } \alpha = 2\pi\hbar/mc\lambda_{\text{мин}}.$$

1.47. Изобразив график зависимости  $I(U)$ , экстраполируем его к  $I = 0$ . Отсюда получим  $U_0 = 25 \text{ кВ}$  — при этом излучение с данной  $\lambda$  становится коротковолновой границей сплошного спектра. Постоянная  $\hbar = \lambda e U_0 / 2\pi c = 1,06 \cdot 10^{-27} \text{ эрг·с}.$

1.48.  $I_\lambda \propto (1/\lambda_{\text{мин}} - 1/\lambda)/\lambda^2$ . Из условия  $dI_\lambda/d\lambda = 0$  получим  $\lambda_m = {}^3/2\lambda_{\text{мин}} = 3\pi\hbar/eU = 60 \text{ пм}.$

1.49. а) 0,66 и 0,235 мкм;

б)  $5,5 \cdot 10^5$  м/с (Zn),  $3,3 \cdot 10^5$  м/с (Ag), из никеля не вылетают.

1.50.  $A = (2\pi\hbar c/\lambda_2)(\eta^2 - \lambda_2/\lambda_1)/(\eta^2 - 1) = 1,9$  эВ.

1.51.  $U = (2\pi\hbar c/\lambda - A)/e = 1,74$  В.

1.52.  $\lambda_0 = (2\pi\hbar c/A)(\eta - n)/(\eta - 1) = 0,26$  мкм.

1.53.  $K_{\text{макс}} = \hbar(\omega + \omega_0) - A = 0,38$  эВ.

1.54.  $\rho_{\text{макс}} = \sqrt{2m(2\pi\hbar c/\lambda - A)}/\kappa_* eB = 60$  нм, где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ).

1.55. Из условия  $\hbar\omega = A_{\text{Zn}} + e(U_{\text{конт}} + U_3)$  находим  $U_{\text{конт}} = -0,5$  В, т. е. полярность контактной разности потенциалов противоположна внешней разности потенциалов. См. рис. 6.

1.56. 196, 213 и 224 нм.

1.57.  $K_{\text{макс}} = 2\pi\hbar c(3/\lambda - 2/\lambda_0) = 1,45$  эВ.

1.58.  $p \approx \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 2m_e c^2(\hbar\omega - E)}/c = 96$  кэВ/с.

1.59. Из законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega + mc^2 = mc^2/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \hbar\omega/c = mv/\sqrt{1 - \beta^2},$$

где  $\beta = v/c$ , следует, что  $\beta$  равно 0 или 1. Оба результата физического смысла не имеют.

1.60. а) Формула комптоновского смещения получена в предположении рассеяния фотонов на свободных электронах. Электроны в веществе можно считать свободными, если их энергия связи значительно меньше энергии, передаваемой им фотонами. Для этого и необходимо использовать достаточно коротковолновое излучение;

б) так как рассеяние фотонов происходит на свободных электронах;

в) эта компонента обусловлена рассеянием фотонов на сильно связанных электронах и ядрах;

г) вследствие увеличения числа электронов, которые становятся свободными в смысле пункта а;

д) из-за рассеяния фотонов на движущихся электронах.

1.61.  $\lambda = \lambda_c [1 - \cos \vartheta_2 - \eta(1 - \cos \vartheta_1)]/(\eta - 1) = 12$  пм.

1.62. а)  $\Delta\lambda = \lambda\eta/(1 - \eta) = 1,2$  пм;

б)  $\cos \vartheta = 1 - (\lambda/\lambda_c)\eta/(1 - \eta) = 0,50$ , откуда  $\vartheta = 60^\circ$ .

1.63. Из треугольника импульсов (рис. 7) следует, что

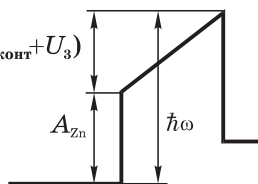


Рис. 6

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k' \sin \vartheta}{k - k' \cos \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{\lambda'/\lambda - \cos \vartheta},$$



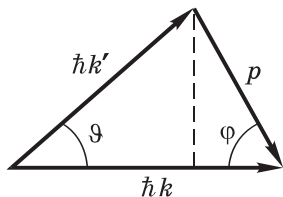


Рис. 7

где  $\lambda'/\lambda$  можно найти из формулы (1.6):

$$\lambda'/\lambda = 1 + (1 - \cos \vartheta)\lambda_C/\lambda.$$

В результате

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \vartheta}{(1 - \cos \vartheta)(1 + \lambda_C/\lambda)} = \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta/2)}{1 + \hbar\omega/mc^2}.$$

**1.64.**  $\cos \varphi > K/pc$ , где  $K$  — кинетическая энергия комптоновских электронов, соответствующая импульсу  $p$ .

**1.65. а)**  $\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1 + 2(\hbar\omega/mc^2)\sin^2(\vartheta/2)} = 0,20 \text{ МэВ};$

**б)**  $K = \frac{2\varepsilon^2 \sin^2(\vartheta/2)}{1 + 2\varepsilon \sin^2(\vartheta/2)} \hbar\omega = 0,26 \text{ МэВ},$  где  $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{mc^2}.$

**1.66.**  $K = \frac{pc}{1 + 2(p/mc)\sin^2(\vartheta/2)} - E_{\text{св}} = 31 \text{ кэВ}.$

**1.67.**  $\lambda = \frac{4\pi\hbar c/K_{\text{макс}}}{1 + \sqrt{1 + 2mc^2/K_{\text{макс}}}} = \frac{2\pi\hbar}{mc} \left( \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{K_{\text{макс}}}} - 1 \right) = 2,0 \text{ пм}.$

**1.68.** Пик — фотоэлектроны ( $K_2$ ), левая часть — комптоновские электроны ( $K < K_1$ );

$$\lambda = 2\pi c\hbar \left( \frac{1}{K_2 - K_1} - \frac{2}{mc^2} \right) = 2,04 \text{ пм};$$

$$K_2 = 2\pi c\hbar/\lambda = 0,61 \text{ МэВ}, \quad K_1 = K_2 - (K_2 - K_1) = 0,43 \text{ МэВ}.$$

**1.69.**  $p = 2mc = 1,02 \text{ МэВ}/c.$

**1.70.**  $\lambda = \lambda_C [1 - \cos(\vartheta/2)]/[2\cos(\vartheta/2) - 1] = 3,0 \text{ пм}.$

**1.71.**  $\hbar\omega = (K/2)(1 + \sqrt{1 + 2mc^2/K \sin^2(\vartheta/2)}) = 0,94 \text{ МэВ}.$

**1.72.**  $K = \hbar\omega\eta/(1 + \eta) = 0,20 \text{ МэВ}.$

**1.73.**  $B = \frac{2\eta(1 + \eta)}{1 + 2\eta} \frac{mc}{\kappa_* eR} = 1,1 \text{ кГц} = 0,11 \text{ Тл},$  где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или

1 (СИ).

**1.74.**  $v = v' = c\varepsilon/\sqrt{1 + \varepsilon^2},$  где  $\varepsilon = \hbar\omega/mc^2.$

**1.75.**  $v = c/\sqrt{1 + (mc\lambda/2\pi\hbar)^2} = 0,50 \text{ с}.$

**1.76.**  $\varepsilon' = K/(1 + m^2c^4/4\varepsilon K).$

**1.77. а)**  $\lambda' - \lambda = -2\lambda_C \sin^2(\vartheta/2) = -1,2 \text{ пм};$

**б)**  $K = \frac{2\eta^2 \sin^2(\vartheta/2)}{1 + 2\eta \sin^2(\vartheta/2)} mc^2 = 0,51 \text{ МэВ}.$

**1.78.** Согласно законам сохранения энергии и импульса (рис. 8),

$$p^2/2m + E^* = p'^2/2m + \hbar\omega',$$

$$p'^2 = p^2 + p_\phi^2 - 2pp_\phi \cos \vartheta,$$

где  $E^*$  — энергия возбуждения,  $E^* = \hbar\omega$ .

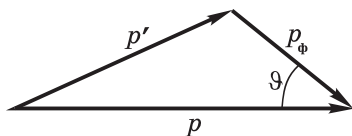


Рис. 8

Исключив из этих уравнений  $p'$  и пренебрегая членом  $(\hbar\omega')^2/2mc^2$ , получим

$$\omega' = \omega/(1 - (v/c) \cos \vartheta) \approx \omega(1 + (v/c) \cos \vartheta).$$

Отсюда  $(\omega' - \omega)/\omega = (v/c) \cos \vartheta$ .

**1.79.**  $\cos \vartheta = (c'/v)[1 + \hbar\omega(n^2 - 1)/2E] \approx c'/v$ , где  $E$  — полная энергия частицы.

**1.80.**  $K_{\text{пор}} = \left( \frac{n}{n^2 - 1} - 1 \right) mc^2$ . Соответственно 0,14 МэВ и 0,26 ГэВ.

**1.81.**  $K = \left( \frac{n \cos \vartheta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \vartheta - 1}} - 1 \right) mc^2 = 0,23 \text{ МэВ}$ .

**1.82. а)** 5,9 нм; **б)**  $r_{\text{мин}} = \delta_*(q_1 q_2 / K)(1 + m_\alpha / m_{\text{Li}}) = 0,34 \text{ нм}$ .

**1.83.** Из закона сохранения энергии следует, что модуль импульса рассеянной частицы остается таким же, как и до рассеяния. Отсюда модуль приращения вектора импульса

$$|\Delta \mathbf{p}| = 2p_0 \sin(\vartheta/2).$$

С другой стороны, из рис. 9 следует, что

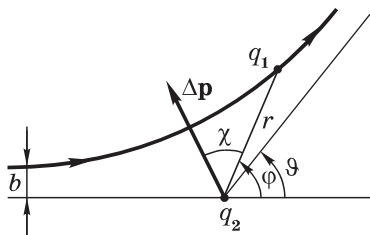


Рис. 9

$$|\Delta \mathbf{p}| = \int F_n dt = \delta_* \int \frac{q_1 q_2 r \cos \chi}{r^3} dt = \delta_* q_1 q_2 \int \frac{\sin(\varphi - \vartheta/2) d\varphi}{r^2 \dot{\varphi}},$$

где  $F_n$  — проекция силы взаимодействия на направление вектора  $\Delta \mathbf{p}$ . Знаменатель подынтегрального выражения, согласно закону сохранения момента импульса, равен  $r^2 \dot{\varphi} = -bv_0$ , где  $v_0$  — скорость частицы вдали от ядра. Проинтегрировав, получим

$$|\Delta \mathbf{p}| = \delta_*(2q_1 q_2 / bv_0) \cos(\vartheta/2).$$

Из сравнения последнего выражения с первым приходим к искомой формуле.

**1.84.** Здесь  $pc \ll m_\alpha c^2$ , т. е.  $\alpha$ -частица нерелятивистская, поэтому  $K = p^2/2m_\alpha$  и  $b = \delta_* q_1 q_2 m/p^2 \operatorname{tg}(\vartheta/2) = 0,61$  пм.

**1.85. а)**  $|\Delta p| = \sqrt{8mK/[1 + (bK/\delta_* Ze^2)^2]} = 0,13$  ГэВ/с;

**б)**  $K = \delta_* Ze^2/b = 1,3$  МэВ;  $\vartheta = 90^\circ$ .

**1.86.** Согласно законам сохранения энергии и импульса,

$$K = K' + \delta_* q_1 q_2 / r_{\min}, \quad bv = r_{\min} v',$$

где штрихованные величины соответствуют  $r_{\min}$ . Из этих уравнений следует

$$r_{\min} = \delta_* (q_1 q_2 / 2K) (1 + \csc(\vartheta/2)) = 0,16 \text{ пм.}$$

Отношение  $r_{\min}/b = [1 + \sin(\vartheta/2)]/\cos(\vartheta/2) = 2,4$ .

**1.87.**  $dN/N = nd\sigma$ , где  $d\sigma = \delta_*^2 \left( \frac{Ze^2}{2K} \right)^2 \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)}$ .

**1.88.**  $\frac{\Delta N}{N} = \frac{\rho d}{m} \left( \frac{\delta_* Ze^2}{4K} \right)^2 \frac{S/l^2}{\sin^4(\vartheta/2)} = 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $m$  — масса атома золота.

**1.89.**  $\Delta\sigma = \pi(\delta_* Ze^2/2K)^2 \operatorname{ctg}(\vartheta/2) = 2,1 \cdot 10^{-22}$  см<sup>2</sup>.

**1.90.**  $d\sigma/d\vartheta = (\delta_* Ze^2/2K)^2 2\pi \sin \vartheta / \sin^4(\vartheta/2) = 3,0 \cdot 10^{-22}$  см<sup>2</sup>/рад;

$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\vartheta)/2\pi \sin \vartheta = 4,8 \cdot 10^{-23}$  см<sup>2</sup>/ср.

**1.91.**  $\Delta\sigma = (d\sigma/d\Omega)\pi \sin^2 \vartheta_0 = 5,5 \cdot 10^{-22}$  см<sup>2</sup>.

**1.92. а)**  $6 \cdot 10^{-5}$ ; **б)**  $w = \pi n(\delta_* Ze^2/K)^2 [\operatorname{ctg}^2(\vartheta_1/2) - \operatorname{ctg}^2(\vartheta_2/2)] = 5 \cdot 10^{-4}$ .

Результат не изменится, если  $\operatorname{ctg}$  заменить на  $\csc$ .

**1.93. а)**  $\Delta N = I\tau n (\delta_* q_1 q_2 / 4K)^2 2\pi \sin \vartheta \Delta\vartheta / \sin^4(\vartheta/2) = 2,5 \cdot 10^3$ ;

**б)**  $\Delta N = I\tau n\pi (\delta_* q_1 q_2 / 2K)^2 \operatorname{ctg}^2(\vartheta_0/2) = 3,1 \cdot 10^4$ .

**1.94.**  $\Delta N = I\tau [1 - \pi n (\delta_* q_1 q_2 / 2K)^2 \operatorname{ctg}^2(\vartheta_0/2)] = 2,5 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>.

**1.95.**  $\Delta N/N = \pi(\delta_* e^2/2K)^2 (0,7 Z_1^2/m_1 + 0,3 Z_2^2/m_2) \rho d \operatorname{ctg}^2(\vartheta_0/2) = 2,7 \cdot 10^{-3}$ ,

где  $Z_1$  и  $Z_2$  — порядковые номера меди и цинка,  $m_1$  и  $m_2$  — массы их атомов.

**1.96.**  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\eta}{4\pi n} \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta_0/2)} = 1,0 \cdot 10^{-23}$  см<sup>2</sup>/ср, где  $n = \rho d/m$ ,  $m$  —

масса атома свинца.

**1.97.** Полная энергия электрона в атоме водорода  $E = -\delta_* e^2/2r$ . Убыль энергии за время  $dt$  вследствие излучения:  $-dE = \delta_* (2e^2/3c^3) a^2 dt$ . Приняв во внимание, что  $a = \delta_* e^2/mr^2$ , получим  $r^2 dr = -\delta_*^2 (4e^4/3m^2 c^3) dt$ . Интегрирование этого уравнения дает  $\tau = m^2 c^3 r_0^3 / 4\delta_*^2 e^4 \sim 10^{-11}$  с.

1.98.  $U_1 \approx 5 \text{ В}$  (точнее 4,9),  $\lambda \approx 0,25 \text{ мкм}$ .

1.99.  $r_n = \sqrt{n\hbar/m\omega}$ ,  $E_n = n\hbar\omega$ , где  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ .

1.100.  $r_n = (\hbar^2/\delta_* m e^2) n^2/Z$ ,  $v_n = \delta_*(e^2/\hbar) Z/n$ .

Величина	H	He <sup>+</sup>	Li <sup>++</sup>
$r_1, 10^{-8} \text{ см}$	0,529	0,265	0,176
$v_1, 10^6 \text{ м/с}$	2,19	4,37	6,56

1.101.  $K = E_{\text{св}} = \hbar R Z^2$ ,  $\varphi_i = E_{\text{св}}/e$ .

Величина	H	He <sup>+</sup>	Li <sup>++</sup>
$K = E_{\text{св}}, \text{ эВ}$	13,6	54,5	122,5
$\varphi_i, \text{ В}$	13,6	54,5	122,5

1.102.  $\varphi_1 = \frac{3}{4} \hbar R Z^2/e$ ,  $\lambda_1 = 8\pi c/3RZ^2$ .

Величина	H	He <sup>+</sup>	Li <sup>++</sup>
$\varphi_1, \text{ В}$	10,2	40,8	91,5
$\lambda_1, \text{ нм}$	121,5	30,4	13,5

1.103.  $E_{\text{мин}} = (8/9)\hbar R Z^2 = 48,5 \text{ эВ}$ .

1.105. 541; 1014 и 1157 нм.

1.106.  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 - \lambda_2) = 1872 \text{ нм}$ . Серии Пашена, ибо при соответствующем переходе квантовое число нижнего уровня  $n = 1/\sqrt{1 - 2\pi c/R\lambda} = 3$ .

1.107. а) 656,6; 486,4 и 434,3 нм;

б)  $\lambda/\delta\lambda = \omega/\delta\omega \approx (N+3)^3/8 = 1,5 \cdot 10^3$ .

1.108. а) 122, 103 и 97 нм (серия Лаймана); 657 и 486 нм (серия Бальмера); 1875 нм (серия Пашена);

б)  $n(n-1)/2 = 45$ .

1.109. 121,6; 102,6 и 97,3 нм.

1.110. а) 4; б) 3.

1.111.  $Z = \sqrt{176 \pi c/15 R \Delta\lambda} = 3$ , Li<sup>++</sup>.

1.112.  $E_{\text{св}} = \hbar R Z^2 = 54,5 \text{ эВ}$ , где  $Z^2 = 8\pi c(2+N)^2/R\lambda N(N+4) = 2(\text{He}^+)$ ,  $N = 3$ .

1.113.  $E = E_0 + 4\hbar R = 79 \text{ эВ}$ .

1.114.  $v = \sqrt{(2\hbar/m)(2\pi c/\lambda - RZ^2)} = 2,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

1.115.  $v_{\text{мин}} = \sqrt{3\hbar R/m} = 62,8 \text{ км/с}$ ,  $m$  — масса атома.

1.116.  $\varphi = \arccos(3\hbar R/8mcv_0) = 60^\circ$ .

**1.117.** Согласно законам сохранения энергии и импульса,

$$E = \hbar\omega + mv^2/2, \quad \hbar\omega/c = mv,$$

где  $E = {}^3/4 \hbar R$  — энергия возбуждения атома,  $\hbar\omega$  — энергия фотона,  $m$  и  $v$  — масса и скорость атома. Из этих уравнений находим

$$v = c(\sqrt{1 + 3\hbar R/2mc^2} - 1) \approx 3\hbar R/4mc = 3,27 \text{ м/с},$$

где учтено, что  $3\hbar R/2mc^2 \ll 1$ ;

$$\Delta E/E = mv^2/2E = 3\hbar R/8mc^2 = 5,5 \cdot 10^{-7} \%.$$

**1.118.**  $v = 3R\Delta\lambda/8\pi \cos \vartheta = 7,0 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$

**1.119.** Из формулы  $\omega' = \omega\sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ , где  $\beta = v/c$  и  $\omega'/\omega = 27/20$ , получим  $v = 0,29 c$ .

**1.120.** а)  $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2ml^2$ ; б)  $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2mr^2$ ; в)  $E_n = n\hbar\sqrt{\alpha/m}$ ; г)  $E_n = -m\alpha^2/2\hbar^2n^2$ .

**1.121.** а) Момент импульса системы равен  $I\omega$ , где  $I = \mu l^2$  — момент инерции,  $\mu$  — приведенная масса,  $l$  — расстояние между электроном и ядром. Запишем боровское условие квантования и уравнение движения:

$$\mu l^2 \omega = \hbar n, \quad \mu \omega^2 l = \delta_* e^2/l^2.$$

Из этих двух уравнений находим  $l = (\hbar^2/\delta_* \mu e^2)n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;

б) кинетическая энергия системы  $K = I\omega^2/2 = \delta_* e^2/2l$ . Полная энергия системы  $E = K + U = \delta_*(e^2/2l - e^2/l) = -\delta_* e^2/2l$ . Энергия связи  $E_{\text{св}} = |E| = \hbar R/n^2$ , где  $R = \delta_*^2 \mu e^4/2\hbar^3$ ;

в) без учета движения ядра значения  $E_{\text{св}}$  и  $R$  больше на  $m/M = 0,055 \%$ , где  $m$  и  $M$  — массы электрона и ядра.

**1.122.**  $m_p/m_e = (n - \eta)/n(\eta - 1) = 1,84 \cdot 10^3$ .

**1.123.** а)  $E_D - E_H = 3,7 \text{ мэВ}$ ; б)  $\varphi_D - \varphi_H = 2,8 \text{ мВ}$ ; в)  $\lambda_H - \lambda_D = 33 \text{ пм}.$

**1.124.** а)  $2,85 \cdot 10^{-11} \text{ см}$ ; б)  $654 \text{ пм}$ ; в)  $2,53$  и  $2,66 \text{ кэВ}.$

**1.125.** а)  $1,06 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ ; б)  $6,8$  и  $5,1 \text{ В}$ ; в)  $1,034 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ ,  $243 \text{ нм}.$

**2.1.**  $39$  и  $0,91 \text{ пм}$ ;  $0,15 \text{ кэВ}$  и  $0,082 \text{ эВ}.$

**2.2.**  $\lambda = \pi\hbar\sqrt{2(\eta^2 - 1)}/m\Delta E = 0,15 \text{ нм}.$

**2.3.**  $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mkT} = 132 \text{ пм}$ , где  $m$  — масса молекулы.

**2.4.**  $K = \kappa_*^2 e^2 (Br)^2/m = 0,12 \text{ МэВ}$ , где  $m$  — масса протона,  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или  $1$  (СИ).

**2.5.**  $\Delta E = 2\pi^2\hbar^2/m\lambda^2 - p^2/2m = 0,38 \text{ кэВ}.$

**2.6.**  $\lambda' = \lambda\sqrt{(n + 1)/(n - 1)} = 2,2 \text{ пм}.$

2.7.  $\tilde{\lambda} = \lambda_n (1 + m_n / m_{\text{He}}) = 0,07 \text{ нм}$ , где  $\lambda_n = 2\pi\hbar / \sqrt{2m_n K}$ .

2.8.  $\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \eta) / (1 - \eta) = 0,10 \text{ нм}$ , где  $\eta = m_{\text{H}} / m_{\text{He}}$ .

2.9.  $\tilde{\lambda} = 2\lambda_1 \lambda_2 / \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ .

2.10. а)  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mK}} \frac{1}{\sqrt{1 + K/2mc^2}}$ ; б)  $K \leq \begin{cases} 10 \text{ кэВ (e)}, \\ 37 \text{ МэВ (p)}. \end{cases}$

2.11.  $K = (\sqrt{2} - 1)mc^2 = 0,21 \text{ МэВ}$ .

2.12.  $K > mc^2(\sqrt{1 + (\lambda/l)^2} - 1)$ , где  $\lambda$  — комптоновская длина волны частицы,  $K_e > mc^2\lambda/l = 1,2 \text{ ГэВ}$ ,  $K_p > 0,6 \text{ ГэВ}$ .

2.13.  $\lambda = \lambda_K / \sqrt{1 + mc\lambda_K / \pi\hbar} = 3,3 \text{ пм}$ .

2.14.  $\varphi(\lambda) \propto \lambda^{-4} \exp(-a/\lambda^2)$ , где  $a = 2\pi^2\hbar^2/mkT$ ;  
 $\lambda_{\text{вер}} = \sqrt{a/2} = \pi\hbar / \sqrt{mkT} = 89 \text{ пм}$ .

2.15.  $\varphi(\lambda) \propto \lambda^{-5} \exp(-a/\lambda^2)$ , где  $a = 2\pi^2\hbar^2/mkT$ ;  $\lambda_{\text{вер}} = 2\pi\hbar / \sqrt{5mkT} = 57 \text{ пм}$ .

2.16.  $v = 4\pi\hbar l / bm\Delta x = 1,0 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

2.17.  $K = 2(\pi\hbar l / d\Delta x)^2 / m = 24 \text{ эВ}$ .

2.18.  $U_0 = \pi^2\hbar^2 / 2med^2(\sqrt{\eta} - 1)^2 \sin^2 \vartheta = 0,15 \text{ кВ}$ .

2.19.  $d = \pi\hbar k / \sqrt{2mK} \cos(\alpha/2) = 0,21 \text{ нм}$ ,  $k = 4$ .

2.20.  $d = \pi\hbar k / \sqrt{2mK} \sin \vartheta = 0,23 \text{ нм}$ , причем  $\text{tg} 2\vartheta = r/l$ .

2.21. а)  $n_2/n_1 = \sqrt{1 - eU/K} = 0,70$ ; б)  $U_{\text{кр}} = (K/e)\cos^2 \vartheta = 75 \text{ В}$ .

2.22. а)  $n = \sqrt{1 + U_i/U} = 1,05$ ; б)  $U/U_i \geq 5$ .

2.23.  $\sin \vartheta' = \sin \vartheta / \sqrt{1 + eU_i/K}$ . Отсюда  $\vartheta' = 52^\circ$ .

2.24.  $U_i = \pi^2\hbar^2 k^2 / 2med^2 - U \sin^2 \vartheta = 15 \text{ В}$ .

2.25.  $E_n = n^2\pi^2\hbar^2 / 2ml^2$ , где  $n = 1, 2, \dots$ .

2.26.  $2\pi r = n\lambda$ , где  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\lambda = 2\pi r_1 n$ ,  $r_1$  — первый борковский радиус.

2.27. а) По условию,  $\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A e^{i(\omega t - kx)} dk$ . Разложим функцию  $\omega(k)$  по степеням  $(k - k_0)$ :

$$\omega \approx \omega_0 + (d\omega/dk)_0(k - k_0)$$

и обозначим  $\xi = k - k_0$ . Тогда

$$\Psi(x, t) = a e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta k}^{+\Delta k} e^{i[(d\omega/dk)_0 t - x]\xi} d\xi = A(x, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)},$$

где  $A(x, t) = 2a \frac{\sin[(d\omega/dk)_0 t - x]\Delta k}{(d\omega/dk)_0 t - x}$ .

б) Максимум функции  $A(x, t)$  находится в точке  $x = (d\omega/dk)_0 t$ . Отсюда — скорость перемещения максимума (групповая скорость)  $v = (d\omega/dk)_0$ .

2.28. В релятивистском случае  $v_{гp} = d\omega/dk = dE/dp = pc^2/E = v$ , где учтено, что  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ .

2.29. а)  $N_2 = \eta^2 N_1 = 900$ ; б)  $N = (1 + \eta)^2 N_1 = 1600$ ; в)  $N = (1 - \eta)^2 N_1 = 400$ .

2.30. См. рис. 10.

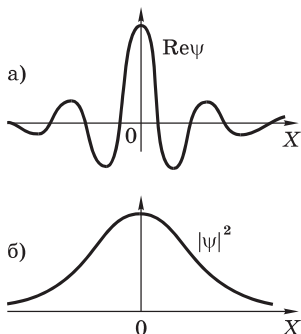


Рис. 10

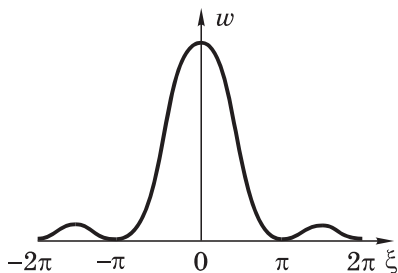


Рис. 11

2.31.

$$\psi(x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a e^{ikx} dk = 2a \frac{\sin(x\Delta k)}{x}; \quad w(x) = |\psi(x)|^2 = 4a^2 (\Delta k)^2 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2},$$

где  $\xi = x \cdot \Delta k$ . График функции  $w(x)$  показан на рис. 11. Из рисунка видно, что вероятность нахождения частицы практически отлична от нуля в области  $\Delta \xi \approx 2\pi$ . Отсюда  $\Delta x \approx 2\pi / \Delta k$ .

2.33. Полагая  $\Delta x = b/2$ , получим  $\alpha \approx \lambda / \pi b \approx 2^\circ$ .

2.34. У фотона, рассеянного и прошедшего через объектив,  $p_x < (\hbar\omega/c) \times \times \operatorname{tg} \vartheta$ . Правая часть этого неравенства характеризует одновременно неопределенность  $\Delta p_x$  для электрона:  $\Delta p_x \approx (\hbar\omega/c) \operatorname{tg} \vartheta \approx (2\pi\hbar/\lambda) \sin \vartheta$ . Неопределенность координаты электрона  $\Delta x \approx d = \lambda / \sin \vartheta$ . Отсюда  $\Delta x \Delta p_x \approx 2\pi\hbar$ .

2.35. Чтобы установить, через какую щель прошла частица, ее  $y$ -координата должна быть определена (индикатором  $I$ ) с погрешностью  $\Delta y < d/2$ , где  $d$  — расстояние между щелями. В соответствии с соотношением неопределенностей это означает, что индикатор должен вносить неопределенность в  $y$ -проекцию импульса частицы  $\Delta p'_y \geq 2\hbar/d$ .

В то же время условие того, что дифракционная картина не будет нарушена, есть  $\Delta p'_y \ll p\vartheta_1$ , где  $p = 2\pi\hbar/\lambda$ ,  $\vartheta_1 \approx \lambda/d$ ,  $\lambda$  — длина волны частицы; т. е.  $\Delta p'_y \ll 2\pi\hbar/d$ .

Таким образом, вносимая индикатором неопределенность импульса  $\Delta p_y$  оказывается значительно большей, чем неопределенность  $\Delta p'_y$ , при которой дифракционная картина сохранилась бы.

**2.36.** Полагая  $\Delta x = 0,5$  мкм, получим  $2 \cdot 10^2$  и  $0,1$  м/с.

**2.37.**  $\Delta v \approx 1 \cdot 10^6$  м/с;  $v_1 = 2,2 \cdot 10^6$  м/с.

**2.38.**  $\Delta x \approx \hbar t / m \Delta x_0 \approx 1 \cdot 10^3$  км!

**2.39.**  $K_{\min} \approx 2\hbar^2 / ml^2 = 15$  эВ. Здесь  $\Delta x = l/2$  и  $p \approx \Delta p$ .

**2.40.**  $\Delta v/v \approx 2\hbar/\sqrt{2md^2K} = 1,2 \cdot 10^{-4}$ . Здесь  $\Delta x = l/2$ .

**2.41.**  $K \approx 8 \cdot 10^4 \hbar^2 / ml^2$ . Здесь  $\Delta x = l/2$ .

**2.42.** Угловой разброс импульсов  $\alpha = \Delta p_y/p = \hbar/\sqrt{2md^2K} = 1,3$  угл. сек. Малость этой величины не позволяет обнаружить указанные отклонения.

**2.43.**  $\Delta x \approx \hbar l/\sqrt{2md^2eU} = 8$  нм.

**2.44.**  $\Delta x \approx c\tau = 3$  м,  $\Delta\lambda/\lambda \approx \lambda/2\pi c\tau \approx 3 \cdot 10^{-8}$ .

**2.45.** При сжатии ямы на величину  $\delta l$  необходимо совершить работу  $\delta A = F\delta l$ , которая пойдет на приращение энергии частицы  $dE$ . Отсюда  $F = dE/dl \approx 4\hbar^2/ml^3 = 2E_{\min}/l$ . Здесь принято, что  $\Delta x = l/2$  и  $p \approx \Delta p$ .

**2.46.** Полагая  $\Delta x \approx x$  и  $v \approx \Delta v$ , запишем выражение для полной энергии частицы:

$$E = K + U = \hbar^2/2mx^2 + \kappa x^2/2.$$

Из условия  $dE/dx = 0$  получаем:  $E_{\min} \approx \hbar\omega$ . Точный расчет дает  $\hbar\omega/2$ .

**2.47.** Полагая  $\Delta r \approx r$  и  $v \approx \Delta v$ , запишем выражение для энергии связи частицы:

$$E_{\text{св}} = |U| - K \approx \delta_* e^2/r - \hbar^2/2mr^2.$$

Из условия  $dE_{\text{св}}/dr = 0$  находим  $r \approx \hbar^2/m\delta_* e^2 = 0,5 \cdot 10^{-8}$  см и  $E_{\text{св}} \approx \delta_*^2 m e^4 / 2\hbar^2 = 13,6$  эВ.

**2.48.** Полагая для обоих электронов  $\Delta r \approx r$  и  $v \approx \Delta v$ , запишем выражение для полной энергии электронов:

$$E \approx 2(p^2/2m - \delta_* 2e^2/r) + \delta_* e^2/2r \approx \hbar^2/mr^2 - \delta_* 7e^2/2r,$$

где член  $\delta_* e^2/2r$  характеризует энергию взаимодействия самих электронов. Минимум  $E$  соответствует  $r \approx 4\hbar^2/7m\delta_* e^2 = 0,3 \cdot 10^{-8}$  см;

$E_{\min} = -(7/4)^2 \delta_*^2 m e^4 / \hbar^2 = -83$  эВ. Эксперимент дает  $-79$  эВ.



$$2.49. \Delta x/\lambda \approx 1/(\pi \Delta K/K) = 2 \cdot 10^3.$$

2.50. Ширина изображения  $\Delta = b + \Delta' \approx b + 2\hbar l/pb$ , где  $b$  — ширина щели,  $\Delta'$  — дополнительное уширение, связанное с неопределенностью импульса  $\Delta p_y$  (при прохождении через щель),  $p$  — импульс падающих атомов водорода. Здесь положено, что  $\Delta y = b/2$ . Функция  $\Delta(b)$  имеет минимум при  $b \approx \sqrt{2\hbar l/mv} \approx 10$  мкм.

2.51. Если  $U$  не зависит от времени явно, то временное уравнение Шредингера допускает решения в виде  $\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$ . Подставив это выражение во временное уравнение Шредингера, получим два уравнения:

$$\psi''_x + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \quad \dot{f} + i \frac{E}{\hbar} f = 0.$$

Решение первого из них — собственные функции  $\psi_n(x)$ , соответствующие собственным значениям энергии  $E_n$ . Решение второго уравнения:  $f(t) \propto \exp(-i\omega_n t)$ , где  $\omega_n = E_n/\hbar$ . В результате

$$\Psi(x, t) = \psi_n(x)\exp(-i\omega_n t).$$

2.52. Изменится лишь временной множитель полной волновой функции. А так как физический смысл имеет лишь квадрат модуля этой функции, то изменение временного множителя никак не проявляется.

2.53. Полагая  $U = 0$ , ищем решение временного уравнения Шредингера в виде  $\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot f(t)$ . В результате

$$\Psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \omega = E/\hbar, \quad k = p/\hbar.$$

2.54. Решение ищем в виде  $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot f(t)$ . Подстановка во временное уравнение Шредингера и введение константы разделения  $E$  приводит к двум уравнениям:

$$\dot{f} + i\omega f = 0, \quad \omega = E/\hbar;$$

$$\psi''_x + \psi''_y + \psi''_z + k^2 \psi = 0, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

Решение первого уравнения:  $f(t) = e^{-i\omega t}$ . Решение же второго уравнения ищем опять методом разделения переменных — координат  $x, y, z$ :  $\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ . В результате подстановки этого выражения в уравнение для  $\psi$  найдем

$$X''_x/X + Y''_y/Y + Z''_z/Z + 2mE/\hbar^2 = 0.$$

Полагая  $E = E_x + E_y + E_z$  получим уравнения для функций  $X, Y, Z$  вида

$$X''_x + (2mE_x/\hbar^2)X = 0.$$

Их решения:  $X(x) = \exp(\pm i k_x x)$ , где  $k_x = \sqrt{2mE_x}/\hbar$ . Аналогично, для  $Y(y)$  и  $Z(z)$ . Окончательно:

$$\Psi(x, y, z, t) = A e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})},$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{2mE}/\hbar = p/\hbar$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ .

**2.55.** Полагая в уравнении Шредингера  $U = 0$ , находим решение  $\psi = A \exp(\pm i k x)$ , где  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ . Видно, что это решение конечно при любых значениях  $E > 0$ .

**2.56.** В  $K$ -системе  $\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$ . Преобразуем показатель экспоненты с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t, & v &= v' + v_0; \\ k &= mv/\hbar = k'(1 + v_0/v'); \\ \omega &= mv^2/2\hbar = \omega' + (mv_0/2\hbar)(2v' + v_0). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\Psi(x, t) = \Psi'(x'; t) \cdot e^{i(k_0 x - \omega_0 t)},$$

где  $k_0 = mv_0/\hbar$ ,  $\omega_0 = mv_0^2/2\hbar$ . Здесь экспоненциальный сомножитель описывает движение частицы вместе с  $K'$ -системой (относительно  $K$ -системы).

**2.57.** Запишем уравнение Шредингера в области  $0 < x < l$ :

$$\psi'' + k^2 \psi = 0, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

Его решение ищем в виде

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha), \quad (*)$$

где  $A$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные. Из условия непрерывности волновой функции  $\psi(0) = 0$  и  $\psi(l) = 0$ , откуда  $\alpha = 0$ ,  $\sin kl = 0$  и  $kl = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (значение  $n = 0$  отбрасываем, так как оно соответствует  $\psi \equiv 0$ , т. е. отсутствию частицы вообще. Исключаем также отрицательные значения  $n$ , поскольку изменение знака  $\psi$ -функции не дает новых состояний).

Остается учесть связь между  $k$  и  $E$ , и мы получим искомое выражение для  $E_n$ .

Постоянную  $A$  находим из условия нормировки:  $\int_0^l \psi^2(x) dx = 1$ .

**Примечание.** Решение (\*) можно представить также в виде

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx; \quad \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}.$$

**2.58. а)**  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ ; **б)**  $E = \pi^2 \hbar^2 (N - 1)^2 / 2ml^2$ .

$$2.59. \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \times \begin{cases} \cos(\pi n x / l), & \text{если } n = 1, 3, 5, \dots, \\ \sin(\pi n x / l), & \text{если } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$2.60. \text{ а) } m = 5\pi^2 \hbar^2 / 2l^2 \Delta E; \quad \text{ б) } n = (\eta + 1) / 2(\eta - 1) = 3.$$

2.61. Из выражения для энергии  $E$  (см. задачу 2.57) следует  $dE/E = 2dn/n$ . Отсюда  $dN = (l/\pi\hbar)\sqrt{m/2E} dE$ .

$$2.62. \text{ а) } F = \pi^2 \hbar^2 / ml^3; \quad \text{ б) } A = (\eta^2 - 1)\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2.$$

$$2.63. w = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61.$$

$$2.64. l = 2/P_m, \quad E = (\pi\hbar P_m)^2 / 8m.$$

2.65. Запишем уравнение Шредингера внутри ямы:

$$\psi''_x + \psi''_y + k^2 \psi = 0, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

Его решение удобно искать сразу в виде произведения синусов:

$$\psi(x, y) = A \sin(k_1 x) \cdot \sin(k_2 y),$$

так как при  $x=0$  и  $y=0$  волновая функция должна обращаться в нуль. Возможные значения  $k_1$  и  $k_2$  находим из граничных условий:

$$\psi(a, y) = 0, \quad k_1 = n_1 \pi / a, \quad n_1 = 1, 2, \dots,$$

$$\psi(x, b) = 0, \quad k_2 = n_2 \pi / b, \quad n_2 = 1, 2, \dots$$

После подстановки  $\psi(x, y)$  в уравнение Шредингера получим  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ , или

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right).$$

Постоянную  $A$  находим из условия нормировки. В результате:

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = \sqrt{4/ab} \sin(n_1 \pi x / a) \cdot \sin(n_2 \pi y / b).$$

$$2.66. w = (1/3 - \sqrt{3}/4\pi)^2 = 0,038.$$

$$2.67. E = 2, 5, 8 \text{ и } 10 \text{ единиц } \pi^2 \hbar^2 / 2ml^2.$$

$$2.68. E = \pi^2 \hbar^2 P_m / 4m.$$

2.69. Каждому значению двойки чисел  $n_1$  и  $n_2$  соответствует одно состояние ( $\psi$ -функция). Число состояний в интервале  $(dn_1, dn_2)$  равно  $dN = dn_1 dn_2$ . Имея в виду уравнение  $k_1^2 + k_2^2 = k^2$ , где  $k_1 = n_1 \pi / a$ ,  $k_2 = n_2 \pi / b$ , отложим на осях координат величины  $k_1$  и  $k_2$ . Построим затем в этом  $k$ -пространстве окружность радиуса  $k$  с центром в начале координат. Все точки этой окружности соответствуют одному и тому же значению  $k$ , т. е. энергии  $E$ . Нас будет интересовать только  $1/4$  окружности,

так как следует рассматривать только положительные значения чисел  $k_1$  и  $k_2$  (отрицательные значения не дают новых состояний, как видно из выражения для  $\psi$ -функции). Число точек (состояний), заключенных между двумя окружностями с радиусами  $k$  и  $k + dk$  в  $1/4$  плоскости, есть

$$dN = \int dn_1 dn_2 = \int (ab/\pi^2) dk_1 dk_2 = (ab/4\pi^2) 2\pi k dk.$$

Имея в виду, что  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , получим:  $dN = (abm/2\pi\hbar^2) dE$ .

**2.70.** Решение аналогично решению, приведенному в задаче **2.65**. В результате

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right),$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — целые числа, не равные нулю.

**2.71. а)**  $E = (\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2)(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$ ,  $\Delta E_{34} = \pi^2 \hbar^2 / ml^2$ .

**б)** для шестого уровня  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 14$ . Это число, как нетрудно установить подбором, является суммой квадратов единственной тройки чисел: 1, 2 и 3. Число различных состояний, отвечающих данному уровню, равно в нашем случае числу перестановок этой тройки, т. е. шести.

**2.72.**  $dN = (abcm^{3/2} / \sqrt{2\pi^2 \hbar^3}) \sqrt{E} dE$ . Вывод аналогичен приведенному в решении задачи **2.69**.

**2.73.** Проинтегрируем уравнение Шредингера по узкой области, внутри которой имеется скачок потенциальной энергии:

$$\psi'_x(+\delta) - \psi'_x(-\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} (2m/\hbar^2)(E - U)\psi dx.$$

Ввиду конечности скачка  $U$  интеграл при  $|\delta| \rightarrow 0$  тоже стремится к нулю. Отсюда  $\psi'_x(+0) = \psi'_x(-0)$ .

**2.74. а)** Напишем уравнение Шредингера для двух областей:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq l, \quad \psi_1'' + k^2 \psi_1 &= 0, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar, \\ x \geq l, \quad \psi_2'' - \kappa^2 \psi_2 &= 0, \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar. \end{aligned}$$

Их общие решения:

$$\psi_1(x) = a \sin(kx + \alpha), \quad \psi_2(x) = be^{-\kappa x} + ce^{\kappa x}$$

должны удовлетворять стандартным условиям. Из условия  $\psi_1(0) = 0$  следует, что  $\alpha = 0$ . Чтобы  $\psi$ -функция оставалась всюду конечной, необходимо соблюдение условия  $c = 0$ . Наконец, из условия непрерывно-

сти волновой функции и ее производной по координате в точке  $x = l$  получим  $\operatorname{tg} kl = -k/\kappa$ , или

$$\sin kl = \pm \sqrt{\hbar^2 / 2ml^2 U_0} kl.$$

Изобразив графически левую и правую части этого уравнения (рис. 12), найдем координаты точек пересечения прямых с синусоидой. Они определяют корни уравнения, отвечающие собственным значениям энергии  $E$ . Корни соответствуют тем точкам пересечения, для которых  $\operatorname{tg} kl < 0$ , т. е. будут находиться в *четных* четвертях окружности (эти участки оси абсцисс выделены на рисунке жирными отрезками). Как видно, корни уравнения (т. е. связанные состояния) существуют не всегда;

б)  $n$ -й уровень появляется при условии  $kl = (2n - 1)\pi/2$ , откуда  $l^2 U_0 = (2n - 1)^2 \pi^2 \hbar^2 / 8m$ . Четыре уровня.

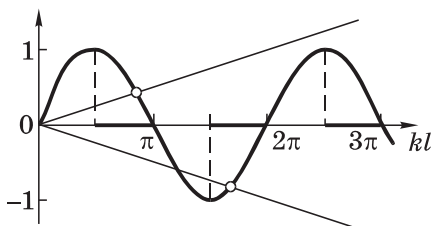


Рис. 12

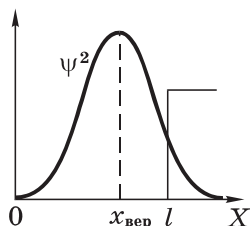


Рис. 13

**2.75. а)** Из уравнения, приведенного в условии предыдущей задачи, следует, что  $\sin(l\sqrt{mU_0}/\hbar) = \sqrt{2}/2$ . Отсюда  $l\sqrt{mU_0}/\hbar = 3\pi/4$  (другие значения отбрасываем, так как уровень единственный, поэтому аргумент синуса находится во второй четверти) и  $l^2 U_0 = 9/16 \pi^2 \hbar^2 / m$ ;

б) из условия экстремума  $d\psi_1^2/dx = 0$ , где  $\psi_1 \propto \sin kx$ , находим  $x_{\text{вер}} = \pi/2k = 2l/3$  (рис. 13);

в) пусть  $w_a$  и  $w_i$  — вероятности нахождения частицы вне и внутри ямы. Тогда

$$w_a/w_i = \int_l^\infty b^2 \exp(-2\kappa x) dx \bigg/ \int_0^l a^2 \sin^2 kx dx = 2/(2 + 3\pi),$$

где отношение  $b/a$  определено из условия  $\psi_1(l) = \psi_2(l)$ , а  $k = \kappa = 3\pi/4l$ . Остается еще учесть, что  $w_a + w_i = 1$ , и мы получим

$$w = 2/(4 + 3\pi) = 14,9\%.$$

Возможность нахождения частицы в области, где ее энергия  $E < U$ , представляет собой чисто квантовый эффект. Он является следствием волновых свойств частицы, исключающих одновременно точные значения координаты и импульса, а следовательно, и точное разделение полной энергии частицы на потенциальную и кинетическую. Последнее можно сделать только в пределах точности, даваемой соотношением неопределенностей.

**2.77. б)** Соответственно  $l^2 U_0 < 2,06 \hbar^2 / m$  и  $2,06 \hbar^2 / m < l^2 U_0 < 12,1 \hbar^2 / m$ .

**2.78.** Напишем решения уравнения Шредингера для трех областей:

$$\begin{aligned} x < 0, & \quad \psi_1 = a \exp(\kappa x), \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar, \\ 0 \leq x \leq l, & \quad \psi_2 = b \sin(kx + \alpha), \quad k = \sqrt{2mE} / \hbar, \\ x > l, & \quad \psi_3 = c \exp(-\kappa x), \end{aligned}$$

Из непрерывности  $\psi$  и  $\psi'$  в точках  $x = 0$  и  $x = l$  получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = k / \kappa, \quad \operatorname{tg}(kl + \alpha) = -k / \kappa,$$

откуда

$$\sin \alpha = \hbar k / \sqrt{2mU_0}, \quad \sin(kl + \alpha) = -\hbar k / \sqrt{2mU_0}.$$

Исключив из последних двух уравнений  $\alpha$ , получим

$$kl = n\pi - 2 \arcsin(\hbar k / \sqrt{2mU_0}), \quad (*)$$

где  $n = 1, 2, \dots, n$ . Значения  $\arcsin$  берутся в первой четверти (от 0 до  $\pi/2$ ). Поскольку аргумент у  $\arcsin$  не может быть больше единицы, то значения  $k$  не могут превосходить  $k_{\max} = \sqrt{2mU_0} / \hbar$ .

Изобразим левую и правую части уравнения (\*) как функцию от  $k$  (рис. 14, где  $y_1, y_2$  и  $y_3$  — правая часть уравнения при  $n = 1, 2, 3$ ). Точки пересечения прямой с кривыми  $y_1, y_2$  и т. д. определяют корни этого уравнения, которые, как видно из рисунка, дают дискретный спектр собственных значений  $E$ .

При уменьшении  $U_0$  величина  $k_{\max}$  перемещается влево — число точек пересечения будет уменьшаться (при заданном  $l$  положение прямой остается неизменным). Когда  $k_{\max}$  становится меньше  $k'$  (см. рис. 14), яма будет иметь только один уровень энергии.

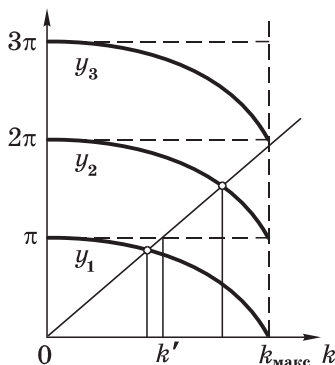


Рис. 14

Таким образом, данная яма всегда содержит по крайней мере один уровень энергии.

**2.79. а)** Основному состоянию соответствует  $n = 1$  в формуле (\*) решения предыдущей задачи. При  $E = U_0/2$  величина  $kl = \pi/2$ , откуда  $l^2 U_0 = \pi^2 \hbar^2 / 4m$ ;

**б)** из той же формулы (\*) и рис. 14 следует, что при появлении второго, третьего, ...,  $n$ -го уровней  $kl = \pi, 2\pi, \dots, (n-1)\pi$ , и аргумент у  $\arcsin$  в этих случаях равен единице, т. е.  $\hbar k = \sqrt{2mU_0}$ . Отсюда

$$l^2 U_0 = (n-1)^2 \pi^2 \hbar^2 / 2m, \quad n = 2, 3, \dots$$

Число уровней определяется неравенством  $n > \sqrt{2ml^2 U_0} / \pi \hbar > (n-1)$ .

В нашем случае  $n = 4$ .

**2.80.**  $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 18ma^2$ .

**2.81.**  $U(x) = 2(\alpha^2 \hbar^2 / m)x^2, \quad E = \alpha \hbar^2 / m$ .

**2.82.**  $U(x) = -\alpha \hbar^2 / mx, \quad E = -\alpha^2 \hbar^2 / 2m$ .

**2.83. а)**  $E = \hbar \omega / 2$ ; **б)**  $E = \frac{3}{2} \hbar \omega$ .

**2.84.**  $E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$ .

**2.85. а)**  $A_0 = (\alpha \sqrt{\pi})^{1/2}$ ; **б)**  $A_1 = \alpha (2\alpha / \sqrt{\pi})^{1/2}$ ; **в)**  $A_2 = (\alpha / 2\sqrt{\pi})^{1/2}$ .

**2.86.**  $x_{\text{вер}} = \pm 1/\alpha$ . См.  $w_1$  на рис. 15.

**2.87.**  $x_{1\text{вер}} = 0, \quad x_{2\text{вер}} = \pm \sqrt{5/2} / \alpha$ . См.

рис. 15.

**2.88. а)**  $x_{\text{KB}} = 1 / \sqrt{2\alpha^2}$ ;

**б)**  $\langle |x| \rangle = 2 / \sqrt{\pi \alpha^2}$ .

**2.89. а)**  $x_0 = \pm 1/\alpha$ ;

**б)**  $w_a = \int_1^\infty \exp(-\xi^2) d\xi / \int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = 0,049$ ,

где  $\xi = \alpha x$ . Здесь  $\int_1^\infty = \int_0^\infty - \int_0^1$ , (см. Приложение).

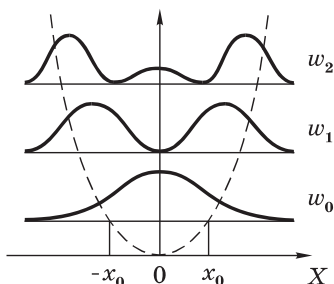


Рис. 15

**2.90.** Уравнение Шредингера для этого поля в области  $x > 0$  такое же, как и в случае линейного осциллятора. Поэтому его решения будут теми же, что для осциллятора при нечетных значениях  $n$ , так как  $\psi(0) = 0$ . Это же относится и к собственным значениям энергии, выражение для которой можно записать в форме  $E = \hbar \omega (2n' + \frac{3}{2})$ , где  $n' = 0, 1, 2, \dots$  Видно, что при одном и том же значении  $\omega$  энергия основного состояния ( $n' = 0$ ) вдвое превышает энергию основного состояния линейного осциллятора.

**2.91. а)** Решение ищем в виде  $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$ . После подстановки в уравнение Шредингера получим

$$X'' + (2m/\hbar^2)(E_x - k_x x^2/2)X = 0$$

и аналогичные уравнения для функций  $Y$  и  $Z$ , причем  $E_x + E_y + E_z = E$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями для одномерного осциллятора, собственные функции и собственные значения энергии которого известны. Поэтому можно сразу написать:

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3} = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y) \psi_{n_3}(z),$$

$$E_n = \hbar\omega(n + 3/2), \quad n = n_1 + n_2 + n_3;$$

**б)** кратность вырождения уровня с определенным значением  $n$  — это по существу число различных комбинаций чисел  $n_1, n_2, n_3$ , сумма которых равна  $n$ . Для определения этого числа комбинаций подсчитаем сначала число возможных троек чисел  $n_1, n_2, n_3$  при фиксированном значении  $n_1$ . Оно равно числу возможных значений  $n_2$  (или  $n_3$ ), т. е. равно  $n - n_1 + 1$ , так как  $n_2$  может меняться от 0 до  $n - n_1$ . Тогда полное число комбинаций из  $n_1, n_2, n_3$  при заданном  $n$  есть

$$N = \sum_{n_1=0}^n (n - n_1 + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

**2.92.** Решение стационарного уравнения Шредингера в области  $x > 0$  (см. рис. 2.9) имеет следующий вид:

$$\psi(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx}, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

Это выражение соответствует суперпозиции падающей и отраженной волн. Из условия непрерывности  $\psi(0) = 0$  следует, что  $b = -a$ . Тогда

$$w(x) = \psi\psi^* = 4a^2 \sin^2 kx.$$

Максимумы  $w(x)$  в точках

$$x_n = \pi n / 2k = \pi \hbar n / \sqrt{8mE}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

или  $x_n = (\lambda/4)n$ , где  $\lambda$  — дебройлевская длина волны частицы ( $2\pi/k$ ).

**2.93.** Решение уравнения Шредингера в области  $x \geq 0$  (см. рис. 2.10) имеет вид

$$\psi = ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}, \quad \gamma = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar.$$

Из требования конечности  $\psi$ -функции следует, что  $a = 0$ . Значит,  $w(x) \propto e^{-2\gamma x}$ . Отсюда  $x_{\text{эф}} = 1/2\gamma$ . Для электрона  $x_{\text{эф}} \approx 0,1$  нм.

**2.94. а)** В данном случае решение уравнения Шредингера имеет вид:

$$x \leq 0, \quad \psi_1 = a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar,$$

$$x \geq 0, \quad \psi_2 = a_2 e^{\gamma x} + b_2 e^{-\gamma x}, \quad \gamma = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar.$$



Пусть падающая волна характеризуется вещественной амплитудой  $a_1$ . Из требования конечности  $\psi$ -функции следует, что  $a_2 = 0$ . Из условия непрерывности  $\psi$  и  $\psi'$  в точке  $x = 0$  имеем

$$a_1 + b_1 = b_2, \quad a_1 - b_1 = i(\kappa/k)b_2.$$

Отсюда находим  $b_1$  и затем — коэффициент отражения:

$$R = |b_1/a_1|^2 = |(k - i\kappa)/(k + i\kappa)|^2 = 1.$$

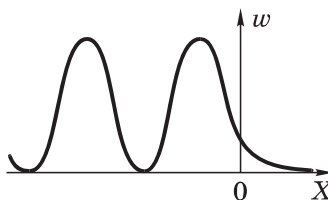


Рис. 16

б) Если  $E = U_0/2$ , то  $k = \kappa$  и

$$w(x \leq 0) = \psi_1 \psi_1^* = 2a^2(1 - \sin 2kx),$$

$$w(x \geq 0) = \psi_2 \psi_2^* = 2a_1^2 e^{-2\kappa x}.$$

График функции  $w(x)$  показан на рис. 16.

2.95. Запишем решения уравнения Шредингера:

$$\psi_1(x \leq 0) = a_1 \exp(ik_1 x) + b_1 \exp(-ik_1 x), \quad k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar,$$

$$\psi_2(x \geq 0) = a_2 \exp(ik_2 x), \quad k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar.$$

Пусть падающая волна характеризуется вещественной амплитудой  $a_1$ . Из условия непрерывности  $\psi$  и  $\psi'$  в точке  $x = 0$  находим

$$b_1 = a_1(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2).$$

Тогда коэффициенты отражения  $R$  и прозрачности  $D$  определяются как

$$R = |b_1/a_1|^2 = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2, \\ D = 1 - R = 4k_1 k_2 / (k_1 + k_2)^2.$$

2.96.  $w_1(x) = \frac{16}{9} a_1^2 (1 - \frac{3}{4} \sin^2 k_1 x)$ ,  $w_2(x) = \frac{16}{9} a_1^2$ , где  $a_1$  — амплитуда падающей волны,  $k_1 = \sqrt{8/3 m U_0}/\hbar$ . См. рис. 17.

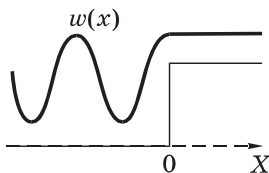


Рис. 17

2.97. а)  $R \approx 1 - 4\sqrt{E/U_0}$ . Чем сильнее неравенство  $E \ll U_0$ , тем ближе значение  $R$  к единице;

б)  $R \approx (U_0/4E)^2$ .

2.98. а) Запишем решения уравнения Шредингера для трех областей:

$$\begin{aligned} x < 0, & \quad \psi_1 = a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar, \\ 0 < x < l, & \quad \psi_2 = a_2 e^{ik_0 x} + b_2 e^{-ik_0 x}, \quad k_0 = \sqrt{2m(E + U_0)}/\hbar, \\ x > l, & \quad \psi_3 = a_3 e^{ikx}. \end{aligned}$$

Эти выражения написаны для случая, когда падающая волна характеризуется  $e^{ikx}$ , поэтому в волновой функции  $\psi_3$  оставлен только один член, соответствующий проходящей волне. Из условия непрерывности  $\psi$  и  $\psi'$  на границах ямы находим

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{4kk_0 e^{-ikl}}{(k+k_0)^2 e^{-ik_0 l} - (k-k_0)^2 e^{ik_0 l}},$$

$$D = \left| \frac{a_3}{a_1} \right|^2 = \left( 1 + \frac{(k_0^2 - k^2)^2}{4k_0^2 k^2} \sin^2 k_0 l \right)^{-1} = \left( 1 + \frac{U_0 \sin^2 k_0 l}{4E(E + U_0)} \right)^{-1};$$

б)  $D \approx 0,95$ .

**2.99.** Из условия  $D = 1$  следует, что  $\sin k_0 l = 0$ . Отсюда  $k_0 l = n\pi$ , или

$$E = \pi^2 \hbar^2 n^2 / 2ml^2 - U_0,$$

где  $n$  — целые числа, при которых  $E > 0$ .

Соотношение  $k_0 l = n\pi$  можно представить в виде  $2l = n\lambda$ , где  $\lambda$  — дебройлевская длина волны частицы *внутри* ямы. Заметим, что в оптике подобное явление, в основе которого лежит чисто интерференционный эффект погашения волн, отраженных от двух границ раздела, называют *просветлением оптики*.

$$E_{\min} = 14 \text{ эВ} \quad (n = 2).$$

**2.100.** Так как  $R = 1 - D$ , то максимум  $R$  будет наблюдаться при минимуме  $D$ , т. е. при  $|\sin k_0 l| = 1$ . Отсюда  $k_0 l = (2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и

$$l = (2n + 1)\pi\hbar / \sqrt{8m(E + U_0)} = (2n + 1)\lambda/4,$$

где  $\lambda$  — дебройлевская длина волны частицы *внутри* ямы.

**2.101. а)** Решение аналогично приведенному в задаче **2.98**, пункт **а**. В результате получим те же формулы, только в них  $k_0 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$ :

$$D = \left( 1 + \frac{U_0 \sin^2 k_0 l}{4E(E - U_0)} \right)^{-1}.$$

При  $E \rightarrow U_0$  проницаемость  $D = (1 + ml^2 U_0 / 2\hbar^2)^{-1}$ .

б)  $D = 1$  при  $E = (\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2)n^2 + U_0 = 11,5$  и  $16$  эВ, где  $n = 1$  и  $2$  ( $n \neq 0$ , поскольку при  $n = 0$  энергия  $E = U_0$  и  $D < 1$ , см. предыдущий пункт).

**2.102. а)** В этом случае характер решения уравнения Шредингера будет отличаться от случая  $E > U_0$  (см. решение задачи **2.98**) только

в области  $0 < x < l$ :

$$\psi_2 = a_2 e^{\kappa x} + b_2 e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar.$$

Поэтому коэффициент прозрачности можно найти, заменив в выражении для  $a_3/a_1$  (см. решение задачи **2.98**, пункт **а**)  $k_0$  на  $i\kappa$ .

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{4i\kappa k e^{-ikl}}{(k + i\kappa)^2 e^{\kappa l} - (k - i\kappa)^2 e^{-\kappa l}},$$

$$D = \left| \frac{a_3}{a_1} \right|^2 = \left[ 1 + \left( \frac{k^2 + \kappa^2}{2k\kappa} \right)^2 \text{sh}^2 \kappa l \right]^{-1} = \left( 1 + \frac{U_0^2 \text{sh}^2 \kappa l}{4E(U_0 - E)} \right)^{-1},$$

где  $\text{sh } \kappa l = (e^{\kappa l} - e^{-\kappa l})/2$ ;

$$D \ll 1 \text{ при } \kappa l \gg 1. \text{ В этом случае } \text{sh } \kappa l = e^{\kappa l}/2 \text{ и } D \approx \frac{16k^2 \kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} e^{-2\kappa l} =$$

$$= 16 \frac{E}{U_0} \left( 1 - \frac{E}{U_0} \right) \exp \left( -2l \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar \right);$$

**б)** для электронов  $D \approx 0,27$ , для протонов  $D \sim 10^{-47}$ .

**2.103. а)** См. рис. 18;

**б)** внутри барьера  $\psi = a e^{\kappa x} + b e^{-\kappa x}$ , где  $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ , поэтому

$$\frac{w(0)}{w(l)} = \frac{\psi \psi^*(0)}{\psi \psi^*(l)} = \frac{(1 + a/b)(1 + a^*/b^*) e^{-2\kappa l}}{(a/b + e^{-2\kappa l})(a^*/b^* + e^{-2\kappa l})}.$$

Из условия непрерывности  $\psi$  и  $\psi'$  в точке  $x = l$  находим

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + i}{1 - i} e^{-2\kappa l}.$$

После подстановки в предыдущее выражение получим

$$w(0)/w(l) = (e^{2\kappa l} + e^{-2\kappa l})/2.$$

$$\mathbf{2.104.} \quad D \approx \exp \left[ -(4l\sqrt{2m}/3\hbar U_0)(U_0 - E)^{3/2} \right].$$

$$\mathbf{2.105.} \quad D \approx \exp \left[ -(\pi l/\hbar) \sqrt{2m/U_0} (U_0 - E) \right].$$

$$\mathbf{3.1.} \quad \text{Указание. Учтеь, что } \hat{A}^2 \psi = \hat{A}(\hat{A}\psi).$$

$$\mathbf{3.2. а)} \quad (2 - x^2) \cos x - 4x \sin x; \quad (1 - x^2) \cos x - 3x \sin x;$$

$$\mathbf{б)} \quad (2 + 4x + x^2) e^x; \quad (1 + 3x + x^2) e^x.$$

$$\mathbf{3.3. а)} \quad A = 4; \quad \mathbf{б)} \quad A = 1; \quad \mathbf{в)} \quad A = -\alpha^2.$$

3.4. а)  $\psi = C e^{i\lambda x}$ ,  $\lambda = 2\pi n/a$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

б)  $\psi = C \sin(\sqrt{\lambda} x)$ ,  $\lambda = (n\pi/l)^2$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

3.6. а)  $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) - (\hat{B} + \hat{C})\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$ ;

б)  $\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) - (\hat{B}\hat{C})\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ .

3.8.  $[\hat{B}, \hat{A}^2] = [\hat{B}, \hat{A}_1^2] + [\hat{B}, \hat{A}_2^2] = 0$ , ибо  $[\hat{B}, \hat{A}_i^2] = [\hat{B}, \hat{A}_i]\hat{A}_i + \hat{A}_i[\hat{B}, \hat{A}_i] = 0$ .

3.9. а) Умножив равенство  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$  на оператор  $\hat{B}$  сначала слева, затем справа, получим  $\hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2\hat{A} = \hat{B}$  и  $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}$ . Теперь сложим эти равенства:  $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A} = 2\hat{B}$ .

3.12. В общем случае нет. Например, оператор  $\hat{p}_y$  коммутирует с операторами  $x$  и  $\hat{p}_x$ , которые между собой не коммутируют.

3.13. а) Если  $\psi$  — общая собственная функция операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , то

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}B\psi = B\hat{A}\psi = BA\psi;$$

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}A\psi = A\hat{B}\psi = AB\psi.$$

Следовательно,  $\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{B}\hat{A}\psi$  и  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ;

б) пусть  $\psi$  — собственная функция оператора  $\hat{A}$ , принадлежащая собственному значению  $A$ . Из коммутативности операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  следует, что  $\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}A\psi = A\hat{B}\psi$ ; т. е.  $\hat{A}\psi' = A\psi'$  где  $\psi' = \hat{B}\psi$ . Таким образом, собственное значение  $A$  принадлежит и функции  $\psi$  и  $\psi'$ , которые, следовательно, описывают одно и то же состояние. Это может быть только в том случае, если эти функции отличаются лишь постоянным множителем, например,  $B: \psi' = B\psi$ . Но  $\psi' = \hat{B}\psi$ , поэтому  $\hat{B}\psi = B\psi$ , т. е.  $\psi$  — общая собственная функция операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ .

3.14. а)  $f(x, z) \exp(ik_y y)$ ;

б)  $A \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$ ;

в)  $f(y, z) \exp(\pm i k_x x)$ .

Здесь  $k_v = p_v/\hbar$ ;  $v = x, y, z$ ;  $f$  — произвольная функция.

3.15. Имеет только в том случае, когда функция  $\psi_A$  одновременно и собственная функция оператора  $\hat{B}$ . В общем случае нет. Например, в случае вырождения (в одномерной прямоугольной потенциальной яме каждому энергетическому уровню соответствуют два значения проекции импульса,  $p_x$  и  $-p_x$ , несмотря на то, что операторы  $\hat{H}$  и  $\hat{p}_x$  коммутируют).

3.16. Пусть  $\psi$  — произвольная собственная функция оператора  $\hat{A}$ , отвечающая его собственному значению  $A$ . Тогда вследствие самосопряженности этого оператора

$$\int \psi^* \hat{A} \psi dV = \int \psi \hat{A}^* \psi^* dV \quad \text{и} \quad A \int \psi^* \psi dV = A^* \int \psi \psi^* dV,$$

откуда  $A = A^*$ . Но последнее возможно только при вещественном  $A$ .

$$\begin{aligned}
 3.17. \text{ а) } \int \psi_1^* \hat{p}_x \psi_2 \, dx &= -i\hbar \int \psi_1^* (\partial \psi_2 / \partial x) dx = \\
 &= -i\hbar \left( \psi_1^* \psi_2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \psi_2 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} dx \right) = \int \psi_2 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_1^* dx = \int \psi_2 \hat{p}_x^* \psi_1^* dx.
 \end{aligned}$$

**3.19.** Из условия эрмитовости операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  следует, что

$$\int \psi_1^* \hat{A} (\hat{B} \psi_2) dV = \int \hat{B} \psi_2 (\hat{A}^* \psi_1^*) dV = \int \hat{A}^* \psi_1^* (\hat{B} \psi_2) dV = \int \psi_2 \hat{B}^* (\hat{A}^* \psi_1^*) dV.$$

Поскольку операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют, то  $\hat{B}^* \hat{A}^* = \hat{A}^* \hat{B}^*$  и

$$\int \psi_1^* \hat{A} \hat{B} \psi_2 dV = \int \psi_2 \hat{A}^* \hat{B}^* \psi_1^* dV.$$

**3.20.** Каждый оператор коммутирует сам с собой, значит, если оператор  $\hat{A}$  эрмитов, то эрмитовыми будут операторы  $\hat{A}^2 = \hat{A} \hat{A}$  и  $\hat{A}^n$ .

**3.23. а)** Уравнение  $\hat{L}_z \psi = L_z \psi$  имеет решение  $\psi = A \exp(iL_z \varphi / \hbar)$ . Из требования однозначности,  $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ , следует, что  $L_z = m\hbar$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Из условия нормировки  $A = 1/\sqrt{2\pi}$ . В результате:

$$\psi_m = (1/\sqrt{2\pi}) e^{im\varphi};$$

**б)** собственные значения  $L_z^2 = m^2 \hbar^2$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Собственные функции имеют тот же вид, что и для оператора  $\hat{L}_z$ , т. е. функция  $\psi_m = (1/\sqrt{2\pi}) e^{im\varphi}$  является общей собственной функцией операторов  $\hat{L}_z$  и  $\hat{L}_z^2$ . Все состояния с собственными значениями  $\hat{L}_z^2$ , кроме  $m = 0$ , двукратно вырождены (по направлению вращательного момента,  $L_z = \pm |m|\hbar$ ).

$$3.24. L^2 = 2\hbar^2.$$

**3.25. а)**  $\int \psi_1^* \hat{L}_z \psi_2 d\varphi = -i\hbar \psi_1^* \psi_2 \Big|_0^{2\pi} + \int \psi_2 (i\hbar \partial \psi_1^* / \partial \varphi) d\varphi = \int \psi_2 \hat{L}_z^* \psi_1^* d\varphi$ .  
Здесь  $\psi_1^* \psi_2 \Big|_0^{2\pi} = 0$ , так как функции  $\psi_1^*$  и  $\psi_2$  удовлетворяют требованию однозначности;

$$\text{б) } \int \psi_1^* \hat{L}_z \psi_2 dV = \int (\psi_1^* x \hat{p}_y \psi_2 - \psi_1^* y \hat{p}_x \psi_2) dV.$$

В силу эрмитовости операторов  $\hat{p}_x$  и  $\hat{p}_y$  подынтегральное выражение можно преобразовать так:

$$x \psi_2 \hat{p}_y^* \psi_1^* - y \psi_2 \hat{p}_x^* \psi_1^* = \psi_2 (x \hat{p}_y^* - y \hat{p}_x^*) \psi_1^* = \psi_2 \hat{L}_z^* \psi_1^*.$$

$$3.26. \int \psi_1^* \hat{L}^2 \psi_2 dV = \int (\psi_1^* \hat{L}_x^2 \psi_2 + \psi_1^* \hat{L}_y^2 \psi_2 + \psi_1^* \hat{L}_z^2 \psi_2) dV.$$

Так как операторы  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$ ,  $\hat{L}_z$  эрмитовы, то эрмитовыми будут и квадраты этих операторов, а следовательно, и оператор  $\hat{L}^2$ .

**3.29. а)**  $[\hat{L}_x, \hat{p}_x^2] = [\hat{L}_x, \hat{p}_x] \hat{p}_x + \hat{p}_x [\hat{L}_x, \hat{p}_x] = 0$ , ибо  $[\hat{L}_x, \hat{p}_x] = 0$ .

**3.30.** Оператор  $\hat{K}$  можно представить в сферических координатах в виде суммы  $\hat{K} = \hat{K}_r + \hat{L}^2/2mr^2$ , где  $\hat{K}_r$  — оператор, действующий только на переменную  $r$ . Так как оператор  $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\vartheta, \varphi}^2$  действует только на переменные  $\vartheta$  и  $\varphi$ , то  $[\hat{L}^2, \hat{K}] = [\hat{L}^2, \hat{K}_r] + [\hat{L}^2, \hat{L}^2/2mr^2] = 0$ .

**3.31. а)**  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x = (y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)(x\hat{p}_x - x\hat{p}_z) - (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z) \times (y\hat{p}_z - z\hat{p}_y) = [z, \hat{p}_z](x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = -i\hbar(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = i\hbar \hat{L}_z$ .

**3.32. а)**  $[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$ ,

где  $[\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] = 0$ ;

$$[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] = \hat{L}_y [\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x] \hat{L}_y = -i\hbar(\hat{L}_y \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_y);$$

$$[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = \hat{L}_z [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \hat{L}_z = i\hbar(\hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_z).$$

Отсюда видно что  $[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$ . Аналогично, для  $\hat{L}_y$ , и  $\hat{L}_z$ .

**3.33.** В случае  $r = r_0 = \text{const}$  гамильтониан

$$\hat{H} = -(\hbar^2/2\mu r_0^2) \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 = (1/2\mu r_0^2) \hat{L}^2.$$

Поэтому  $\hat{H}\psi = (1/2\mu r_0^2) \hat{L}^2 \psi = E\psi$ . Так как собственные значения оператора  $\hat{L}^2$  равны  $\hbar^2 l(l+1)$ , то  $E = \hbar^2 l(l+1)/2\mu r_0^2$ .

**3.34. а)** Вследствие эрмитовости оператора  $\hat{A}$  интеграл

$$\int \psi^* \hat{A} \psi dV = \int \psi \hat{A}^* \psi^* dV.$$

Отсюда  $\langle A \rangle = \langle A^* \rangle$ , что возможно лишь при вещественном  $\langle A \rangle$ .

**б)**  $\langle A^2 \rangle = \int \psi^* \hat{A}^2 \psi dV = \int \psi^* \hat{A} (\hat{A} \psi) dV = \int (\hat{A} \psi) (\hat{A}^* \psi^*) dV = \int |\hat{A} \psi|^2 dV.$

**3.36.** Воспользовавшись тем, что  $\hat{H}x - x\hat{H} = -(i\hbar/m)\hat{p}_x$ , запишем

$$\langle p_x \rangle = \int \psi^* \hat{p}_x \psi dx = (im/\hbar) \int (\psi^* \hat{H}x\psi - \psi^* x\hat{H}\psi) dx.$$

Вследствие эрмитовости гамильтониана подынтегральное выражение можно переписать в виде  $x\psi \hat{H}\psi^* - x\psi^* \hat{H}\psi = 0$ , поскольку  $\hat{H}\psi^* = E\psi^*$  и  $\hat{H}\psi = E\psi$ . Итак,  $\langle p_x \rangle = 0$ , что и требовалось доказать.

**3.37. а)** Из условия нормировки  $A^2 = 8/3l$ .

$$\langle K \rangle = \int \psi \hat{K} \psi dx = -(\hbar^2/2m) \int \psi \psi_x'' dx = 2\pi^2 \hbar^3 / 3ml^2;$$

**б)**  $A^2 = 30/l^5$ ,  $\langle K \rangle = 5\hbar^2/ml^2$ .

**3.38.** Из условия нормировки  $A^2 = \alpha \sqrt{2/\pi}$ ;  $\langle K \rangle = \langle U \rangle = \hbar\omega/4$ .

**3.39. а)**  $\langle x \rangle = 0$ ; **б)**  $\langle p_x \rangle = \hbar k$ . При расчете обратить внимание на то, что интеграл, у которого подынтегральная функция нечетная, равен нулю.

**3.40. а)** Здесь  $\psi_1(x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi x/l)$ ;  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = (1 - 6/\pi^2)l^2/12$ ;  $\langle (\Delta p_x)^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle = (\pi\hbar/l)^2$ . Их произведение равно  $(\pi^2/6 - 1)\hbar^2/2 \approx \hbar^2/3$ .

**б)** Из условия нормировки имеем  $A^2 = \alpha\sqrt{2/\pi}$ ;  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = 1/4\alpha^2$ ;  $\langle (\Delta p_x)^2 \rangle = \alpha^2\hbar^2$ . Их произведение равно  $\hbar^2/4$ .

Указание. При вычислении среднего квадрата импульса целесообразно воспользоваться свойством эрмитовости оператора  $\hat{p}_x$ , благодаря чему

$$\langle p_x^2 \rangle = \int \psi^* \hat{p}_x \psi dx = \int |\hat{p}_x \psi|^2 dx.$$

**3.41.** Из условия нормировки  $A^2 = 4/3\pi$ ;  $\langle L_z^2 \rangle = 4\hbar^2/3$ .

**3.42.** Из условия нормировки  $A^2 = 1/\pi$ ,  $\langle (\Delta \phi)^2 \rangle = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2 = \pi^2/3 - 1/2$ ;  $\langle (\Delta L_z)^2 \rangle = \langle L_z^2 \rangle = \hbar^2$ .

**3.43.** Имея в виду, что  $i\hbar\hat{L}_x = [\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ , запишем

$$\langle L_x \rangle = -(i/\hbar) \int (\psi^* \hat{L}_y \hat{L}_z \psi - \psi^* \hat{L}_z \hat{L}_y \psi) dV.$$

Так как по условию  $\hat{L}_z \psi = L_z \psi$  и оператор  $\hat{L}_z$  эрмитов, то подынтегральное выражение можно преобразовать так:

$$\psi^* \hat{L}_y \hat{L}_z \psi - \psi^* \hat{L}_z \hat{L}_y \psi = L_z \psi^* \hat{L}_y \psi - (\hat{L}_y \psi) \hat{L}_z^* \psi^* = (\hat{L}_y \psi) (\hat{L}_z \psi^* - \hat{L}_z^* \psi^*).$$

Но последняя скобка равна нулю вследствие вещественности собственного значения эрмитова оператора ( $L_z = L_z^*$ ). Аналогично и для оператора  $\hat{L}_y$ .

**3.44.**  $\langle L \rangle = \int \psi \hat{L}^2 \psi d\Omega = 2\hbar^2$ , где  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ .

**3.45.** Так как  $x, y, z$  равноправны, то  $\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle = 3\langle L_z^2 \rangle$ .

С учетом равновероятности различных возможных значений  $L_z$  имеем

$$\langle L_z^2 \rangle = \hbar^2 \langle m^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2l+1} \sum_{-l}^{+l} m^2 = \frac{2\hbar^2}{2l+1} \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} \text{ и } \langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1).$$

**3.46.** Имеем  $\hat{A}\psi_1 = A_1\psi_1$  и  $\hat{A}\psi_2 = A_2\psi_2$ . В силу эрмитовости оператора  $\hat{A}$  его собственные значения вещественны и

$$\int \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dV = \int \psi_2 \hat{A}^* \psi_1^* dV, \text{ или } A_2 \int \psi_1^* \psi_2 dV = A_1 \int \psi_2 \psi_1^* dV.$$

Так как  $A_1 \neq A_2$ , то последнее равенство возможно лишь при условии  $\int \psi_1^* \psi_2 dV = 0$ . Значит, функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  ортогональны.

**3.48. а)** Умножим обе части разложения  $\psi(x) = \sum c_k \psi_k(x)$  на  $\psi_l^*(x)$  и проинтегрируем затем по  $x$ :

$$\int \psi_l^* \psi dx = \sum c_k \int \psi_l^* \psi_k dx.$$

В силу ортонормированности собственных функций оператора  $\hat{A}$  все интегралы в правой части последнего равенства обращаются в нуль, кроме одного, у которого  $k=l$ . Таким образом,  $c_l = \int \psi_l^* \psi dx$ ;

**б)**  $\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dx = \int \left( \sum c_k^* \psi_k^* \right) \left( \sum c_l A_l \psi_l \right) dx = \sum_{k,l} c_k^* c_l A_l \int \psi_k^* \psi_l dx =$   
 $= \sum |c_k|^2 A_k$ . Причем  $\sum |c_k|^2 = 1$ , что непосредственно вытекает из условия нормировки функции  $\psi(x)$ :

$$\int \psi^* \psi dx = \sum c_k^* c_l \int \psi_k^* \psi_l dx = 1.$$

Отсюда следует, что коэффициенты  $|c_k|^2$  — это вероятности обнаружить определенные значения физической величины  $A_k$ .

**3.49.** Прежде всего следует вычислить нормировочный коэффициент  $A$ . Вероятность нахождения частицы на  $n$ -м уровне определяется квадратом модуля коэффициента разложения  $c_n$  функции  $\psi(x)$  по собственным функциям  $\psi_n(x)$  оператора  $\hat{H}$ :

$$c_n = \int \psi \psi_n dx, \quad \text{где } \psi_n = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l);$$

**а)**  $A^2 = 8/3l$ . Искомая вероятность  $w_1 = c_1^2 = 256/27\pi^2 = 0,96$ ;

**б)**  $A^2 = 30/l^5$ ,  $w_n = c_n^2 = 240(1 - \cos n\pi)^2 / (n\pi)^6$ , т. е.  $w_n$  отличается от нуля только для нечетных уровней ( $n=1, 3, 5, \dots$ ); для них  $w_n = 960/(n\pi)^6$ ;  $w_1 = 0,9986$ ,  $w_3 = 1,37 \cdot 10^{-3}$ .

**3.50. а)** Вычислим сначала нормировочный коэффициент:  $A = 2/\sqrt{3\pi}$ . Затем разложим функцию  $\psi(\varphi)$  по собственным функциям оператора  $\hat{L}_z$  — они имеют вид  $\psi_m(\varphi) = (1/\sqrt{2\pi})e^{im\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= A \sin^2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} (1 - \cos 2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{2i\varphi} - \frac{1}{2} e^{-2i\varphi} \right) = \\ &= \sqrt{2/3} \psi_0 - \sqrt{1/6} \psi_{+2} - \sqrt{1/6} \psi_{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $L_z = 0, +2\hbar$  и  $-2\hbar$ . Их вероятности:

$$w_0 = 2/3, \quad w_{+2} = w_{-2} = 1/6.$$



6)  $L_z = 0$ ,  $\pm \hbar$ ;  $w_0 = 2/3$ ,  $w_{+1} = w_{-1} = 1/6$ .

**3.51.** Найдем коэффициенты разложения функции  $\psi_n(x) = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l)$  по собственным функциям оператора  $\hat{k}$ :

$$c_k = \int \psi_n \psi_k^* dx = n\sqrt{\pi l} \frac{1 - (-1)^n e^{-ikl}}{\pi^2 n^2 - k^2 l^2},$$

отсюда

$$w_k = |c_k|^2 = \frac{4\pi l n^2}{(\pi^2 n^2 - k^2 l^2)^2} \times \begin{cases} \cos^2(kl/2), & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ \sin^2(kl/2), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

**3.52.** Удовлетворяет только временному уравнению Шредингера.

**3.53.** Разложим искомую функцию по собственным функциям стационарных состояний:

$$\Psi(x, t) = \sum c_n \psi_n(x) \exp(-i\omega_n t),$$

где  $\psi_n(x) = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l)$ .

Коэффициенты  $c_n$  найдем из начального условия:

$$c_n = \int \Psi(x, 0) \psi_n(x) dx = A \frac{\sqrt{8l^5}}{\pi^3 n^3} [1 - (-1)^n].$$

Отсюда видно, что  $c_n \neq 0$  только при нечетных  $n$ . Из условия нормировки функции  $\Psi(x, 0)$  находим  $A^2 = 30/l^5$ . В результате

$$\Psi(x, 0) = (8/\pi^3) \sqrt{30/l} \sum n^{-3} \sin(n\pi x/l) \exp(-i\omega_n t),$$

где  $\omega_n = E_n/\hbar = (\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2) n^2$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$

**3.54.** Сначала, разделяя переменные  $\varphi$  и  $t$ , находим стационарные решения уравнения Шредингера:

$$i\hbar \partial \Psi / \partial t = \hat{H} \Psi, \quad \Psi_m(\varphi, t) = (1/\sqrt{2}) \exp[i(m\varphi - \omega_m t)],$$

где  $\omega_m = E_m/\hbar = (\hbar/2I) m^2$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Затем разложим искомую функцию  $\Psi(\varphi, t)$  по  $\Psi_m(\varphi, t)$ :

$$\Psi(\varphi, t) = \sum c_m \Psi_m(\varphi, t),$$

где коэффициенты  $c_m$  определим из начального условия

$$\Psi(\varphi, 0) = \sum c_m e^{im\varphi}$$

(см. решение задачи 3.50). В результате

$$\Psi(\varphi, t) = (A/2)(1 + \cos 2\varphi \cdot e^{i2\hbar t/I}).$$

Из этого выражения, в частности, видно, что ротатор возвращается в исходное состояние через промежуток времени  $\Delta t = \pi I / \hbar$ .

**3.55. а)** Имея в виду, что  $\langle A \rangle = \int \Psi^* \hat{A} \Psi dV$ , получим

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{A} dV + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi dV + \int \Psi^* \hat{A} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV.$$

А так как  $\partial \Psi / \partial t = -(i/\hbar) \hat{H} \Psi$  и  $\partial \Psi^* / \partial t = (i/\hbar) \hat{H} \Psi^*$ , то

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \int (\hat{H} \Psi^*) \hat{A} \Psi dV + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi dV - \frac{i}{\hbar} \int \Psi^* \hat{A} \hat{H} \Psi dV.$$

Первый интеграл этого выражения вследствие эрмитовости оператора  $\hat{H}$  можно переписать в виде  $\int \Psi^* \hat{H} \hat{A} \Psi dV$ , тогда

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \int \Psi^* \left[ \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) \right] \Psi dV.$$

Отсюда видно, что  $d\hat{A}/dt = \partial \hat{A} / \partial t + (i/\hbar)(\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H})$ .

**3.57.** Иметь в виду, что операторы  $x$  и  $\hat{p}_x$  не зависят от времени явно.

**3.60.** Оператор  $\hat{L}_x$  не зависит от времени явно, поэтому

$$\frac{d}{dt} \hat{L}_x = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{L}_x] = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{L}_x \right] + \frac{i}{\hbar} [U, \hat{L}_x].$$

Так как операторы  $\hat{p}^2$  и  $\hat{L}_x$  коммутируют между собой (см. задачу 3.29), то скобка, содержащая их, равна нулю. Остается вычислить последнюю скобку.

**3.61.** Дифференцируя по времени уравнение  $\hat{A} \Psi = A \Psi$  с учетом того, что  $\partial \hat{A} / \partial t = 0$ , получаем

$$\hat{A} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{dA}{dt} \Psi + A \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Подставим сюда  $\partial \Psi / \partial t = -(i/\hbar) \hat{H} \Psi$ , тогда

$$\frac{dA}{dt} \Psi = \frac{i}{\hbar} (\hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A}) \Psi.$$

Если  $\hat{A}$  коммутирует с  $\hat{H}$ , то  $\hat{A} \hat{H} \Psi = \hat{H} \hat{A} \Psi = A \hat{H} \Psi$ , и  $dA/dt = 0$ .

**3.62.** Решение этого вопроса сводится к проверке, коммутируют ли операторы указанных механических величин с гамильтонианом  $\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + U = \hat{K} + U$ , где  $\hat{K}$  — оператор кинетической энергии.

Операторы  $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  и  $\hat{L}^2$  коммутируют с оператором  $\hat{K}$  (см. задачи 3.29 и 3.30), поэтому остается выяснить, коммутируют ли эти операторы с оператором  $U$ .

а)  $\partial \hat{H} / \partial t = 0$  и  $U = 0$ . Все величины сохраняются во времени;

б)  $\partial \hat{H} / \partial t = 0$ . Сохраняются во времени  $E, p_x, p_y$  и  $L_z$ ;

в)  $\partial \hat{H} / \partial t = 0$ . С оператором  $U(r)$  коммутируют операторы  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  и  $\hat{L}^2$  (это сразу видно, если их записать в сферических координатах: они действуют только на  $\vartheta$  и  $\varphi$ ). Сохраняются во времени  $E, L_x, L_y, L_z, L^2$ ;

г)  $\partial \hat{H} / \partial t \neq 0$ . Сохраняются во времени только  $p_x, p_y$  и  $L_z$ .

3.63. а)  $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \int \Psi^* [\hat{H}, \hat{A}] \Psi dV = 0$ , т. е.  $\langle A \rangle = \text{const}$ ;

б) так как операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{H}$  коммутируют, то они имеют общие собственные функции  $\psi_n(x)$ :  $\hat{A}\psi_n = A_n\psi_n$  и  $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ . Разложим функцию  $\Psi(x, t)$  по собственным функциям стационарных состояний ( $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ ), поэтому

$$\Psi(x, t) = \sum c_n \psi_n(x) \exp(-i\omega_n t) = \sum c'_n(t) \psi_n(x),$$

где  $\omega_n = E_n/\hbar$ ,  $c'_n(t) = c_n(0) \exp(-i\omega_n t)$ . Последняя сумма — это разложение по собственным функциям оператора  $\hat{A}$ , поэтому квадраты модулей коэффициентов разложения определяют вероятности различных значений физической величины  $A$  в момент  $t$ , т. е.  $w(A_n, t)$ . Таким образом,

$$w(A_n, t) = |c'_n(t)|^2 = |c'_n(0)|^2 = \text{const}.$$

3.64. Цилиндрические:  $z \rightarrow -z'$ ,  $\rho \rightarrow \rho'$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ . Сферические:  $r \rightarrow r'$ ,  $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ .

3.65.  $\hat{P}\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(-\mathbf{r}, t) = P\Psi(\mathbf{r}, t)$ . Двукратное применение оператора  $\hat{P}$  приводит функцию  $\Psi$  к исходному выражению:

$$\hat{P}^2\Psi = P^2\Psi = \Psi.$$

Отсюда  $P^2 = 1$ ,  $P = \pm 1$ , т. е. собственные функции оператора инверсии либо не меняются при воздействии оператора  $\hat{P}$ , либо изменяют свой знак. В первом случае ( $P = +1$ ) волновую функцию называют четной, во втором ( $P = -1$ ) — нечетной.

3.66. Из выражений для операторов  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  видно, что они не меняются при преобразовании инверсии (изменяют знак как сами координаты, так и операторы дифференцирования по координатам, поэтому сами операторы остаются неизменными). А это означает, что указанные операторы коммутируют с оператором инверсии  $\hat{P}$ .

Имея в виду, что  $[\hat{P}, \hat{L}^2] = [\hat{P}, \hat{L}_x^2] + [\hat{P}, \hat{L}_y^2] + [\hat{P}, \hat{L}_z^2]$  и  $[\hat{P}, \hat{L}_x^2] = [\hat{P}, \hat{L}_x] \hat{L}_x + \hat{L}_x [\hat{P}, \hat{L}_x] = 0$ , так как  $[\hat{P}, \hat{L}_x] = 0$  (аналогично для  $\hat{L}_y$  и  $\hat{L}_z$ ), получим  $[\hat{P}, \hat{L}^2] = 0$ , т. е. оператор  $\hat{P}$  коммутирует и с оператором  $\hat{L}^2$ .

**3.67.**  $\hat{P}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = \Theta_{lm}(\pi - \vartheta) e^{im(\varphi + \pi)} = (-1)^{l-m} \Theta_{lm}(\vartheta) \times \times (-1)^m e^{im\varphi} = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ . Отсюда  $P = (-1)^l$ . Таким образом, функция  $Y(\vartheta, \varphi)$  при операции инверсии просто умножается на  $(-1)^l$ . Состояния с четным  $l$  — четные, с нечетным  $l$  — нечетные.

**3.68.** Имея в виду, что волновая функция системы взаимодействующих частиц может быть представлена в виде произведений волновых функций отдельных частиц, каждая из которых характеризуется своим значением  $l_i$ , получаем

$$\hat{P}\Psi(x_i) = \Psi(-x_i) = \prod \psi_i(-x_i) = \prod (-1)^{l_i} \psi_i(x_i) = (-1)^{\sum l_i} \Psi(x_i).$$

**3.69.** Это сразу видно, если записать гамильтониан в сферических координатах:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2(\vartheta, \varphi)}{2mr^2} + U(r).$$

Преобразование инверсии оставляет без изменения все операторы, стоящие справа, поэтому  $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$ .

**3.70.** Представим функцию  $\Psi$  в момент  $t + \tau$  в виде разложения по степеням  $\tau$ :

$$\Psi(t + \tau) = \Psi(t) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tau + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tau^2 + \dots$$

Здесь  $\Psi(t)$  — четная по условию;  $\partial \Psi / \partial t$  — тоже четная, ибо удовлетворяет уравнению Шредингера с четным гамильтонианом ( $-i\hbar \partial \Psi / \partial t = \hat{H}\Psi$ );  $\partial^2 \Psi / \partial t^2$  — тоже четная, поскольку может быть представлена как  $\frac{\partial}{\partial t}(\partial \Psi / \partial t)$  и т. д.

**3.71.** Действительно,  $d\hat{P}/dt = -(i/\hbar)[\hat{P}, \hat{H}] = 0$ , следовательно,  $P = \text{const}$ .

**3.72.** В силу закона сохранения механического момента  $L$  свободный электрон должен иметь  $l = 0$ , т. е. находиться в четном состоянии. Но при этом состояние системы электрон-ион оказывается нечетным. Так как четность изолированной системы меняться не может, то такой процесс невозможен.

**3.73.** Нет, ибо четность зависит от арифметической суммы орбитальных квантовых чисел  $l$ , а механический момент системы — от векторной суммы  $L$ . Оба закона сохранения в квантовой механике надо применять всегда вместе.

применять всегда вместе.

**3.74.** Четность не сохраняется только в случае переменного поля (см. решение задачи **3.62**, пункт г).

**3.75.**  $\hat{K}_r = -(\hbar^2/2m)[\partial^2/\partial r^2 + (2/r)(\partial/\partial r)]$  — это оператор кинетической энергии радиального движения.

**3.76. а)** Представим гамильтониан в уравнении Шредингера  $\hat{H}\psi = E\psi$  в форме  $\hat{H} = \hat{K}_r + \hat{L}^2/2\mu r^2 + U$ , где  $\hat{K}_r$  — оператор кинетической энергии радиального движения (см. ответ предыдущей задачи). Подстановка функции  $\psi = RY$  в уравнение Шредингера приводит к выражению

$$Y\hat{K}_r R + (R/2\mu r^2)\hat{L}^2 Y + YUR = YER.$$

Имея в виду, что  $\hat{L}^2 Y = \hbar^2 l(l+1)Y$ , получим

$$(\hat{K}_r + \hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2 + U)R = ER.$$

Это уравнение определяет собственные значения энергии  $E$ . Его нетрудно привести к искомому виду;

**б)** подставим в уравнение  $\hat{L}^2 Y = \lambda Y$ , где  $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\vartheta, \varphi}^2$ , функцию  $Y$  в виде  $Y = \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$  и произведем разделение переменных  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Обозначив постоянную разделения  $m^2$ , получим уравнение для функции  $\Phi(\varphi)$ :

$$\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2 = -m^2 \Phi, \quad \text{откуда} \quad \Phi(\varphi) = A e^{im\varphi}.$$

Из требования однозначности следует, что  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом,  $\psi = R(r) \Theta(\vartheta) e^{im\varphi}$ .

**3.77.** Функция  $|Y_{l,m}|^2$  характеризует плотность вероятности нахождения частицы в состоянии с квантовыми числами  $l$  и  $m$ , рассчитанную на единицу телесного угла, вблизи  $\vartheta$ :  $|Y|^2 = dw/d\Omega$ ;

**а)**  $\sqrt{3/4\pi}$ ; **б)**  $\sqrt{15/8\pi}$ .

**3.78. а)** После подстановки в уравнение Шредингера получим

$$\chi'' + k^2 \chi = 0, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

Решение этого уравнения ищем в виде  $\chi = A \sin(kr + \alpha)$ . Из требования конечности функции  $\psi(r)$  в точке  $r=0$  следует, что  $\alpha = 0$ . Таким образом,  $\psi(r) = (A/r) \sin kr$ . Из граничного условия  $\psi(r_0) = 0$  имеем  $kr_0 = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , откуда

$$E_{ns} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mr_0^2} n^2, \quad \psi_s(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{\sin kr}{r}.$$

Коэффициент  $A$  найден из условия нормировки:  $\int_0^{\infty} \psi^2 4\pi r^2 dr = 1$ ;

б) из условия  $d(r^2 \psi^2)/dr = 0$  находим

$$r_{\text{вер}} = \pi/2k = r_0/2, \quad w = \int_0^{r_0/2} \psi^2 4\pi r^2 dr = 1/2.$$

Графики функций  $\psi^2$  и  $r^2 \psi^2$  показаны на рис. 19.

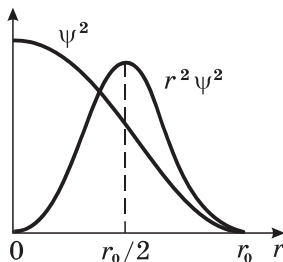


Рис. 19

$$\text{3.79. } \langle r \rangle = \int_0^{r_0} r \psi^2 4\pi r^2 dr = r_0/2, \quad \langle r^2 \rangle = \frac{r_0^2}{3} \left( 1 - \frac{3}{2\pi^2 n^2} \right),$$

$$\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = (r_0^2/12)(1 - 6/\pi^2 n^2).$$

3.80. а) Преобразуем уравнение (3.14) для функции  $R_1(r)$  к виду

$$R_1'' + (2/r)R_1' + (k^2 r^2 - 2)R_1 = 0,$$

где  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . Записав аналогичное уравнение для  $R_0(r)$ , продифференцируем его по  $r$ :

$$R_0''' + (2/r)R_0'' + (k^2 r^2 - 2)R_0' = 0.$$

Из сравнения этих двух уравнений видно, что

$$R_1(r) = R_0'(r) = (A/r^2)(kr \cos kr - \sin kr),$$

где  $A$  — нормировочный коэффициент;

б) из граничного условия  $R_1(r_0) = 0$  получим  $\text{tg} kr_0 = kr_0$ . Корни этого уравнения находим подбором или графически. Наименьшее значение  $kr_0 = 4,5$ . Отсюда  $E_{1p} \approx 10\hbar^2/mr_0^2 = 2E_{1s}$ .

3.81. а) Запишем решения уравнения Шредингера для двух областей — для функции  $\chi(r)$ :

$$r \leq r_0, \quad \chi_1 = A \sin(kr + \alpha), \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar,$$

$$r \geq r_0, \quad \chi_2 = B e^{\gamma r} + C e^{-\gamma r}, \quad \gamma = \sqrt{2m(U - E)}/\hbar.$$

Из требования ограниченности функции  $\psi(r)$  во всем пространстве следует, что  $\alpha = 0$  и  $B = 0$ . Таким образом,

$$\psi_1 = A \frac{\sin kr}{r}, \quad \psi_2 = C \frac{e^{-kr}}{r}.$$

Из условия непрерывности  $\psi$  и  $\psi'$  в точке  $r = r_0$  получим  $\operatorname{tg} kr_0 = -k/\kappa$ , или

$$\sin kr_0 = \pm \sqrt{\hbar^2 / 2mr_0^2 U} kr_0.$$

Это уравнение, как показано в решении задачи 2.74, определяет дискретный спектр собственных значений энергии  $E$ ;

б)  $\pi^2 \hbar^2 / 8m < r_0^2 U_0 < 9 \pi^2 \hbar^2 / 8m$ ;

в) в данном случае имеется единственный энергетический уровень:  $\sin kr_0 = (3\sqrt{3}/4\pi) kr_0$ ,  $kr_0 = 2\pi/3$ ,  $E = 2\pi^2 \hbar^2 / 9mr_0^2$ . Из условия  $\partial(r^2 \psi^2) / \partial r = 0$  находим  $r_{\text{вер}} = 3r_0/4$ ; 34%.

$$3.82. \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left( \varepsilon + \frac{2Z}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R = 0, \quad \rho = \frac{r}{r_1}, \quad \varepsilon = \frac{E}{E_1}.$$

3.83. а) Пренебрегая малыми величинами, приведем уравнение Шредингера к виду

$$\chi'' - \kappa^2 \chi = 0, \quad \kappa = \sqrt{2m|E|} / \hbar.$$

Его решение  $\chi = Ae^{\kappa r} + Be^{-\kappa r}$ . Из условия ограниченности  $R(r)$  следует, что  $A = 0$  и  $R(r) \propto (1/r)e^{-\kappa r}$ ;

б) преобразуем уравнение Шредингера к виду

$$\chi'' - [l(l+1)/r^2] \chi = 0.$$

Решение его ищем в виде  $\chi = Ar^\alpha$ . В результате подстановки в уравнение находим два значения  $\alpha$ :  $1+l$  и  $-l$ . Функция  $R(r)$  будет ограниченной лишь при  $\alpha = 1+l$ . Отсюда  $R(r) \propto r^l$ .

3.84. а)  $A = 1/\sqrt{\pi r_1^3}$ ,  $r_1 = \hbar^2 / \delta_* me^2$ ;

б)  $E = -\hbar^2 / 2mr_1^2 = -\delta_*^2 me^4 / 2\hbar^2$ , где  $\delta_* = 1$  (СГС) или  $1/4\pi\epsilon_0$  (СИ).

3.85. а) Подставив эту функцию в уравнение Шредингера, получим

$$B(a, \alpha, E) + rC(a, \alpha, E) + r^{-1}D(a, \alpha) = 0,$$

где  $B, C, D$  — некоторые полиномы. Это уравнение выполняется при любых значениях  $r$  только в том случае, когда  $B = C = D = 0$ , откуда  $a = \alpha = -1/2r_1 = -\delta_* me^2 / 2\hbar$  и  $E = -\delta_*^2 me^4 / 8\hbar^2$ ;

б)  $A = 1/\sqrt{8\pi r_1^3}$ , где  $r_1$  — первый боровский радиус.

3.86. а)  $r_{\text{вер}} = r_1$  — первый боровский радиус,  $P = 1 - 5/e^2 \approx 32,3\%$ ;

б) радиус классической границы поля в данном состоянии  $r_k = 2r_1$ ,  $P = 13/e^4 \approx 23,8\%$ .

**3.87.**  $\langle r \rangle = 3r_1/2$ ,  $\langle r^2 \rangle = 3r_1^2$ ,  $\langle (\Delta r)^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = 3r_1^2/4$ , где  $r_1$  — первый боровский радиус.

**3.88. а)**  $\langle F \rangle = \delta_* 2e^2/r_1^2$ ; **б)**  $\langle U \rangle = -\delta_* e^2/r_1$ .

**3.89.**  $\langle K \rangle = \int \psi \hat{K} \psi dV = \delta_*^2 m e^4 / 2 \hbar^2$ ,  $v_{\text{кв}} = \delta_* e^2 / \hbar = 2,2 \cdot 10^6$  м/с.

**3.90. а)**  $4r_1$  и  $9r_1$ ; **б)**  $5r_1^2$  и  $15,75r_1^2$ . Здесь  $r_1$  — первый боровский радиус.

**3.91.**  $\varphi_0 = \delta_* \int (\rho/r) 4\pi r^2 dr = -\delta_* e/r_1 = -27,2$  В, где  $\rho = -e\psi_{1s}^2(r)$  — объемная плотность электрического заряда,  $r_1$  — первый боровский радиус.

**3.92.** Напишем уравнение Пуассона в сферических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi_e) = \alpha_* e \psi_{1s}^2(r), \quad e > 0.$$

Проинтегрировав это уравнение дважды, получим

$$\varphi_e(r) = (\alpha_*/4\pi)(e/r_1 + e/r) \exp(-2r/r_1) + A + B/r, \quad (*)$$

где  $r_1$  — первый боровский радиус,  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования. Выберем эти постоянные так, чтобы  $\varphi_e(\infty) = 0$ , а  $\varphi_e(0)$  было конечным. Отсюда  $A = 0$ ,  $B = -\alpha_* e/4\pi$ . Добавив к полученному выражению (\*) потенциал, создаваемый ядром, получим в результате

$$\varphi(r) = (\alpha_*/4\pi)(e/r_1 + e/r) \exp(-2r/r_1).$$

**4.1.** 5,1 и 2,1 В.

**4.2.** 0,41, 0,04 и 0,00.

**4.3.** Вычислив квантовый дефект  $S$ -термов, найдем  $E_{\text{св}} = 5,4$  эВ.

**4.4. а)** 6; **б)** 12.

**4.5.** 0,27 и 0,05; 177 нм.

**4.6.**  $a = 1,71$ ,  $n = 2$ .

**4.7.** 7,2 мЭВ; 1,61 эВ.

**4.8.**  $\Delta\omega = 1,045 \cdot 10^{14}$  с<sup>-1</sup>.

**4.9.**  $3s_{1/2}$ ,  $3p_{1/2, 3/2}$ ,  $3d_{3/2, 5/2}$ ;  $N = n^2 - n - 1$ .

**4.10.** В единицах  $\hbar$ :  $\sqrt{35/4}$ ,  $\sqrt{15/4}$ , и  $\sqrt{3/4}({}^4P)$ ;  $\sqrt{20}$ ,  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{2}$  и  $0({}^5D)$ .

**4.11. а)**  ${}^1P_1$  и  ${}^3P_{0,1,2}$ ;

**б)**  ${}^1P_1$ ,  ${}^1D_2$ ,  ${}^1F_3$ ,  ${}^3P_{0,1,2}$ ,  ${}^3D_{1,2,3}$ ,  ${}^3F_{2,3,4}$ ;

**в)**  ${}^2P_{1/2, 3/2}$ ,  ${}^2D_{3/2, 5/2}$ ,  ${}^2F_{5/2, 7/2}$ ,  ${}^4P_{1/2, 3/2, 5/2}$ ,  ${}^4D_{1/2, 3/2, 5/2, 7/2}$ ,  ${}^4F_{3/2, 5/2, 7/2, 9/2}$ .

**4.12.** 20 (5 синглетных + 15 триплетных).

**4.13.**  ${}^1S_0$ ,  ${}^1P_1$ ,  ${}^1D_2$ ,  ${}^3S_1$ ,  ${}^3P_{0,1,2}$ ,  ${}^3D_{1,2,3}$ .



4.14. а) 2, 4, 6, 8; б) соответственно 2; 1 и 3; 2 и 4; 1, 3 и 5.

4.15.  $\hbar\sqrt{30}$ .

4.16. Соответственно  $M_s \geq \hbar\sqrt{2}$  и  $M_s = \hbar\sqrt{2}$ .

4.17. а)  $35,2^\circ$ ; б)  $34,4^\circ$ .

4.18. 10 (это число состояний с различными значениями  $m_J$ ).

4.19.  $\hbar\sqrt{30}$ ;  ${}^5H_3$ .

4.20.  $\cos \alpha = -1/\sqrt{3}$ , откуда  $\alpha = 125,3^\circ$ .

4.21. а)  $\sum_J (2J + 1) = (2S + 1)(2L + 1)$ ;

б)  $2(2l_1 + 1) \cdot 2(2l_2 + 1) = 60$ ;

в) число состояний с одинаковыми квантовыми числами  $n$  и  $l$  равно  $N = 2(2l + 1)$ . При размещении  $k$  электронов по этим состояниям необходимо учесть принцип Паули. Следовательно, задача сводится к нахождению числа сочетаний из  $N$  элементов по  $k$ :

$$C_N^k = N(N - 1)(N - 2) \cdot \dots \cdot (N - k + 1)/k! = 120.$$

4.22. а) 15; б) 46.

4.23. а)  $2(2l + 1)$ ; б)  $2n^2$ .

4.24. а) Атом С:  $1s^2 2s^2 p^2 ({}^3P_0)$ ; атом N:  $1s^2 2s^2 p^3 ({}^4S_{3/2})$ ;

б) атом S:  $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^4 ({}^3P_2)$ ; атом Cl:  $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^5 ({}^2P_{3/2})$ .

4.25. а)  ${}^3F_2$ ; б)  ${}^4F_{3/2}$ .

4.26.  ${}^6S_{5/2}$ .

4.27. Основной терм  ${}^5D_4$ . Кратность вырождения  $2J + 1 = 9$ .

4.28. а) Два  $d$ -электрона; б) пять  $p$ -электронов;

в) пять  $d$ -электронов.

4.29.  ${}^3P_0$ .

4.30. Составим таблицу возможных распределений электронов по квантовым состояниям (числам) с учетом принципа Паули (табл. 1 и 2). При этом можно не выписывать тех распределений электронов, которые дают отрицательные значения сумм проекций  $M_L$  и  $M_S$ : они не дают ничего нового, в чем можно убедиться непосредственно.

Для наглядности проекцию спина  $m_s$  каждого электрона обозначим стрелкой, направленной вверх (если  $m_s = +1/2$ ) или вниз (если  $m_s = -1/2$ ).

а) См. табл. 1. Наличие состояния с  $M_L = 2$  и  $M_S = 0$  указывает на то, что имеется терм  ${}^1D$ ; следовательно, должны быть еще два состояния:  $M_L = 1$  и  $M_L = 0$  (у обоих  $M_S = 0$ ). Из оставшихся расположений состояние с  $M_L = 1$  и  $M_S = 1$  указывает на наличие терма  ${}^3P$ , поэтому должно быть еще одно состояние с  $M_L = 0$ ,  $M_S = 1$ . Оставшееся состояние с  $M_L = 0$  и  $M_S = 0$  принадлежит терму  ${}^1S$ . Следовательно, заданной конфигурации соответствуют три типа термов:  ${}^1S$ ,  ${}^1D$  и  ${}^3P$ ;

Таблица 1

$m_l$	$m_s$					
+1	↑	↑	↑	↑	↑↓	—
0	↑	—	↓	—	—	↑↓
-1	—	↑	—	↓	—	—
$M_S$	1	1	0	0	0	0
$M_L$	1	0	1	0	2	0

Таблица 2

$m_l$	$m_s$						
+1	↑	↑	↑	↓	↑↓	↑↓	↑
0	↑	↑	↓	↑	↑	—	↑↓
-1	↑	↓	↑	↑	—	↑	—
$M_S$	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$M_L$	0	0	0	0	2	1	1

б) см. табл. 2. Рассуждая аналогично, получим  ${}^2D$ ,  ${}^2P$  и  ${}^4S$ ;

в)  ${}^1S$ ,  ${}^1D$ ,  ${}^1G$ ,  ${}^3P$  и  ${}^3F$ .

4.31. Обе конфигурации имеют следующие одинаковые типы термов:

а)  ${}^2P$ ; б)  ${}^1S$ ,  ${}^1D$  и  ${}^3P$ ; в)  ${}^2D$ .

Этот факт является результатом того, что отсутствие электрона в подоболочке можно рассматривать как «дырку», состояние которой определяется теми же квантовыми числами, что и состояние отсутствующего электрона.

4.32. Составим таблицу возможных распределений электронов по квантовым состояниям с учетом того, что принцип Паули налагает ограничения лишь на эквивалентные электроны.

а) См. табл. 3, где тонкими стрелками показаны проекции спина  $p$ -электрона, двойными —  $s$ -электрона.

Таблица 3

$m_l$	$m_s$							
+1	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑↓	—
0	↑↑	↑↓	↑↑	↓↓	↓↑	↑↑	↑↑	↑↓↑
-1	—	—	↑	↑	—	↓	—	—
$M_S$	3/2	1/2	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$M_L$	1	1	0	0	1	0	2	0

Возможные типы термов:  ${}^2D$ ,  ${}^2P$ ,  ${}^2S$  и  ${}^4P$ .

б)  ${}^2S$ ,  ${}^2P$  (три терма),  ${}^2D$ ,  ${}^2F$ ,  ${}^4S$ ,  ${}^4P$  и  ${}^4D$ .

4.33.  $N_2/N_1 = (g_2/g_1)e^{-\hbar\omega/kT} = 2,3 \cdot 10^{-3}$ , где  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 4 + 2$ .

4.34.  $3 \cdot 10^{-17}$ .

4.35.  $C_V = \frac{N(\Delta E)^2}{k} \frac{e^{\Delta E/kT}}{T^2(1 + e^{\Delta E/kT})^2}$ ;  $C_V = \frac{N(\Delta E)^2}{kT^2} e^{-\Delta E/kT}$ ,

$C_V = N(\Delta E)^2/4kT^2$ .

**4.36.** Из условия  $-dN = ANdt$ , где  $A$  — постоянная, находим  $N = N_0 e^{-At}$ . С другой стороны,  $\tau = \int t dN = 1/A$ , где интегрирование проводится по  $t$  от 0 до  $\infty$ . Дальнейшее очевидно.

**4.37.**  $\tau = l/(v \ln \eta) = 1,2$  мкс;  $\Gamma \approx 5,5 \cdot 10^{-10}$  эВ.

**4.38.**  $N = \tau \lambda P / 2\pi \hbar c = 7 \cdot 10^9$ .

**4.39.**  $\tau = (N \hbar \omega / P)(g'/g) e^{-\hbar \omega / kT} = 0,07$  мкс, где  $g' = 4 + 2$ ,  $g = 2$ . Здесь учтено, что концентрация атомов на основном уровне практически не отличается от полной концентрации, так как  $\hbar \omega \gg kT$ .

**4.40. а)** Число прямых и обратных переходов в единицу времени есть  $Z_{21} = (A_{21} + B_{21}u_\omega)N_2$  и  $Z_{12} = B_{12}u_\omega N_1$ . Учитывая распределение Больцмана и то, что  $Z_{21} = Z_{12}$ , получаем

$$u_\omega = \frac{A_{21}}{(g_1/g_2)B_{12}e^{\hbar \omega / kT} - B_{21}}.$$

При  $T \rightarrow \infty$  величина  $u_\omega \rightarrow \infty$ , поэтому  $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ . Кроме того, из сравнения с формулой Планка следует, что  $B_{21} = (\pi^2 c^2 / \hbar \omega^3) A_{21}$ ;

**б)**  $u_\omega = (A_{21}/B_{12})(g_2/g_1)e^{-\hbar \omega / kT} = (\hbar \omega^3 / \pi^2 c^3) e^{-\hbar \omega / kT}$  — формула Вина.

**4.41. а)**  $w_{\text{инд}}/w_{\text{сп}} = 1/(e^{3\hbar R/4kT} - 1) \sim 7 \cdot 10^{-18}$ ;

**б)**  $T = 3/4 \hbar R / k \ln 2 = 1,7 \cdot 10^5$  К.

**4.42.** Пусть  $I_\omega$  — интенсивность проходящего света. Убыль этой величины при прохождении через слой вещества толщиной  $dx$  равна

$$-dI_\omega = k_\omega I_\omega dx = (N_1 B_{12} - N_2 B_{21})(I_\omega / c) \hbar \omega dx,$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — концентрации атомов на нижнем и верхнем уровнях,  $B_{12}$  и  $B_{21}$  — коэффициенты Эйнштейна. Отсюда

$$\kappa_\omega = (\hbar \omega / c) N_1 B_{12} (1 - g_1 N_2 / g_2 N_1).$$

Далее следует учесть распределение Больцмана и тот факт, что  $\hbar \omega \gg kT$  — при этом  $N_1 \approx N_0$  (полная концентрация атомов).

**4.43.** Из решения предыдущей задачи следует, что для усиления света необходимо, чтобы  $\kappa_\omega < 0$ , т. е.  $g_1 N_2 > g_2 N_1$ . Это возможно, если в системе существует термодинамически неравновесное состояние.  $N_D: N_P = g_D: g_P = 5:3$ .

**4.44.** В стационарном случае концентрации атомов на верхнем и нижнем уровнях равны соответственно  $N_2 = q/A_{21}$  и  $N_1 = q/A_{10}$ . Для усиления света необходимо, как следует из решения задачи **4.42**, чтобы  $g_1 N_2 > g_2 N_1$ . Дальнейшее очевидно.

**4.45.** Составим систему уравнений:

$$\dot{N}_2 = q - A_2 N_2 \quad \text{и} \quad \dot{N}_1 = A_{21} N_2 - A_{10} N_1,$$

где  $A_2 = A_{20} + A_{21}$ . Решение первого уравнения

$$N_2 = (q/A_2)[1 - \exp(-A_2 t)].$$

Подставим это решение во второе дифференциальное уравнение и ищем решение его в виде суммы решений общего уравнения и частного  $N_{1\text{общ}} + N_{1\text{частн}}$ , где

$$N_{1\text{общ}} = B \exp(-A_{10} t) \quad \text{и} \quad N_{1\text{частн}} = C + D \exp(A_2 t).$$

Постоянные  $C$  и  $D$  находим подстановкой  $N_{1\text{частн}}$  в исходное дифференциальное уравнение, а постоянную  $B$  — из условия, что общее решение  $N_1(0) = 0$ . В результате получим

$$N_1(t) = \frac{qA_{21}}{A_{10}A_2} \left( 1 - \frac{A_2 \exp(-A_{10}t) - A_{10} \exp(-A_2t)}{A_2 - A_{10}} \right).$$

**4.46.** Исходим из масштабных соображений: энергия уровней  $E \propto Z^2$ , т. е. пропорциональна квадрату заряда ядра. Значит, в случае иона  $\text{He}^+$  шкала энергий «растянута» в  $Z^2 = 4$  раза. Во столько же раз будет растянута и ширина уровня  $\Gamma$ , которая связана с временем жизни  $\tau$  соотношением  $\Gamma\tau \approx \hbar$ . Отсюда следует, что  $\tau$  для  $\text{He}^+$  будет меньше в  $Z^2 = 4$  раза:  $\tau_{\text{He}} = 0,4$  нс.

**4.47.**  $\Delta\lambda \approx (\lambda^2/2\pi c)(1/\tau_1 + 1/\tau_2) = 20$  фм.

**4.48. а)**  $\delta\omega = \gamma$ ;    **б)**  $\tau = \lambda^2/2\pi c\delta\lambda = 1,2$  нс.

**4.49. б)**  $I = 2 \int I_\omega d\omega = (\pi/2)\delta\omega I_0$ , где интегрирование проводится от  $\omega_0$  до  $\infty$ .

**4.50. а)** Пусть  $v_x$  — проекция вектора скорости излучающего атома на направление линии наблюдения. Число атомов с проекциями скоростей в интервале  $(v_x, v_x + dv_x)$ :

$$n(v_x)dv_x \propto \exp(-mv_x^2/2kT)dv_x.$$

Частота фотона, испускаемого атомом с  $v_x$ , есть  $\omega = \omega_0(1 + v_x/c)$ . С помощью этого выражения найдем распределение излучающих атомов по частотам как  $n_\omega d\omega = n(v_x)dv_x$ . И наконец, остается учесть, что спектральная интенсивность излучения  $I_\omega \propto n_\omega$ .

**4.51.**  $\delta\lambda_{\text{доп}}/\delta\lambda_{\text{ест}} \approx (4\pi\tau/\lambda)\sqrt{2 \ln 2 \cdot kT/m} \approx 1,0 \cdot 10^3$ , где  $m$  — масса атома ртути.

**4.52.**  $\alpha = \lambda/2\pi v\tau\eta = 2$  угл. мин, где  $\eta = 10$ .

**4.53.** 844 и 180 пм; 1,47 и 6,9 кэВ.

**4.54.** 1,22 нм (натрий).

4.55. а) Fe, Co, Ni, Zn; отсутствует Cu (155 пм); б) три элемента.

4.56. 0,29, 0,00 и -2,1.

4.57. 15 кВ.

$$4.58. Z = 1 + \sqrt{\frac{4e(\eta - 1)}{3\hbar R(\eta/V_1 - V_2)}} = 29, \text{ т. е. медь.}$$

4.59. 5,5 и 70 кВ.

4.60. В молибдене — все серии, в серебре — все, кроме *K*-серии.

$$4.61. Z = 1 + \sqrt{4\Delta\omega/3R} = 22, \text{ титан.}$$

4.62. б) Титан, 3,01 нм.

4.63. а) 5,47 и 0,52 кэВ; б) 0,25 нм.

$$4.64. E_L = \hbar\omega/(2\pi c/\omega\Delta\lambda - 1) = 0,47 \text{ кэВ, где } \omega = (3/4)R(Z - 1)^2.$$

$$4.65. Z = 1 + \sqrt{8\pi c/3R\lambda_\alpha} = 22, \quad \lambda = \lambda_\alpha\lambda_\beta/(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = 2,9 \text{ нм.}$$

$$4.66. a_K = 2,86; a_L = 10,1.$$

4.67. 1,54 кэВ.

4.68. 0,26 кэВ.

4.69. а)  $K_{\text{фот}} = \hbar\omega - E_K = 4,7 \text{ кэВ}$ ;  $K_{\text{оже}} = (E_K - E_L) - E_L = 10,4 \text{ кэВ}$ , где  $E_K$  и  $E_L$  — энергия связи *K*- и *L*-электронов; б) 50 пм.

4.71.  ${}^2P_{3/2}$ .

4.72.  ${}^2S_{1/2}$  и  ${}^2P_{3/2, 1/2}$ ;  ${}^2S_{1/2}$ ,  ${}^2P_{3/2, 1/2}$  и  ${}^2D_{5/2, 3/2}$ .

4.73.  $K \rightarrow L$ ,  $M$  — по две линии;  $L \rightarrow M$  — семь линий.

4.74. а) 21,5 пм ( $K_{\alpha 1}$ ) и 20,9 пм ( $K_{\alpha 2}$ ); б) 0,49 пм.

4.75. 115,4; 21,9; 21,0 и 17,2 кэВ.

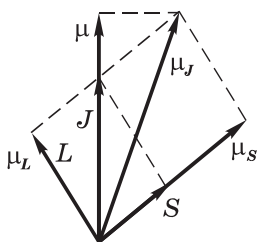


Рис. 20

4.76. Из векторной модели (рис. 20, где для наглядности вектора  $\mu_S$  и  $\mu_L$  изображены совпадающими по направлению с векторами  $S$  и  $L$ ) следует, что

$$\mu = \mu_L \cos(L, J) + \mu_S \cos(S, J), \quad (1)$$

где  $\mu_L$  и  $\mu_S$  имеют вид:

$$\mu_L = \sqrt{L(L+1)}\mu_B, \quad \mu_S = 2\sqrt{S(S+1)}\mu_B.$$

Введя обозначения

$$L^* = \sqrt{L(L+1)}, \quad S^* = \sqrt{S(S+1)}, \quad J^* = \sqrt{J(J+1)},$$

запишем, согласно теореме косинусов:

$$\begin{aligned} L^{*2} &= J^{*2} + S^{*2} - 2J^*S^* \cos(S, J), \\ S^{*2} &= J^{*2} + L^{*2} - 2J^*L^* \cos(L, J). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключив косинусы из (1) и (2), получим искомое выражение.

4.77. а) 2 (*S*), 2/3 и 4/3 (*P*), 4/5 и 6/5 (*D*);

б)  $0/0$  ( ${}^3P_0$ ),  $3/2$  ( ${}^3P_1$  и  ${}^3P_2$ );

в)  $g = 2$ , за исключением синглетного, где  $g = 0/0$ ;

г)  $g = 1$ .

4.78. а)  ${}^2F_{5/2}$ ; б)  ${}^3D_3$ .

4.79. а)  $\mu = \sqrt{12} \mu_B$ ,  $\mu_B = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  магнетона Бора;

б)  $\mu = \sqrt{12/5} \mu_B$ ,  $\mu_B = 0, \pm 1, \pm 2$  магнетона Бора.

4.80.  $S = 3$ ; мультиплетность  $2S + 1 = 7$ .

4.81.  $4/\sqrt{3}$ ,  $13/\sqrt{15}$  и  $4\sqrt{7/5}$  магнетонов Бора.

4.82.  $\sqrt{3}$  магнетона Бора.

4.83. Для обоих термов  $g = 0$ ;  $\mu_J \perp \mathbf{J}$  (см. рис. 20).

4.84.  $\hbar\sqrt{2}$  и  $\hbar\sqrt{6}$ .

4.85. а) Основное состояние  ${}^2P_{3/2}$ ,  $g = 4/3$ ,  $\mu = \sqrt{20/3} \mu_B$ ;

б) основное состояние  ${}^4F_{3/2}$ ,  $g = 2/5$ ,  $\mu = \sqrt{3/5} \mu_B$ .

4.86. С одной стороны  $d\mathbf{J} = [\mu, \mathbf{B}] dt$ , где  $\mu$  — магнитный момент атома. С другой стороны (рис. 21),  $|d\mathbf{J}| = J \sin \vartheta \cdot \omega dt$ , где  $\mathbf{J} = \hbar\sqrt{J(J+1)}$ . Сравнив оба выражения, получим искомую формулу.

4.87. а)  $0,88 \cdot 10^{10}$ ,  $1,17 \cdot 10^{10}$  и  $0$  рад/с;

б)  $1,32 \cdot 10^{10}$  рад/с ( ${}^3P_2$ ).

4.88.  $\mu = g\sqrt{J(J+1)} \mu_B \approx 5,6\mu_B$ , где  $g = \hbar\omega/\mu_B B$ ,

$J = 4$ .

4.89. Здесь  $g = -2/3$ , поэтому  $\mu \uparrow \uparrow \mathbf{J}$  (не  $\uparrow \downarrow$ , как обычно).

4.90.  $F = \mu_B \partial B / \partial z = \chi_* 2\pi I R^2 z \mu_B / (R^2 + z^2)^{5/2} = 4,1 \cdot 10^{-27}$  Н. Здесь  $\chi_* = 1/c$  (СГС) или  $\mu_0/4\pi$  (СИ).

4.91.  $I = N\mu_B \tanh \alpha$ , где  $\alpha = \mu_B B / kT$ ;  $I = N\mu_B^2 B / kT$  при  $\alpha \ll 1$ .

$$4.92. \langle \mu_B \rangle = \frac{\sum \mu_B e^{\mu_B/kT}}{\sum e^{\mu_B/kT}} = \frac{g\mu_B \sum m e^{\alpha m}}{\sum e^{\alpha m}},$$

где  $\alpha = g\mu_B B / kT$ . Здесь суммирование проводится по  $m$  (магнитное квантовое число) от  $-J$  до  $+J$ . Для слабого магнитного поля  $\alpha \ll 1$ , поэтому  $e^{\alpha m} = 1 + \alpha m$ . Тогда

$$\sum m e^{\alpha m} = \alpha \sum m^2 = \alpha J(J+1)(2J+1)/3$$

и  $\sum e^{\alpha m} = 2J+1$ . Дальнейшее очевидно.

4.93.  $\partial B / \partial z = mv^2 \Delta z / a(a+2b) \mu_B = 7$  кГс/см.

4.94. а) 0,6, 5 и 6 магнетонов Бора;

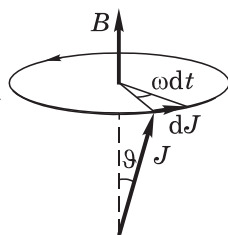


Рис. 21

б) соответственно: на пять компонент; не расщепляется, так как  $\mu = 0$  ( $g = 0$ ).

4.95.  $\Delta z = [a(a + 2b) \mu_B / 2K] \partial B / \partial z = 5 \text{ мм}, \mu_B = gJ \mu_B.$

4.96. а)  $\Delta E = 2L \mu_B B = 7,0 \cdot 10^{-5} \text{ эВ};$  б)  $^1F_3.$

4.97. В обоих случаях три компоненты.

4.98.  $\Delta \lambda = \lambda^2 \mu_B B / \pi c \hbar = 35 \text{ пм}.$

4.99.  $\Delta E = \pi c \hbar \Delta \lambda / \lambda^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}.$

4.100. а)  $B_{||} = \pi c \hbar \delta \lambda / \lambda^2 \mu_B = 2,0 \text{ кГс} = 0,20 \text{ Тл};$

б)  $4,0 \text{ кГс}.$

4.101.  $B = \eta \frac{2\pi \hbar c}{g \mu_B} \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \begin{cases} 28 \text{ кГс для терма } P_{3/2}, \\ 55 \text{ кГс для терма } P_{1/2}. \end{cases}$

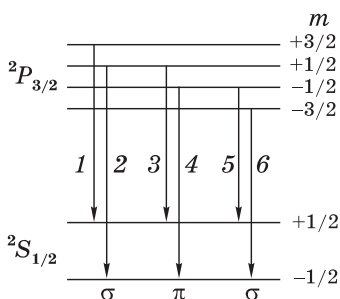


Рис. 22

4.103. а) Соответственно: простой, сложный, простой, простой (в последнем случае для обоих термов факторы Ланде одинаковы);

б) атомы с нечетным числом электронов — сложный эффект Зеемана, остальные атомы — и простой (на синглетных линиях), и сложный (на линиях иной мультиплетности).

4.104. См. рис. 22.

а) Для определения возможных смещений, т. е. значений разности

$m_1 g_1 - m_2 g_2$  составим следующую схему:

$$\begin{array}{cccc}
 m = & +3/2 & +1/2 & -1/2 & -3/2 \\
 m_1 g_1 = & +6/3 & +2/3 & -2/3 & -6/3 & ({}^2P_{3/2}) \\
 & \swarrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \\
 & & +1 & -1 & \\
 m_2 g_2 = & & & & & ({}^2S_{1/2})
 \end{array}$$

Смещения:  $\Delta \omega = +5/3, +3/3, +1/3, -1/3, -3/3, -5/3$  единиц  $\mu_B B / \hbar$ . В приведенной схеме стрелками соединены только те значения  $mg$ , разность между которыми (т. е. соответствующий переход) удовлетворяют правилу отбора  $\Delta m = 0, \pm 1$ . Вертикальные стрелки отвечают  $\pi$ -компонентам, косые —  $\sigma$ -компонентам.

б)  $\Delta \omega = 2(5/3) \mu_B B / \hbar = 1,466 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}.$

4.105. а)  $\Delta \omega = \pm(4, 8, 12, 16, 24)/15;$

б)  $\Delta \omega = \pm(1, 3, 15, 17, 19, 21)/15.$

4.106. а)  $\Delta\omega = \pm(0, 1, 2)/6$ ;

б)  $\Delta\omega = \pm(1, 2)/3$ , центральная  $\pi$ -компонента здесь отсутствует, ибо переход  $\Delta J = 0$ ,  $\Delta m = 0$  запрещен.

4.107. В сильном магнитном поле. Оба вектора,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$ , ведут себя в первом приближении независимо друг от друга, и энергия взаимодействия атома с полем

$$\Delta E = -(\mu_L)_B B - (\mu_S)_B B = (m_L + 2m_S)\mu_B B.$$

При переходе между двумя уровнями смещение зеемановской компоненты  $\Delta\omega = (\Delta m_L + 2\Delta m_S)\mu_B B$ . Правила отбора  $\Delta m_L = 0, \pm 1$  и  $\Delta m_S = 0$  приводят к простому эффекту Зеемана.

4.108.  $B = \eta\pi c\hbar\Delta\lambda/\lambda^2\mu_B = 36 \text{ кГц} = 3,6 \text{ Тл}$ .

4.110. В постоянном магнитном поле с индукцией  $B$  магнитные моменты атомов ориентированы вполне определенным образом относительно вектора  $\mathbf{B}$  (пространственное квантование). Изменение ориентации магнитного момента может произойти только в результате поглощения кванта энергии переменного поля, когда величина его равна разности энергии обоих состояний (ориентаций). Таким образом,  $\hbar\omega = (\mu'_B - \mu''_B)B$ , где  $\mu_B = g m \mu_B$ ,  $m$  — магнитное квантовое число. Учитывая правило отбора  $\Delta m = \pm 1$ , получим  $\hbar\omega = g\mu_B B$ .

4.111.  $B = 2\pi\hbar n/g\mu_B = 2,5 \text{ кГц} = 0,25 \text{ Тл}$ .

4.112.  $\mu = 5,6\mu_B$  ( $J = 4$ ).

5.1. а) 15 и 0,42 мЭВ;

б)  $3,3 \cdot 10^{13}$  и  $0,91 \cdot 10^{12}$  рад/с.

5.2. 2 и 3.

5.3.  $E_2 = \Delta E_1 \Delta E_2 / 2$  ( $\Delta E_2 - \Delta E_1$ ) = 0,30 мЭВ.

5.4.  $M = \sqrt{2E\mu d^2} = 3,47 \hbar$ .

5.5.  $T = 2\hbar^2/3\mu d^2 k = 118$  и 3,9 К.

5.6.  $N_1/N_2 = (g_1/g_2) \exp(4\hbar B/kT) = 1,95$ .

5.7.  $J_m = d\sqrt{kT\mu}/\hbar - 1/2 = 8$ . График зависимости  $N_J/N_0$  от  $J$  показан на рис. 23.

5.8.  $\kappa = \mu\omega^2 = 5,7$  и 19 Н/см.

5.9.  $U_0 = D + \hbar\omega/2$ ;  $\alpha = \omega\sqrt{\mu/2U_0}$ . Для определения  $\alpha$  следует воспользоваться тем, что при  $(r - r_0) \ll r_0$  функция  $U = \kappa(r - r_0)^2/2$ , где  $\kappa = \mu\omega^2$ .

5.10.  $\Delta E = \hbar\omega(1 - 2x) = 0,514 \text{ эВ}$ ; в 33,7 раза.

5.11.  $T = \frac{2}{3}\hbar\omega(1 - 2x)/k = 534 \text{ К}$ .

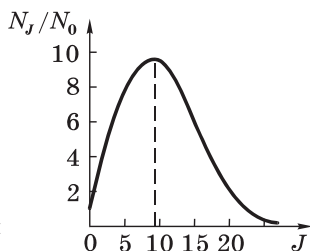


Рис. 23



5.12.  $\Delta E = \hbar\omega(1 - 2x) - \hbar BJ(J + 1) = 0,37$  эВ.

5.13. 13 уровней.

5.14.  $v_{\text{макс}} \approx 1/2x$ ;  $E_{\text{макс}} \approx \hbar\omega/4x$  и  $D \approx \hbar\omega(1 - 2x)/4x$ . Для молекулы водорода  $v_{\text{макс}} = 17$ ,  $E_{\text{макс}} = 4,8$  эВ,  $D = 4,5$  эВ.

5.15.  $x \approx 0,007$ .

5.16.  $D_D - D_H = (1 - \sqrt{\mu_H/\mu_D}) \hbar\omega_H/2 = 80$  мЭВ.

5.17.  $N_2/N_1 = \exp[-\hbar\omega(1 - 4x)/kT] = 0,020$ . При  $1,54$  КК.

5.18.  $\frac{N'}{N} = \frac{1}{2J + 1} \exp\left[-\frac{\hbar\omega(1 - 2x) - \hbar BJ(J + 1)}{kT}\right] = 0,010$ .

5.19. Решение аналогично приведенному в задаче 1.18, пункт б.

5.20. а)  $T \approx \hbar\omega/k \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} = 740$  К, где  $\eta = 2$ ;

б)  $T = \frac{\hbar\omega}{k \ln[1 + \omega/BJ(J + 1)]} \approx 630$  К.

5.21.  $C_{\text{кол}} = \frac{R(\hbar\omega/kT)^2 e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} = \begin{cases} R(\hbar\omega/kT)^2 e^{-\hbar\omega/kT}, \\ 0. \end{cases}$

Здесь  $R$  — универсальная газовая постоянная.

5.22. 0,134, 0,56 и 0,77  $R$ ,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

5.23. Два  $\sigma$ -электрона и по четыре  $\pi$ - и  $\delta$ -электрона.

5.24. а)  $^1\Sigma$ ; б)  $^1\Sigma$  и  $^3\Sigma$ ; в)  $^1\Pi$  и  $^2\Pi$ ; г)  $^1\Sigma$ ,  $^3\Sigma$  и  $^1\Delta$ ; д)  $^1\Sigma$ ,  $^3\Sigma$ ,  $^1\Delta$  и  $^3\Delta$ .

5.25.  $^2\Pi$  (для  $\pi$  и  $\pi^3$ );  $^2\Delta$  (для  $\delta$  и  $\delta^3$ ).

5.26. Нечетные у первых двух, так как у них четное число электронов ( $S = 0, 1, 2, \dots$ ;  $2S + 1$  — нечетное), и четное у остальных.

5.27.  $M_z = \Omega\hbar$ , где  $\Omega$  равно: 0 ( $^1\Sigma$ ), 1 ( $^3\Sigma$ ),  $1/2$  и  $3/2$  ( $^2\Pi$ ).

5.28. а)  $\Lambda = 2$ ,  $S = 0, 1$ . Термы:  $^1\Delta_2$ ,  $^3\Delta_1$  и  $^3\Delta_3$ ;

б)  $\Lambda = 1, 3$ ,  $S = 1/2, 3/2$ . Термы:  $^2\Pi_{3/2, 1/2}$ ,  $^4\Pi_{5/2, 3/2, 1/2, -1/2}$ ,  $^2\Delta_{7/2, 5/2, 4\Delta_{9/2, 7/2, 5/2, 3/2}}$ ;

в)  $\Lambda = 2$ ,  $S = 1/2$ . Термы:  $^2\Delta_{5/2, 3/2}$ .

$\Lambda = 0$ ,  $S = 1/2, 3/2$ . Термы:  $^2\Sigma$  и  $^4\Sigma$ .

5.29.  $\Lambda = 0, 1$ ,  $S = 1/2, 3/2$ . Термы:

$$^2\Sigma, ^4\Sigma, ^2\Pi_{3/2, 1/2}, ^4\Pi_{5/2, 3/2, 1/2, -1/2}.$$

5.30.  $I = \hbar/\Delta\omega = 1,92 \cdot 10^{-40}$  Г·см<sup>2</sup>,  $d = 112$  пм.

5.31. а)  $B = \pi c(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1\lambda_2 = 2,0 \cdot 10^{12}$  с<sup>-1</sup>;  $2,6 \cdot 10^{-40}$  Г·см<sup>2</sup>;

б) соответственно  $4 \rightarrow 3$  и  $3 \rightarrow 2$ .

5.32. Уменьшается на  $1,0 \hbar$  ( $J = 2 \rightarrow J = 1$ ).

5.33. 13 линий.

5.34.  $\omega = 3\omega_{01} - \omega_{02} = 5,0 \cdot 10^{14}$  с<sup>-1</sup>;  $x = \frac{1}{2} \frac{2\omega_{01} - \omega_{02}}{3\omega_{01} - \omega_{02}} = 0,017$ .

**5.35.** Из условия  $\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \Delta E_{J',J}$  получим

$$\omega = \omega_0 + B[J'(J' + 1) - J(J + 1)].$$

С учетом правила отбора  $\Delta J = \pm 1$  находим:

$$\begin{aligned} J' = J + 1, \quad \omega = \omega_0 + 2B(J + 1), \quad J = 0, 1, 2, \dots, \\ J' = J - 1, \quad \omega = \omega_0 - 2BJ, \quad J = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Обе формулы, как нетрудно заметить, можно объединить в одну, которая приведена в тексте задачи.

**5.36.**  $B = (\omega_3 - \omega_2)/4 = 4,0 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $I = 1,33 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$ . Частота нулевой линии, отсутствующей в силу запрета  $\Delta J \neq 0$ , равна  $\omega_{10} = 7,461 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Из соотношения  $\omega_{10} = \omega(1 - 2x)$  получим  $x = 0,022$ .

**5.37.**  $\Delta\lambda/\lambda = \Delta\mu/\mu = 1,5 \cdot 10^{-3}$ , где  $\mu$  — приведенная масса молекулы.

**5.38.**  $\omega = \pi c (1/\lambda_{\text{ф}} - 1/\lambda_{\text{к}}) = 1,37 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ;  $5,0 \text{ Н/см}$ .

**5.39.**  $\omega = 2\pi c \frac{\sqrt{1 + (\Delta\lambda/\lambda)^2} - 1}{(1 - 2x)\Delta\lambda} = 0,78 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**5.40.**  $I_{\text{ф}}/I_{\text{к}} \approx \exp[-\hbar\omega(1 - 2x)/kT] \approx 0,07$ . Увеличится в 3,8 раза.

**5.41.** При переходе  $E_0 \rightarrow E_x$  (первая стадия процесса)  $J_x = J_0 \pm 1$ . При переходе в конечное состояние  $E_x \rightarrow E$  (вторая стадия)  $J = J_x \pm 1 = (J_0 \pm 1) \pm 1$ , т. е.  $\Delta J = 0, \pm 2$ .

**5.42. а)** Из условия  $\hbar\omega = \hbar\omega_0 - \Delta E_{J',J}$  получим

$$\omega = \omega_0 - B[J'(J' + 1) - J(J + 1)].$$

Отсюда с учетом правила отбора  $\Delta J = \pm 2$  (для смещенных компонент) имеем:

$$\begin{aligned} J' = J + 2, \quad \omega = \omega_0 + 2B(2J + 3), \quad J = 0, 1, 2, \dots, \\ J' = J - 2, \quad \omega = \omega_0 - 2B(2J - 1), \quad J = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Обе формулы, как нетрудно заметить, можно объединить в одну, которая приведена в тексте задачи.

**б)**  $I = 2\hbar/\Delta\omega = 1,9 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$ ;  $0,12 \text{ нм}$ .

**5.43.**  $B = \pi c \Delta\lambda/6\lambda^2 = 3,8 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ;  $1,4 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$ .

**6.1.** 429 и 362 пм.

**6.2.** 2,18 и 4,03 г/см<sup>3</sup>.

**6.3.** Плоскость  $(hkl)$ , ближайшая к началу координат, взятому в одном из узлов решетки, отсекает на осях координат отрезки  $a/h$ ,  $a/k$  и  $a/l$ . Расстояние от начала координат до этой плоскости равно межплоскостному расстоянию  $d$ . Обозначив углы между нормалью к плоскости и осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , получим

$$\cos \alpha = hd/a, \quad \cos \beta = kd/a, \quad \cos \gamma = ld/a.$$

Остается учесть, что сумма квадратов этих косинусов равна единице.

6.4. а)  $a, \quad a/\sqrt{2}, \quad a/\sqrt{3};$

б)  $a/2, \quad a/\sqrt{2}, \quad a/\sqrt{12};$

в)  $a/2, \quad a/\sqrt{8}, \quad a/\sqrt{3}.$

6.5.  $I = \sqrt[3]{4M/N_A \rho} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = 1,0$  и  $0,8$  нм соответственно. Здесь  $M$  — масса моля,  $m, n, p$  — миллеровские индексы прямой.

$$6.6. I_{100} : I_{110} : I_{111} = \begin{cases} 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} & (\text{простая}), \\ 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3/4} & (\text{объемноцентрированная}), \\ 1 : \sqrt{1/2} : \sqrt{3} & (\text{гранецентрированная}). \end{cases}$$

6.7. Предположим, что ребро элементарной ячейки  $a = nd_1$ , где  $n$  — целое число. Нетрудно установить, что при  $n = 1$  на ячейку будет приходиться  $1/4$  атома, что невозможно; при  $n = 2$  — два атома. Так как кристалл кубический и обладает осями симметрии четвертого порядка, то второй атом может находиться лишь в центре ячейки. Если это так, то  $d_2$  должно равняться  $d_1\sqrt{2}$ , что и имеется. Следовательно, решетка кубическая объемноцентрированная.

6.8. Дифракционные максимумы располагаются в точках пересечения двух систем гипербол:

$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda, \quad b(\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda,$$

где  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  — углы между направлением падающего пучка и направлениями решетки вдоль периодов  $a$  и  $b$  соответственно,  $\alpha$  и  $\beta$  — углы между дифрагированными пучками и теми же направлениями решетки.

6.9.  $a(\cos \alpha - 1) = k_1 \lambda, \quad b \cos \beta = k_2 \lambda, \quad c \cos \gamma = k_3 \lambda$ . Имея в виду, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , получим

$$\lambda = -\frac{2(k_1/a)}{(k_1/a)^2 + (k_2/b)^2 + (k_3/c)^2}.$$

6.10. Имея в виду условия Лауэ:

$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda, \quad a(\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda, \quad a(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = k_3 \lambda,$$

и соотношения  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad \cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1$ , получаем

$$\lambda = -2a \frac{k_1 \cos \alpha_0 + k_2 \cos \beta_0 + k_3 \cos \gamma_0}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

**6.11.** Найдем сумму квадратов отдельно левых и правых частей уравнения Лауэ:

$$2a^2 [1 - (\cos \alpha_0 \cos \alpha + \cos \beta_0 \cos \beta + \cos \gamma_0 \cos \gamma)] = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \lambda^2.$$

Нетрудно видеть, что сумма произведений косинусов равна  $\mathbf{n}_0 \mathbf{n} = \cos 2\vartheta$ , где  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{n}$  — единичные векторы, соответствующие направлениям падающего и дифрагированного пучков, угол между которыми равен удвоенному брэгговскому углу  $2\vartheta$ . Тогда первое выражение примет следующий вид:

$$\frac{2a \sin \vartheta}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} = \lambda.$$

Так как  $a/\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = d/n$ , где  $n$  — наибольший общий делитель чисел  $k_1, k_2, k_3$  ( $k_1 = nh, k_2 = nk, k_3 = nl, h, k, l$  — миллеровские индексы), то в результате получим  $2d \sin \vartheta = n\lambda$ .

**6.12.**  $a = 8\pi c/3R(Z-1)^2 \sin \vartheta = 575$  пм.

**6.13.** 119 пм;  $58^\circ$ .

**6.14. а)** Соответственно 37 и 40 мм;

**б)**  $\lambda = \frac{a \sin \vartheta}{n\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = \begin{cases} 56,3/n \text{ пм для } (031), \\ 62,6/n \text{ пм для } (221), \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$

**6.15.**  $\lambda = \frac{a \sin(\alpha/2)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos(\alpha/2)}} = 0,17$  нм,

где  $k_1$  и  $k_2$  — порядки отражения.

**6.16.** Сначала найдем периоды идентичности  $I$  вдоль направлений  $[110]$  и  $[111]$ . Согласно Лауэ,  $I \cos \vartheta_n = n\lambda$ , где  $\vartheta_n$  — угол между осью вращения и направлением на  $n$ -ую слоевую линию;  $I_{110} = 0,29$  нм,  $I_{111} = 0,71$  нм. Их отношение соответствует гранецентрированной решетке (см. ответ задачи 6.6);  $a = \sqrt{2} I_{110} = 0,41$  нм.

**6.17.**

Тип решетки	(100)	(110)	(111)
Объемноцентрированная	Нечетные	—	Нечетные
Гранецентрированная	Нечетные	Нечетные	—

**6.18.** Гранецентрированная: (111), (100), (110), (311), (111).

Объемноцентрированная: (110), (100), (211), (110), (310).

**6.19. а)** 38, 45, 65, 78 и  $83^\circ$ ; **б)** 42, 61, 77, 92 и  $107^\circ$ .

**6.20.** Из формулы  $\sin \vartheta = (\lambda/2a) \sqrt{h^{*2} + k^{*2} + l^{*2}}$  определяем значения суммы индексов  $h^*$ ,  $k^*$ ,  $l^*$  и затем подбором находим сами индексы: (111), (311), (511), (333). Соответственно 233, 122, 78 и 233 пм.

**6.21.** Первое дифракционное кольцо отвечает отражению от системы плоскостей (111) в первом порядке ( $d_{111} = a/\sqrt{3}$ ); постоянная решетки  $a \approx 2\sqrt{3} \lambda L/D = 0,41$  нм, где  $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{K(K+2mc^2)}$ .

**6.22.** Объемноцентрированная.

$$\mathbf{6.23.} \quad E = 3N \left( \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right); \quad C = 3Nk \left( \frac{\hbar\omega}{kT} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2}.$$

При высоких и низких температурах  $C$  равно соответственно

$$3Nk \quad \text{и} \quad 3Nk(\hbar\omega/kT)^2 e^{-\hbar\omega/kT}.$$

**6.24. а)** Напишем уравнение движения  $n$ -го атома:

$$m\ddot{\xi}_n = \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n) + \kappa(\xi_{n-1} - \xi_n) = \kappa(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}).$$

Решение этого уравнения будем искать в виде стоячей волны:

$$\xi_n = A \sin kx \sin \omega t,$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $x = na$  — координата  $n$ -го атома ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ). В таком виде решение автоматически удовлетворяет граничному условию  $\xi_0 = 0$ . Граничное условие для другого конца цепочки  $\xi_{N-1} = 0$  будет удовлетворено, если  $\sin ka(N-1) = 0$ . Отсюда получим спектр собственных значений волнового числа  $k$ :

$$k_i = \pi i/a(N-1), \quad i = 1, 2, \dots, (N-2)$$

(при  $i = 0$  и  $N-1$  значение  $\sin kx \equiv 0$ , т. е. решение вообще не допускает движения). Таким образом, смещение  $n$ -го атома можно представить в виде суперпозиции стоячих волн вида

$$\xi_{ni} = A_i \sin(k_i na) \sin \omega_i t;$$

**б)** подставив выражение  $\xi_{ni}$  в уравнение движения, найдем

$$\omega_i = 2\sqrt{\kappa/m} \sin(k_i a/2).$$

Отсюда видно, что число различных колебаний равно числу возможных значений волнового числа  $k_i$ , т. е.  $N-2$ , или, другими словами, числу колебательных степеней свободы рассматриваемой цепочки;

$$\omega_{\max} = 2\sqrt{\kappa/m}, \quad \lambda_{\min} = 2a;$$

$$\text{в)} \quad v_i = \frac{\omega_i}{k_i} = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \frac{\sin(k_i a/2)}{k_i}, \quad \lambda_{\text{дл}} = a\sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad \frac{v_{\text{дл}}}{v_{\text{кор}}} = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{г)} \quad dZ_{\omega} = \frac{2N}{\pi\sqrt{\omega_{\text{макс}}^2 - \omega^2}} d\omega.$$

$$\text{6.25. а)} \quad dZ_{\omega} = (L/\pi v) d\omega; \quad \text{б)} \quad \Theta = \pi \hbar N v / kL;$$

в) имея в виду, что  $E = \int \langle \varepsilon_{\omega} \rangle dZ_{\omega}$ , где  $\langle \varepsilon_{\omega} \rangle$  — средняя энергия квантового гармонического осциллятора с частотой  $\omega$ , получим

$$E = R\Theta \left( \frac{1}{4} + \frac{T^2}{\Theta^2} \int_0^{\Theta/T} \frac{x dx}{e^x - 1} \right).$$

Для определения  $C$  (оно равно  $\partial E / \partial T$ ) надо продифференцировать интеграл по параметру  $T$ . В результате получим

$$C = R \left( 2 \frac{T}{\Theta} \int_0^{\Theta/T} \frac{x dx}{e^x - 1} - \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T} - 1} \right) = \begin{cases} R, \\ (\pi^2/3) RT/\Theta. \end{cases}$$

Значение интеграла при  $\Theta/T \rightarrow \infty$  дано в Приложении.

$$\text{6.26. а)} \quad \Theta = (\hbar/k) \sqrt{4\pi v^2 n_0};$$

$$\text{б)} \quad E = 2 \int_0^{\omega_m} \langle \varepsilon_{\omega} \rangle dZ_{\omega} = 4R\Theta \left( \frac{1}{6} + \frac{T^3}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \right),$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = 4R \left( 3 \frac{T^2}{\Theta^2} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T} - 1} \right) = \begin{cases} 2R, \\ 28,9 RT^2/\Theta^2. \end{cases}$$

См. решение предыдущей задачи.

$$\text{6.27. а)} \quad \Theta = (\hbar/k) \sqrt[3]{6\pi^2 v^3 n_0};$$

$$\text{б)} \quad E = 3 \int_0^{\omega_m} \langle \varepsilon_{\omega} \rangle dZ_{\omega} = 9R\Theta \left( \frac{1}{8} + \frac{T^4}{\Theta^4} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right),$$

$$C = 9R \left( 4 \frac{T^3}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T} - 1} \right) = \begin{cases} 3R, \\ (12/5) \pi^4 RT^3/\Theta^3. \end{cases}$$

См. решение задачи 6.25.

$$\text{6.28. а)} \quad dZ_{\omega} = \frac{S}{2\pi} \left( \frac{1}{v_l^2} + \frac{1}{v_t^2} \right) \omega d\omega; \quad \Theta = \frac{\hbar}{k} \sqrt{\frac{8\pi N}{S(v_l^{-2} + v_t^{-2})}};$$

$$\text{б)} \quad dZ_{\omega} = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right) \omega^2 d\omega; \quad \Theta = \frac{\hbar}{k} \sqrt{\frac{18\pi^2 N}{S(v_l^{-3} + 2v_t^{-3})}}.$$

6.29. 470 К (см. формулу для  $\Theta$  из ответа к предыдущей задаче).

$$6.30. v = ak\Theta/\pi\hbar = 3,1 \text{ км/с.}$$

$$6.31. \text{ а) } 1,8; \quad \text{ б) } 4,23 \text{ кДж/моль.}$$

$$6.32. C(\Theta/2) = 9R \left( \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{2}{e^2 - 1} \right) = 20,7 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)};$$

$$C(\Theta) = 9R \left( 4 \int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{1}{e - 1} \right) = 23,8 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

Меньше на 4,6%.

6.33. Легко убедиться, что в этой области температур теплоемкость  $C \propto T^3$ , поэтому можно воспользоваться формулой для теплоемкости при низких температурах.  $\Theta \approx 210 \text{ К}$ ;  $E_0 = 1,96 \text{ кДж/моль}$ .

$$6.34. \text{ а) } \Theta = 2,2 \cdot 10^2 \text{ К; б) } C = 13 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}; \text{ в) } \omega_{\text{макс}} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

6.35.  $\hbar\omega_{\text{макс}} = k\Theta = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$ ;  $p_{\text{макс}} = \hbar k_{\text{макс}} \approx \pi\hbar/a = 1 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}$ , где  $a$  — среднее расстояние между атомами, определенное как  $\rho = m/a^3$ , где  $\rho$  — плотность,  $m$  — масса атома.

6.36. б) Из условия  $dn/d\omega = 0$  получим уравнение  $e^x(2 - x) = 2$ , где  $x = \hbar\omega/kT$ . Его корень находим графически или подбором:  $x_0 \approx 1,6$ . Отсюда  $\hbar\omega_{\text{вер}} = 0,8 k\Theta$ .

в) При  $T = 0,625 \Theta$ .

г) Соответственно  $n \propto T^3$  и  $n \propto T$ .

6.37. В результате взаимодействия фотона с фононом энергия фотона изменяется на энергию фонона:  $\hbar\omega' = \hbar\omega \pm \hbar\omega_{\text{зв}}$ . В то же время из треугольника импульсов следует, что

$$\left( \frac{\hbar\omega_{\text{зв}}}{v} \right)^2 = \left( \frac{\hbar\omega'}{c'} \right)^2 + \left( \frac{\hbar\omega}{c'} \right)^2 - 2 \frac{\hbar\omega'}{c'} \frac{\hbar\omega}{c'} \cos \vartheta.$$

Исключив из этих двух уравнений  $\omega'$ , получим

$$\left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c'^2} \right) \omega_{\text{зв}}^2 = 2 \frac{\omega}{c'} \left( 1 \pm \frac{\omega_{\text{зв}}}{\omega} \right) (1 - \cos \vartheta).$$

Имея в виду, что  $v \ll c'$  и  $\omega_{\text{зв}} \ll \omega$ , пренебрежем соответствующими малыми членами в последнем выражении, после чего получим искомую формулу.

6.38. а) При тепловом равновесии отношение числа атомов  $N_2$  на верхнем уровне к числу атомов  $N_1$  на нижнем уровне равно в соответствии с распределением Больцмана:

$$N_2/N_1 = e^{-\Delta E/kT}, \quad N_2 = N/(1 + e^{\Delta E/kT}),$$

где  $N = N_1 + N_2$  — полное число атомов. Внутренняя энергия системы  $E = N_2 \Delta E$ , откуда

$$C_i = \frac{\partial E}{\partial T} = Nk \left( \frac{\Delta E}{kT} \right)^2 \frac{e^{\Delta E/kT}}{(1 + e^{\Delta E/kT})^2};$$

**б)** обозначим  $kT/\Delta E = x$ . Из условия  $\partial C_i / \partial x = 0$  получим уравнение  $(1 - 2x)e^{1/x} = 1 + 2x$ . Его корень находим графически или подбором:  $x_0 \approx 0,42$ ;

**в)**  $C_{i \text{ макс}}/C_{\text{реш}} = 0,44/(2,34 \cdot 10^{-4}) \approx 2 \cdot 10^3$ .

**6.39.** В интервале импульсов ( $p, p + dp$ ) число состояний

$$dZ_p = \frac{4\pi p^2 dp}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} p^2 dp.$$

Поскольку в каждой фазовой ячейке объемом  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$  могут находиться два электрона с антипараллельными спинами, число электронов в этом интервале импульсов равно  $2dZ_p$ . Переходя к кинетическим энергиям, получаем

$$N(K) dK = \left( V \sqrt{2m^3} / \pi^2 \hbar^3 \right) \sqrt{K} dK.$$

**6.40.**  $K_{\text{макс}} = (\hbar^2/2m)(3\pi^2 n)^{2/3} = 5,5 \text{ эВ}$ .

**6.41. а)**  $\langle K \rangle = (3/5)K_{\text{макс}}$ ; **б)**  $31,3 \text{ кДж/см}^3$ .

**6.42.**  $\eta = 1 - 1/\sqrt{8} = 0,65$ .

**6.43.**  $T \approx 3 \cdot 10^4 \text{ К}$ .

**6.44.**  $\Delta E = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mV(3\pi^2 n)^{1/3}} = 1,8 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}$ .

**6.45.** На  $0,1\%$ .

**6.46.**  $n(v) dv = \pi(m/\pi\hbar)^3 v^2 dv$ ;

**а)**  $\langle v \rangle = 3v_m/4$ ; **б)**  $\langle 1/v \rangle = 3/2v_m$ .

**6.47.**  $v_{\text{вер}} = v_{\text{макс}} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ ;  $\langle v \rangle = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

**6.49.**  $n(\lambda) d\lambda = 8\pi\lambda^{-4} d\lambda$ .

**6.50.** Число падающих ежесекундно на  $1 \text{ см}^2$  поверхности металла свободных электронов со скоростями в интервале  $(v, v + dv)$ , направления которых составляют углы  $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$  с нормалью к поверхности, равно

$$dn = n(v) dv \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} v \cos \vartheta.$$



Умножив это выражение на импульс, передаваемый стенке при падении каждого электрона ( $mv \cos \vartheta$ ), и интегрируя, получим

$$p = 2 \int mv \cos \vartheta \, dn = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m} (3\pi^2 n)^{5/3} = 5 \text{ ГПа} (5 \cdot 10^4 \text{ атм}),$$

где интегрирование проводится по  $\vartheta$  от 0 до  $\pi/2$  и по  $v$  от 0 до  $v_{\text{макс}}$ . Двойка перед интегралом учитывает, что такое же давление стенка будет испытывать и при отражении электронов (в силу полной хаотичности их движения).

**6.51.**  $\tau = 2,6 \cdot 10^{-14}$  с,  $\langle \lambda \rangle = (3\hbar/4\rho n e^2)(3\pi^2 n)^{1/3} = 31$  нм,  $b = 1/en\rho = 46 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ;  $\langle \lambda \rangle / r \approx 135$ , где  $r$  — среднее расстояние между атомами ( $r \approx \sqrt[3]{m_a/\rho_0}$ ,  $m_a$  — масса атома,  $\rho_0$  — плотность).

**6.52.**  $n = \sqrt{1 + U/K} = 1,02$ , где  $U = K_{\text{макс}} + A$ ,  $A$  — работа выхода.

**6.53.** Так как  $m\ddot{x} = -eE$ , где  $E = \alpha_* n e x$ , то  $\omega_0 = \sqrt{\alpha_* n e^2 / m} = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon = \hbar\omega_0 \approx 11$  эВ. Здесь  $\alpha_* = 4\pi$  (СГС) или  $1/\varepsilon_0$  (СИ).

**6.54.** Поскольку  $m\ddot{x} = eE_0 \cos \omega t$ , то  $x = -(eE_0/m\omega^2) \cos \omega t$ . Имея в виду, что поляризованность  $P = n e x$ , получим

$$\varepsilon = 1 + \alpha_* P / E = 1 - \alpha_* n e^2 / m\omega^2 = 1 - (\omega_0/\omega)^2,$$

где  $\alpha_* = 4\pi$  (СГС) или  $1/\varepsilon_0$  (СИ),  $\omega_0$  — плазменная частота электронов. Металл прозрачен для электромагнитного излучения, если показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon}$  веществен (в противном случае будет наблюдаться отражение излучения и его поглощение). Отсюда следует, что  $\lambda \leq 2\pi c \sqrt{m/\alpha_* n e^2} = 0,21$  мкм.

**6.55.** Рассмотрим единицу объема металла. При переходе на свободные уровни  $v$  электронов ( $v$  значительно меньше полного числа свободных электронов) их кинетическая энергия увеличится на  $v^2 \Delta E$ , где  $\Delta E$  — интервал между соседними уровнями (см. ответ задачи 6.44).

При переходе следующего электрона кинетическая энергия увеличивается на  $2v\Delta E$ , а магнитная энергия уменьшится на  $2\mu B$ , где  $\mu$  — магнитный момент электрона, равный магнетону Бора. Из равенства  $2v\Delta E = 2\mu B$  находим  $v$ , затем суммарный магнитный момент непарных электронов  $J = 2v\mu$  и парамагнитную восприимчивость  $\chi$ :

$$\chi = J/H = \gamma_* 2\mu^2 / \Delta E = 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ (СГС) или } 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ (СИ)}.$$

Здесь  $\gamma_* = 1$  (СГС) или  $\mu_0$  (СИ).

$$6.56. \text{ а) } C_{\text{эл}} = (\pi^2/2) RkT/E_{F0}; \quad C_{\text{эл}}/C_{\text{реш}} = (\pi^2/6) kT/E_{F0} = 7,6 \cdot 10^{-3}.$$

Здесь учтено, что данная температура больше дебаевской, поэтому  $C_{\text{реш}} = 3R$  (закон Дюлонга и Пти);

б) из характера зависимости теплоемкости решетки от температуры  $T$  следует, что равенство указанных теплоемкостей наступает в области низких температур. Воспользовавшись формулой (6.4), получим

$$T = \sqrt{5k\Theta^3/24\pi^2 E_{F0}} = 1,7 \text{ К}.$$

6.57. а) Рассмотрим пространство скоростей с осями  $v_x, v_y, v_z$ . Тогда приведенное в условии выражение означает, что число свободных электронов, проекции скоростей которых находятся в заданных интервалах, пропорционально объему  $dv_x dv_y dv_z$ . В то же время число свободных электронов, модули скорости которых лежат в интервале  $(v, v + dv)$ , пропорционально объему сферического слоя в этом же пространстве, т. е. величине  $4\pi v^2 dv$ .

Зная распределение электронов по модулям скоростей  $n(v)dv$ , запишем

$$n(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z = n(v)dv \frac{dv_x dv_y dv_z}{4\pi v^2 dv}. \quad (*)$$

Остается учесть, что  $n(v)dv = n(E)dE$ ,  $E = mv^2/2$  и  $dE/dv = \sqrt{2mE}$ . Подставив эти соотношения и  $n(E)$  из формулы (6.5) в правую часть (\*), получим искомое выражение;

$$\text{б) } n(v_x)dv_x = 2(m/2\pi\hbar)^3 dv_x \int dv_y dv_z = 2\pi(m/2\pi\hbar)^3 (v_m^2 - v_x^2) dv_x.$$

Здесь интегрирование удобно провести в полярных координатах:

$$dv_y dv_z = \rho d\rho d\phi, \quad \text{где } \rho = \sqrt{v_y^2 + v_z^2},$$

причем  $\rho$  меняется от 0 до  $\rho_m = \sqrt{v_m^2 - v_x^2}$ .

6.58. Взяв ось  $X$  вдоль нормали к поверхности раздела металлов, запишем условия, которым должны удовлетворять электроны, переходящие из одного металла в другой:

$$mv_{x1}^2/2 + U_1 = mv_{x2}^2/2 + U_2, \quad v_{y1} = v_{y2}, \quad v_{z1} = v_{z2}, \quad (1)$$

где  $U_i$  — потенциальная энергия свободных электронов. Число электронов, падающих ежесекундно на  $1 \text{ см}^2$  поверхности раздела, равно

$$dn_1 = v_{x1} n(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1, \quad dn_2 = v_{x2} n(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2.$$

При динамическом равновесии  $dv_1 = dv_2$ , а так как согласно (1) дифференциал  $v_{x1}dv_1 = v_{x2}dv_2$ , то и  $n(v_1) = n(v_2)$ . Отсюда следует, что  $E_1 - E_{F1} = E_2 - E_{F2}$ . Поскольку  $E_1 + U_1 = E_2 + U_2$ , получим

$$E_{F1} + U_1 = E_{F2} + U_2,$$

т. е. уровни Ферми действительно находятся на одной высоте.

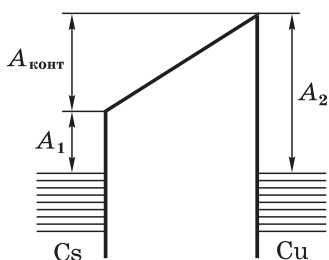


Рис. 24

**6.59.** Верхние уровни в обоих металлах находятся на одинаковой высоте (рис. 24). Поэтому электроны, вырванные с верхнего уровня цезия, совершают работу  $A_1 + A_{\text{конт}} = A_2$ , где  $A_{\text{конт}}$  — работа по преодолению внешней контактной разности потенциалов;

а) 0,28 мкм; б)  $6,4 \cdot 10^5$  м/с.

**6.60.** Взяв ось  $X$  по нормали к поверхности металла, запишем условия, которым должны удовлетворять электроны,

вылетающие из металла:

$$mv_x'^2/2 = mv_x^2/2 + U, \quad v_y' = v_y, \quad v_z' = v_z, \quad (1)$$

где штрихами отмечены компоненты скорости электрона внутри металла,  $U$  — потенциальный барьер на границе металла ( $E_F + A$ ). Число электронов, вылетающих ежесекундно с  $1 \text{ см}^2$  поверхности металла со скоростью в интервале  $(v, v + dv)$ , есть

$$\begin{aligned} dn &= v_x' n(v') dv' = 2 \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{v_x' dv'}{1 + \exp[(E' - E_F)/kT]} = \\ &= 2(m/2\pi\hbar)^3 \exp[-(A + E)/kT] v_x dv. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь учтено, что согласно (1)  $v_x' dv' = v_x dv$ , а также что  $E' - E_F = E + A$  и  $kT \ll A$ . Запишем (2) и сферических координатах

$$v_x = v \cos \vartheta, \quad dv = v^2 \sin \vartheta d\vartheta dv d\varphi$$

и проинтегрируем по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  и по  $\vartheta$  от 0 до  $\pi/2$ .

**6.61.** а)  $\langle K \rangle = 2kT$ ; б)  $j = (emk^2/2\pi^2\hbar^3) T^2 e^{-A/kT}$ ;

в)  $A = 4,1 \text{ эВ}$ .

**6.62.** Примем за начало отсчета энергий потолок валентной зоны. Пренебрегая единицей в знаменателе выражения (6.5), получаем для концентрации свободных электронов:

$$n_e = \int n(E) dE = 2(mkT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp[(E_F - E_g)/kT],$$

где интегрирование проводится от  $E_g$  (уровня, соответствующего дну зоны проводимости) до  $\infty$ . В то же время концентрация дырок

$$n_d = \int f_d g_d dE = 2(mkT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp(-E_F/kT),$$

где  $f_d = 1 - f_e = \exp \frac{E - E_F}{kT}$  и  $g_d dE = g_e dE = \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{-E} dE$ , причем интегрирование проводится по  $E$  от  $-\infty$  до  $0$ . Так как  $n_e = n_d$ , то

$$E_F - E_g = -E_F \quad \text{и} \quad E_F = E_g/2,$$

т. е. уровень Ферми находится посередине запрещенной зоны. Следовательно,

$$n_e = n_d = 2(mkT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp(-\Delta E_0/2kT),$$

где  $\Delta E_0$  — ширина запрещенной зоны.

**6.63. а)** Приняв за начало отсчета энергии уровень донорных атомов, найдем концентрацию электронов проводимости:

$$n_e = \int n(E) dE = 2(mkT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp[(E_F - E_g)/kT], \quad (1)$$

где интегрирование проводится от  $E_g$  (уровня, соответствующего дну зоны проводимости) до  $\infty$ . В то же время,

$$n_e = n_0[1 - f(0)] \approx \exp(-E_F/kT). \quad (2)$$

Перемножив (1) и (2), получим

$$n_e^2 = 2n_0(mkT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp[-E_g/kT],$$

откуда и следует формула, приведенная в тексте задачи.

**б)** Из сравнения (1) и (2) получим

$$E_F = \frac{E_g}{2} - \frac{kT}{2} \ln \left[ \frac{2}{n_0} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right].$$

Отсюда видно, что при  $T \rightarrow 0$  уровень Ферми  $E_F = E_g/2$ , т. е. находится посередине между дном зоны проводимости и уровнем доноров.

$$\mathbf{6.64.} \quad \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = -\frac{\Delta E_0}{2kT^2} = -\frac{\pi\hbar c}{\lambda kT^2} = -0,047 \text{ K}^{-1},$$

где  $\rho \propto \exp(\Delta E_0/2kT)$ ,  $\Delta E_0$  — ширина запрещенной зоны.

$$\mathbf{6.65.} \quad E = \frac{2kT_1T_2}{T_2 - T_1} \ln \eta = 0,34 \text{ эВ.}$$

**6.66.** 1,2 и 0,06 эВ соответственно.

**6.67.**  $\Delta\sigma/\sigma = 1 - en(b_e - b_d)\rho = 0,15$ ;  $n = 2(2mkT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp(-\Delta E/kT)$ .

**6.68.**  $\tau = t / \ln \frac{(\rho_0 - \rho_1)\rho_2}{(\rho_0 - \rho_2)\rho_1} = 10$  мс.

**6.69.** 0,10 эВ.

**6.70. а)**  $n = \kappa_*/eB = 1,0 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $b = R_H/\kappa_*\rho = 3,7 \cdot 10^3 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ);

**б)** из формулы для электропроводимости  $\sigma = ne^2\tau/m$ , где  $\tau = \langle \lambda \rangle / \langle v \rangle$ , получим

$$\langle \lambda \rangle = (R_H/\kappa_*e\rho)\sqrt{8mkT/\pi} = 0,23 \text{ мкм.}$$

**6.71.**  $R_H = \hbar\rho U_H/dBU = 1,4 \cdot 10^{-17}$  СГС  $= 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$ ,  $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^2 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

**6.72.** Как электроны, так и дырки при наличии тока отклоняются магнитным полем в одну и ту же сторону. При динамическом равновесии их плотности потоков в поперечном направлении будут одинаковы:

$$n_e u_e = n_d u_d, \quad (1)$$

где  $u$  — поперечная скорость направленных движений носителей тока. Так как  $u = bE_\perp^* = b(F \mp eE_\perp)/e$  (где  $b$  — подвижность,  $F$  — магнитная часть силы Лоренца,  $E_\perp$  — поперечная напряженность электрического поля), то равенство (1) можно переписать так:

$$n_e b_e (\kappa_* e v_e B - eE_\perp) = n_d b_d (\kappa_* e v_d B + eE_\perp),$$

где  $v = bE$ ,  $E$  — продольная напряженность электрического поля,  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ).

Найдя отсюда отношение  $E_\perp/EB$ , получим

$$R_H = E_\perp/jB = E_\perp/\sigma EB = (\kappa_*/e)(n_e b_e^2 - n_d b_d^2)/(n_e b_e + n_d b_d)^2.$$

**6.73.**  $b_e - b_d = \eta/\kappa_* B = 2,0 \cdot 10^3 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ).

**6.74. а)** 1 : 4,4; **б)** 0,32.

**7.1. а)** Соответственно 5,33 и 8,11 МэВ;

**б)**  $A_x = \eta^3 A_{A1} \approx 36$ , т. е. ядро  $^{36}\text{Ar}$ , его  $E_{\text{св}} = 311,5$  МэВ.

**7.2. а)** Соответственно 6,76 и 7,35 МэВ; **б)** 14,44 МэВ.

**7.3.** В данном случае ( $K_n \approx 0$ )  $E^* = E_{\text{жв}} = (m_n + m_{206} - m_{207})c^2 = 6,73$  МэВ.

7.4. 10,56 МэВ.

7.5.  $E = E_{16} - E_{12} - E_4 = 7,16$  МэВ.

7.6.  $Q = 8\varepsilon_{\text{He}} - 2\varepsilon_{\text{H}} - 6\varepsilon_{\text{Li}} = 22,44$  МэВ.

7.7. а) 341,76 МэВ; б) 431,75 МэВ; в) 902,78 МэВ. Табличные значения соответственно 342,056, 434,791 и 915,272 МэВ.

7.8. а) Из условия  $\partial M_{\text{я}} / \partial Z = 0$  получим

$$Z_m = A / (1,97 + 0,0149 A^{2/3}).$$

б) Вычислив по этой формуле  $Z_m$ , получим соответственно 44,8 (47), 54,1 (50) и 59,4 (55), где в скобках указаны  $Z$  данных ядер. Отсюда следует, что первое ядро имеет позитронную активность, остальные — электронную.

7.9. Из условия  $E_{\text{жв}}(A, Z) < 2E_{\text{жв}}(A/2, Z/2)$  получим

$$Z^2/A > 15,64 + 155/A^{17/12}.$$

7.10. Соответственно 2, 2, 1, 2 и 4.

7.11.  $I = 7/2$ .

7.12. Соответственно четыре и шесть.

7.13.  $N$  равно числу различных значений квантового числа  $F$ , т. е.  $2I + 1$  или  $2J + 1$  соответственно при  $I < J$  и  $I > J$ . Если при разных значениях  $J$  обоих термов

а)  $N_1 = N_2$ , то  $N = 2I + 1$ ;

б)  $N_1 \neq N_2$ , то  $N_i = 2J_i + 1$ .

7.14. Здесь отношение интенсивностей компонент равно отношению статистических весов подуровней расщепленного терма:

$$10/6 = (2F_1 + 1)/(2F_2 + 1) = (I + 1)/I,$$

отсюда  $I = 3/2$ .

7.15. Энергия магнитного взаимодействия  $E = \mu_I B_0 \cos(\mathbf{I}, \mathbf{J})$ , где

$$\cos(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \frac{F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)}{2\sqrt{I(I + 1)J(J + 1)}}.$$

Имея в виду, что  $I$  и  $J$  для всех подуровней одни и те же, получим

$$E \propto [F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)].$$

Отсюда интервал между соседними подуровнями  $\delta E_{F, F+1} \propto (F + 1)$ .

7.16. Число компонент данного терма определяется, как нетрудно заметить, выражением  $2J + 1$ . Отсюда можно заключить, что  $I \geq 3/2$ .

На основании же правила интервалов

$$4 : 5 : 6 = (F + 1) : (F + 2) : (F + 3),$$

где  $F = I - J$ . Отсюда  $I = 9/2$ . Указанная линия расщепляется на шесть компонент.

**7.17.**  $1 + 3 + 5 + 7 = 16.$

**7.18.** 2 и  $5/2$ .

**7.19.**  $\omega = g_s \mu_B / \hbar$ , где  $g_s$  — гиромагнитный множитель,  $\mu = \mu_B$  для электрона и  $\mu_N$  для нуклонов. Соответственно  $1,76 \cdot 10^{10}$ ,  $2,68 \cdot 10^7$  и  $1,83 \cdot 10^7$  рад/с.

**7.20.**  $g_s = 2\pi\hbar n_0 / \mu_N B = 0,34$ ,  $\mu = g_s I \mu_N = 0,85 \mu_N$ .

**7.21.**  $\mu = 2\pi\hbar I / B$ , отсюда  $\mu_{Li} = 3,26 \mu_N$ ,  $\mu_F = 2,62 \mu_N$ .

**7.22.**  $K_{\text{макс}} = (\hbar^2 / 2m)(3\pi^2 n)^{2/3} = 25$  МэВ, где  $m$  — масса нуклона,  $n$  — концентрация протонов (или нейтронов) в ядре.

**7.23.**

$$(1s_{1/2}^4 1p_{3/2}^3), (1s_{1/2}^4 1p_{3/2}^8 1p_{1/2}^1), (1s_{1/2}^4 1p_{3/2}^8 1p_{1/2}^4 1d_{5/2}^9).$$

**7.24.**  $I^P = 1/2^-$ . Эти величины определяются квантовыми числами нуклона в состоянии  $1p_{1/2}$  (см. рис. 7.1).

**7.25.** а)  $1/2^+$  б)  $1/2^+$ , в)  $1/2^-$ . Искомые значения определяются квантовыми числами «дырочного» состояния в замкнутых оболочках  $1s_{1/2}$ ,  $1s_{1/2}$ , и  $1p_{1/2}$  соответственно (см. рис. 7.1).

**7.26.**  $5/2^+$ ,  $1/2^+$ ,  $3/2^+$   $7/2^-$ ,  $3/2^-$ .

**7.27.** Из векторной модели, аналогичной той, которая показана на рис. 20, следует, что

$$\mu = \mu_s \cos(\mathbf{s}, \mathbf{j}) + \mu_l \cos(\mathbf{l}, \mathbf{j}).$$

Подставив сюда выражения

$$\mu_s = g_s s^* \mu_N, \quad \mu_l = g_l l^* \mu_N,$$

$$\cos(\mathbf{s}, \mathbf{j}) = (j^{*2} + l^{*2} - s^{*2}) / 2s^* j^*,$$

$$\cos(\mathbf{l}, \mathbf{j}) = (j^{*2} + s^{*2} - l^{*2}) / 2l^* j^*,$$

где  $s^* = \sqrt{s(s+1)}$ ,  $l^* = \sqrt{l(l+1)}$ ,  $j^* = \sqrt{j(j+1)}$ , получим  $\mu = g_j \sqrt{j(j+1)} \mu_N$ .

Здесь

$$g_j = \frac{g_s + g_l}{2} + \frac{g_s - g_l}{2} \frac{s(s+1) - l(l+1)}{j(j+1)}.$$

Теперь остается учесть, что  $s = 1/2$  и  $j = l \pm 1/2$ .

## 7.28. В ядерных магнетонах:

$\mu$	$j = l + 1/2$	$j = l - 1/2$	$s_{1/2}$	$p_{1/2}$	$p_{3/2}$
$\mu_n =$	-1,91	$\frac{1,91}{j+1}$	-1,91	0,64	-1,91
$\mu_p =$	$j + 2,29$	$\left(1 - \frac{2,29}{j+1}\right)j$	2,79	-0,26	3,79

7.29. Для  $f_{5/2} \mu_p = 0,86\mu_n$ , для  $f_{7/2} \mu_p = 5,79\mu_n$ , отсюда  $j = 7/2$ .

7.30. а) 2,79 и  $-1,91\mu_n$ ; б)  $-1,91$  и  $0,124\mu_n$  (опытные значения: 2,98,  $-2,13$ ,  $-1,89$  и 0,39).

7.31. В соответствии с моделью ядерных оболочек естественно предположить, что непарный протон данного ядра находится на уровне  $2s_{1/2}$ . В этом случае магнитный момент ядра равен  $2,79\mu_n$ , (см. решение задачи 7.28). Если же предположить, что этот протон находится на следующем уровне  $1d_{3/2}$ , то магнитный момент равен  $0,124\mu_n$ , что сильно отличается от значения, приведенного в тексте задачи.

7.32.  $w = 1 - e^{-\lambda t}$ .

$$7.33. \tau = \frac{1}{N_0} \int t dN = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

7.34. а) 0,78 и 0,084; б)  $0,68 \cdot 10^{-4}$ , 0,31.

7.35.  $0,78 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$ ; 4,1 и 2,8 года.

7.36.  $t = -(\ln \eta)/\lambda = 4,1 \cdot 10^3 \text{ лет}$ .

7.37.  $A = (\lambda m/m_0) e^{-\lambda t} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ Бк}$  (4,0 Ки), где  $m_0$  — масса нуклида  $^{24}\text{Na}$ .

7.38.  $N_0 = (A/\lambda) e^{\lambda t} = 2,2 \cdot 10^{15} \text{ атомов}$ .

7.39.  $0,8 \cdot 10^{16} \text{ лет}$ ,  $4,5 \cdot 10^7 \text{ альфа-распадов}$ .

7.40.  $A_{\text{уд}} = \lambda/m_0 = 2,34 \cdot 10^9 \text{ Бк/г}$  (63 мКи/г), где  $m_0$  — масса нуклида  $^{239}\text{Pu}$ .

7.41.  $\Delta m = m/(\lambda/A_{\text{уд}} m_0 - 1) = 0,05 \text{ мг}$ , где  $m_0$  — масса нуклида  $^{89}\text{Sr}$ .

7.42.  $V = (A_0/A) e^{-\lambda t} = 6 \text{ л}$ .

7.43. За время  $dt$  приращение  $dN$  числа ядер нуклида  $A$  определяется как

$$dN = qdt - \lambda Ndt, \quad \text{или} \quad \dot{N} + \lambda N = q.$$

Решение последнего уравнения с учетом начального условия  $N(0) = 0$  дает

$$N = (1 - e^{-\lambda t}) q/\lambda.$$



7.44. а)  $N = qT / \ln 2 = 4,1 \cdot 10^{13}$ ; б)  $N = 2,1 \cdot 10^{13}$ .

7.45.  $t = -(T / \ln 2) \ln(1 - A/q) = 40$  сут.

7.46.  $\Delta m = (e^{-\lambda t} + \lambda t - 1) m_0 q / \lambda = 1,0$  мкг, где  $m_0$  — масса атома  $^{124}\text{Te}$ .

7.47. а) Скорость накопления нуклида  $A_2$  определяется уравнением

$$\dot{N}_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad \text{или} \quad \dot{N}_2 + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} \exp(-\lambda_1 t).$$

Его решение с учетом начального условия  $N_2(0) = 0$  имеет вид

$$N_2 = N_{10} \lambda_1 \frac{\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

б)  $t_m = \frac{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$

7.48. а)  $N_2 = N_{10} \lambda t e^{-\lambda t}$ ; б)  $t_m = 1/\lambda$ .

7.49.  $Q = K_\alpha(1 + m_\alpha/M) = 8,50$  МэВ, где  $M$  — масса дочернего ядра; 1,9%; 384 км/с.

7.50. а)  $Q = N_0 K(1 + m_\alpha/m)(1 - e^{-\lambda t}) = 15,7$  МДж;

б)  $2,96 \cdot 10^8$  Бк (8,0 МКи).

7.51.  $Q = 5,40$  МэВ,  $\hbar\omega = 0,82$  МэВ.

7.52. Энергия уровней:  $E_i^* = (K_1 - K_i)(1 + m_\alpha/m_{\text{Ra}}) = 0, 0,10, 0,23$  и  $0,31$  МэВ, где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

7.53.  $E_i^* = (K_i - K_0)(1 + m_\alpha/m_{\text{Pb}}) = 0,726, 1,674$  и  $1,797$  МэВ.

7.54. Соответственно 3,4 : 1.

7.55.  $\lambda_\alpha = \frac{1}{\tau(1 + N_\gamma/N_\alpha)} = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$

7.56.  $\Gamma_\gamma \approx \hbar \lambda_\alpha N_\gamma / N_\alpha = 0,9 \cdot 10^{-4}$  эВ.

7.57.  $Q = \begin{cases} M_{\text{м}} - M_{\text{д}} & \text{при } \beta^- \text{-распаде и } K \text{-захвате,} \\ M_{\text{м}} - M_{\text{д}} - 2m_e & \text{при позитронном распаде.} \end{cases}$

7.58. а) 6,0189 а.е.м.; б) 21,9944 а.е.м.

7.59. а) Нет; б) да; в) да.

7.60.  $K_{\beta \text{ макс}} \approx Q = 1,71$  МэВ,  $K_{\text{S}} = Q(Q + 2m_e c^2)/2Mc^2 = 78,3$  эВ.

7.61.  $p_{\beta \text{ макс}} = \sqrt{Q(Q + 2m_e c^2)} / c = 0,94$  МэВ/с, где  $Q$  — энергия распада.

7.62. а)  $K_{\beta \text{ макс}} \approx Q = 958$  кэВ,  $K_{\text{B}} = Q(Q + 2m_e c^2)/2m_B c^2 = 92,6$  эВ, где  $Q$  — энергия распада;

б)  $K_{\beta} = Q^2/(mc^2 + Q) = 312$  кэВ,  $E_{\nu} = Q - K_{\beta} = 646$  кэВ.

$$7.63. \vartheta = \pi - \arccos(p_e / p_v) = 110^\circ,$$

где  $p_e / p_v = \sqrt{K(K + 2m_e c^2) / (Q - K)}$ .

$$7.64. \hbar\omega = Q - K_{\beta \text{ макс}} = 1,78 \text{ МэВ.}$$

$$7.65. 0,78.$$

$$7.66. \text{ Энергия уровней: } 0, 0,84, 2,65 \text{ и } 2,98 \text{ МэВ.}$$

7.67.  $K \approx Q^2 / 2mc^2 = 9,66 \text{ эВ}$ ,  $v = 7,1 \text{ км/с}$ . Здесь  $Q$  — энергия, освобождаемая в данном процессе,  $m$  — масса атома.

$$7.68. 0,32 \text{ МэВ.}$$

7.69. а)  $K = Q(2\hbar\omega - Q) / 2mc^2 = 6,3 \text{ эВ}$ , где  $Q$  — энергия, освобождаемая в данном процессе,  $m$  — масса атома;

$$\text{б) } K \approx Q^2 / 2mc^2 = 57 \text{ эВ.}$$

$$7.70. 0,41 \text{ и } 1,26 \text{ км/с.}$$

7.71.  $E_K = \hbar\omega - mc^2(\sqrt{1 + (\kappa_* e\rho B / mc^2)^2} - 1) = 25,6 \text{ кэВ}$ , где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ).

7.72. Соответственно  $L_3$ ,  $L_2$ ,  $L_1$  и  $K$ . Энергия  $\gamma$ -кванта  $\hbar\omega = K + E_{\text{св}} = 279 \text{ кэВ}$ .

$$7.73. \text{ Энергия } E^* = E_K + mc^2(\sqrt{1 + (\kappa_* e\rho B / mc^2)^2} - 1) = 145 \text{ кэВ,}$$

где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ).

$$7.74. 566 \text{ и } 161 \text{ кэВ.}$$

$$7.75. 1,2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

$$7.76. (\hbar\omega - E^*) / E^* = -E^* / 2Mc^2 = -3,6 \cdot 10^{-7}, \text{ где } M \text{ — масса ядра.}$$

7.77. Вероятность такого процесса будет ничтожно мала, так как уменьшение энергии  $\gamma$ -кванта, равное удвоенной энергии отдачи ядра, значительно больше ширины уровня  $\Gamma$ .

$$7.78. v = \hbar\omega / mc = 217 \text{ м/с, где } m \text{ — масса ядра.}$$

7.80.  $\Gamma \approx 2\hbar\omega v / c = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}$ , где  $v$  — скорость, при которой ордината контура линии равна половине максимальной;  $\tau \approx \hbar / \Gamma = 0,06 \text{ нс}$ .

$$7.81. v \approx gl / c = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ см/с.}$$

7.82. Относительное приращение частоты  $\gamma$ -кванта, «падающего» с высоты  $l$ , есть  $\Delta\omega / \omega = gl / c^2 \geq \Gamma / \hbar\omega$ . Отсюда  $l_{\text{Fe}} \geq 2,8 \text{ км}$ ,  $l_{\text{Zn}} \geq 4,6 \text{ м}$ .

$$8.1. \tilde{p} = \sqrt{2mK} / (1 + m/M); \quad \tilde{K} = K / (1 + m/M).$$

$$8.2. K = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} K_0 \cos^2 \vartheta = 0,7 \text{ МэВ.}$$

8.3. а)  $K_\alpha = (2 + m_\alpha / 2m_d)(\kappa_* e\rho B)^2 / m_\alpha = 0,26 \text{ МэВ}$ , где  $\kappa_* = 1/c$  (СГС) или 1 (СИ);

$$\text{б) } K_{\alpha} = K_d \left( 1 + \frac{(m_{\alpha} - m_d)^2}{4m_{\alpha}m_d \cos^2 \theta} \right) = 0,6 \text{ МэВ.}$$

$$\text{8.4. } m = m_d / (4 \cos^2 \vartheta - 1) = m_d / 2, \text{ ядро атома водорода.}$$

**8.5.** Связь неоднозначна, если масса налетающей частицы больше массы бомбардируемого ядра (случай **в**). В случаях **а** и **б** угол  $\vartheta_{\text{макс}} = \pi$ , а в случае **в**  $\vartheta_{\text{макс}} = \arcsin(m_d / m_{\alpha}) = 30^{\circ}$ .

$$\text{8.6. } \frac{\Delta K}{K} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \frac{\tilde{\vartheta}}{2} = 0,19.$$

$$\text{8.7. } K_p = K(m_{\alpha} - m_p)^2 / (m_{\alpha} + m_p)^2 = 0,10 \text{ МэВ.}$$

$$\text{8.8. } \operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{\sin 2 \vartheta_{\alpha}}{m_n / m_{\alpha} - \cos 2 \vartheta_{\alpha}}. \text{ Отсюда } \vartheta_n = 49^{\circ}.$$

$$\text{8.9. } \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \tilde{\vartheta}}{m_{\alpha} / m_{\text{Li}} + \cos \tilde{\vartheta}}. \text{ Отсюда } \vartheta \approx 18^{\circ}.$$

$$\text{8.10. } K' \approx K/3 = 0,10 \text{ МэВ, } \vartheta_{\text{макс}} = \arcsin(m_p / m_d) = 30^{\circ}.$$

$$\text{8.11. } Q = 2 \cdot 4 \varepsilon_{\alpha} - 7 \varepsilon_{\text{Li}} = +17,3 \text{ МэВ.}$$

$$\text{8.12. а) } -3,1 \text{ МэВ; б) } +19,8 \text{ МэВ; в) } -13,5 \text{ МэВ; г) } +1,8 \text{ МэВ.}$$

$$\text{8.13. } 17,00844 \text{ а.е.м.}$$

$$\text{8.14. } v_{\alpha} = \sqrt{2Q / m_{\alpha}(1 + m_{\alpha} / m_{\text{Li}})} = 9,3 \cdot 10^6 \text{ м/с, } v_{\text{Li}} = 5,3 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$\text{8.15. Пренебрегая импульсом } \gamma\text{-кванта, найдем } K \approx (8/9)(\hbar\omega - |Q|) = 115 \text{ КэВ.}$$

$$\text{8.16. } E = \hbar\omega - (\kappa_* e p B)^2 / m = 2,23 \text{ МэВ, где } \kappa_* = 1/c \text{ (СГС) или } 1 \text{ (СИ).}$$

$$\text{8.17. а) } Q = (4/3)K_p - (1/3)K = 4,0 \text{ МэВ;}$$

$$\text{б) } Q = (18/17)K_p - (13/17)K_{\alpha} - (4/17)\sqrt{K_p K_{\alpha}} \cos \vartheta = -1,2 \text{ МэВ.}$$

$$\text{8.18. } \cos \theta = \frac{m_d K_d (1 + m_{\alpha} / m_B)}{2m_{\alpha}(K_d + Q)} - 1, \text{ отсюда } \theta = 141^{\circ}.$$

**8.19.** Ниже приведены два способа решения этой задачи.

**1.** Законы сохранения энергии и импульса при пороговом значении кинетической энергии налетающей частицы:

$$K_{\text{пор}} = |Q| + K_{m+M}, \quad p_m = p_{m+M}.$$

Решив эти уравнения, найдем искомое выражение.

**2.** В Ц-системе пороговое значение суммарной кинетической энергии взаимодействующих частиц  $\tilde{K}_{\text{пор}} = |Q|$ . Но

$$\tilde{K}_{\text{пор}} = \mu v_{\text{отн}} / 2 = (\mu / m) K_{\text{пор}}.$$

Отсюда легко получить выражение для  $K_{\text{пор}}$ .

$$\text{8.20. а) } 4,4 \text{ МэВ; б) } 18,1 \text{ МэВ; в) } 6,2 \text{ МэВ; г) } 0.$$

**8.21. а)** 1,02 МэВ; **б)** 3,06 МэВ.

**8.22. а)**  $K_{\text{Be}} = |Q|/8 = 0,206$  МэВ; **б)**  $K_{\text{O}} = (3/76)|Q| = 1,41$  МэВ.

**8.23.**  $K_n = \frac{|Q|}{8} \left( \frac{48}{7} \eta - 7 \right) = 0,68$  МэВ.

**8.24.**  $K_{\text{мин}} = (11/7) \delta_* q_1 q_2 / R \approx 2,8$  МэВ, где  $R$  — сумма радиусов ядра Li и  $\alpha$ -частицы,  $\delta_* = 1/c$  (СГС) или  $1/4\pi\epsilon_0$  (СИ). Эта энергия меньше пороговой ( $K_{\text{пор}} = 4,4$  МэВ), т. е. недостаточна для возбуждения реакции.

**8.25.** Запишем условие равенства полных энергий в Ц-системе для прямого и обратного процессов (см. рис. 8.3):  $\tilde{K} = \tilde{K}' + |Q|$ , где  $Q$  — энергия реакции (здесь  $Q < 0$ ). Выразив  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{K}'$  и  $|Q|$  соответственно через  $K$ ,  $K_d$  и  $K_{\text{пор}}$ , получим

$$K_d = (K - K_{\text{пор}}) m_{\text{B}} / m_{\text{Be}} = 5,7 \text{ МэВ.}$$

**8.26.**  $\tilde{p}' = \sqrt{2\mu'(K_m \mu / m + Q)}$ , где  $\mu$  и  $\mu'$  — приведенные массы системы до и после реакции.

**8.27.**  $\tilde{p} = 0,566 p_p$ ; 0,17 или 0,9 МэВ.

**8.28.**  $\tilde{p} = 1,95 p_d$ . Из векторной диаграммы импульсов находим

$$p_{\alpha \text{ макс}} = \tilde{p} + p_d m_{\alpha} / (m_{\alpha} + m_{\text{N}}); \quad K_{\alpha \text{ макс}} = 4,7 \text{ МэВ.}$$

**8.29.**  $\tilde{p} = 0,431 p_{\alpha}$ . Из векторной диаграммы импульсов следует:

$$p_n = \tilde{p} \pm p_{\alpha} m_n / (m_n + m_{\text{N}}),$$

где знаки плюс и минус относятся соответственно к максимальному и минимальному значениям импульса нейтронов. Отсюда находим:  $K_{n \text{ макс}} = 5,0$  МэВ,  $K_{n \text{ мин}} = 2,7$  МэВ.

**8.30.** Соответственно 5,7, 2,9 и 1,5 МэВ.

**8.31.** Как следует из векторной диаграммы импульсов, это будет при условии  $\tilde{p} \leq p_{\alpha} m_n / (m_n + m_{\text{B}})$ . Отсюда  $K_{\alpha} \geq (5/3)|Q| = 4,65$  МэВ.

**8.32. а)** Из векторной диаграммы импульсов следует, что

$$\sin \vartheta_{\text{В макс}} = 10 p / 9 p_p = 0,70, \quad \vartheta_{\text{В макс}} = 44,5^\circ.$$

Угол вылета нейтрона может иметь любые значения (от 0 до  $\pi$ );

**б)**  $46,5^\circ$  ( $d$ ) и  $29^\circ$  ( $^3\text{H}$ ).

**8.33. а)** Сначала найдем угол  $\tilde{\vartheta}_0$  в Ц-системе, соответствующий углу  $\vartheta_0 = \pi/2$  в Л-системе. Из векторной диаграммы импульсов следует, что

$$\cos \tilde{\vartheta}_0 = 4 p_n / 13 \tilde{p} = 0,46,$$

где  $p_n$  — импульс нейтрона в Л-системе,  $\tilde{p}$  — импульс продуктов реакции в Ц-системе.

Искомая вероятность

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{\vartheta_0}^{\pi} 2\pi \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} = (1 + \cos \tilde{\vartheta}_0)/2 = 0,73.$$

**8.34.** Используя инвариантность величины  $E^2 - p^2 c^2$  при пороговом значении энергии  $\gamma$ -кванта (в Л- и Ц-системах), получим

$$\hbar\omega_{\text{пор}} = |Q| (1 + |Q|/2mc^2).$$

**8.35.**  $K_n \approx m_n Q^2 / 2M^2 c^2$ , где  $m_n$  и  $M$  — массы нейтрона и расщепляющегося ядра,  $Q$  — энергия реакции;

а) 0,66 кэВ; б) 0,58 кэВ.

**8.36.** Достаточно воспользоваться инвариантностью величины  $E^2 - p^2 c^2$  при переходе от Л- к Ц-системе и учесть условия, приведенные в задаче.

**8.37.** Воспользовавшись векторной диаграммой импульсов, найдем угол  $\tilde{\vartheta}_d$  в Ц-системе, соответствующий углу  $\vartheta_d = \pi/2$  в Л-системе, по формуле

$$\cos \tilde{\vartheta}_d = (p_\gamma / \tilde{p}') m_d / (m_d + m_n),$$

где  $\tilde{p}' = \sqrt{2\mu'(\hbar\omega + Q)}$ . Искомая вероятность:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{\vartheta_d}^{\pi} 2\pi \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} = (1 + \cos \tilde{\vartheta}_d)/2 = 0,662.$$

**8.38.** Пусть  $\mathbf{p}'_n$  и  $\mathbf{p}_n$  — импульсы нуклона, обусловленные соответственно его внутренним движением в дейтроне и движением нуклона вместе с дейтроном. Тогда максимальное отклонение от направления пучка дейтронов  $\vartheta = \theta/2$  нуклон получит при условии, что в момент срыва  $\mathbf{p}'_n \perp \mathbf{p}_n$ . Поэтому

$$\operatorname{tg} \vartheta = p'_n / p_n = \sqrt{2K'_n / K_d}.$$

Отсюда найдем  $K'_n$  — кинетическую энергию внутреннего движения нуклона в дейтроне. Кинетическая же энергия возникающих нейтронов

$$K_n = (\mathbf{p}_n + \mathbf{p}'_n)^2 / 2m = K_d / 2 + \mathbf{p}_n \mathbf{p}'_n / m,$$

где  $m$  — масса нуклона. Отсюда максимальный разброс энергий нейтронов

$$\Delta K_n = \pm p_n p'_n / m = \pm \sqrt{2K_d K'_n} = \pm 27 \text{ МэВ}.$$

**8.39.**  $I(^{17}\text{O}) = I(^{16}\text{O}) + l_n + s_n = 0 + 2 \pm 1/2 = 5/2$  и  $3/2$ . Согласно оболочечной модели ядра,  $I = 5/2$ .

**8.40.** Спин промежуточного ядра  $\mathbf{I} = \mathbf{s}_p + \mathbf{I} + \mathbf{I}_{\text{Li}}$ , четность  $P = P_p P_{\text{Li}} (-1)^l$ . Отсюда

$l$	$I$	$P$	Состояния $^8\text{Be}$
0	2, 1	-1	$2^-, 1^-$
1	3, 2, 1, 0	+1	$3^+, 2^+, 1^+, 0^+$

**8.41.** Четность системы из двух  $\alpha$ -частиц положительна, так как эта система описывается четной волновой функцией. Поэтому

$$P_{2\alpha} = P_{\alpha}^2 (-1)^{l_{\alpha}} = +1, \quad l_{\alpha} = 0, 2, 4 \dots$$

Из закона сохранения механического момента  $l_{\alpha} = I$ , откуда  $I = 0$  и  $2$ . Таким образом, канал (1) возможен через два состояния промежуточного ядра:  $2^+$  и  $0^+$ , когда  $l = 1$ . Испускание дипольного  $\gamma$ -кванта сопровождается изменением четности и спина ядра на единицу. А так как у основного состояния ядра  $^8\text{Be}$  спин и четность равны  $0^+$ , то испускание дипольного  $\gamma$ -кванта происходит из состояния промежуточного ядра  $1^-$ , когда  $l = 0$ . Испускание квадрупольного  $\gamma$ -кванта не меняет четности, а спин ядра изменяет на 2. Поэтому этот процесс происходит из состояния промежуточного ядра  $2^+$ , когда  $l = 1$ .

**8.42.**  $E = \hbar\omega (1 - \hbar\omega/2Mc^2)$ .

**8.43.**  $E = E_{\text{св}} + (3/4)K_p = 21,3$  МэВ, где  $E_{\text{св}}$  — энергия связи протона в ядре  $^4\text{He}$ .

**8.44.**  $K_{\text{мин}} = (10/9)E^* = 2,67$  МэВ.

**8.45.**  $E_{\text{возб}} = (6/7)K - (8/7)K' = 0,48$  МэВ.

**8.46.**  $K'_i = (19/21)K - (20/21)E_i^* = 2,5$  и  $1,8$  МэВ.

**8.47.**  $K_n = (17/16)(E^* - E_{\text{св}}) = 0,42, 0,99$  и  $1,30$  МэВ. Здесь  $E_{\text{св}}$  — энергия связи нейтрона в ядре  $^{17}\text{O}$ .

**8.48.**  $E^* = (m_{\text{C}} + m_{\text{d}} - m_{\text{N}})c^2 + (13/15)K = 16,68, 16,94, 17,50$  и  $17,72$  МэВ.

**8.49.**  $2,13, 4,45$  и  $5,03$  МэВ.

**8.50.**  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{K'_1}{K'_2}} = 1:0,80$ , где  $K'_i = \frac{K(1 - m/m_{\text{Al}}) - E_i^*}{1 + m/m_{\text{Al}}}$ .

**8.51.**  $\sigma_{ab} = \sigma_a \Gamma_b / \Gamma$ .

**8.52.**  $\tau = \tau_n \tau_{\alpha} / (\tau_n + \tau_{\alpha}) = 0,7 \cdot 10^{-20}$  с.

**8.53.**  $N = wI/e = 3,1 \cdot 10^{12}$  с $^{-1}$ .

**8.54.**  $d = (\ln \eta) / n_0 \sigma = 0,40$  мм, где  $n_0$  — концентрация атомов кадмия.

**8.55.**  $w = 1 - \exp(-\eta \sigma d \rho / m_0) = 0,80$ , где  $\rho$  — плотность лития,  $m_0$  — масса атома.

**8.56.**  $\sigma_2 = \sigma_1 w_2 / w_1 = 0,10$  б, где  $w$  — выход реакции.

**8.57.**  $\sigma = w / n_0 d = 0,05$  б, где  $n_0$  — концентрация ядер.

**8.58.**  $\sigma = N / 2n_0 l \Phi t = 1,8$  б, где  $n_0$  — число Лошмидта.

**8.59.**  $A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} \frac{w I t}{e} = 1,5 \cdot 10^8$  Бк (4 мКи).

**8.60.** В результате длительного облучения число образующихся ежесекундно радиоактивных ядер равно числу распадающихся;

$$w = (eA / I) e^{\lambda t} = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

**8.61.**  $\sigma = \frac{A e^{\lambda t}}{\Phi n (1 - e^{-\lambda \Delta t})} = 20$  мб,

где  $n$  — число ядер на единицу поверхности мишени.

**8.62.** Используем следующие соотношения

$$\tilde{p}_1^2 = 2\mu_1 \tilde{K}_1, \quad \tilde{p}_2^2 = 2\mu_2 \tilde{K}_2, \quad \tilde{K}_2 = \tilde{K}_1 + Q,$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — приведенные массы соответственно  $d + d$  и  $n + {}^3\text{He}$ ;  $\tilde{p}_1$ ,  $\tilde{K}_1$  и  $\tilde{p}_2$ ,  $\tilde{K}_2$  — импульсы и суммарные кинетические энергии взаимодействующих частиц в Ц-системе соответственно в прямом и обратном процессах. С помощью принципа детального равновесия получим

$$2I_{\text{He}} + 1 = \frac{9}{2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{m_d^2}{m_n m_{\text{He}}} \frac{K}{K + 2Q} = 2,0,$$

откуда  $I_{\text{He}} = 1/2$ .

**8.63.**  $\sigma_1 = \frac{8}{3} \frac{m_p m_{\text{Be}}}{m_\alpha m_{\text{Li}}} \frac{K - K_{\text{пор}}}{K} \sigma_2 = 2,0$  мкб.

**8.64.** Согласно принципу детального равновесия

$$\sigma_{pn} \sim \sigma_{np} \frac{\tilde{p}_n^2}{\tilde{p}_p^2} \sim \frac{1}{v_n} \frac{v_n^2}{\tilde{K}_{A+p}} \sim \frac{\sqrt{\tilde{K}_{B+n}}}{\tilde{K}_{A+p}} = \frac{\sqrt{\tilde{K}_{A+p} - |Q|}}{\tilde{K}_{A+p}}.$$

Вблизи порога  $\tilde{K}_{A+p} \rightarrow |Q|$ , ибо  $\tilde{K}_{B+n} \rightarrow 0$ , поэтому знаменатель можно считать приблизительно постоянным. Тогда

$$\sigma_{pn} \sim \sqrt{\tilde{K}_{A+p} - |Q|} \sim \sqrt{K_p - K_{p \text{ пор}}}.$$

**8.65.** Имея в виду, что  $\tilde{p}_\gamma \approx \hbar\omega/c$  и  $\tilde{p}_n^2 \approx 2\mu(\hbar\omega + Q)$ , получим

$$\sigma_2 = \frac{3}{2} \frac{(\hbar\omega)^2}{(\hbar\omega + Q)m_n c^2} = 3,6 \text{ мкб}, \quad K_n = 2(\hbar\omega + Q) = 0,96 \text{ МэВ}.$$

**8.66.** Из условия  $bp = \hbar\sqrt{l(l+1)}$  получим

$$b = \hbar\sqrt{l(l+1)}/\sqrt{2mK} = 0, 6,4 \text{ и } 11,2 \text{ фм}.$$

**8.67.**  $b_{\text{макс}} = \hbar\sqrt{l(l+1)}/\sqrt{2mK} = 6,0 \text{ фм}$ , где  $l = 2$  — из условия  $b_{\text{макс}} \leq R = 1,4 \cdot A^{1/3}$ .

**8.68.** Рассмотрим нейтроны с орбитальным моментом  $l$  и прицельным параметром  $b_l$ . Геометрическое сечение ядра для них можно представить в виде кольца со средним радиусом  $b_l$ . Площадь этого кольца:

$$\Delta S_l = (\pi/2)(b_{l+1}^2 - b_{l-1}^2) = (2l+1)\pi\lambda^2.$$

Максимально возможное значение  $l$  определяется условием  $b_{l_{\text{макс}}} \leq R$ , где  $R$  — радиус ядра. Отсюда  $l_{\text{макс}} \approx R/\lambda$  и

$$S = \sum_{l=0}^{R/\lambda} \Delta S_l \approx \pi(R + \lambda)^2, \quad S_{\text{Au}} = 2,9 \text{ б}.$$

**8.69.** При взаимодействии медленного нейтрона ( $l = 0$ ) и ядра мишени в данном случае возможны  $(2s+1)(2I+1)$  различных способов образования промежуточного ядра ( $s$  — спин нейтрона). Так как кратность вырождения (статистический вес) состояния с заданным  $J$  равна  $2J+1$ , то вероятность образования данного состояния

$$g = \frac{2J+1}{(2s+1)(2I+1)} = \frac{2J+1}{2(2I+1)} = \frac{2}{3}.$$

**8.70.**  $\sigma_{nn} = \sigma_a \Gamma_n / \Gamma$ ;  $\sigma_{n\gamma} = \sigma_a \Gamma_\gamma / \Gamma$ , где  $\sigma_a$  — сечение образования промежуточного ядра (см. формулу Брейта-Вигнера).

$$\mathbf{8.71.} \quad \sigma_a = \sigma_0 \sqrt{\frac{K_0}{K}} \frac{\Gamma^2}{4(K - K_0)^2 + \Gamma^2}.$$

$$\mathbf{8.72.} \quad \sigma_{n\gamma} = \sigma_0 \sqrt{\frac{K_0}{K}} \frac{(\Gamma/2)^2}{(K - K_0)^2 + (\Gamma/2)^2} = 96 \text{ б}.$$

$$\mathbf{8.73.} \quad \Gamma_{n0}/\Gamma_\gamma = \eta\sqrt{K_0/K} = 0,006.$$



**8.74. а)** Из условия  $d\sigma_{n\gamma}/dK = 0$  получим

$$K_{\text{мин}}^{\text{макс}} = K_0(0,6 \pm \sqrt{0,16 - 0,05 \Gamma^2/K_0^2}).$$

Отсюда видно, что  $K_{\text{макс}} = K_0$  при  $\Gamma \ll K_0$ ;

**б)**  $\Gamma/K_0 \geq 1,8$ .

**8.75.**  $\sigma_{\text{мин}}/\sigma_0 = 0,87 \Gamma^2/K_0^2$ , здесь  $\sigma_{\text{мин}}$  при  $K_{\text{мин}} = 0,2 K_0$ .

**8.76.**  $\Gamma \approx 2K_0/\sqrt{15/\sqrt{2} - 1} = 0,115$  эВ.

**8.78. а)**  $\sigma_{nn} = 2\pi\lambda_0^2 g\Gamma_{n0}^2/\Gamma^2 = 8(1 \pm 1/8)$  кб; в данном случае с ядрами взаимодействуют только  $s$ -нейтроны;

**б)** из формулы  $\sigma_0 = 4\pi\lambda_0^2 g\Gamma_{n0}/\Gamma$  находим фактор  $g$ , откуда  $J = 4$ .

**8.79.**  $\sigma_{nn}/\sigma_{\text{геом}} = 4\lambda_0^2 g/R = 3,6 \cdot 10^3$ , где  $R$  — радиус ядра.

**8.80.**  $\Gamma_{n0} \approx \sigma_0\Gamma/4\pi\lambda_0^2 g \approx 0,58$  мэВ, где  $g = (1 \pm 1/8)/2$ , поскольку  $l = 0$ , в чем можно убедиться непосредственно.

**8.81.**  $\tau \approx \hbar/\Gamma \approx \sigma_0 mK_0/2\pi\hbar g \Gamma_{n0} = 4,4$  фс, где  $m$  — масса нейтрона.

**9.1.**  $p = \sqrt{K(K + 2m)}$ . Соответственно 1,7, 1,1 и 1,0 ГэВ/с.

**9.2.**  $\sqrt{1 + m_\pi^2/p^2} < n < \sqrt{1 + m_K^2/p^2}$ , или  $1,06 < n < 1,59$ .

**9.3.** Воспользовавшись инвариантностью величины  $E^2 - p^2$ , запишем

$$(K + 2m)^2 - p^2 = [2(\tilde{K} + m)]^2,$$

где левая часть равенства записана в Л-системе, а правая — в Ц-системе. Имея в виду, что  $p^2 = K(K + 2m)$ , получим

$$\tilde{K} = 2m(\sqrt{1 + K/2m} - 1), \quad \tilde{p} = \sqrt{mK/2}, \quad \beta_{\text{сист}} = \sqrt{K/(K + 2m)}.$$

**9.4.** Из инвариантности величины  $E^2 - p^2$  получим

$$(K' + 2m)^2 - p^2 = [2(K + m)]^2 \quad \text{и} \quad K' = 2K(K + 2m)/m = 2,0 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}.$$

**9.5. а)**  $\tilde{K} = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2K} - (m_1 + m_2)$ ;

$$\text{б) } \tilde{p} = \frac{m_2^2 \tilde{K} (\tilde{K} + 2m_1)}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2K}}.$$

**9.6.**  $K_{1,2} = \tilde{K}(\tilde{K} + 2m_{2,1})/2(m_1 + m_2 + \tilde{K})$ .

**9.7.** Из законов сохранения энергии и импульса имеем

$$K = K_1 + K_2, \quad p_2^2 = p_1^2 + p^2 - 2pp_1 \cos \vartheta_1,$$

где  $K$  и  $p$  — кинетическая энергия и импульс налетающей частицы. Имея в виду, что  $p = \sqrt{K(K + 2m_1)}$ , выразим  $\cos \vartheta_1$  через  $K_1$  и  $K$ . Из условия  $\partial \cos \vartheta_1 / \partial K_1 = 0$  получим значение  $K_1$ , отвечающее максимуму угла  $\vartheta_1$ . Подставив это значение в выражение для  $\cos \vartheta_1$ , найдем искомое соотношение.

$$9.8. K_e = \frac{2m_e K (K + 2m_\mu)}{(m_\mu + m_e)^2 + 2m_e K} = 2,8 \text{ МэВ.}$$

$$9.9. \cos \theta = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{K}{K + 2m_e} (1 + \eta)^2 - 1 - \eta^2 \right), \text{ откуда } \theta = 120^\circ.$$

9.10. Воспользуемся инвариантностью величины  $E^2 - p^2$  и запишем ее в Л- и Ц-системах отсчета при пороговых значениях энергии и импульса  $\gamma$ -кванта:

$$(E_{\gamma \text{ пор}} + M)^2 - E_{\gamma \text{ пор}}^2 = (M + 2m)^2,$$

откуда  $E_{\gamma \text{ пор}} = 2m(1 + m/M)$ ,  $m$  — масса каждой частицы пары. Для рождения пары  $\pi$ -мезонов  $E_{\gamma \text{ пор}} = 0,32 \text{ ГэВ}$ .

9.11. Для рождения пары необходимо, чтобы энергия  $\gamma$ -кванта была больше  $2m$ , где  $m$  — масса каждой частицы. Очевидно, всегда можно перейти в такую систему отсчета, где энергия  $\gamma$ -кванта меньше  $2m$  и рождение пары невозможно. Но если этот процесс невозможен в одной системе отсчета, он невозможен и в любой другой.

$$9.12. 2K = m_e \alpha^2 / (1 + \alpha) = 0,61 \text{ эВ, где } \alpha = 2m_e / m_p.$$

$$9.13. E_\gamma = 2\sqrt{(\kappa_* e p B)^2 + m^2} = 2,1 \text{ МэВ, где } \kappa_* = 1/c \text{ (СГС) или } 1 \text{ (СИ).}$$

9.14. Воспользовавшись инвариантностью величины  $E^2 - p^2$ , запишем это выражение в Л- и Ц-системах при пороговом значении энергии частицы  $m$ :

$$(K_{m \text{ пор}} + m + M)^2 - p_{m \text{ пор}}^2 = (\sum m_i)^2,$$

где  $p_{m \text{ пор}}^2 = K_{m \text{ пор}}(K_{m \text{ пор}} + 2m)$ . Отсюда находим искомое выражение.

$$9.15. 1) 0,20 \text{ ГэВ; } 2) 0,14 \text{ ГэВ; } 3) 0,78 \text{ ГэВ; } 4) 0,91 \text{ ГэВ; } 5) 1,38 \text{ ГэВ;}$$

$$6) 1,79 \text{ ГэВ; } 7) 6m_p = 5,63 \text{ ГэВ; } 8) 7,84 \text{ ГэВ.}$$

$$9.16. \text{ а) } 1,37 \text{ МэВ; } \text{ б) } 196,7 \text{ МэВ.}$$

9.17. а) Из условия равенства полных энергий в Ц-системе для обоих процессов запишем, воспользовавшись инвариантностью величины  $E^2 - p^2$ :

$$(m_a + m_A + K_a)^2 - K_a(K_a + 2m_a) = (m_b + m_B + K_b)^2 - K_b(K_b + 2m_b).$$

Отсюда  $K_b = (K_a - K_{a \text{ пор}}) m_A / m_B$ ;

б)  $K_\pi = \hbar\omega - m_\pi(1 + m_\pi/2m_p) = 50 \text{ МэВ.}$

9.18. Из выражения для  $\sin \vartheta_{\text{макс}}$ , где  $M = \sqrt{2m(K + 2m)}$ , находим  $\vartheta_{\text{макс}} = 10,7^\circ$ .

9.19. Воспользовавшись инвариантностью величины  $E^2 - p^2$ , получим  $M = \sqrt{(m_p + m_\pi)^2 + 2m_p K}$ . Соответственно 1,24, 1,51 и 1,69 ГэВ.

9.20. Здесь ( $t \leq \tau$ )  $\Delta N/N = (l/\tau)\sqrt{m/2K} = 1,0 \cdot 10^{-6}$ , где  $\tau$  — среднее время жизни нейтрона.

9.21. а)  $\tau_0 = \tau\sqrt{1 - \beta^2} = \tau m_\mu / (m_\mu + K) = 2,2 \text{ мкс};$

б)  $\tau_0 = l\sqrt{1 - \beta^2}/\beta c = lm_\pi/pc = 25 \text{ нс.}$

9.22.  $w = 1 - e^{-t/\tau} = 0,43$ , где  $t$  — время пролета,  $\tau$  — среднее время жизни движущегося мезона.

9.23.  $\Delta m \approx \hbar/\tau c^2 = \hbar(\tau_1 + \tau_2)/c^2 \tau_1 \tau_2$ , где  $\tau$  — среднее время жизни частицы.

9.24. 0,78 МэВ.

9.25. 19,5 МэВ, 193 МэВ/с.

9.26.  $K_e = (m_\mu - m_e)^2/2m_\mu = 52,3 \text{ МэВ}$ ,  $p_e = 52,6 \text{ МэВ/с.}$

9.27.  $E_\Lambda = m_\Lambda - (Q + m_p + m_\pi) = 2,8 \text{ МэВ.}$

9.28.  $\text{tg} \vartheta_\mu = \frac{E_\nu}{\sqrt{K_\pi(K_\pi + 2m_\pi)}}$ , где  $E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(m_\pi + K_\pi)}$ . Отсюда  $\vartheta_\mu \approx 10^\circ$ .

9.29. а) Из законов сохранения энергии и импульса находим  $\sin(\theta/2) = m_\pi/\sqrt{4E_1E_2}$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — энергии  $\gamma$ -квантов. Отсюда видно, что угол  $\theta_{\text{мин}}$  будет при  $E_1 = E_2 = (m_\pi + K_\pi)/2 = m_\pi$ . Следовательно,  $\theta_{\text{мин}} = 60^\circ$ ;

б) при  $\theta = \pi$  энергия одного кванта будет максимальной, а другого — минимальной. В этом случае

$$\sin(\pi/2) = m_\pi/\sqrt{4E_1(E - E_1)},$$

где  $E$  — полная энергия  $\pi$ -мезона. Отсюда  $E_1$  (а значит, и  $E_2$ ) равно

$$E_1 = \frac{1}{2} \left( m_\pi + K_\pi \pm \sqrt{K_\pi(K_\pi + 2m_\pi)} \right) = 252 \text{ и } 18,1 \text{ МэВ.}$$

9.30. а)  $K = (m_K - 2m_\pi)m_K/2m_\pi = 0,42 \text{ ГэВ};$

б)  $\cos \theta = \frac{2K(K + 2m_K)}{(K + m_K)^2 - 4m_\pi^2} - 1$ , откуда  $\theta = 103^\circ$ .

**9.31.** Из законов сохранения энергии и импульса получим

$$m^2 = m_\Sigma^2 + m_\pi^2 - 2(\sqrt{(m_\Sigma^2 + p_\Sigma^2)(m_\pi^2 + p_\pi^2)} - p_\Sigma p_\pi \cos \vartheta).$$

Отсюда  $m = 0,94$  ГэВ (нейтрон),  $Q = 0,11$  ГэВ.

**9.32.** Так как  $\theta \neq \pi$ , то распад произошел на лету. Из законов сохранения энергии и импульса получим

$$m^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2(\sqrt{(m_p^2 + p_p^2)(m_\pi^2 + p_\pi^2)} - p_p p_\pi \cos \theta).$$

Отсюда  $m = 1115$  МэВ ( $\Lambda$ -гиперон).

**9.33.** Указание: в Ц-системе  $M = \tilde{E} = \sqrt{m_1^2 + \tilde{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \tilde{p}^2}$ .

**9.34. а)** Узкий максимум — каналу (1), широкий — каналу (2).

**б)** Пренебрегая импульсом  $\pi^-$ -мезона, запишем законы сохранения полной энергии и импульса для канала (1):

$$m_\pi + m_p = E_n + E_\gamma, \quad p_n = p_\gamma.$$

Отсюда  $m_\pi = \sqrt{m_n^2 + E_\gamma^2} + E_\gamma - m_p = 0,14$  ГэВ.

**в)** Из характера спектра  $\gamma$ -квантов, возникающих при распаде  $\pi^0$ -мезона (широкий максимум), следует что  $\pi^0$ -мезоны распадаются на лету (иначе испускались бы моноэнергетические  $\gamma$ -кванты). Из законов сохранения энергии и импульса следует, что  $m_\pi = 2\sqrt{E_1 E_2} = 135$  МэВ.

**9.35.** Если процесс идет через связанное состояние  $\rho$  (в две стадии), то в системе отсчета, связанной с  $\rho$ -частицей, масса  $\rho$ -частицы равна сумме полных энергий частиц, на которые она распадается:

$$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_{\pi^+} + \tilde{E}_{\pi^-} = \tilde{E}_\rho = M_\rho, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}_{\pi^+} + \tilde{\mathbf{p}}_{\pi^-} = 0.$$

Воспользовавшись инвариантностью величины  $E^2 - p^2$  при переходе от Ц- к Л-системе отсчета, имеем для  $\pi$ -мезонов:

$$E^2 - p^2 = \tilde{E}_0^2, \quad \text{где } E = E_{\pi^+} + E_{\pi^-}, \quad p = |\mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_{\pi^-}|.$$

Если бы реакция шла только через связанное состояние, то, рассматривая много случаев и определяя каждый раз  $E^2 - p^2$ , мы получили бы одно и то же значение этой величины. Если же реакция идет частично через связанное состояние, то в распределении числа случаев по различным значениям величины  $E^2 - p^2$  мы получим максимум, свидетельствующий о наличии резонанса — связанного состояния.

**9.36.** Воспользовавшись инвариантностью величины  $E^2 - p^2$ , найдем полную энергию взаимодействия частиц в Ц-системе:

$$\tilde{E} = \sqrt{(m_K + m_p)^2 + 2m_p K_K}.$$

Полная энергия резонанса ( $Y^*$ -частицы) в Ц-системе равна

$$\tilde{E}_Y = \tilde{E} - \tilde{E}_\pi = \tilde{E} - (\tilde{K}_\pi + m_\pi) \quad \text{и} \quad m_Y = \sqrt{\tilde{E}_Y^2 - \tilde{p}_Y^2} = 1,38 \text{ ГэВ},$$

где  $\tilde{p}_Y^2 = \tilde{p}_\pi^2 = K_\pi(K_\pi + 2m_\pi)$ . Энергия распада равна 123 МэВ.

**9.37.** Из условия  $\mu_p = \alpha\mu_\pi + (1 - \alpha)\mu_\pi$ , где  $\alpha$  — доля времени пребывания протона в состоянии «идеальный протон», находим  $\alpha \approx 2/3$ . Здесь учтено, что  $\mu_\pi/\mu_\pi = m_p/m_\pi$ .

$$\mathbf{9.38.} \quad 2s_\pi + 1 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{\pi d}} \left( \frac{\tilde{p}_p}{\tilde{p}'_\pi} \right)^2 = 1,08, \quad \text{откуда } s_\pi = 0. \quad \text{Здесь } \tilde{p}_p \text{ (им-}$$

пульс протона в Ц-системе) находим с помощью инварианта  $E^2 - p^2$  при переходе из Л- в Ц-систему,  $\tilde{p}_p^2 = m_p K_p/2$ . Импульс  $\pi$ -мезона в Ц-системе в обратном процессе можно определить из формулы (9.4), рассматривая этот процесс как распад системы с массой  $M$ , равной полной энергии  $\tilde{E}'_{\pi d}$  взаимодействующих частиц в Ц-системе. В соответствии с принципом детального равновесия  $\tilde{E}'_{\pi d} = \tilde{E}_{pp}$ , поэтому

$$M = \tilde{E}_{pp} = \sqrt{E_{pp}^2 - p^2} = \sqrt{2m_p(K_p + 2m_p)}.$$

**9.39.** Для  $\gamma$ -кванта  $2s_\gamma + 1 = 2$  в соответствии с двумя возможными поляризациями, поэтому  $\sigma_{np} = 2\sigma_{\gamma p}(\tilde{p}_\gamma/\tilde{p}'_\pi)^2 = 0,66$  мб. Здесь  $\tilde{p}_\gamma$  находим с помощью инварианта  $E^2 - p^2$ , а импульс  $\tilde{p}'_\pi$  в обратном процессе — из условия равенства полных энергий в обоих процессах в Ц-системе ( $\tilde{E}_{\gamma p} = \tilde{E}_{\pi p}$ ):

$$\tilde{p}_\gamma^2 = \frac{m_p}{m_p + 2E_\gamma} E_\gamma^2, \quad \tilde{p}'_\pi^2 = \frac{(2m_p E_\gamma - m_\pi^2)^2 - 4m_p^2 m_\pi^2}{4m_p(m_p + 2E_\gamma)}.$$

**9.40.** Запрещены реакции 1, 3, 5.

**9.41.** Запрещены реакции 2 и 6.

**9.42.** Да, поскольку к слабым взаимодействиям относятся все процессы с участием нейтрино, а также процессы, в которых странность  $S$  не сохраняется.

**9.43. а)** Канал (2) — энергетически; **б)** канал (1), так как  $|\Delta S| = 2$ .

#### 9.44. Соответствующие значения изоспина и его проекции:

	$nn$	$pp$	$np$	$\pi^+p$	$\pi^-p$	$\pi^0p$	$\pi^+n$	$\pi^-n$	$\pi^0n$
$T_z$	-1	+1	0	$+3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+1/2$	$-3/2$	$-1/2$
$T$	1	1	1, 0	$3/2$	$3/2, 1/2$	$3/2, 1/2$	$3/2, 1/2$	$3/2$	$3/2, 1/2$

**9.45. а)** Система может иметь  $T = 1$  или  $0$ . Для  ${}^3P$ :  $(-1)^{2+1+T} = -1$ ,  $T = 1$ . Для  ${}^3D$ :  $(-1)^{2+1+T} = -1$ ,  $T = 0$ ;

**б)** система может иметь  $T = 2$  или  $1$  ( $T = 0$  исключено, так как  $T_z = +1$ ). Для  ${}^1P$ :  $(-1)^{1+0+T} = +1$ ,  $T = 1$ . Для  ${}^1D$ :  $(-1)^{2+0+T} = +1$ ,  $T = 2$ ;

**в)** здесь  $T = 0, 1$  и  $2$ . В  ${}^1P$ -состояниях  $T = 1$ , в  ${}^1D$ -состояниях  $T = 2$  и  $0$ .

**9.46. а) и б):**  $\Delta T_z = 0$  и  $\Delta S = 0$ , следовательно, взаимодействие сильное, а для него  $\Delta T = 0$ ;

**в)** у системы  $\pi^0\pi^+$  изоспин  $T$  равен  $2$  и  $1$ . Из обобщенного принципа Паули следует, что

$$(-1)^{l+s+T} = (-1)^{l+T} = +1.$$

Согласно закону сохранения момента импульса,  $l$  должно быть равно нулю. Отсюда  $(-1)^T = +1$ ,  $T = 2$ . Итак,  $\Delta T = 3/2$ ,  $\Delta T_z = 1/2$ ;

**г)** у системы  $2\pi^0$  проекция изоспина  $T_z = 0$ . Из возможных значений изоспина ( $2, 1$  и  $0$ ) реализуются только  $0$  и  $2$ , так как, согласно обобщенному принципу Паули,

$$(-1)^{l+0+T} = +1.$$

Из закона сохранения момента импульса следует, что  $l = 0$ . Отсюда  $T$  должно быть четным, т. е.  $0$  или  $2$ . Итак,  $\Delta T$  равно  $1/2$  или  $3/2$ .

**9.47.** Из условия  $|T_\pi - T_N| \leq T \leq |T_\pi + T_N|$ , где  $T_N$  и  $T_\pi$  известны, находим  $T = 1/2$  и  $3/2$ ;  $S = S_\pi + S_N = 0$ ;  $B = 1$ ;  $I = 1 \pm 1/2 = 1/2$  и  $3/2$ ;  $P = P_N (-1)^l = +1$ .

**9.48.** Из законов сохранения четности и момента импульса имеем:

$$P_\pi P_d (-1)^{l_\pi} = P_n^2 (-1)^{l_n}, \text{ отсюда } P_\pi = (-1)^{l_n};$$

$$s_\pi + s_d + l_\pi = 2s_n + l_n, \text{ отсюда } 1 = s_n + s_n + l_n.$$

Если бы нейтроны образовались в  $s$ -состоянии ( $l_n = 0$ ), то в соответствии с принципом Паули они должны иметь противоположные спины, но в этом случае полный момент будет равен нулю, что невозможно. Если  $l_n = 1$  ( $p$ -состояние), то закон сохранения момента импульса вы-

полняется:  $1 = 1/2 - 1/2 + 1$ . Другие значения  $l_n$  не годятся. Отсюда  $P_\pi = (-1)^{l_n} = -1$ .

**9.49. а)** Из обобщенного принципа Паули следует, что  $(-1)^{l+0+T}=+1$ . Имея в виду, кроме того, закон сохранения изоспина в сильных взаимодействиях, находим  $T = 1$  и  $l = 1, 3, 5, \dots$ . Из закона сохранения момента импульса имеем для спина  $\rho$ -частицы  $I_\rho = l = 1, 3, 5, \dots$ . Эксперимент дает  $I_\rho = 1$ .

**б)**  $\rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ;  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ;  $\rho^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$ . Распад  $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$  запрещен, так как для этого  $l$  должно быть четным (симметричная волновая функция вследствие неразличимости частиц). Но  $l$  не может быть четным вследствие закона сохранения момента импульса (для  $\rho$ -частицы спин, как показано в предыдущем пункте, нечетный, точнее  $I_\rho = 1$ ).

**9.50. а)**  $(uud)$ ,  $(udd)$ ,  $(uus)$ ,  $(dds)$ ,  $(uss)$ ,  $(dss)$ ;

**б)**  $(u\bar{d})$ ,  $(\bar{u}d)$ ,  $(u\bar{s})$ ,  $(\bar{u}s)$ ,  $(d\bar{s})$ .

**9.51.** Магнитные моменты кварков  $u$  и  $d$ , из которых образованы нейтрон  $n$  ( $udd$ ) и протон  $p$  ( $uud$ ), есть  $\mu_1 = 2/3 \mu_0$  и  $\mu_2 = -1/3 \mu_0$ , где  $\mu_0$  — некоторая постоянная. Учитывая вероятность возможных состояний, находим магнитные моменты нейтрона и протона (в единицах  $\mu_0$ ):

$$\mu_n = \frac{2}{3} \left( -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3},$$

$$\mu_p = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = 1.$$

Отсюда  $\mu_n/\mu_p = -2/3 = -0,667$  (экспериментальное значение  $-0,685$ ).

**9.52. а)** Мезоны с  $C = +1$ :  $(c\bar{u})^0$ ,  $(c\bar{d})^+$ ,  $(c\bar{s})^+$ ; мезоны с  $C = -1$ :  $(\bar{c}u)^0$ ,  $(\bar{c}d)^-$ ,  $(\bar{c}s)^-$ ;

**б)** барионы с  $C = 1$ :  $(csd)^0$ ,  $(csu)^+$ ,  $(cdu)^+$ ,  $(css)^0$ ,  $(cdd)^0$ ,  $(cuu)^{++}$ ;

барионы с  $C = 2$ :  $(ccs)^+$ ,  $(ccd)^+$ ,  $(ccu)^{++}$ ;

барионы с  $C = 3$ :  $(ccc)^{++}$ .

# Приложения

## 1. Значения некоторых определенных интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n = 1/2, \\ \pi^2/6, & n = 1, \\ 2,405, & n = 2, \\ \pi^4/15, & n = 3, \\ 24,9, & n = 4; \end{cases} \quad \int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & \alpha = 1, \\ 1,18, & \alpha = 2, \\ 2,56, & \alpha = 3, \\ 4,91, & \alpha = 5, \\ 6,43, & \alpha = 10; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{cases} n!, & n > 0, \text{ целое,} \\ \sqrt{\pi}/2, & n = 1/2; \end{cases} \quad \int_0^1 \exp(-x^2) dx = 0,843;$$

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-x^2) dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2, & n = 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right], & n \text{ — целое нечетное,} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2^{n/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n \text{ — целое четное.} \end{cases}$$

## 2. Плотность некоторых веществ

Вещество	г/см <sup>3</sup>	Вещество	г/см <sup>3</sup>	Вещество	г/см <sup>3</sup>
Алюминий	2,7	Кадмий	8,65	Ртуть	13,6
Барий	3,75	Калий	0,86	Свинец	11,3
Бор	2,45	Кремний	2,35	Серебро	10,5
Бериллий	1,85	Кобальт	8,9	Стронций	2,54
Ванадий	5,87	Литий	0,53	Теллур	6,02
Висмут	9,8	Магний	1,74	Титан	4,5
Вольфрам	19,1	Медь	8,9	Торий	11,7
Германий	5,46	Молибден	10,2	Уран	19,0
Графит	1,60	Натрий	0,97	Цезий	1,87
Железо	7,8	Никель	8,9	Цинк	7,0
Золото	19,3	Платина	21,5	NaCl	2,18
Индий	7,28	Плутоний	19,8	CsCl	4,04



### 3. Работа выхода электрона из металлов

Металл	$A$ , эВ	Металл	$A$ , эВ	Металл	$A$ , эВ
Алюминий	3,74	Калий	2,15	Никель	4,84
Барий	2,29	Кобальт	4,25	Платина	5,29
Висмут	4,62	Литий	2,39	Серебро	4,28
Вольфрам	4,50	Медь	4,47	Титан	3,92
Железо	4,36	Молибден	4,27	Цезий	1,89
Золото	4,58	Натрий	2,27	Цинк	3,74

### 4. Край $K$ - и $L$ -полос поглощения рентгеновского излучения

$Z$	Элемент	Край полосы поглощения $\lambda$ , пм			
		$K$	$L_I$	$L_{II}$	$L_{III}$
23	Ванадий	226,8	—	2390	2410
26	Железо	174,1	—	1710	1740
27	Кобальт	160,4	—	1546	1580
28	Никель	148,6	—	1411	1440
29	Медь	138,0	—	1297	1326
30	Цинк	128,4	—	1185	1210
42	Молибден	61,9	430,5	471,5	491
47	Серебро	48,60	323,6	351,0	369,5
50	Олово	42,39	277,3	298,0	315,3
74	Вольфрам	17,85	102,22	107,3	121,5
78	Платина	15,85	88,8	93,2	107,2
79	Золото	15,35	86,1	90,5	103,8
82	Свинец	14,05	78,1	81,4	95,0
92	Уран	10,75	56,8	59,1	72,2

## 5. Константы двухатомных молекул

Молекула	Основной терм	Межъядерное расстояние $d$ , пм	Частота колебаний $\omega$ , $10^{14} \text{ с}^{-1}$	Ангармоничность $x$ , $10^{-3}$	Энергия диссоциации $D$ , эВ
H <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	74,1	8,279	28,5	4,48
N <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	109,4	4,445	6,15	7,37
O <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	120,7	2,977	7,65	5,08
F <sub>2</sub>	$^1\Pi$	128,2	2,147	8,51	1,06
P <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	189,4	1,470	3,59	5,03
S <sub>2</sub>	$^3\Sigma$	188,9	1,367	3,93	4,4
Cl <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	198,8	1,064	7,09	2,48
Br <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	228,3	0,609	3,31	1,97
I <sub>2</sub>	$^1\Sigma$	266,6	0,404	2,84	1,54
HF	$^1\Sigma$	91,7	7,796	21,8	5,8
HCl	$^1\Sigma$	127,5	5,632	17,4	4,43
HBr	$^1\Sigma$	141,3	4,991	17,1	3,75
HI	$^1\Sigma$	160,4	4,350	17,2	3,06
CO	$^1\Sigma$	112,8	4,088	6,22	9,7
NO	$^2\Pi$	115,0	3,590	7,55	5,29
OH	$^2\Pi$	97,1	7,036	22,2	4,35

## 6. Соотношения между некоторыми единицами

Единицы СИ	Внесистемные единицы
1 н = $10^5$ дин	1 год = $3,11 \cdot 10^7$ с
1 Дж = $10^7$ эрг	1 Å = $10^{-8}$ см
1 Вт = $10^7$ эрг/с	1 б = $10^{-24}$ см <sup>2</sup>
1 Кл = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ	1 атм = $\begin{cases} 101,3 \text{ кПа} \\ 760 \text{ торр} \end{cases}$
1 А = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ	1 Ки = $3,70 \cdot 10^{10}$ Бк
1 В = $1/300$ СГСЭ	$\begin{cases} 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \end{cases}$
1 В/м = $1/(3 \cdot 10^4)$ СГСЭ	1 а.е.м. = $\begin{cases} 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \end{cases}$
1 Ом = $1/(9 \cdot 10^{11})$ СГСЭ	1 эВ = $\begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \\ 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \end{cases}$
1 Ф = $9 \cdot 10^{11}$ см	
1 Тл = $10^4$ Гс	
1 Гн = $10^9$ см	

## 7. Таблица свойств нуклидов

$Z$	Нук- лид	Спин ядра	Избыток массы нук- лида ( $M-A$ ), а.е.м.	Массовое со- держание в природной смеси, %	Тип распа- да	Период по- лураспада $T$	Энергия $\alpha$ - и $\beta$ -частиц ( $K_{\beta\text{макс}}$ ), МэВ
1	$n$	1/2	0,008665	—	$\beta^-$	11,7 мин	0,78
	$^1\text{H}$	1/2	0,007825	99,985			
	$^2\text{H}$	1	0,014102	0,015			
	$^3\text{H}$	1/2	0,016049	—	$\beta^-$	12,3 года	0,018
2	$^3\text{He}$	1/2	0,016030	$3 \cdot 10^{-4}$			
	$^4\text{He}$	0	0,002604	100			
3	$^6\text{Li}$	1	0,015126	7,52			
	$^7\text{Li}$	3/2	0,016005	92,48			
4	$^7\text{Be}$	3/2	0,016931	—	$K$	53 сут	
	$^8\text{Be}$	0	0,005308	—	$2\alpha$	$10^{-16}$ с	0,039
	$^9\text{Be}$	3/2	0,012186	100			
	$^{10}\text{Be}$	0	0,013535	—	$\beta^-$	$2,5 \cdot 10^6$ лет	0,555
5	$^{10}\text{B}$	3	0,012939	20			
	$^{11}\text{B}$	3/2	0,009305	80			
6	$^{11}\text{C}$	3/2	0,011431	—	$\beta^+$	20,4 мин	0,97
	$^{12}\text{C}$	0	0	98,89			
	$^{13}\text{C}$	1/2	0,003354	1,11			
	$^{14}\text{C}$	0	0,003242	—	$\beta^-$	5570 лет	0,155
7	$^{13}\text{N}$	—	0,005739	—	$\beta^+$	10 мин	1,2
	$^{14}\text{N}$	1	0,003074	99,63			
	$^{15}\text{N}$	1/2	0,000108	0,37			
	$^{15}\text{O}$	—	0,003072	—	$\beta^+$	2,1 мин	1,68
8	$^{16}\text{O}$	0	-0,005085	99,76			
	$^{17}\text{O}$	5/2	-0,000867	0,037			
	$^{18}\text{O}$	0	-0,000840	0,204			
	$^{18}\text{F}$	—	0,000950	—	$\beta^+$	1,87 ч	0,649
9	$^{19}\text{F}$	1/2	-0,001595	100			
	$^{20}\text{F}$	—	-0,000015	—	$\beta^-$	12 с	5,42
10	$^{20}\text{Ne}$	0	-0,007560	90,92			
	$^{21}\text{Ne}$	—	-0,006151	0,26			
	$^{22}\text{Ne}$	0	-0,008616	8,82			
11	$^{22}\text{Na}$	3	-0,005565	—	$\beta^+$	2,6 года	0,540
	$^{23}\text{Na}$	3/2	-0,010227	100			
	$^{24}\text{Na}$	4	-0,009033	—	$\beta^-$	15 ч	1,39
12	$^{23}\text{Mg}$	—	-0,005865	—	$\beta^+$	11 с	2,95
	$^{24}\text{Mg}$	0	-0,014956	78,6			
	$^{25}\text{Mg}$	5/2	-0,014160	10,11			
	$^{26}\text{Mg}$	0	-0,017409	11,29			
	$^{27}\text{Mg}$	1/2	-0,015655	—	$\beta^-$	9,5 мин	1,57 и 1,59

$Z$	Нук- лид	Спин ядра	Избыток массы нук- лида ( $M-A$ ), а.е.м.	Массовое со- держание в природной смеси, %	Тип распа- да	Период по- лураспада $T$	Энергия $\alpha$ - и $\beta$ -частиц ( $K_{\beta\text{макс}}$ ), МэВ
13	<sup>26</sup> Al	—	-0,013100	—	$\beta^+$	6,7 с	3,20
	<sup>27</sup> Al	5/2	-0,018465	100			
	<sup>28</sup> Al	3	-0,018092	—	$\beta^-$	2,3 мин	2,86
14	<sup>28</sup> Si	0	-0,023073	92,27			
	<sup>29</sup> Si	1/2	-0,023509	4,68			
	<sup>30</sup> Si	0	-0,002624	3,05			
	<sup>31</sup> Si	—	-0,024651	—	$\beta^-$	2,65 ч	1,47
15	<sup>30</sup> P	—	-0,021680	—	$\beta^+$	2,5 мин	3,24
	<sup>31</sup> P	1/2	-0,026237	100			
	<sup>32</sup> P	—	-0,026092	—	$\beta^-$	14,3 сут	1,71
16	<sup>32</sup> S	0	-0,027926	95,02			
	<sup>33</sup> S	3/2	-0,028540	0,75			
	<sup>34</sup> S	0	-0,032136	4,21			
	<sup>35</sup> S	3/2	-0,030966	—	$\beta^-$	87 сут	0,167
17	<sup>35</sup> Cl	3/2	-0,031146	75,4			
	<sup>36</sup> Cl	2	-0,031688	—	$\beta^-, K$	3,1 · 10 <sup>5</sup> лет	0,714
	<sup>37</sup> Cl	3/2	-0,034104	24,6			
18	<sup>36</sup> Ar	0	-0,032452	0,34			
	<sup>37</sup> Ar	3/2	-0,033228	—	$K$	32 сут	
	<sup>39</sup> Ar	—	-0,035679	—	$\beta^-$	265 лет	0,565
	<sup>40</sup> Ar	0	-0,037616	99,60			
19	<sup>39</sup> K	3/2	-0,036286	93,08			
	<sup>42</sup> K	2	-0,037583	—	$\beta^-$	1,52 ч	3,55 и 1,99
24	<sup>51</sup> Cr	7/2	-0,055214	—	$K$	28 сут	
25	<sup>55</sup> Mn	5/2	-0,061946	100			
27	<sup>58</sup> Co	2	-0,064246	—	$K, \beta^+$	72 сут	0,47
	<sup>59</sup> Co	7/2	-0,066811	100			
	<sup>60</sup> Co	4	-0,066194	—	$\beta^-$	5,2 года	0,31
29	<sup>63</sup> Cu	3/2	-0,070406	69,1			
	<sup>65</sup> Cu	3/2	-0,072214	30,9			
30	<sup>65</sup> Zn	5/2	-0,070766	—	$K, \beta^+$	245 сут	0,325
35	<sup>82</sup> Br	6	-0,083198	—	$\beta^-$	36 ч	0,456
38	<sup>88</sup> Sr	0	-0,09436	82,56			
	<sup>89</sup> Sr	5/2	-0,09257	—	$\beta^-$	51 сут	1,46
	<sup>90</sup> Sr	0	-0,09223	—	$\beta^-$	28 лет	0,535
39	<sup>90</sup> Y	2	-0,09282	—	$\beta^-$	64 ч	2,24
47	<sup>107</sup> Ag	1/2	-0,09303	51,35			
53	<sup>127</sup> I	5/2	-0,09565	100			
	<sup>128</sup> I	1	-0,09418	—	$K, \beta^-$	25 мин	2,12 и 1,67

$Z$	Нук- лид	Спин ядра	Избыток массы нук- лида ( $M-A$ ), а.е.м.	Массовое со- держание в природной смеси, %	Тип распа- да	Период полураспада $T$	Энергия $\alpha$ - и $\beta$ -частиц ( $K_{\beta\text{макс}}$ ), МэВ
79	<sup>197</sup> Au	3/2	-0,03345	100			
	<sup>198</sup> Au	2	-0,03176	—	$\beta^-$	2,7 сут	0,96
81	<sup>204</sup> Tl	—	-0,02611	—	$\beta^-$	4,1 года	0,77
82	<sup>206</sup> Pb	0	-0,02554	23,6			
	<sup>207</sup> Pb	1/2	-0,02410	22,6			
	<sup>208</sup> Pb	0	-0,02336	52,3			
83	<sup>209</sup> Bi	9/2	-0,01958	100			
	<sup>210</sup> Bi	4	-0,01589	—	$\alpha$	$2,6 \cdot 10^6$ лет	4,97
84	<sup>210</sup> Po	—	-0,01713	—	$\alpha$	138 сут	5,3
86	<sup>222</sup> Rn	—	0,01753	—	$\alpha$	3,8 сут	5,49
88	<sup>226</sup> Ra	0	0,02536	—	$\alpha$	1620 лет	4,78 и 4,59
90	<sup>232</sup> Th	0	0,03821	100	$\alpha$	$1,4 \cdot 10^{10}$ лет	4,00 и 3,98
	<sup>233</sup> Th	—	0,04143	—	$\beta^-$	22 мин	1,23
92	<sup>234</sup> U	0	0,04090	0,006	$\alpha$	$2,5 \cdot 10^5$ лет	4,76 и 4,72
	<sup>235</sup> U	7/2	0,04393	0,71	$\alpha$	$7,1 \cdot 10^8$ лет	4,20–4,58
	<sup>236</sup> U	0	0,04573	—	$\alpha$	$2,4 \cdot 10^7$ лет	4,45 и 4,50
	<sup>238</sup> U	0	0,05076	99,28	$\alpha$	$4,5 \cdot 10^9$ лет	4,13 и 4,18
	<sup>239</sup> U	—	0,05432	—	$\beta^-$	23,5 мин	1,21
94	<sup>238</sup> Pu	—	0,04952	—	$\alpha$	89,6 лет	5,50 и 5,45
	<sup>239</sup> Pu	1/2	0,05216	—	$\alpha$	$2,4 \cdot 10^4$ лет	5,15–5,10

## 8. Греческий алфавит

А, $\alpha$ — альфа	І, $\iota$ — йота	Р, $\rho$ — ро
В, $\beta$ — бета	К, $\kappa$ — каппа	$\Sigma$ , $\sigma$ — сигма
Г, $\gamma$ — гамма	$\Lambda$ , $\lambda$ — ламбда	Т, $\tau$ — тау
$\Delta$ , $\delta$ — дельта	М, $\mu$ — мю	У, $\upsilon$ — ипсилон
Е, $\varepsilon$ — эпсилон	Ν, $\nu$ — ню	Ф, $\phi$ — фи
Ζ, $\zeta$ — дзета	$\Xi$ , $\xi$ — кси	Х, $\chi$ — хи
Η, $\eta$ — эта	Ο, $\omicron$ — омикрон	Ψ, $\psi$ — пси
Θ, $\theta$ , $\vartheta$ — тета	Π, $\pi$ — пи	$\Omega$ , $\omega$ — омега

## 9. Формулы некоторых атомных величин в гауссовой системе и СИ

Величина	Гауссова система	СИ
Комптоновская длина волны $\lambda_C$	$\frac{2\pi\hbar}{mc}$	$\frac{2\pi\hbar}{mc}$
Постоянная Ридберга $R, \text{с}^{-1}$	$\frac{me^4}{2\hbar^3}$	$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^3}$
$R' = R / 2\pi c, \text{м}^{-1}$	$\frac{me^4}{4\pi c\hbar^3}$	$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{4\pi c\hbar^3}$
Первый боровский радиус $r_1$	$\frac{\hbar^2}{me^2}$	$4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2}$
Энергия связи электрона в атоме водорода $E_{св}$	$\frac{me^4}{2\hbar^2}$	$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2}$
Классический радиус электрона $r_e$	$\frac{e^2}{mc^2}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2}$
Томсоновское сечение рассеяния $\sigma_e$	$\frac{8\pi}{3} r_e^2$	$\frac{8\pi}{3} r_e^2$
Постоянная тонкой структуры $\alpha$	$\frac{e^2}{\hbar c}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$
Магнетон Бора $\mu_B$	$\frac{e\hbar}{2m_e c}$	$\frac{e\hbar}{2m_e}$
Ядерный магнетон $\mu_N$	$\frac{e\hbar}{2m_p c}$	$\frac{e\hbar}{2m_p}$
Гидромагнитное отношение $g$	$\frac{e}{2mc}$	$\frac{e}{2m}$
Постоянная Холла $R_H$	$\frac{1}{cen}$	$\frac{1}{en}$
Квант магнитного потока $\Phi_0$	$\frac{\pi c\hbar}{e}$	$\frac{\pi\hbar}{e}$
Джозефсона отношение	$\frac{e}{\pi c\hbar}$	$\frac{e}{\pi\hbar}$
Уровень Ферми в металле $E_F$ при $T = 0 \text{ К}$	$\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$

## 10. Основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Гравитационная постоянная	$\gamma = \begin{cases} 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2) \\ 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) \end{cases}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмидта	$n_0 = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$
Универсальная газовая постоянная	$R = \begin{cases} 8,314 \cdot 10^7 \text{ эрг / (К} \cdot \text{моль)} \\ 8,314 \text{ Дж / (К} \cdot \text{моль)} \end{cases}$
Постоянная Больцмана	$k = \begin{cases} 1,3807 \cdot 10^{-16} \text{ эрг / К} \\ 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К} \\ 0,8617 \cdot 10^{-4} \text{ эВ / К} \end{cases}$
Элементарный заряд	$e = \begin{cases} 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ} \\ 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \end{cases}$
Масса электрона	$m_e = \begin{cases} 0,911 \cdot 10^{-27} \text{ г} \\ 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ а. е. м.} \\ 0,511 \text{ МэВ} \end{cases}$
Удельный заряд электрона	$\frac{e}{m_e} = \begin{cases} 5,27 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ} \\ 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} \end{cases}$
Масса протона	$m_p = \begin{cases} 1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 1,007276 \text{ а. е. м.} \\ 938,28 \text{ МэВ} \end{cases}$
Удельный заряд протона	$\frac{e}{m_p} = \begin{cases} 2,87 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ} \\ 0,959 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг} \end{cases}$
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = \begin{cases} 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг / (с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4) \\ 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт / (м}^2 \cdot \text{К}^4) \end{cases}$
Постоянная закона смещения Вина	$b = 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	$\hbar = \begin{cases} 1,0546 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} \\ 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ 0,6582 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с} \end{cases}$
Постоянная Ридберга	$R = 2,067 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ $R' = R/2\pi c = 1,097 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$
Первый боровский радиус	$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$
Энергия связи электрона в атоме водорода	$E = 13,56 \text{ эВ}$

Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2,426 \cdot 10^{-10}$ см
Классический радиус электрона	$\tilde{\lambda}_C = \lambda_C / 2\pi = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см
Постоянная тонкой структуры	$r_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$ см
Магнетон Бора	$\alpha = 1/137,036$
	$\mu_B = \begin{cases} 0,9274 \cdot 10^{-20} & \text{эрг/Гс} \\ 0,9274 \cdot 10^{-23} & \text{Дж/Тл} \\ 0,5788 \cdot 10^{-8} & \text{эВ/Гс} \end{cases}$
Ядерный магнетон	$\mu_N = \begin{cases} 5,051 \cdot 10^{-24} & \text{эрг/Гс} \\ 5,051 \cdot 10^{-27} & \text{Дж/Тл} \\ 3,152 \cdot 10^{-12} & \text{эВ/Гс} \end{cases}$
Магнитный момент: электрона протона нейтрона дейтрона	$\mu_e = 1,00116 \mu_B$ $\mu_p = 2,7928 \mu_N$ $\mu_n = -1,913 \mu_N$ $\mu_d = 0,8574 \mu_N$
Гиромагнитный множитель: электрона протона нейтрона дейтрона	$g_e = 2,0022$ $g_p = 5,5855$ $g_n = -3,8263$ $g_d = 0,8574$
Квант магнитного потока	$\Phi_0 = \begin{cases} 2,068 \cdot 10^{-15} & \text{Вб} \\ 2,068 \cdot 10^{-7} & \text{Мкс} \end{cases}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м



периоды	ряды	I						VII						VIII							
		периодическая система элементов д.и. менделеева																			
1	I	(H)						водород <sup>1</sup> H 1,0079						гелий <sup>2</sup> He 4,00260							
2	II	3 Li 6,941	литий	4 Be 9,01218	бериллий	БОР 5 B 10,81	углерод 6 C 12,011	азот 7 N 14,0067	кислород 8 O 15,9994	фтор 9 F 18,998403	неон 10 Ne 20,179										
3	III	11 Na 22,98977	натрий	12 Mg 24,305	магний	13 Al 26,98154	алюминий	14 Si 28,086	кремний	15 P 30,97376	сера 16 S 32,06	хлор 17 Cl 35,453	аргон 18 Ar 39,948								
4	IV	19 K 39,0983	калий	20 Ca 40,08	кальций	21 Sc 44,9559	скандий	22 Ti 47,90	титан	23 V 50,9415	ванадий	24 Cr 51,996	хром	25 Mn 54,9380	марганец			26 Fe 55,847	железо	27 Co 58,9332	кобальт
	V	29 Cu 63,546	медь	30 Zn 65,38	цинк	31 Ga 69,735	галлий	32 Ge 72,59	германий	33 As 74,9216	мышьяк	34 Se 78,96	селен	35 Br 79,904	бром	36 Kr 83,80	криптон				
5	VI	37 Rb 85,467	рубидий	38 Sr 87,62	стронций	39 Y 88,9059	иттрий	40 Zr 91,22	цирконий	41 Nb 92,906	ниобий	42 Mo 95,94	молибден	43 Tc 98,906	технеций	44 Ru 101,07	рутений	45 Rh 102,9055	родий	46 Pd 106,4	палладий
	VII	47 Ag 107,868	серебро	48 Cd 112,41	кадмий	49 In 114,82	индий	50 Sn 118,69	олово	51 Sb 121,75	сурьма	52 Te 127,60	теллур	53 I 126,90451	йод	54 Xe 131,30	ксенон				
6	VIII	55 Cs 132,905	цезий	56 Ba 137,33	барий	57 La* 138,9055	лантан	72 Hf 178,49	гафний	73 Ta 180,947	тантал	74 W 183,85	вольфрам	75 Re 186,207	рений	76 Os 190,2	осмий	77 Ir 192,22	иридий	78 Pt 195,09	платина
	IX	79 Au 196,9665	золото	80 Hg 200,59	ртуть	81 Tl 204,37	таллий	82 Pb 207,2	свинец	83 Bi 208,9804	висмут	84 Po [209]	полоний	85 At [210]	астат	86 Rn [222]	радон				
7	X	87 Fr [223]	франций	88 Ra 226,0254	радий	89 Ac** [227]	актиний	104 Ku [260]	курчатовий	105 [260]		106 [263]						атомный номер		атомная масса	
																		81 Tl 204,37	таллий		

атомный номер	81 Tl	таллий
атомная масса	204,37	

\* л а н т а н о и д ы

58 Ce 140,12	59 Pr 140,9077	60 Nd 144,24	61 Pm [145]	62 Sm 150,4	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,9254	66 Dy 162,50	67 Ho 164,9304	68 Er 167,26	69 Tm 168,9342	70 Yb 173,04	71 Lu 174,967
церий	празеодим	неодим	прометий	самарий	европий	гадолиний	тербий	диспрозий	гольмий	эрбий	тулий	иттербий	лютеций

\*\* а к т и н о и д ы

90 Th 232,0381	91 Pa 231,0359	92 U 238,029	93 Np 237,0482	94 Pu [244]	95 Am [243]	96 Cm [247]	97 Bk [247]	98 Cf [251]	99 Es [254]	100 Fm [257]	101 Md [258]	102 (No) [259]	103 (Lr) [260]
торий	протактиний	уран	нептуний	плутоний	америций	кюрий	берклий	калифорний	эйнштейний	фермий	менделевий	(нобелий)	(лоуренсий)

**Таблица элементарных частиц**

Частица		Символ*	Масса, МэВ	Заряды					Спин, четность $I^P$	Изоспин		Странность $S$	Среднее время жизни $\tau$ , с	Основные схемы распада частицы
				$Q$	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	$B$		$T$	$T_z$			
Фотон		$\gamma$	0	0	0	0	0	0	1	—	—	—		—
Лептоны	Нейтрино	$\nu_e$ $\bar{\nu}_e$	0	0	+1	0	0	0	1/2	—	—	—		—
		$\nu_\mu$ $\bar{\nu}_\mu$	0	0	0	+1	0	0	1/2	—	—	—		—
		$\nu_\tau$ $\bar{\nu}_\tau$	0	0	0	0	+1	0	1/2	—	—	—		—
	Электрон	$e^-$ $e^+$	0,511	—1	+1	0	0	0	1/2 <sup>+</sup>	—	—	—		—
	Мюон	$\mu^-$ $\mu^+$	105,66	—1	0	+1	0	0	1/2 <sup>+</sup>	—	—	—	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$
	Таон	$\tau^-$ $\tau^+$	1782	0	0	0	+1	0	1/2 <sup>+</sup>	—	—	—	$3,5 \cdot 10^{-12}$	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau, e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$
Мезоны	Пи-мезоны	$\pi^0$	135,0	0	0			0	0 <sup>—</sup>	1	0	0	$0,8 \cdot 10^{-16}$	$\gamma\gamma$
		$\pi^+$ $\pi^-$	139,6	—1	0			0	0 <sup>—</sup>	1	+1	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$
	Ка-мезоны	$K^+$ $K^-$	493,8	+1	0			0	0 <sup>—</sup>	1/2	+1/2	+1	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu, \pi^+ \pi^0$
		$K^0$ $\bar{K}^0$	497,8	0	0			0	0 <sup>—</sup>	1/2	—1/2	—1	$5,8 \cdot 10^{-8}$	$\pi\mu\nu_\mu$
	Эта-мезон	$\eta$	549	0	0			0	0 <sup>—</sup>	0	0	0	$2,4 \cdot 10^{-19}$	$\pi^+ \pi^-$
Барионы	Фи-мезон	$\phi$	1019	0	0			0	1	0	0	0	$\sim 10^{-19}$	$\pi^+ \pi^-$
	Протон	$p$ $\bar{p}$	938,26	+1	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1/2	+1/2	0		—
	Нейтрон	$n$ $\bar{n}$	939,55	0	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1/2	—1/2	0	$0,93 \cdot 10^3$	$p e^- \bar{\nu}_e$
	Ламбда-гиперон	$\Lambda$ $\bar{\Lambda}$	1115,6	0	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	0	0	—1	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$p \pi^-, n \pi^0$
	Сигма-гипероны	$\Sigma^+$ $\bar{\Sigma}^+$	1189,4	+1	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1	+1	—1	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$p \pi^0, n \pi^+$
		$\Sigma^0$ $\bar{\Sigma}^0$	1198,5	0	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1	0	—1	$< 1 \cdot 10^{-14}$	$\Lambda\gamma$
		$\Sigma^-$ $\bar{\Sigma}^-$	1197,4	—1	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1	—1	—1	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$n \pi^-$
	Кси-гипероны	$\Xi^0$ $\bar{\Xi}^0$	1314,9	0	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1/2	+1/2	—2	$3 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \pi^0$
		$\Xi^-$ $\bar{\Xi}^-$	1321,3	—1	0			+1	1/2 <sup>+</sup>	1/2	—1/2	—2	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \pi^-$
	Омега-гиперон	$\Omega^-$ $\bar{\Omega}^-$	1672	—1	0			+1	3/2 <sup>+</sup>	0	0	—3	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda K^-, \Xi^- \pi^0$

\* Справа указаны символы соответствующих античастиц

ПРИМЕЧАНИЕ. Античастицы имеют тождественные с частицей значения массы, времени жизни, спина, четности и изоспина, но противоположные по знаку значения электрического  $Q$ , лептонного  $L$  и барионного  $B$  зарядов, проекции изоспина  $T_z$  и странности  $S$ .

*Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"*

*Учебное электронное издание*

**Иродов** Игорь Евгеньевич

## **ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ**

Редактор *Е. В. Гуляева*

Художник *Н. А. Лозинская*

Компьютерная верстка: *В. А. Носенко*

Подписано к использованию 19.03.15.

Формат 125×200 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: [info@pilotLZ.ru](mailto:info@pilotLZ.ru), <http://www.pilotLZ.ru>

