Р. С. ЧЕРКАСОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

УЧПЕДГИЗ ~ 1956

Р. С. ЧЕРКАСОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1956

Во втором издании сборника задач по стереометрии исправлены замеченные опечатки, заменены отдельные задачи. Кроме того, добавлен небольшой новый раздел, в который вошли задачи, решаемые на моделях.

Р. Черкасов

Июнь 1955 г.

ВВЕДЕНИЕ

I. Будут ли справедливы в стереометрии следующие предложения*):

1. Через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.

2. Через точку, лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную к этой прямой.

3. Из точки, лежащей вне данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.

4. Прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой.

5. Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

6. Два перпендикуляра к двум пересекающимся прямым пересекаются.

7. Геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, есть окружность, центр которой лежит в данной точке.

8. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной прямой, есть две прямые, параллельные данной и проходящие на данном расстоянии от этой прямой.

---

*) Задачи, помещённые во „Введении", решаются на основе наглядных представлений.

Ответы сопровождать построением соответствующих моделей.

II. Дать ответы на поставленные вопросы*):

1. В пространстве даны две точки и плоскость, на которой надо построить изображение этих точек. Всегда ли изображением данных точек будут служить две различные точки?

2. На плоскости проекций дана точка. Изображением каких геометрических образов, расположенных вне этой плоскости, может служить данная точка?

3. В пространстве даны две пересекающиеся прямые. Что может соответствовать этим прямым на плоскости проекций?

4. Двум прямым *a* и *b*, расположенным в пространстве, на плоскости проекций соответствуют две пересекающиеся прямые. Будут ли прямые *a* и *b* обязательно пересекающимися?

5. В пространстве даны две параллельные прямые. Что может соответствовать этим прямым на плоскости проекций?

6. Двум прямым *a* и *b*, расположенным в пространстве, на плоскости проекций соответствуют две параллельные прямые. Будут ли прямые *a* и *b* обязательно параллельными?

7. В пространстве дана прямая и точка, лежащая на этой прямой. Что может соответствовать этой прямой и точке на плоскости проекций?

8. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Что может соответствовать этим прямым на плоскости проекций?

9. Может ли двум прямым, расположенным в пространстве, на плоскости проекций соответствовать: а) одна прямая? б) прямая и точка? в) две точки? г) одна точка?

10. На плоскости проекций дана прямая и точка, лежащая вне этой прямой. Какие геометрические образы, расположенные в пространстве, могут соответствовать этому изображению?

11. В пространстве дана прямая и точка вне этой прямой. Что может соответствовать этой прямой и точке на плоскости проекций?

---

*) Пространственная фигура и её изображение (проекция) на плоскости чертежа (плоскости проекций) здесь называются фигурами соответствующими. Построение изображений производится в произвольной параллельной проекции.

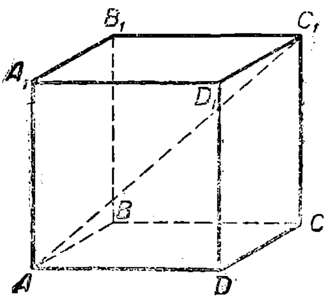
Глава I

ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

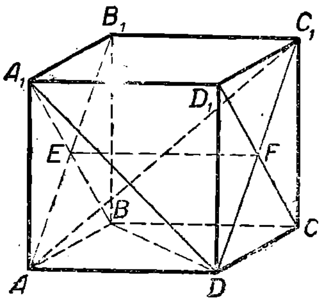
§ 1. Точки и прямые в пространстве

1. На чертеже 1 дано изображение куба. Указать, какие из рёбер куба будут скрещивающимися:

а) с ребром AA_1; б) с диагональю куба AC_1.



Черт. 1.



Черт. 2.

1. На чертеже 2 дано изображение куба и некоторых отрезков (AB_1, A_1B, BD, DC_1, D_1C, AC_1, EF, A_1D), соединяющих точки, лежащие на поверхности куба. Отметить на чертеже точки, соответствующие точкам пересечения рассматриваемых в пространстве отрезков.

2. В пространстве даны две пересекающиеся прямые. Всякая ли третья прямая, имеющая с каждой из данных прямых одну общую точку, лежит с ними в одной плоскости?

2. Как построить в пространстве прямую, скрещивающуюся с данной прямой?

3. В пространстве даны две прямые, лежащие в одной плоскости, и дана точка, лежащая вне этих прямых. Как можно установить, лежит ли данная точка в одной плоскости с этими прямыми? Можно ли это установить путём проведения только одной прямой?

3. В пространстве даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. Как следует провести четвёртую прямую, чтобы установить, лежат ли три данные прямые в одной плоскости?

4. В пространстве даны четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. При помощи каких построений можно установить, лежат ли эти точки в одной плоскости?

5. Даны две скрещивающиеся прямые a и b, точки A и B на прямой a, C и D на прямой b. Доказать, что прямые AC и BD тоже скрещивающиеся.

5. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ — компланарный*), если:

а) его диагонали пересекаются, или

б) две его противоположные стороны параллельны, или

в) две его противоположные стороны при продолжении пересекаются.

6. Доказать, что отрезки, соединяющие середины смежных сторон некомпланарного четырёхугольника, образуют параллелограм.

6. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон некомпланарного четырёхугольника, пересекаются и делятся в точке пересечения пополам.

7. В пространстве даны два равнобедренных треугольника с общим основанием: $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$.

Боковые стороны треугольников разделены пополам. Определить длину отрезков, соединяющих середины непересекающихся боковых сторон, если известно, что $AB = a$ и расстояние между вершинами треугольников $DC = b$.

При каком взаимном положении рассматриваемых треугольников искомые расстояния будут иметь наибольшее (наименьшее) значение?

---

*) Четырёхугольник, все вершины которого лежат в одной плоскости, называется компланарным. Четырёхугольник, вершины которого не лежат в одной плоскости, называется некомпланарным.

§ 2. Параллельные прямые и плоскости

8. Даны две параллельные прямые a и b. Какое положение может занимать прямая a относительно плоскости, проходящей через прямую b?

8. Можно ли построить плоскость, параллельную:

а) данной прямой?

б) двум данным прямым? Сколько таких плоскостей можно провести через данную точку?

9. Если плоскость, параллельная двум противоположным сторонам некомпланарного четырёхугольника, пересекает две его другие стороны, то она рассекает их на пропорциональные части. Доказать.

10. Две параллельные прямые a и b соответственно параллельны прямым c и d. Каково взаимное расположение двух последних прямых?

11. Найти геометрическое место прямых:

а) проходящих через данную точку и пересекающих данную прямую;

б) пересекающих две данные параллельные прямые;

в) параллельных данной прямой и пересекающих другую прямую, не параллельную первой.

12. Можно ли построить плоскость, проходящую через данную прямую и:

а) параллельную другой данной прямой?

б) параллельную двум другим данным прямым?

13. Даны две пересекающиеся плоскости (P и Q). Можно ли построить в плоскости P прямую a и в плоскости Q прямую b так, чтобы прямые a и b были:

а) параллельными?

б) пересекающимися?

14. Даны две пересекающиеся плоскости. Можно ли построить плоскость, пересекающую две данные плоскости по параллельным прямым?

Сколько таких плоскостей можно провести:

1) через данную точку?

2) через данную прямую? (Указание. Рассмотреть случаи, когда эта прямая параллельна данным плоскостям, параллельна одной из данных плоскостей, пересекает данные плоскости, лежит в одной из данных плоскостей.)

15. Две плоскости (P и Q) пересекаются по прямой MN. В плоскости P дана прямая AC, пересекающая MN в точке A. Доказать, что любая прямая, лежащая в плоскости Q и не проходящая через точку A, будет скрещивающейся с прямой AC.

15. Даны две пересекающиеся плоскости P и Q. В плоскости P через точку A проведены две прямые a и b. Доказать, что в плоскости Q нельзя построить двух прямых, соответственно параллельных этим прямым.

§ 3. Параллельные плоскости

16. Возможно ли, и если возможно, то как построить плоскость:

а) проходящую через данную точку и параллельную данной плоскости?

б) проходящую через данную прямую и параллельную данной плоскости?

17. Возможно ли построить прямую, параллельную двум данным плоскостям?

17. Возможно ли построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную двум данным плоскостям?

18. Даны две плоскости P и Q, параллельные между собой. Доказать, что всякая прямая, лежащая в плоскости P, параллельна плоскости Q.

18. Две плоскости, порознь параллельные третьей плоскости, параллельны между собой. Доказать.

19. Отрезок AB, заключённый между двумя параллельными плоскостями P и Q, делится точкой M в отношении $m:n$. В каком отношении делятся отрезки, концы которых лежат в данных параллельных плоскостях, плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости P?

20. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости:

20. Найти геометрическое место точек:

а) делящих пополам отрезки, заключённые между двумя параллельными плоскостями;

б) делящих отрезки, заключённые между двумя параллельными плоскостями, в данном отношении.

21. Как можно построить прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые?

21. Можно ли построить прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые и:

а) проходящую через данную точку?

б) параллельную данной прямой?

в) параллельную данной плоскости?

22. Установить истинность или ложность следующих предложений:

а) две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой;

б) две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой;

в) плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой;

г) плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой;

д) два угла с соответственно перпендикулярными сторонами равны или в сумме составляют $2d$.

§ 4. Перпендикуляр и наклонные к плоскости

23. Из точки A, лежащей вне плоскости P, опущен на эту плоскость перпендикуляр AB и проведена наклонная AC.

а) Построить проекцию наклонной AC на плоскость P;

б) найти длину этой проекции, если $AB=a=12$ и $AC=b=15$.

23. Дана плоскость P. Из некоторой точки A, лежащей вне плоскости, проведены к этой плоскости две наклонные: $AB=a$ и $AC=b$. Проекция первой из них на плоскость равна c. Найти проекцию второй наклонной на эту же плоскость. Возможен ли такой случай, когда все четыре отрезка (наклонные и их проекции) лежат в одной плоскости? Какие из рассматриваемых отрезков могут оказаться скрещивающимися?

24. Из некоторой точки M, лежащей вне плоскости P, проведены к этой плоскости равные наклонные: $MA=MB=MC$. Доказать, что основания наклонных лежат на одной окружности, центром которой служит проекция точки M на плоскость P.

24. В данной плоскости найти геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной точки, не лежащей в этой плоскости.

25. Найти геометрическое место точек, одинаково удалённых от всех прямых, касающихся данной окружности.

26. Дана плоскость P и к ней наклонная MO. Доказать, что если проекция наклонной MO на плоскость P образует равные углы с двумя прямыми OA и OB, лежащими в плоскости P и проходящими через основание O наклонной, то и сама наклонная OM образует с прямыми OA и OB равные углы.

27. К плоскости P проведена наклонная MO, образующая равные углы с прямыми OA и OB, лежащими в плоскости P. Доказать, что углы, образованные прямыми OA и OB с проекцией наклонной MO на плоскость P, равны.

28. Показать, что теорема о трёх перпендикулярах и соответствующая обратная теорема являются частными случаями двух предыдущих теорем.

29. Как построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой в данной на ней точке?

29. Как построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой и проходящую через данную вне этой прямой точку?

30. Как к данной плоскости в данной на ней точке восставить перпендикуляр?

30. Как на данную плоскость из данной вне плоскости точки опустить перпендикуляр?

31. Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную прямую и перпендикулярных к данной плоскости.

32. Отрезок AB, лежащий вне плоскости P, делится точкой M в отношении $m:n$. В каком отношении делится проекция отрезка AB на плоскость P проекцией точки M на ту же плоскость?

32. Из двух точек A и B, лежащих по одну сторону от плоскости P, опущены на эту плоскость два перпендикуляра: $AC = a$ и $BD = b$ $(a > b)$.

На каком расстоянии от плоскости P находится точка M, делящая отрезок AB в отношении $m:n$? $(m:n = 1;\ m:n = 1:2)$.

33. Решить ту же задачу, полагая, что точки A и B лежат по разные стороны плоскости P.

33. Найти геометрическое место точек M, делящих отрезок AB в данном отношении (см. предыдущие задачи № 32 и 33), полагая, что точки A и B перемещаются относительно плоскости P, находясь на неизменном расстоянии от неё.

34. Правильный треугольник спроектирован на плоскость. Вершины его отстоят от плоскости на расстоянии a, b и c. Найти расстояние его центра от плоскости проекции.

34. Доказать, что расстояние центра тяжести любого треугольника до некоторой плоскости равно среднему арифметическому расстояний трёх его вершин от этой же плоскости.

35. Расстояния вершин параллелограма $ABCD$ до плоскости P равны соответственно a, b, c и d; доказать, что расстояние точки пересечения диагоналей параллелограма от этой же плоскости равно среднему арифметическому этих расстояний.

(Все ли данные этой задачи являются необходимыми для того, чтобы: а) определить расстояние центра тяжести рассматриваемого параллелограма до плоскости проекций?

б) установить положение параллелограма относительно плоскости P?)

36. Доказать, что проекция параллелограма на плоскость есть также параллелограм, если проекции всех вершин параллелограма не лежат на одной прямой.

Сформулировать и доказать соответствующее предложение для трапеции.

37. Через диагональ AC параллелограма $ABCD$ проведена плоскость. Доказать, что вершины B и D одинаково удалены от этой плоскости.

37. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии a от противоположной стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны b и c. Найти проекции сторон ($a=4$; $b=8$; $c=2$).

38. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости P, а основание BC находится на расстоянии a от этой плоскости. Найти расстояние от плоскости P до точки M пересечения диагоналей этой трапеции, если $DA:CB=t:n$ ($a=5$; $t:n=5:7$).

39. Даны две параллельные прямые. Требуется построить две параллельные плоскости так, чтобы каждая из данных прямых лежала в одной из построенных плоскостей.

а) Сколько таких плоскостей можно построить?

б) Сколько таких плоскостей можно провести параллельно данной прямой? (Провести исследование решения при различных положениях данной прямой.)

в) Сколько таких плоскостей можно провести на данном расстоянии друг от друга?

Провести исследование.

40. Через две параллельные прямые, расстояние между которыми равно a, проведены две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно b. Отрезок прямой своими концами лежит на данных прямых, проекции его на эти прямые равны c.

а) Найти проекции отрезка на данные плоскости.

б) Указать условия возможности решения.

41. Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны a и b, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся как $t:n$. Определить расстояние между данными плоскостями. Каково может быть взаимное расположение данных отрезков?

41. Между двумя параллельными плоскостями заключён отрезок, равный a, перпендикулярный этим плоскостям, и второй отрезок, равный b. Расстояние между концами отрезков в каждой плоскости равно c. Найти расстояние между серединами этих отрезков.

а) Указать возможные взаимные положения данных отрезков.

б) При каких значениях a, b и c задача возможна?

в) Объяснить ответ для случая, когда $a=b$.

42. Доказать, что две данные скрещивающиеся прямые вполне определяют положение двух параллельных плоскостей, в каждой из которых лежит одна из этих данных прямых.

43. В одной из двух параллельных плоскостей дана точка. Сколько прямых, находящихся на данном расстоянии от этой точки, находится в другой из данных плоскостей? Каково может быть взаимное расположение этих прямых?

43. В одной из двух параллельных плоскостей дана прямая. Сколько прямых, находящихся на данном расстоянии от этой прямой, находится в другой из данных плоскостей? Как могут быть расположены эти прямые относительно первой прямой?

44. Доказать, что две скрещивающиеся прямые имеют только один общий перпендикуляр, пересекающий обе эти прямые.

44. Найти кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

45. Если прямая AB параллельна плоскости P, то кратчайшее расстояние от прямой AB до всякой прямой, ей не параллельной и лежащей в плоскости P, равно расстоянию прямой AB до плоскости P. Доказать.

46. В плоскости P дана окружность, вне плоскости — точка. Найти отрезок: а) наименьшей и б) наибольшей длины, один конец которого лежит в данной точке, а другой на данной окружности.

47. Дана плоскость M и две точки A и B вне плоскости. Как найти на плоскости M такую точку, чтобы сумма расстояний от этой точки до двух данных точек A и B была наименьшей. Рассмотреть случаи:

а) данные точки лежат по разные стороны плоскости M;

б) данные точки лежат по одну сторону от плоскости M.

47. Дана плоскость M и две точки A и B вне этой плоскости. Найти на плоскости M такую точку, чтобы разность расстояний от этой точки до двух данных точек A и B была наибольшей. Рассмотреть случаи, когда:

а) данные точки лежат по одну сторону от плоскости M;

б) данные точки лежат по разные стороны от плоскости M.

48. Доказать, что проекция прямого угла на плоскость есть также прямой угол, если одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекции, а другая сторона не перпендикулярна к этой плоскости.

49. Из точки M, лежащей вне плоскости P, проведены к этой плоскости две равные наклонные MA и MB. Доказать, что угол AMB меньше своей проекции на плоскость P.

Проводя прямую AB, в образовавшейся фигуре найти другие углы, проекции которых на плоскость P:

а) больше самого угла;

б) меньше самого угла.

50. Воспользовавшись выводами предыдущей задачи, доказать:

а) Проекция острого угла на плоскость есть угол, меньший проектируемого, если одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекции. (Указать исключение.)

б) Проекция тупого угла на плоскость есть угол, больший проектируемого, если сторона этого угла параллельна плоскости проекции. (Указать исключение.)

51. Обосновать необходимость ограничений, внесённых в условие задачи № 48, о проекции прямого угла на плоскость.

52. Найти геометрическое место прямых, перпендикулярных к данной прямой в данной на ней точке.

52. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек.

53. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой.

54. Найти геометрическое место проекций данной точки на плоскости, проходящие через данную прямую.

54. Найти геометрическое место проекций данной точки на плоскости, проходящие через другую данную точку.

55. Найти геометрическое место проекций данной точки на прямые, проходящие через другую данную точку.

55. Найти геометрическое место проекций данной точки на прямые, лежащие в данной плоскости и проходящие через данную в этой плоскости точку.

§ 5. Угол прямой с плоскостью. Угол двух скрещивающихся прямых

56. Как из данной точки провести к данной плоскости наклонную, образующую с этой плоскостью угол, равный данному углу?

56. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A, лежащую вне плоско-

сти P, и образующих с плоскостью P углы, равные данному углу.

57. Можно ли через данную в плоскости P точку провести прямую, образующую с плоскостью P угол, равный данному углу?

57. Найти геометрическое место прямых, проходящих через точку A, лежащую в плоскости P, и образующих с этой плоскостью углы, равные данному углу.

58. Из данной точки A, лежащей вне плоскости P, проведены к этой плоскости две наклонные AB и AC, образующие равные углы с прямой BC, лежащей в плоскости P. Доказать, что эти наклонные образуют равные углы с плоскостью P.

59. Из точки A, лежащей вне плоскости P, проведена к этой плоскости наклонная так, что:

а) проекция этой наклонной равна расстоянию точки A от плоскости P,

б) проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной. Определить угол, образованный этой наклонной с плоскостью P.

59. Отрезок AB пересекает плоскость P. Определить угол, образованный этим отрезком с плоскостью P, если сумма расстояний точек A и B от плоскости P вдвое меньше длины отрезка AB.

60. Можно ли в данной плоскости через данную на ней точку провести прямую, образующую с другой данной плоскостью, пересекающей первую, угол, равный данному углу?

60. Из всех прямых, лежащих в данной плоскости, наибольший угол с другой данной плоскостью P образуют те, которые перпендикулярны к прямой пересечения (AB) данных плоскостей. Доказать.

61. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку на данной прямой и образующих с этой прямой угол, равный данному углу. При каком условии искомое геометрическое место прямых будет представлять собой плоскость?

62. Можно ли в данной плоскости построить прямую, проходящую через данную в этой плоскости точку и образующую с данной прямой, не лежащей в этой плоскости, угол, равный данному углу? (Подлежат рассмотрению и углы между скрещивающимися прямыми.)

62. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих с данной прямой угол, равный данному углу.

§ 6. Двугранные углы

63. Как построить двугранный угол, равный данному двугранному углу и имеющий с ним общее ребро?

63. Как при данном ребре построить двугранный угол, равный данному двугранному углу?

64. Если грани двух двугранных углов соответственно параллельны, то эти двугранные углы или равны, или в сумме составляют 180°. Доказать.

65. Определить величину двугранного угла, если:

а) расстояние от точки, взятой в одной из граней этого угла, до ребра двугранного угла вдвое больше, чем расстояние от этой же точки до другой грани;

б) расстояние от некоторой точки, взятой внутри этого угла, до одной из его граней равно расстоянию этой же точки до ребра двугранного угла и вдвое больше расстояния от этой же точки до другой грани двугранного угла.

66. Из точки, взятой внутри двугранного угла, опущены перпендикуляры на его грани. Найти зависимость между углом, образованным этими перпендикулярами, и линейным углом данного двугранного угла.

67. Как через данную точку провести плоскость, образующую с другой данной плоскостью прямой двугранный угол?

67. Как через данную прямую провести плоскость, образующую с данной плоскостью прямой двугранный угол?

68. Можно ли построить прямой двугранный угол, грани которого проходят через две данные прямые:

а) параллельные?

б) пересекающиеся?

в) скрещивающиеся?

69. Во внутренней области прямого двугранного угла дана точка, расстояния которой от граней этого угла равны a и b. Найти расстояние этой точки от ребра двугранного угла.

70. Во внутренней области двугранного угла дана точка, расстояния которой до граней этого угла равны

a и b. Исследовать, как будет изменяться расстояние этой точки от ребра двугранного угла, если:

а) данный двугранный угол будет убывать от 90° до 0°;

б) данный двугранный угол будет возрастать от 90° до 180°.

71. Точка M лежит во внутренней области прямого двугранного угла, точка A — на его ребре. Найти:

а) длину отрезка AM;

б) проекции отрезка AM на грани двугранного угла, если расстояния точки M до граней двугранного угла равны соответственно a и b, а проекция отрезка AM на ребро двугранного угла равна c.

Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AM при постоянных значениях a и b?

72. Отрезок прямой своими концами упирается в грани прямого двугранного угла, проекции этого отрезка на грани суть a и b. Проекция его на ребро равна c. Найти длину данного отрезка. ($a = 15$ *см*; $b = 16$ *см*; $c = 9$ *см*.)

72. На ребре прямого двугранного угла дан отрезок AB, равный a. Из его концов восставлены в разных гранях перпендикуляры $AM = b$ и $BN = c$. Найти длину отрезка MN ($a = 6$, $b = 3$, $c = 2$).

73. Отрезок упирается своими концами в грани прямого двугранного угла. Концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от ребра двугранного угла. Найти отношение углов, под которыми отрезок наклонён к граням.

73. Расстояние от точки, лежащей в одной из граней прямого двугранного угла, до любой прямой, лежащей в другой грани этого угла, не меньше расстояния этой точки до ребра двугранного угла. Доказать.

Будет ли верно аналогичное утверждение для произвольного двугранного угла?

74. Расстояние между двумя прямыми, лежащими в разных гранях данного двугранного угла и пересекающими его ребро в различных точках, не больше, чем расстояние между точками пересечения этих прямых с ребром двугранного угла. Доказать.

75. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от граней двугранного угла.

75. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся плоскостей.

76. Найти геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от каждой из граней двугранного угла.

76. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от граней двугранного угла находятся в данном отношении.

77. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от сторон данного угла.

§ 7. Задачи на повторение

78. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух прямых:

а) параллельных,

б) пересекающихся.

79. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух пересекающихся плоскостей равны соответственно m и n.

80. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных плоскостей находятся в данном отношении (рассмотреть два случая:

а) данные плоскости параллельны;

б) данные плоскости пересекаются).

81. В данной плоскости найти:

а) геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек;

б) геометрическое место точек, равноудалённых от двух параллельных плоскостей;

в) геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся плоскостей;

г) геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных прямых (параллельных, пересекающихся);

д) геометрическое место точек, равноудалённых от трёх данных точек.

82. Найти геометрическое место точек в пространстве:

а) равноудалённых от граней двугранного угла и находящихся на равном расстоянии от двух данных точек;

б) равноудалённых от двух данных точек и находящихся на равном расстоянии от двух данных параллельных плоскостей;

в) равноудалённых от двух данных точек и находящихся на данном расстоянии от данной плоскости;

г) равноудалённых от двух данных параллельных плоскостей и находящихся на равном расстоянии от двух данных пересекающихся плоскостей;

д) равноудалённых от трёх параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости.

83. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от середин сторон треугольника.

83. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от всех сторон треугольника.

84. Дан компланарный четырёхугольник $ABCD$. Доказать, что геометрическое место точек, равноудалённых от вершин A, B и C, и геометрическое место точек, равноудалённых от вершин B, C и D, суть две параллельные прямые. (Какой вид будет иметь данный четырёхугольник, если эти две прямые совпадут?)

84. A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Доказать, что существует точка, равноудалённая от всех четырёх точек.

85. Внутри двугранного угла взяты две точки A и B. Доказать: если сумма перпендикуляров, опущенных из точки A на грани этого угла, равна сумме перпендикуляров, опущенных из точки B на те же грани, то сумма останется та же и для всякой точки C, взятой на прямой AB.

85. Даны три точки A, B и C, лежащие внутри двугранного угла. Доказать, если сумма двух перпендикуляров, опущенных из каждой точки на плоскости граней этого угла, будет одна и та же для всех трёх точек, то эта сумма останется та же и для всякой точки, взятой в плоскости ABC.

Установить истинность или ложность следующих предложений

86. Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.

86. Две плоскости, параллельные двум данным параллельным прямым, параллельны.

87. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны между собой.

87. Две плоскости, каждая из которых соответственно параллельна одной из двух данных пересекающихся прямых, параллельны.

88. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой.

88. Две плоскости, соответственно перпендикулярные к двум перпендикулярным прямым, перпендикулярны.

89. Если прямая перпендикулярна к двум параллельным прямым, то она перпендикулярна и к плоскости, проходящей через эти прямые.

89. Две прямые, соответственно перпендикулярные к двум перпендикулярным прямым, пересекаются.

90. Если плоскость перпендикулярна к ребру двугранного угла, то она перпендикулярна и к граням этого угла.

90. Две плоскости, соответственно перпендикулярные к двум пересекающимся плоскостям, пересекаются.

91. Плоскость, перпендикулярная к одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и к другой.

91. Две плоскости, соответственно перпендикулярные к двум перпендикулярным прямым, перпендикулярны.

§ 8. Многогранные углы

92. Три луча, проведённые из одной точки, составляют между собой углы в 160°, 113° и 137°. Образуют ли эти лучи трёхгранный угол?

92. Можно ли составить трёхгранные углы с такими плоскими углами: 1) 130°, 85° и 45°; 2) 100°, 70° и 140°; 3) 170°, 130°, 70°; 4) 84°, 48°, 26°; 5) 150°, 130°, 80°?

93. При каких условиях углы α, β и γ могут быть плоскими углами одного и того же трёхгранного угла?

93. Как построить трёхгранный угол, равный данному трёхгранному углу?

94. Два плоских угла трёхгранного угла равны соответственно α и β. Найти границы возможных значений третьего плоского угла этого трёхгранного угла. Произвести вычисление при: 1) $\alpha = 72°$; $\beta = 150°$; 2) $\alpha = 90°$; $\beta = 20°$.

94. Из точки, взятой вне данной плоскости, проведены к этой плоскости две наклонные, из которых

одна составляет с плоскостью угол, равный α, а другая — угол β. Указать наименьшее и наибольшее из возможных значений угла между этими наклонными.

Произвести вычисление при: 1) $\alpha = 70°$; $\beta = 15°$; 2) $\alpha = 40°$; $\beta = 100°$.

95. Если в трёхгранном угле два плоских угла равны, то проекция их общей стороны на противолежащую грань будет биссектрисой третьего плоского угла. (Указать исключение.)

95. Если в трёхгранном угле два двугранных угла прямые, то и противолежащие им плоские углы также прямые.

96. В трёхгранном угле $SABC$ два плоских угла ASB и ASC равны. Доказать, что противолежащие им двугранные углы также равны. (Сформулировать и доказать обратную теорему.)

97. Если одно из рёбер трёхгранного угла образует равные углы с тремя прямыми, лежащими в плоскости противолежащей грани и проходящими через вершину трёхгранного угла, то это ребро перпендикулярно к противолежащей грани. Доказать.

98. Как построить трёхгранный угол, все плоские углы которого прямые?

99. В трёхгранном угле рёбра взаимно перпендикулярны. Из вершины этого угла в его внутренней области проведён отрезок, проекция которого на каждое из рёбер равна a. Найти проекции этого отрезка на грани.

99. В трёхгранном угле все плоские углы — прямые. Точка, данная во внутренней области этого угла, расположена на расстояниях a, b, c от граней. Найти расстояние данной точки от вершины угла ($a = 1$; $b = 2$; $c = 2$).

100. В трёхгранном угле все двугранные углы — прямые. Из вершины этого угла в его внутренней области проведён отрезок, проекции которого на рёбра равны a, b и c.

Найти длину отрезка.

100. В трёхгранном угле все плоские углы — прямые. На рёбрах его от вершины O отложены отрезки $OA = a$, $OB = b$ и $OC = c$ и через концы их проведена плоскость. Какая фигура получится в сечении? Найти площадь полученного сечения.

Произвести вычисления при $a=1$; $b=2$; $c=3$.

101. Трёхгранный угол, плоские углы которого прямые, пересечён плоскостью. Доказать, что сумма квадратов сторон треугольника сечения равна удвоенной сумме квадратов образовавшихся отрезков рёбер трёхгранного угла.

102. Найти геометрическое место точек:

а) равноудалённых от граней трёхгранного угла;

б) равноудалённых от трёх плоскостей, проходящих через данную точку и не имеющих общей прямой.

103. Найти геометрическое место точек:

а) равноудалённых от рёбер трёхгранного угла;

б) равноудалённых от трёх прямых, пересекающихся в одной точке и не лежащих в одной плоскости;

в) равноудалённых от трёх данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости.

104. Во всяком трёхгранном угле плоскости, проходящие через рёбра угла и перпендикулярные к противолежащим граням, пересекаются по одной прямой. Доказать.

105. Во всяком трёхгранном угле плоскости, проходящие через рёбра и биссектрисы плоских углов противолежащих граней, пересекаются по одной прямой. Доказать.

106. Если пересечь грани трёхгранного угла параллельными плоскостями, то в сечении получатся треугольники, ортоцентры которых, а также и другие соответствующие замечательные точки лежат на одной прямой, проходящей через вершину трёхгранного угла. Доказать.

107. Внутри данного трёхгранного угла O взята точка S, из которой опущены перпендикуляры на грани данного трёхгранного угла. Образовавшийся из этих перпендикуляров трёхгранный угол S называется дополнительным (или полярным) углом для трёхгранного угла O. Доказать обратное, что данный трёхгранный угол O будет являться дополнительным для трёхгранного угла S.

107. Доказать теорему: плоский угол одного из двух взаимно дополнительных трёхгранных углов дополняет линейный угол соответствующего двугранного угла до двух прямых. Обобщить теорему на случай n-гранного угла.

108. Сумма двугранных углов трёхгранного угла больше $2d$, но меньше $6d$. Доказать.

108. Сумма двугранных углов n-гранного угла больше, чем $2d\,(n-2)$, но меньше, чем $2dn$. Доказать.

109. Доказать, что во всяком многогранном угле каждый плоский угол меньше суммы остальных плоских углов.

109. Можно ли составить выпуклый четырёхгранный угол из таких плоских углов: а) 30°, 70°, 110° и 150°; б) 80°, 80°, 40° и 40°; в) 130°, 50°, 70° и 100°?

110. Доказать теорему: если в четырёхгранном угле все плоские углы равны между собой, то каждый двугранный угол равен противоположному двугранному углу.

111. По скольким прямым пересекаются плоскости всех граней четырёхгранного угла?

111. Доказать, что выпуклый четырёхгранный угол всегда можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограм. В каком случае в сечении четырёхгранного угла плоскостью можно получить прямоугольник?

§ 9. Задачи на построение на проекционном чертеже

112. Из точек A и B, лежащих вне плоскости P, опущены на эту плоскость два перпендикуляра AC и BD. Построить точку, в которой прямая AB пересекает плоскость P.

112. Решить аналогично составленную задачу, предполагая, что AC и BD — две наклонные к плоскости P, параллельные между собой.

113. Из точек A, B и C, лежащих вне плоскости P и на разном расстоянии от неё, опущены на эту плоскость перпендикуляры AD, BE и CF. (Данные точки не расположены на одной прямой.)

а) Построить прямую, по которой плоскость, проходящая через точки A, B и C, пересекает плоскость P.

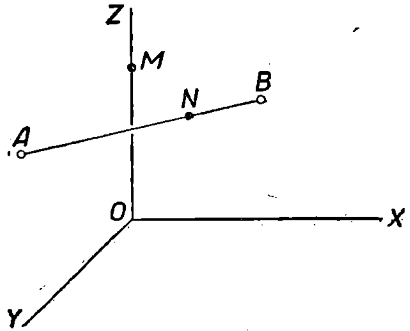
б) Построить точки, в которых медианы образовавшегося треугольника ABC пересекают плоскость P.

113. Решить аналогичную задачу, предполагая, что AD, BE и CF суть наклонные, проведённые к плоскости P и параллельные между собой.

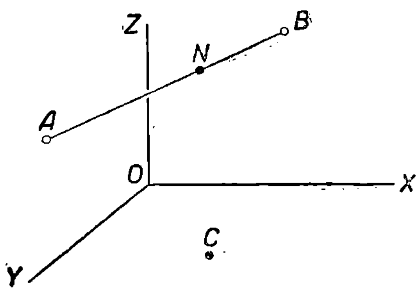
114. В каждой грани двугранного угла дано по одной точке (A и B) и дана точка C на ребре двугранного угла.

Построить следы сечения этого двугранного угла плоскостью, проходящей через точки A, B и C.

114. В одной грани двугранного угла дана прямая, во второй грани — точка. Построить прямую, по которой вторая грань двугранного угла пересекается плоскостью, проходящей через данную прямую и точку.



Черт. 3.



Черт. 4.

115. Из точки A, взятой внутри прямого двугранного угла $PMNQ$, опущен перпендикуляр AB на грань P. Построить точку, в которой прямая, проходящая через точку A и точку C, лежащую в грани Q, пересекает грань P (или продолжение этой грани).

115. Составить и решить аналогичную задачу для случая, когда дан произвольный двугранный угол.

116. На чертеже 3 дано изображение трёхгранного угла $OXYZ$, рёбра которого взаимно перпендикулярны. Точки A и B лежат соответственно в гранях YOZ и XOZ. Точка M лежит на ребре OZ, точка N на отрезке AB.

Требуется построить точку, в которой прямая MN пересекает плоскость грани XOY.

116. На чертеже 4 дано изображение трёхгранного угла $OXYZ$, рёбра которого взаимно перпендикулярны.

Точки A и B лежат соответственно в гранях YOZ и XOZ этого угла.

Построить проекцию точки N, лежащей на отрезке AB, на грани трёхгранного угла.

На таком же чертеже через точку C, данную в грани XOY, провести прямую, пересекающую отрезок AB и ребро OZ трёхгранного угла.

117. Выполнить построения, аналогичные указанным в предыдущей задаче, предполагая, что дан произвольный трёхгранный угол.

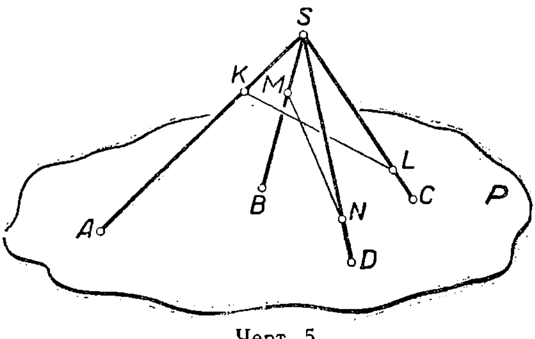
117. Построить сечение трёхгранного угла плоскостью, проходящей через три точки, лежащие в его гранях (в каждой грани по одной).

118. Из точки A, лежащей вне плоскости P, проведены к этой плоскости четыре наклонные так, что образовался выпуклый четырёхгранный угол.

а) Построить прямую, по которой пересекаются плоскости, проходящие через противоположные рёбра этого четырёхгранного угла.

б) Построить прямые, по которым пересекаются противоположные грани образовавшегося четырёхгранного угла.

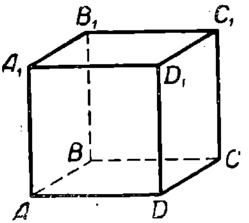
119. Из точки S, лежащей вне плоскости P, проведены к плоскости P четыре наклонные так, что образовался выпуклый четырёхгранный угол. На каждом из рёбер этого четырёхгранного угла взято по одной произвольной точке и проведены два отрезка, соединяющие точки, взятые на противоположных рёбрах (см. черт. 5). Как установить, будут эти отрезки расположены в одной плоскости или нет?



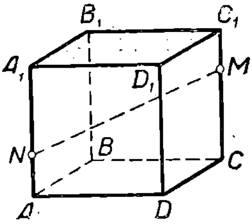
Черт. 5.

119. Из точки S, лежащей вне плоскости P, проведены к этой плоскости четыре наклонные SA, SB, SC и SD так, что образовался выпуклый четырёхгранный угол $SABCD$. Через данную на ребре SA точку провести прямую, пересекающую как ребро SC, так и отрезок, соединяющий две точки, взятые на другой паре противоположных рёбер этого четырёхгранного угла.

120. На чертеже 6 дано изображение куба. Построить прямую, по которой пересекаются две диагональные плоскости этого куба.



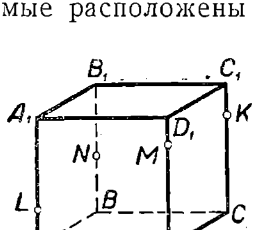
Черт. 6.



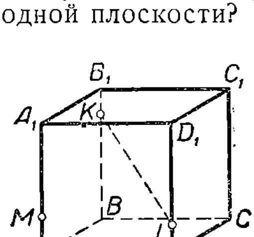
Черт. 7.

120. На чертеже 7 дано изображение куба. Через две точки M и N, лежащие на противоположных боковых рёбрах куба, проведена прямая. Построить точку, в которой эта прямая пересекает плоскость, проходящую через другую пару боковых рёбер куба.

121. На чертеже 8 дано изображение куба. На каждом из боковых рёбер куба даны точки K, L, M и N, и через точки, лежащие на противоположных рёбрах, проведены прямые. Как установить, будут ли эти прямые расположены в одной плоскости?



Черт. 8.



Черт. 9.

121. На чертеже 9 дано изображение куба. Через точку M, взятую на одном из боковых рёбер куба, провести прямую так, чтобы она пересекала противоположное боковое ребро и отрезок, соединяющий две точки K и L, взятые на другой паре боковых рёбер куба.

§ 10. Задачи на построение в ограниченной области пространства

122. Доказать, что через данную точку A можно провести прямую в недоступную точку пересечения двух данных прямых a и b.

123. Доказать, что можно найти точку пересечения прямой, проходящей через точки A и B, лежащие по одну сторону данной плоскости P и на разном расстоянии от неё, с плоскостью P, не проводя прямой AB.

124. Вне плоскости P даны три точки A, B и C. Как можно построить прямую, по которой плоскость, проходящая через эти точки, пересекает плоскость P, не проводя прямых AB, AC и BC?

125. Дана прямая AB, параллельная плоскости P. Как провести прямую, параллельную прямой AB, через недоступную точку пересечения двух данных прямых, лежащих в плоскости P?

126. Как через недоступную точку пересечения двух данных прямых провести прямую, параллельную данной прямой?

127. Доказать, что можно провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости и проходящую через недоступную точку пересечения двух прямых, лежащих в этой плоскости.

128. Доказать, что можно построить плоскость, делящую пополам данный двугранный угол, ребро которого недоступно.

129. Доказать, что можно построить плоскость, проходящую через недоступное ребро данного двугранного угла, и точку, данную во внутренней области этого угла.

130. Доказать, что можно построить прямую, все точки которой одинаково удалены от рёбер данного трёхгранного угла с недоступной вершиной.

Глава II

МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Призмы

131. Сколько рёбер, плоских углов и двугранных углов имеет n-угольная призма?

$$(n=3,\ 4,\ldots,\ m)$$

131. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

$$(n=3,\ 4,\ 5,\ldots,\ m)$$

132. Сколько диагональных сечений можно провести в n-угольной призме через одно из боковых рёбер?

132. Сколько диагональных сечений можно провести в n-угольной призме через все её боковые рёбра? Определить вид полученных в сечении многоугольников.

133. Доказать, что сумма двугранных углов при боковых рёбрах n-угольной призмы равна $2\,d(n-2)$.

133. Каждая из боковых граней n-угольной призмы продолжена так, что при боковых рёбрах призмы образовалось n внешних двугранных углов. Найти сумму полученных внешних углов.

134. Доказать, что диагонали четырёхугольной призмы попарно пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

134. Доказать, что каждая четырёхугольная призма, все диагонали которой пересекаются в одной точке, есть параллелепипед.

135. Доказать, что отрезок любой прямой, заключённый между гранями параллелепипеда и проходящий через точку пересечения его диагоналей, делится в этой точке пополам.

135. Доказать, что среднее арифметическое расстояний вершин параллелепипеда от некоторой плоскости равно расстоянию точки пересечения диагоналей этого параллелепипеда до той же плоскости.

136. Доказать, что во всяком параллелепипеде сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех рёбер.

137. Доказать, что если две диагональных плоскости параллелепипеда перпендикулярны к основаниям, то параллелепипед — прямой.

137. Если все диагонали данного параллелепипеда равны между собой, то параллелепипед — прямоугольный. Доказать.

---

138. Построить прямую, по которой плоскость, проходящая через три точки, данные на различных боковых рёбрах треугольной призмы, пересекает плоскость основания этой призмы.

В каком случае задача не имеет решения?

138. В плоскости основания треугольной призмы даны две точки. Построить сечение этой призмы плоскостью, проходящей через две данные точки и точку, лежащую на одном из её боковых рёбер.

139. Доказать, что в треугольной усечённой призме три точки пересечения продолжения соответствующих сторон треугольников, лежащих в основаниях, лежат на одной прямой*).

140. Отрезок прямой соединяет две точки, данные на противоположных рёбрах четырёхугольной призмы. Построить точку пересечения этого отрезка с одной из диагональных плоскостей призмы.

140. Отрезок прямой соединяет две точки, данные в противоположных гранях четырёхугольной призмы. Построить точку пересечения этого отрезка с одной из диагональных плоскостей призмы.

141. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки, лежащие:

---

*) Усечённой призмой называется многогранник, ограниченный призматической поверхностью и двумя плоскими непараллельными гранями (основаниями).

а) на трёх различных боковых рёбрах призмы, б) в трёх различных боковых гранях призмы.

142. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через точку, лежащую в плоскости основания призмы, и через две точки, лежащие: а) на двух боковых рёбрах призмы, б) в двух различных боковых гранях призмы.

143. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через прямую, лежащую в плоскости основания призмы, и точку, лежащую: а) в одной из её боковых граней, б) на диагонали верхнего основания.

144. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

144. Вычислить площадь многоугольника, полученного в сечении (см. задачу № **144**), предполагая, что рёбра основания призмы равны a и боковые рёбра равны $2a$. При этих же предположениях построить развёртку боковой поверхности призмы. Найти углы, под которыми пересекаются на этой развёртке смежные стороны многоугольника сечения.

145. Построить сечение правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону основания призмы и середину её оси. Вычислить площадь построенного сечения, если все рёбра призмы равны a.

При этом же предположении построить многоугольник сечения в его натуральную величину.

145. Квадрат, с проведённой на нём диагональю, свёрнут в виде боковой поверхности правильной четырёхугольной призмы и, таким образом, диагональ квадрата обратилась в ломаную линию (неплоскую). Определить углы между смежными её отрезками.

146. Пусть A и C_1 — две противоположные вершины параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать:

а) что диагональ AC_1 проходит через центр тяжести треугольников BDA_1 и D_1B_1C;

б) что этими двумя точками диагональ делится на три равные части;

в) что если параллелепипед обращается в куб, то треугольники BDA_1 и D_1B_1C — равносторонние, а прямая AC_1 — перпендикулярна к их плоскости.

147. Куб рассекается плоскостью, перпендикулярной к одной из его диагоналей. Исследовать форму многоугольников сечения, предполагая, что секущая плоскость занимает всевозможные положения, оставаясь перпендикулярной к диагонали. Сделать отдельный чертёж для случая, когда плоскость сечения проходит через середину диагонали куба.

147. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три точки: а) лежащие на трёх рёбрах куба, не принадлежащих одной грани, б) лежащие в трёх гранях куба, не принадлежащие к одному трёхгранному углу.

148. Определить площадь поверхности куба по данной площади Q его диагонального сечения*).

148. Найти площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если диагонали его граней суть a, b и c.

149. По диагонали боковой грани l и стороне основания a найти площадь поверхности и площадь боковой поверхности правильной призмы: а) треугольной, б) четырёхугольной, в) шестиугольной.

150. Ребро куба равно a. Найти кратчайшее расстояние:

а) между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

б) между ребром куба и той диагональю куба, которая не встречает данного ребра.

в) между диагональю куба и непересекающейся с ней диагональю грани.

150. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a, высота равна h. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей её диагонали призмы.

151. Возможны ли такие параллелепипеды, одна из вершин которых была бы одинаково удалена от всех вершин противоположного основания?

151. Возможно ли построить такой параллелепипед, рёбра которого лежат на трёх данных попарно скрещивающихся прямых?

---

*) В дальнейшем для краткости термины „площадь поверхности“, „площадь боковой поверхности“, „длина стороны“ и т. п. часто будут заменяться терминами „поверхность“, „боковая поверхность“, „сторона“ и т. п.

152. Определить объём куба по: а) его диагонали b, б) площади его поверхности S.

152. Определить объём прямоугольного параллелепипеда по данным площадям его граней Q_1 Q_2 Q_3.

153. По боковому ребру b и стороне основания a определить объём правильной призмы: а) треугольной, б) четырёхугольной, в) шестиугольной.

154. Доказать, что наклонный параллелепипед можно преобразовать в равновеликий прямоугольный параллелепипед с той же высотой.

154. Доказать, что прямую четырёхугольную призму можно преобразовать в равновеликую треугольную призму с той же высотой.

155. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади какой-либо её боковой грани на расстояние этой грани от противоположного бокового ребра. Доказать.

155. На трёх данных параллельных прямых, не расположенных в одной плоскости, отложены три равных между собой отрезка AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что объём призмы, боковыми рёбрами которой являются три данные отрезка, не зависит от положения этих отрезков на данных прямых.

§ 2. Пирамиды

156. Показать, что каждую треугольную призму можно разложить на три тетраэдра так, что вершины этих тетраэдров совпадут с вершинами самой призмы.

156. Показать, что вершины куба можно разбить на две группы так, что вершины каждой группы образуют правильный тетраэдр.

157. При каких натуральных значениях n возможно построить: а) правильную n-угольную пирамиду, все рёбра которой равны между собой, б) правильную n-угольную усечённую пирамиду, стороны большего основания которой равны боковым рёбрам, а высота равна стороне меньшего основания?

158. Найти угол между двумя противоположными рёбрами правильного тетраэдра.

158. Доказать, что в правильном тетраэдре сумма расстояний от любой его внутренней точки до всех четырёх граней равна высоте тетраэдра.

159. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 1:3.

160. Стороны основания тетраэдра равны a_1, b_1, c_1, а противоположные боковые рёбра равны соответственно a, b и c. Найти длину отрезка, соединяющего вершину тетраэдра с центром тяжести основания.

Проверить выведенную формулу, предполагая, что данный тетраэдр — правильный.

161. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

162. Найти длину отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер тетраэдра, по данной величине рёбер этого тетраэдра (a, b, c, a_1, b_1, c_1).

Проверить правильность выведенной формулы, предполагая, что вычисления производятся для правильного тетраэдра.

163. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к рёбрам тетраэдра и проходящие через середины этих рёбер, пересекаются в одной точке.

164. Доказать, что биссекторные плоскости двугранных углов, образованных боковыми гранями тетраэдра, пересекаются по одной прямой.

164. Доказать, что биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

165. Боковые рёбра тетраэдра равны a, b и c. Противолежащие им стороны его основания равны соответственно a_1, b_1 и c_1. Найти длину отрезка прямой (от вершины пирамиды до основания) пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при боковых рёбрах тетраэдра.

166. Боковые рёбра тетраэдра равны a, b и c. Противолежащие им стороны основания равны соответственно a_1, b_1 и c_1. Найти длину отрезка, соединяющего вершину тетраэдра с точкой пересечения биссектрис основания.

167. Доказать, что биссекторная плоскость двугранного угла тетраэдра разделяет противоположную грань на части, площади которых пропорциональны площадям граней, содержащих двугранный угол.

167. Доказать, что в тетраэдре, имеющем при вершине прямые двугранные углы, квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей его боковых граней.

---

168. Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, параллельной двум противолежащим рёбрам этой пирамиды. Определить вид многоугольника сечения. Выяснить, при каких условиях в сечении может получаться прямоугольник.

169. Если треугольная пирамида пересечена плоскостью, не параллельной основанию, и стороны полученного сечения продолжены до встречи с соответствующими сторонами основания, то три точки пересечения этих прямых лежат на одной прямой. Доказать.

170. По скольким прямым пересекаются плоскости боковых граней n-угольной пирамиды?

170. Построить прямые, по которым пересекаются плоскости противоположных граней четырёхугольной пирамиды, если основанием пирамиды являются:

а) параллелограм,

б) трапеция,

в) четырёхугольник, противоположные стороны которого пересекаются.

171. Доказать, что всякую пирамиду, в основании которой лежит выпуклый четырёхугольник, можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограм. Выполнить соответствующее построение на чертеже. Выяснить, при каких условиях в сечении может получиться прямоугольник.

172. Построить сечение четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей:

а) через три точки, лежащие на трёх различных боковых рёбрах пирамиды;

б) через три точки, лежащие в трёх различных боковых гранях пирамиды;

в) через сторону основания и точку, лежащую в одной из боковых граней пирамиды, не содержащей взятой стороны.

---

173. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро b. Найти площадь сечения этой пирамиды плоскостью, параллельной двум её непересекающимся рёбрам и проходящей:

а) через центр основания,

б) через середину высоты.

174. Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и отсекающей $^1/_3$ высоты пирамиды (считая от основания). Вычислить площадь полученного сечения, предполагая, что все рёбра пирамиды равны a.

174. Построить сечение правильной шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и отсекающей $^1/_3$ высоты пирамиды (считая от основания). Вычислить площадь сечения, если сторона основания и апофема пирамиды равны a.

175. Площадь основания пирамиды M. Высота h этой пирамиды разделена на n равных частей и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найти площадь $к$-го ($к < n$) сечения (считая от вершины) и расстояние этого сечения от вершины пирамиды.

175. Площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию, составляет $\frac{m}{n}$ часть от площади основания. В каком отношении делится этой плоскостью сечения высота пирамиды?

176. В основании пирамиды лежит треугольник, периметр которого равен $2p$, радиус вписанного в треугольник круга равен r. Определить площадь поверхности этой пирамиды, если её вершина удалена на расстояние, равное b, от всех сторон основания.

176. В основании пирамиды лежит параллелограм, стороны которого равны a и b. Определить площадь боковой поверхности этой пирамиды, если высота её равна h и боковые рёбра равны между собой.

177. Боковая поверхность тетраэдра, все рёбра которого равны a, развёрнута на плоскости так, что образовался выпуклый четырёхугольник. Определить вид полученного четырёхугольника, его периметр и площадь.

177. Дана правильная пирамида с равными рёбрами. Если боковую поверхность этой пирамиды развернуть на плоскости, то может получиться трапеция, каждая диагональ которой равна a. Найти площадь боковой поверхности этой пирамиды.

178. Высота пирамиды h. Найти расстояние от вершины пирамиды до плоскости параллельного сечения, делящей площадь боковой поверхности пирамиды пополам.

178. Высота пирамиды h. Плоскости, параллельные основанию пирамиды, делят её боковую поверхность на n равных частей. Найти расстояние *к-ой* $(\kappa < n)$ плоскости сечения (считая от вершины) от вершины пирамиды.

179. Определить площадь поверхности правильной усечённой пирамиды: а) треугольной, б) четырёхугольной, в) шестиугольной, если дана её высота h и стороны оснований a и b.

180. Площади основания усечённой пирамиды равны Q_1 и Q_2. Доказать, что площадь среднего сечения этой пирамиды равна $\left[\frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}\right]^2$.

180. Определить высоту правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если стороны её основания a и b, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

181. Как найти внутри данного тетраэдра такую точку, соединяя которую со всеми вершинами тетраэдра, можно разделить его на четыре равновеликие части?

181. Доказать, что плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

182. Основанием пирамиды служит: а) правильный шестиугольник, б) правильный восьмиугольник. Через одно из боковых рёбер пирамиды проведены диагональные сечения. В каком отношении делится этими сечениями объём пирамиды?

183. По ребру a правильного тетраэдра определить его объём.

183. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды — прямые, а боковые рёбра равны a, b, c. Определить объём этой пирамиды.

184. По боковому ребру l и сторонам основания a и b определить объём правильной усечённой пирамиды: а) треугольной, б) четырёхугольной, в) шестиугольной.

185. Плоскостью, параллельной основанию некоторой пирамиды, боковое ребро этой пирамиды делится пополам. В каком отношении плоскость сечения делит объём пирамиды?

185. Плоскостью, параллельной основанию, площадь боковой поверхности пирамиды делится пополам. В каком отношении делится этой плоскостью объём пирамиды?

186. Доказать, что объёмы двух треугольных пирамид, имеющих по равному многогранному углу, относятся как произведения их рёбер, образующих эти углы.

187. Треугольная пирамида пересечена плоскостью так, что боковые рёбра разделились в отношении $k:l$, $m:n$, $p:t$. В каком отношении делится этой плоскостью объём пирамиды?

187. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны a. Построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через вершину нижнего основания и середину противолежащего ребра параллельно одной из диагоналей основания. В каком отношении делится этой плоскостью объём пирамиды?

188. Определить объём тетраэдра, боковые рёбра которого равны l, а стороны основания равны a, b и c.

188. Определить объём тетраэдра, если противоположные рёбра его попарно равны a, b и c.

189. Площади оснований усечённой пирамиды Q и q, а её объём V. Определить объём соответствующей пирамиды.

189. Площади нижнего и верхнего оснований усечённой пирамиды суть a^2 и b^2. Найти площадь параллельного сечения, делящего объём усечённой пирамиды пополам.

§ 3. Различные задачи на многогранники

190. На поверхности куба найти кратчайшее расстояние от середины ребра куба до одной из наиболее удалённых вершин куба.

190. На поверхности куба можно провести замкнутую линию, проходящую через все шесть граней куба и через данную на ребре куба точку. Как найти кратчайшую из этих линий?

191. Сколько плоскостей симметрии имеют:

а) куб? б) правильный тетраэдр?

191. Сколько осей симметрии имеют:

а) куб? б) правильный тетраэдр?

192. Сколькими различными способами можно поставить куб на данный квадрат, равный грани взятого куба?

192. Сколькими различными способами можно поставить правильный тетраэдр на треугольник, равный грани взятого тетраэдра?

193. Куб можно раскрасить шестью красками так, что все шесть его граней будут различных цветов. Сколькими существенно различными способами можно осуществить такую окраску? *)

193. Правильный тетраэдр можно раскрасить четырьмя красками так, что все четыре грани будут различных цветов. Сколькими существенно различными способами можно осуществить такую окраску?

194. Указать, какие из вершин данного куба будут совмещаться при вращении этого куба: а) около его диагонали; б) около оси, проходящей через центры двух противоположных граней; в) около оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер.

194. Указать, какие из вершин данного правильного тетраэдра будут совмещаться при его вращении: а) около одной из высот; б) около оси, проходящей через середины двух противоположных рёбер.

195. Доказать, что объём треугольной усечённой призмы равен сумме объёмов трёх пирамид, имеющих своим общим основанием одно из оснований усечённой призмы, а вершинами — соответственно три вершины её другого основания.

195. Доказать, что объём треугольной усечённой призмы равен произведению площади её перпендикулярного сечения на среднее арифметическое боковых рёбер.

196. Доказать: объём усечённого прямого параллелепипеда равен площади основания, умноженной на полусумму двух противоположных боковых рёбер.

196. Через точки, делящие два противоположных ребра куба соответственно в отношении $m:n$; $k:l$,

---

*) Существенно различными окрасками будут считаться такие окраски, при которых все одноцветные грани не могут быть совмещены.

проведена плоскость, пересекающая другую пару рёбер, параллельных данным. В каком отношении разделился этой плоскостью объём куба?

197. Построить сечения куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных рёбер одной из его граней и через вершину куба, принадлежащую противоположной грани. Сколько таких плоскостей можно построить? В каком отношении делится объём куба каждой из этих плоскостей?

198. Сколько плоскостей сечения можно провести через одну из вершин правильной треугольной призмы так, чтобы этой плоскостью: а) площадь поверхности призмы делилась на две равные части? б) объём призмы делился бы на две равные части?

198. На ребре правильной треугольной призмы найти такую точку, не совпадающую с вершиной призмы, через которую возможно провести бесконечное множество плоскостей сечения, делящих пополам как площадь поверхности призмы, так и её объём. Будет ли применимо найденное решение для случая, когда дана произвольная треугольная призма?

199. Доказать, что сумма объёмов пирамид, имеющих своими основаниями боковые грани данной призмы и общей вершиной произвольную точку, лежащую внутри этой же призмы, — постоянна.

199. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде построена пирамида, основанием которой является меньшее основание усечённой пирамиды, а вершина расположена в центре большего основания. Найти высоты этих пирамид, если их боковые поверхности равновелики, а стороны оснований равны соответственно a и b. Выяснить условие возможности решения.

200. Доказать, что в правильную n-угольную призму можно вписать правильную n-угольную пирамиду.

200. Найти отношение объёмов правильной n-угольной призмы и вписанной в неё правильной n-угольной пирамиды.

201. Доказать, что в правильную четырёхугольную пирамиду можно вписать куб так, что четыре вершины этого куба лежат на боковых рёбрах пирамиды, а четыре противоположные вершины — в плоскости основания пирамиды.

201. Определить объём куба, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, имеющую высоту, равную h, и сторону основания a.

202. Доказать, что, соединяя последовательно отрезками середины рёбер правильного тетраэдра, можно вписать в этот тетраэдр правильный октаэдр.

202. Ребро правильного тетраэдра равно a. Определить объём правильного октаэдра, вершины которого лежат в середине рёбер этого тетраэдра.

203. Доказать: а) что центры граней куба могут являться вершинами вписанного в этот куб правильного октаэдра.

б) что центры граней правильного октаэдра могут являться вершинами вписанного в этот октаэдр куба.

203. Найти отношение объёмов куба и вписанного в этот куб правильного октаэдра.

204. Какая зависимость существует между числом рёбер и числом двугранных углов выпуклого многогранника?

204. Доказать, что во всяком выпуклом многограннике число плоских углов вдвое более числа рёбер.

205. Доказать, что в многограннике имеет место зависимость:

а) $2P + 3T_3 + 4T_4 + 5T_5 + \ldots$, где P обозначает число рёбер рассматриваемого многогранника, T_3, T_4, T_5 и т. д. — число граней, являющихся треугольниками, четырёхугольниками и т. д.

б) $2P = 3Y_3 + 4Y_4 + 5Y_5 + \ldots$, где P обозначает число рёбер рассматриваемого многогранника, Y_3, Y_4, Y_5 и т. д. — число трёхгранных углов, четырёхгранных углов и т. д.

205. Определить, сколькими своими элементами определяются: а) n-угольная пирамида; б) n-угольная призма; в) выпуклый многогранник, имеющий n вершин.

Глава III

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Цилиндр

206. Как через данную точку провести плоскость, касающуюся данной цилиндрической поверхности?

206. Две плоскости, касательные к одной и той же цилиндрической поверхности, или параллельны друг другу, или пересекаются по прямой, параллельной оси соответствующего цилиндра. Доказать.

207. Если плоскость проходит через образующую цилиндра и перпендикулярна к другой плоскости, касающейся боковой поверхности цилиндра по той же образующей, то эта плоскость проходит через ось цилиндра.

207. Дан двугранный угол и точка во внутренней области этого угла. Возможно ли построить цилиндрическую поверхность, которая касалась бы граней этого двугранного угла и проходила бы через данную точку?

208. Доказать, что во всякой четырёхугольной призме, описанной около цилиндра, суммы площадей противолежащих граней равны.

208. Доказать, что во всякой четырёхугольной призме, вписанной в цилиндр, сумма двух противоположных двугранных углов равна двум прямым двугранным углам.

209. Какая зависимость существует между величинами двух двугранных углов, если ребро одного совпадает с образующей цилиндра и грани пересекают цилиндрическую поверхность по двум другим образующим, а ребром второго двугранного угла служит ось того же цилиндра и грани проходят через те же две образующие?

209. Если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани перпендикулярны между собой. Доказать.

---

210. На боковой поверхности цилиндра даны две точки, не лежащие на одной образующей. Построить точку пересечения прямой, проходящей через эти две точки:

а) с плоскостью осевого сечения цилиндра, не проходящей через взятые образующие,

б) с плоскостью основания цилиндра.

211. На боковой поверхности цилиндра даны три точки, не принадлежащие одной образующей. Построить прямую, по которой плоскость, проходящая через эти три точки, пересекает:

а) плоскость осевого сечения цилиндра, не проходящую через взятые образующие,

б) плоскость основания цилиндра.

212. На боковой поверхности цилиндра даны три точки так, что никакие две из них не лежат на одной образующей цилиндра. Показать, как можно построить точки пересечения боковой поверхности цилиндра с плоскостью, проходящей через три данные точки.

212. На продолжении одной из образующих цилиндра взята точка. Построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей через эту точку и через две другие точки, лежащие на окружности ближайшего основания.

213. Построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей через точку, данную на его боковой поверхности, и через прямую, данную в плоскости основания цилиндра.

213. Построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей через две точки, лежащие на его различных образующих, и параллельной данной прямой, лежащей в плоскости основания цилиндра.

---

214. Какая зависимость существует между радиусом основания и высотой цилиндра, у которого площадь боковой поверхности в n раз больше суммы площадей оснований?

214. Какая должна быть зависимость между высотой цилиндра и радиусом основания, чтобы боковая поверхность цилиндра была равновелика кругу, описанному около его осевого сечения?

215. Плоскость, параллельная основанию цилиндра, рассекает боковую поверхность на две части так, что площадь сечения есть средняя пропорциональная между площадями этих частей. Определить положение секущей плоскости (по радиусу основания R и высоте H). Указать условие, при котором задача имеет решение.

215. Две взаимно перпендикулярные плоскости касаются цилиндра по двум образующим, которые делят боковую поверхность на две части. Найти отношение площадей этих частей.

216. В плоскости P дан отрезок $AB=2a$ и отрезок $CD \perp AB$, где C — середина отрезка AB.

Определить площадь поверхности, образованной вращением отрезка AB около оси O_1O_2, проходящей через точку D и перпендикулярной к плоскости P.

Установить, что эта площадь не зависит от длины отрезка CD.

216. Квадрат со стороной $2a$ вращается около оси O_1O_2, проходящей через середины его противоположных сторон. 1) Определить объём тела вращения. 2) Установить, будет ли изменяться этот объём, если ось вращения станет перемещаться параллельно самой себе в плоскости, проходящей через прямую O_1O_2 и перпендикулярной к плоскости квадрата.

217. Объём цилиндра равен произведению площади образующего прямоугольника на длину окружности, описанной точкой пересечения диагоналей этого прямоугольника при вращении его около одной из сторон. Доказать.

217. Объём цилиндра равен произведению площади его боковой поверхности на половину радиуса. Доказать.

218. Цилиндр, радиус основания которого R, рассечён плоскостью так, что наибольшая и наименьшая части образующих отсечённой части цилиндра равны соответственно a и b. Найти объём этого усечённого цилиндра*).

218. Цилиндр пересечён двумя плоскостями, не пересекающими оснований цилиндра и не пересекающимися внутри цилиндра. Найти объём куска цилиндра, заключённого между секущими плоскостями, если радиус цилиндра равен r и отрезок оси цилиндра, заключённый между секущими плоскостями, равен d.

219. Цилиндр, у которого радиус основания r и высота h, рассечён плоскостью, перпендикулярной к основанию так, что хорда, по которой секущая плоскость пересекает основание, равна r. Найти объём отсечённой части цилиндра.

§ 2. Конус

220. Как построить плоскость, проходящую через данную точку и касательную к данной конической поверхности?

220. Можно ли построить коническую поверхность, касательную к трём данным плоскостям?

221. Можно ли построить коническую поверхность, проходящую через три данные прямые, пересекающиеся в одной точке?

221. Доказать, что в конус всегда можно вписать и около конуса можно описать правильную n-угольную пирамиду.

222. Доказать, что в конус всегда можно вписать:

а) правильную n-угольную призму, одно основание которой лежит в плоскости основания конуса, а вершины противоположного основания на его образующих;

б) цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости основания конуса, а другое — на его боковой поверхности.

222. Доказать, что в конус всегда можно вписать куб.

223. В конусе даны радиус основания r и высота h.

Определить: а) ребро правильной треугольной призмы с равными рёбрами, вписанной в этот конус, б) ребро вписанного в этот конус куба.

---

*) Усечённый цилиндр образуется при пересечении цилиндрической поверхности двумя непараллельными и не пересекающимися внутри цилиндра плоскостями.

224. Построить сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и через две точки, лежащие на его различных образующих.

224. Построить точку пересечения прямой, проходящей через две точки, лежащие на двух различных образующих конуса, с плоскостью осевого сечения этого конуса.

225. На боковой поверхности конуса даны две точки, не лежащие на одной образующей. Построить точку пересечения прямой, проходящей через две эти точки, с плоскостью основания конуса.

225. Построить прямую, по которой пересекаются две плоскости, одна из которых проходит через вершину данного конуса и две точки, лежащие на окружности основания, а другая — через прямую, лежащую в плоскости основания конуса, и точку, лежащую на его боковой поверхности.

226. На боковой поверхности конуса на различном расстоянии от вершины даны три точки, не лежащие на одной образующей. Построить прямую, по которой плоскость, проходящая через эти три точки, пересекает плоскость основания конуса. Показать, как можно построить точки пересечения этой плоскости с боковой поверхностью конуса.

---

227. Вычислить угол в развёртке боковой поверхности конуса, если: а) наибольший угол между образующими — прямой, б) образующая составляет с плоскостью основания угол в 30°.

228. Полукруг свёрнут в коническую поверхность. Найти угол между образующей и высотой образовавшегося конуса.

228. Боковой поверхностью конуса служит свёрнутая четверть круга радиуса r. Определить радиус основания конуса.

229. Высота конуса равна h. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь полученного сечения конуса была равна половине площади основания?

229. Радиус основания конуса равен r. Через середину высоты этого конуса проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найти площадь сечения.

230. Радиус основания конуса равен r. Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту конуса в отношении $m:n$ (считая от вершины).

230. Как относятся между собой площади основания, боковой поверхности и поверхности равностороннего конуса?

231. Найти зависимость между образующей и радиусом основания конуса, у которого площадь боковой поверхности есть средняя пропорциональная между площадью основания и площадью полной поверхности.

231. Какая зависимость должна быть между образующей конуса и радиусом основания, чтобы его поверхность была равновелика кругу, за радиус которого принята высота этого же конуса?

232. Высота конуса равна h, образующая равна l. Этот конус катится по плоскости, вращаясь вокруг своей вершины. Найти площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

232. Высота усечённого конуса $2a$, образующая $3a$; радиус одного основания вдвое более радиуса другого. Этот конус катится по плоскости (без скольжения). Найти площадь поверхности, которую описывает при этом вращении ось усечённого конуса.

---

233. Около конуса описана n-угольная пирамида. Показать, что отношение боковых поверхностей этих двух фигур не изменится, если их общая вершина будет перемещаться вдоль высоты. Изменится ли при таком преобразовании отношение объёмов рассматриваемых фигур?

233. По радиусу R основания конуса определить радиус параллельного сечения, делящего пополам объём конуса (ответ дать точный и приближённый с точностью до 0,01). Будет ли этим сечением делиться пополам площадь боковой поверхности конуса?

234. На одном основании построен конус и равновеликий ему цилиндр. Параллельно основанию через середину высоты цилиндра проведена плоскость. а) Как относятся площади полученных сечений конуса и цилиндра? б) В каком отношении делится проведённой плоскостью объём конуса?

235. Если треугольник ABC вращается вокруг стороны $BC=a$, то объём полученного тела $V_a=\frac{4\pi Q^2}{3a}$, где Q — площадь треугольника. Доказать.

235. Пусть будут V, V_1 и V_2 объёмы тел, полученных вращением прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы и катетов. Доказать, что: $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}$.

236. Объёмы, образованные вращением какого-нибудь треугольника последовательно вокруг каждой стороны, обратно пропорциональны этим сторонам. Доказать.

236. Объёмы, образуемые вращением параллелограма последовательно около двух смежных сторон, обратно пропорциональны этим сторонам. Доказать.

237. Квадрат со стороной a вращается вокруг оси, проходящей через вершину и середину стороны, не проходящей через эту вершину. Найти объём полученного тела вращения.

237. Каждая из сторон квадрата $ABCD$ принимается за основание треугольника, общая вершина которых M лежит внутри квадрата. Доказать, что сумма объёмов тел, образованных вращением этих треугольников около их оснований, зависит только от a и d, где a — сторона данного квадрата и d — расстояние точки M от центра квадрата.

238. Два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Найти объём их общей части, если объём каждого конуса равен V.

238. В усечённом конусе даны радиусы оснований R и r, высота h. Из него вырезаны два конуса, у которых основаниями служат основания данного усечённого конуса, а образующие одного служат продолжением образующих другого. Определить объём оставшейся части усечённого конуса.

239. Цилиндр и конус имеют общую ось. Боковая поверхность цилиндра делится боковой поверхностью конуса пополам.

В каком отношении делится объём цилиндра общим круговым сечением конуса и цилиндра?

239. Цилиндр и конус имеют общую ось. Объём цилиндра делится боковой поверхностью конуса по-

полам. В каком отношении объём конуса делится общим круговым сечением конуса и цилиндра?

240. Радиусы оснований усечённого конуса R и r. Плоскость, параллельная основаниям, делит объём пополам. Найти площадь сечения.

240. Площадь осевого сечения усечённого конуса равна разности площадей его оснований. Определить его объём, если радиусы оснований суть r и R.

241. На меньшем основании усечённого конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания конуса. Объём полученного цилиндра составляет $\frac{1}{n}$ объёма усечённого конуса. Найти зависимость между радиусами оснований усечённого конуса. Найти несколько значений n, при которых эта зависимость выражается рациональной формулой.

241. В усечённый конус вписан конус так, что его вершина лежит в центре меньшего основания, а основание совпадает с большим основанием усечённого конуса. Найти зависимость между радиусами оснований усечённого конуса, если объём вписанного конуса составляет $\frac{1}{n}$ объёма усечённого конуса. Найти несколько значений n, при которых зависимость между радиусами выражается рациональной формулой.

§ 3. Шар

242. Найти геометрическое место центров равных круговых сечений данного шара.

242. Найти геометрическое место:

а) середин хорд данного шара, параллельных данной прямой;

б) середин хорд данного шара, параллельных двум пересекающимся плоскостям.

243. Найти геометрическое место центров сфер, проходящих через две данные точки.

243. Найти геометрическое место центров сфер, проходящих через две данные точки и имеющих данный радиус.

244. Найти геометрическое место центров сфер, проходящих через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

244. Найти геометрическое место центров сфер данного радиуса, проходящих через три точки, не лежащие на одной прямой.

245. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся данной прямой в данной на ней точке.

245. Найти геометрическое место: а) центров сфер данного радиуса, касающихся данной прямой, б) центров сфер данного радиуса, касающихся данной прямой в данной на ней точке.

246. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся двух данных прямых, лежащих в одной плоскости.

246. Найти геометрическое место центров сфер, данного радиуса, касающихся двух данных прямых, лежащих в одной плоскости.

247. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся данной плоскости в данной на ней точке.

247. Найти геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся данной плоскости.

248. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся двух данных плоскостей.

248. Найти геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся двух данных пересекающихся плоскостей.

249. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся данной сферы в данной на ней точке.

249. Найти геометрическое место: а) центров сфер данного радиуса, касающихся данной сферы в данной на ней точке, б) центров сфер данного радиуса, касающихся данной сферы.

---

250. Шар радиуса R пересечён плоскостью, проходящей на расстоянии d от центра шара. Определить радиус сечения.

250. Радиус шара равен a. В плоскости, касательной к шару, дана точка, находящаяся на расстоянии b от точки касания. Определить наибольшее и наименьшее расстояние данной точки от поверхности шара.

251. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Определить длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

251. Радиусы двух равных шаров a и расстояние между их центрами d. Определить длину линии, по которой пересекаются поверхности шаров.

252. Радиус шара равен R. Стороны треугольника касаются поверхности шара и равны соответственно a, b и c. Определить расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

252. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между этими точками суть a, b и c. Радиус шара равен R. Определить расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

253. Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две плоскости, которые пересекают шар по кругам с радиусами r_1 и r_2. Найти радиус шара, если двугранный угол, образованный плоскостями, равен 1) 60°, 2) 90°, 3) 120°.

---

254. Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника служат диаметрами трёх шаров. Установить зависимость между площадью поверхностей этих шаров.

254. Высота равностороннего конуса служит диаметром шара. Какая зависимость существует между площадью поверхности этого шара и площадью поверхности конуса?

255. Равносторонний конус и полушар имеют общее основание. Установить зависимость между:

а) площадью боковой поверхности конуса и площадью сферической поверхности полушара,

б) длиной окружности основания и длиной окружности, полученной при пересечении конической поверхности с поверхностью полушара.

256. Площадь поверхности шарового пояса выразить через высоту h и радиусы оснований r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$).

256. Площадь сферической поверхности шарового сегмента определить: а) по его высоте h и радиусу основания r, б) по расстоянию a её средней точки от точки, лежащей на окружности основания.

257. Полуокружность, разделённая радиусами на три равные части, вращается около своего диаметра.

Доказать, что площадь поверхности, описанной средней дугой, равна сумме площадей поверхностей, описанных боковыми дугами.

Будет ли выполняться аналогичное соотношение между объёмами соответствующих шаровых секторов?

257. В квадрат вписан круг, и полученная фигура вращается около диаметра, соединяющего точки касания. Установить зависимость между площадями поверхностей, полученных при вращении квадрата и круга.

258. Площадь боковой поверхности конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадями основания и боковой поверхности сегмента. Доказать.

258. Площадь полной поверхности данного шарового сегмента в m раз более площади поверхности вписанного в него шара. Определить высоту сегмента по радиусу его сферической поверхности ($m=2$).

259. На каком расстоянии от центра шара (с радиусом R) должна быть светящаяся точка, чтобы она освещала $\frac{1}{n}$ поверхности шара?

259. Радиус земного шара R. Воздухоплаватель поднялся от земли на высоту h. Найти площадь обозреваемой им поверхности земли. (Произвести вычисление для различных значений h, принимая $R \approx 6370$ *км.*)

260. Из двух равных деревянных кубов выточен наибольший цилиндр и наибольший шар. В каком случае было сточено больше материала? Можно ли из полученного цилиндра выточить шар, равный шару, выточенному из куба?

260. Сосуд имеет форму опрокинутого конуса, осевое сечение которого — равносторонний треугольник. В него брошен железный шар радиуса R. В сосуд налита вода так, что поверхность воды касается погружённого в воду шара. На какой высоте будет в сосуде вода, если вынуть из него шар?

261. Плоскость, перпендикулярная к диаметру шара, делит этот диаметр на две части в отношении $m:n$. В каком отношении делится этой плоскостью объём шара?

261. Какую часть объёма шара составляет объём шарового сегмента, у которого высота равна $\frac{1}{n}$ диаметра шара? Какую часть составляет объём этого сегмента от объёма цилиндра, имеющего то же основание и высоту?

262. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найти объём общей части этих шаров по объёму V целого шара.

262. Даны два шара, центр каждого из них лежит на поверхности другого. В каком отношении объём каждого из них делится поверхностью другого?

263. Радиусы оснований шарового слоя $3a$ и $4a$. Радиус его шаровой поверхности равен $5a$. Найти объём слоя. Каким требованием следует дополнить условие, чтобы задача имела только один ответ?

263. Шаровой слой и цилиндр имеют общую высоту и общие основания. Объём тела, заключённого между их боковыми поверхностями, равен P. Найти их высоту.

264. Доказать, что объём тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a около диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса.

264. В полукруге даны две хорды a и b $(a > b)$, параллельные диаметру. Часть полукруга, заключённая между хордами, вращается вокруг диаметра. Найти объём тела вращения.

265. Определить, какую часть объёма шара составляет объём сферического сектора, у которого сферическая и коническая поверхности равновелики.

265. Объём данного шарового сегмента в m раз более объёма вписанного в него шара. Определить высоту сегмента по радиусу R его сферической поверхности $(m = 2)$.

Глава IV

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Задачи на комбинацию тел

266. Построить сечение правильной четырёхугольной призмы плоскостью, параллельной диагонали призмы и проходящей через диагональ основания. Зная, что площадь построенного сечения равна S, найти площадь сечения этой же призмы другой плоскостью, параллельной плоскости первого сечения и делящей ось призмы в отношении 1:3.

266. Построить сечение правильной четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания и середину оси. Зная, что плоскость построенного сечения равна S, найти площадь сечения этой призмы другой плоскостью, параллельной плоскости первого сечения и делящей ось призмы в отношении 1 : 3.

267. Каждое из оснований правильной призмы служит основанием пирамиды, вершина которой находится в центре другого основания призмы. Как относится объём тела, ограниченного боковыми гранями этих пирамид, к объёму призмы?

267. Ребро куба равно a. В куб вписаны три правильных четырёхугольных призмы, вершины которых делят рёбра куба пополам. Найти объём тела, ограниченного боковыми гранями этих призм.

268. Доказать, что в тетраэдр всегда можно вписать шар.

268. Доказать, что около тетраэдра всегда можно описать шар.

269. По ребру a правильного тетраэдра определить радиусы шаров: а) вписанного в этот тетраэдр, б) описанного около него.

270. Установить, при каких условиях можно вписать шар: а) в треугольную усечённую пирамиду, б) в усечённый конус.

270. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы около усечённой треугольной пирамиды можно было описать шар.

271. Как относятся между собой площади поверхностей и объёмы трёх шаров, если первый из них касается всех граней куба, второй—всех его рёбер, а поверхность третьего проходит через все вершины куба?

271. Решить аналогично составленную задачу для правильного тетраэдра.

272. Шар касается всех 12 рёбер куба. Найти объём той части шара, которая заключается внутри этого куба, если известно, что ребро куба равно a.

272. Решить аналогично составленную задачу для правильного тетраэдра.

273. Доказать, что около правильного тетраэдра можно описать цилиндр так, что диаметрами основания этого цилиндра будут два противоположные ребра тетраэдра.

273. Вычислить объём цилиндра так описанного около правильного тетраэдра, что два противоположные ребра тетраэдра являются диаметрами оснований цилиндра. Ребро тетраэдра равно a.

274. В шар радиуса R вписан правильный тетраэдр и три грани его, исходящие из одной вершины, продолжены до пересечения с поверхностью шара. Вычислить площадь той части поверхности шара, которая заключается внутри этого трёхгранного угла.

274. Высота правильного тетраэдра служит диаметром сферической поверхности, площадь которой равна S. Найти площадь той части сферической поверхности, которая заключена внутри тетраэдра.

275. Шар переменного радиуса R проходит (своей поверхностью) через центр некоторого заданного шара радиуса r. Показать, что площадь шапочки, вырезанной этим последним из поверхности шара переменного радиуса, имеет постоянную величину.

275. В шар вписаны равносторонний конус и равносторонний цилиндр. Доказать, что площадь полной поверхности цилиндра есть среднее пропорциональное между площадью полной поверхности конуса и поверхности шара, а объём цилиндра есть среднее пропорциональное между объёмом конуса и объёмом шара. Будет ли выполняться такое же соотношение для случая, когда равносторонние конус и цилиндр будут описаны около шара?

276. По ребру a правильного октаэдра определить радиусы шаров, вписанного в октаэдр и описанного около него.

276. Диагональ правильного октаэдра служит осью цилиндра, каждая из окружностей оснований которого касается четырёх граней октаэдра в их центрах. Найти отношение объёма цилиндра к объёму октаэдра.

277. По ребру a правильного додекаэдра определить радиусы: а) описанного около додекаэдра шара, б) вписанного в додекаэдр шара.

277. Ребро икосаэдра равно a. Найти радиусы: а) описанного около икосаэдра шара, б) вписанного в икосаэдр шара.

278. В шар радиуса R вписан конус, боковая поверхность которого делит объём шара пополам. Найти образующую конуса.

278. В конус вписан шар. В каком отношении площадь поверхности шара делится окружностью, по которой шар касается конуса, если площадь основания конуса равна площади поверхности шара?

279. Два шара радиуса r касаются друг друга и плоскости P. Найти радиус наименьшего шара, касающегося данных шаров и плоскости P.

279. Четыре шара радиуса R расположены так, что каждый из них касается трёх других. Определить радиус шара, касательного ко всем этим шарам.

280. Шар радиуса R касается граней двугранного угла в $60°$. Найти радиусы наибольшего и наименьшего шаров, касающихся граней угла и данного шара.

280. В двугранный угол, равный $60°$, вписаны два касательных друг к другу шара радиуса r. Найти радиус шара, касающегося граней двугранного угла и данных шаров.

281. Доказать, что в шар можно вписать 6 равных шаров, каждый из которых касается четырёх других.

281. Доказать, что вокруг шара можно расположить 6 равных шаров, касающихся данного шара и четырёх соседних.

---

§ 2. Задачи, решаемые на моделях*)

282. Дан брусок, имеющий форму наклонной треугольной призмы.

1) Построить на поверхности этого бруска его перпендикулярное сечение.

2) Определить величины двугранных углов, образованных боковыми гранями.

3) Построить на поверхности бруска следы его сечения плоскостью, образующей данный угол: а) с боковыми рёбрами бруска, б) с одной из боковых граней бруска.

4) Найти диаметр наибольшего прямого кругового цилиндра, который может быть выточен из этого бруска.

283. Дан брусок, имеющий форму наклонной четырёхугольной призмы.

1) Определить измерения наибольшего прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, который может быть выточен из этого бруска.

2) Определить количество шаров наибольшего диаметра, которое может быть выточено из этого бруска.

284. Дан обрубок бревна с сохранившейся частью цилиндрической поверхности. Определить диаметр бревна.

285. Дано твёрдое тело, имеющее форму шара. При помощи построений на поверхности шара и на плоскости определить диаметр этого шара.

286. Дан обломок шарообразного тела с сохранившейся частью шаровой поверхности. Найти диаметр соответствующего шара.

---

*) При решении задач этого параграфа разрешается использовать все чертёжные и измерительные инструменты.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ

ГЛАВА I

§ 1

2. Нет, не всякая. Прямая, проходящая через точку пересечения двух данных прямых, может не лежать в плоскости этих прямых.

3. Если какая-нибудь прямая, проходящая через данную точку и пересекающая одну из данных прямых, пересечёт и другую данную прямую (или окажется параллельной этой прямой), то данные прямые и точка лежат в одной плоскости.

3. Через точку, взятую на одной из данных прямых, провести прямую, параллельную другой данной прямой. Если проведённая прямая пересечёт третью данную прямую, то все три прямые будут лежать в одной плоскости.

4. Через три данные точки провести взаимно пересекающиеся прямые. Если произвольная прямая, проведённая через четвёртую данную точку и пересекающая одну из сторон образовавшегося тр-ка, пересечёт и вторую сторону этого тр-ка, то все четыре данные точки лежат в одной плоскости.

5. Решение проводится путём непосредственного применения аксиом прямой и плоскости.

6. Метод доказательства тот же, что и для случая, когда рассматривается компланарный четырёхугольник.

7. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Для решения воспользоваться выводами двух предыдущих задач. Наибольшее и наименьшее значение искомое расстояние (при переменном b) будет иметь в случае, когда образовавшийся четырёхугольник будет компланарным.

§ 2

8. Прямая a может лежать в этой плоскости или быть параллельной ей.

8. При решении отдельно рассмотреть случаи, когда данные прямые: а) параллельны, б) пересекаются, в) скрещиваются.

9. Предварительно следует доказать, что проведённая плоскость пересекает плоскость рассматриваемого некомпланарного четырёхугольника по прямым, параллельным двум его противоположным сторонам.

10. $c \parallel d$. Для доказательства можно воспользоваться предложением: „Две прямые, порознь параллельные третьей, параллельны между собой".

11. Искомое геометрическое место прямых представляет собой плоскость.

12. а) Возможно, если данные прямые не пересекаются.

б) Возможно, если первая данная прямая: 1) будет параллельна плоскости, определяемой двумя другими данными прямыми (если эти прямые лежат в одной плоскости); 2) будет параллельна двум параллельным плоскостям, определяемым двумя другими данными прямыми (если эти прямые скрещивающиеся).

13 а). Построение возможно. Построенные прямые должны быть параллельны прямой пересечения данных плоскостей.

б) Построение возможно. Точка пересечения построенных прямых должна лежать на прямой пересечения данных плоскостей.

15. Доказательство можно провести методом от противного.

§ 3

18. Доказательство можно провести методом от противного.

21. а) Для построения искомой прямой провести плоскости через данную точку и каждую из двух данных скрещивающихся прямых.

б) Через каждую из двух данных скрещивающихся прямых провести плоскость, параллельную третьей прямой. Прямая пересечения этих плоскостей и есть искомая (для случая, когда третья прямая не параллельна ни одной из двух данных скрещивающихся прямых).

в) При решении отдельно рассмотреть случаи, когда:
1) обе данные прямые пересекают данную плоскость,
2) одна из данных прямых пересекает данную плоскость,
3) обе данные прямые параллельны данной плоскости,
4) одна из данных прямых лежит в данной плоскости.

§ 4

В задачах этого и следующих параграфов рассматриваются ортогональные проекции фигур. В случае отступления от этого правила в условие задач вносится соответствующее указание.

26. Для доказательства следует выполнить дополнительные построения, сходные с дополнительными построениями, необходимыми для доказательства теоремы о трёх перпендикулярах.

32. В отношении $m:n$.

32. $\dfrac{an+bm}{n+m}$; $\dfrac{am+bn}{m+n}$.

33. 1) $\dfrac{bn-am}{m+n}$; 2) $\dfrac{bm-an}{m+n}$.

33. Плоскость, параллельная данной и проходящая через точку M.

37. $\frac{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}{2}=5$; $\frac{\sqrt{b^2+c^2-2a^2}}{2}=3$.

38. $\frac{at}{n+t}=2\frac{11}{12}$; $\frac{at}{n+t}=2\frac{1}{12}$.

39. а) Бесконечное множество.

б) Рассмотреть случаи, когда третья прямая: 1) параллельная данным прямым, 2) лежит в разных плоскостях с данными прямыми, 3) пересекает данные прямые или одну из них.

в) В зависимости от соотношения расстояний могут быть случаи: 1) отсутствия решений, 2) двух плоскостей, 3) четырёх плоскостей.

(При решении задачи воспользоваться решёнными ранее задачами № 12 и № 16.)

40. $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$; $a^2+c^2 \geqslant b^2$.

41. $\sqrt{\frac{b^2t^2-a^2n^2}{t^2-n^2}}$.

Данные отрезки могут пересекаться или не пересекаться. Расположение отрезков на ответ задачи не влияет.

41. $\frac{\sqrt{4c^2-b^2+a^2}}{2}$.

Для нахождения решения спроектировать образовавшуюся в пространстве фигуру на одну из данных плоскостей.

43. Пусть расстояние между плоскостями равно a и данное расстояние от точки до искомой прямой равно b. Если $a > b$ — задача не имеет решения. Если $a = b$, то условию задачи удовлетворяет всякая прямая, лежащая в другой плоскости и проходящая через проекцию данной точки на эту же плоскость. Если $a < b$, то условию задачи удовлетворяет всякая прямая, лежащая в другой плоскости и касающаяся окружности, центром которой является проекция данной точки на эту же вторую плоскость, а радиус равен $\sqrt{b^2-a^2}$.

43. Указание. Отдельно рассмотреть случаи, когда данное расстояние меньше, равно или больше расстояния между параллельными плоскостями.

46. Через проекцию данной точки на плоскость P и центр окружности провести прямую. Отрезки, соединяющие данную вне плоскости P точку с точками пересечения этой прямой с данной окружностью, и будут искомыми.

47. В случае „а“ искомая точка есть точка пересечения прямой AB с плоскостью P.

В случае „б“ для решения надо построить точку, симметричную с одной из данных точек относительно плоскости P.

47. В случае „а“ искомая точка есть точка пересечения прямой AB с плоскостью P.

В случае „б“ предварительно следует построить точку, симметричную с одной из данных точек относительно плоскости P.

49. Пусть точка C есть проекция точки M на плоскость P. Для решения задачи в плоскости P надо построить $\triangle ABC$ и $\triangle ABM_1 = \triangle ABM$ так, чтобы вершины C и M этих треугольников лежали по разные стороны от прямой AB.

54. Окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к данной прямой. Диаметром окружности является перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую.

54. Сфера, диаметром которой является отрезок, соединяющий две данные точки.

55. См. предыдущую задачу.

55. Окружность, лежащая в данной плоскости. Диаметром этой окружности будет проекция на данную плоскость отрезка, соединяющего две данные точки.

§ 5

56. Из данной точки опустить на данную плоскость перпендикуляр. Через основание перпендикуляра провести прямую, образующую с этим перпендикуляром угол, дополняющий данный угол до прямого. Искомая наклонная проходит через данную точку и параллельна построенной прямой. Задача имеет бесконечное множество решений.

56. Коническая поверхность, вершина которой лежит в данной точке.

59 а) 45°; б) 60°.

59. 30°.

60. См. задачу № 56.

61. Коническая поверхность с вершиной в данной точке. В случае перпендикулярности прямых — плоскость.

62. Указание. См. задачу № 61. Воспользоваться методом параллельного переноса.

62. Коническая поверхность, с вершиной в данной точке. Указание. Рассмотреть два случая: 1) Данная точка лежит на данной прямой. 2) Данная точка не лежит на данной прямой. Во втором случае рассматриваются углы двух скрещивающихся прямых.

§ 6

65. 30°; 120°.

66. Сумма углов равна 180°.

68. В каждом из рассматриваемых случаев возможно построение бесконечного множества прямых двугранных углов.

69. $\sqrt{a^2+b^2}$.

70. а) Возрастает от $\sqrt{a^2+b^2}$ до бесконечности.

б) Убывает от $\sqrt{a^2+b^2}$ до $|a-b|$.

Указание. Для нахождения ответа исследовать изменения рассматриваемого расстояния при вращении одной из граней двугранного угла около ребра.

71. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Наименьшее значение при $c=0$.

72. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}=20$. 72. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$.

73. 1 : 1.

§ 7

84. При совпадении прямых около данного четырёхугольника можно описать окружность.

84. См. задачу 52, **53**.

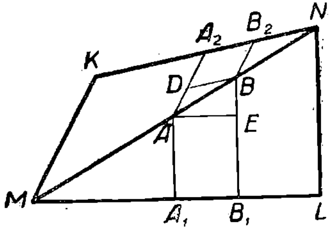
85. Обозначим через M и N точки пересечения прямой AB с плоскостями граней. Построим проекции отрезка MN (ML и NK) на каждую из этих плоскостей (см. чертёж № 10).

Пусть AA_1 и AA_2 — перпендикуляры, опущенные из точки A на данные плоскости.

BB_1 и BB_2 — соответствующие перпендикуляры, опущенные из точки B. По условиям имеем следующее равенство:

$$AA_1+AA_2=BB_1+BB_2. \qquad (1)$$

Проведём $AE \parallel ML$ и $BD \parallel KN$.



Черт. 10.

Равенство (1) может быть переписано так:

$$(AA_1+A_2D)+AD=(B_1E+BB_2)+BE.$$

Слагаемые, взятые в скобки, равны. Следовательно, $AD=BE$. $\triangle ABE=\triangle ABD$ (как прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу и равные катеты).

$$\triangle MKN \backsim \triangle ABD;$$
$$\triangle MLN \backsim \triangle ABE.$$

Кроме того, тр-ки MKN и MLN имеют общую сходственную сторону MN. Следовательно:

$$\triangle MKN=\triangle MLN,$$
откуда: $MK=LN$; $KN=ML$.

Некомпланарный четырёхугольник $MKLN$ при вращении около прямой MN можно преобразовать в прямоугольник. Сумма перпендикуляров, опущенных из любой точки прямой AB на стороны KN и ML этого прямоугольника, равна стороне прямоугольника $NL=$ $=MK$. Решение упрощается, если прямая AB параллельна ребру двугранного угла.

85. Через точки A и B проведём прямую AB. На основании задачи № **85** можно утверждать, что высказанное в задаче утверждение будет верным для любой прямой, проходящей через точку C и пересекающей прямую AB. Геометрическим местом всех этих прямых является плоскость, проходящая через данные точки A, B и C.

92. Нет.

92. 1) Нельзя. 2) Можно. 3) Нельзя. 4) Нельзя. 5) Нельзя.

93. 1) $\alpha + \beta + \gamma < 360°$ и 2) сумма любых двух углов больше 3-го угла.

93. Указать один из возможных способов.

94. Значения третьего угла заключены в промежутке между $(\alpha + \beta)$ и $|\alpha - \beta|$.

94. Наименьшее значение: $|\alpha - \beta|$.
Наибольшее значение: $\alpha + \beta$.

96. Через точку A на ребре SA провести две плоскости, соответственно перпендикулярные к рёбрам SB и SC. Рассмотрев полученные треугольники сечения, доказать равенство соответствующих двугранным углам линейных углов.

97. См. задачу № 95. При доказательстве можно применить метод от противного.

99. $a\sqrt{2}$. 99. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

100. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

100. $\frac{1}{2}\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^2c^2} = \frac{7}{2}$ (кв. ед.)

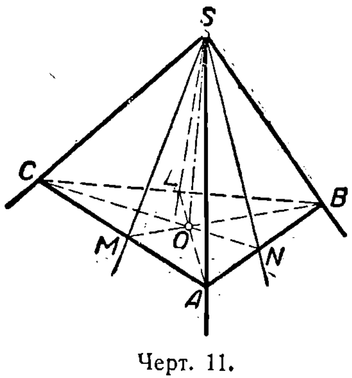
102. а) Прямая пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов трёхгранного угла.

б) Четыре прямые пересечения биссекторных плоскостей образовавшихся двугранных углов.

103. а) Прямая пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов граней трёхгранного угла и перпендикулярных этим граням.

б) 4 прямые, равноудалённые от рёбер образовавшихся трёхгранных углов.

в) Прямая пересечения плоскостей, перпендикулярных к плоскостям данных параллельных прямых (взятых попарно) и делящих пополам расстояние между этими прямыми.

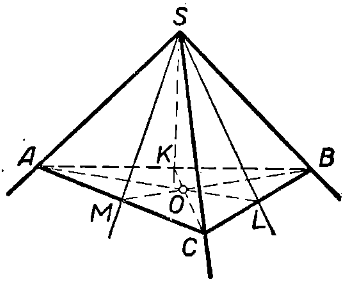


Черт. 11.

104. Пусть прямые SM и SN — прямые пересечения плоскостей, проходящих через рёбра SB и SC трёхгранного угла $SABC$ и перпендикулярных к противоположным граням, с этими гранями. Через точку A, взятую на ребре SA, проведём прямые AC и AB, перпендикулярные соответственно SM и SN. Прямая AC перпендикулярна плоскости SBM, следовательно, $AC \perp BM$.

Прямая AB перпендикулярна к плоскости SCN. Следовательно, $AB \perp CN$. В тр-ке ABC BM и CN — высоты. Точка O — точка пересечения этих высот. Плоскость ABC перпендикулярна к плоскостям SCN и SBM. Следовательно, $SO \perp$ пл. ABC. Откуда следует, что плоскость, проходящая через ребро SA и высоту AL тр-ка ABC, будет перпендикулярна к грани SBC (чертёж 11).

105. Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$. Отложим от вершины S на рёбрах равные отрезки ($SA = SB = SC$). Соединив концы этих отрезков, получим треугольник (ABC). Биссектрисы плоских углов трёхгранного угла (SK, SM, SL) будут являться медианами равнобедренных тр-ков SAB, SAC и SBC. Следовательно, плоскости, проходящие через рёбра трёхгранного угла и биссектрисы противолежащих плоских углов, будут пересекать треугольник ABC по его медианам (AL, BM, CK) (см. чертёж 12).



Черт. 12.

106. В одном из сечений построить рассматриваемые замечательные точки. Доказать, что прямая, проходящая через вершину трёхгранного угла и построенные замечательные точки, пересечёт все другие тр-ки параллельных сечений в соответствующих замечательных точках.

107. Рёбра данного трёхгранного угла также будут перпендикулярны к граням трёхгранного угла O и будут проходить через точку (S), лежащую внутри этого трёхгранного угла O.

107. Рассмотреть четырёхугольники, образовавшиеся при сечении смежных граней одного трёхгранного угла соответствующей гранью дополнительного трёхгранного угла.

108. 108. См. задачу 107.

109. Доказательство проводится путём последовательного применения теоремы: „Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов".

109. а) Невозможно. б) Невозможно. в) Возможно.

110. Указание. На двух противоположных рёбрах четырёхгранного угла S отложить равные отрезки SA и SB. Из концов этих отрезков (не лежащих в точке S) опустить перпендикуляры на каждое из других противоположных рёбер. Концы отрезков SA и SB соединить отрезком AB. Рассмотреть полученные при этом тр-ки.

111. По шести прямым.

111. Плоскость сечения должна быть параллельна прямым пересечения плоскостей противоположных граней четырёхгранного угла.

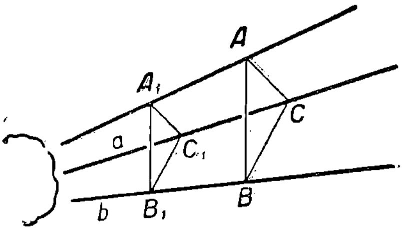
§ 9

112. Провести прямую через основания перпендикуляров. Получим проекцию прямой AB на плоскости P. Искомая точка есть точка пересечения прямой AB с её проекцией на плоскость P.

113. а) Построить точки пересечения каких-нибудь двух прямых, проходящих через данные точки (A, B, C), и данной плоскостью. Прямая, проходящая через эти точки, и есть искомая.

122. Пусть a и b — данные прямые и A — данная точка (см. чертёж 13).

Строим произвольный тр-к, одна из вершин которого лежит в точке A, а две другие — на прямых a и b (тр-к ABC). Строим тр-к $A_1B_1C_1$, две вершины которого лежат на прямых a и b и стороны параллельны соответственным сторонам тр-ка ABC. Прямая AA_1 — искомая.



Черт. 13.

123. Из точек A и B опустить перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость P. Задача сводится к решению соответствующей задачи планиметрии в плоскости, определённой прямыми AA_1 и BB_1.

(Через две точки, делящие отрезки AA_1 и BB_1 в равном отношении, провести прямую. Искомая точка будет точкой пересечения этой прямой с прямой A_1B_1.)

124. См. предыдущую задачу.

125. Указание. В плоскости P провести прямую, параллельную прямой AB. После этого задача сводится к решению соответствующей задачи планиметрии. (Если проведённая прямая пересечёт обе данные прямые, воспользоваться свойством полного четырёхугольника. Если проведённая прямая будет параллельна одной из данных прямых, то эта данная прямая и есть искомая.)

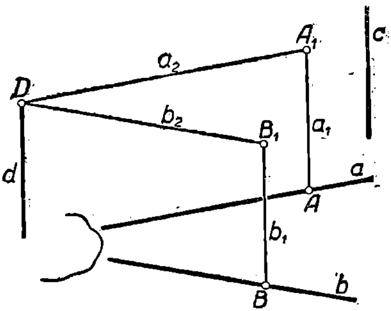
126. Пусть a и b — две данные прямые. Если третья прямая c не лежит в плоскости этих прямых и не параллельна этой плоскости, решение выполняется следующим образом:

1. Через точки A и B, взятые соответственно на прямых a и b, проводим прямые $a_1 \parallel c$ и $b_1 \parallel c$.

2. На прямых a_1 и b_1 откладываем соответственно отрезки $AA_1 = BB_1$.

3. Через точку A_1 проводим прямую $a_2 \parallel a$; через точку B_1 проводим прямую $b_2 \parallel b$.

4. Через точку D пересечения прямых a_2 и b_2 проводим прямую $d \parallel c$. Прямая d — искомая. (См. черт. 14.)



Черт. 14.

127. Решение проводится, как и в предыдущей задаче, если $c \perp$ пл. P.

128. Применить тот же метод, которым решается задача планиметрии о построении биссектрисы угла с недоступной вершиной. (Воспользоваться свойством биссекторной плоскости двугранного угла как геометрического места точек, равноудалённых от граней.)

129. Применить метод решения задачи планиметрии: „Через данную точку провести прямую в недоступную точку пересечения двух данных прямых" (см. задачу № 122).

130. Построить биссектрисы двух плоских углов трёхгранного угла. Через построенные биссектрисы провести плоскости, перпендикулярные к соответствующим граням.

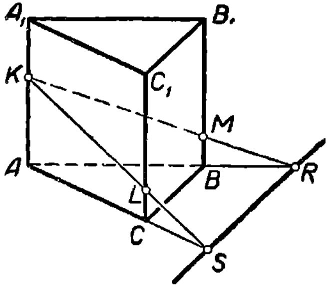
ГЛАВА II

§ 1

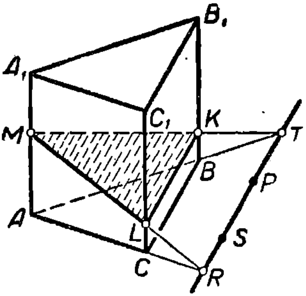
131. $3n$; $6n$; $3n$. 131. $n(n-3)$.

132. $n-3$.

132. $\frac{n(n-3)}{2}$. В сечении получаются параллелограмы.

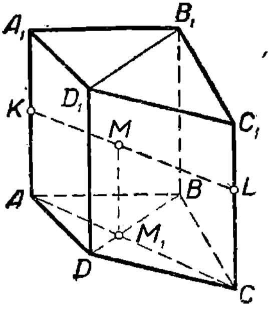


Черт. 15.

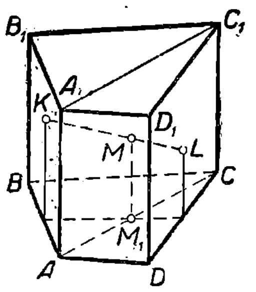


Черт. 16.

138. Построение показано на чертеже 15. RS — искомая прямая. K, L и M — данные точки. Задача не имеет решения, если все три точки находятся на равном расстоянии от плоскости основания.



Черт. 17.



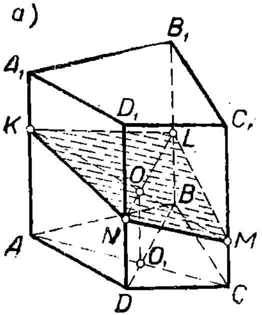
Черт. 18.

138. MKL — искомое сечение (см. черт. 16). P и S — точки, данные в плоскости основания призмы. Точка M лежит на ребре AA_1.

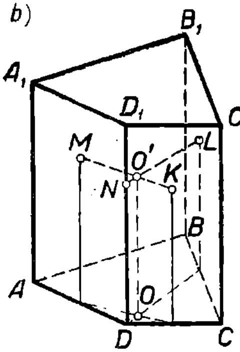
139. Указание. Эта прямая есть прямая пересечения плоскостей верхнего и нижнего основания.

140. Точка M — искомая точка пересечения прямой KL с плоскостью DD_1B_1B (см. черт. 17).

140. Точка M — искомая точка пересечения прямой KL с плоскостью AA_1C_1C (см. черт. 18).



Черт. 19.



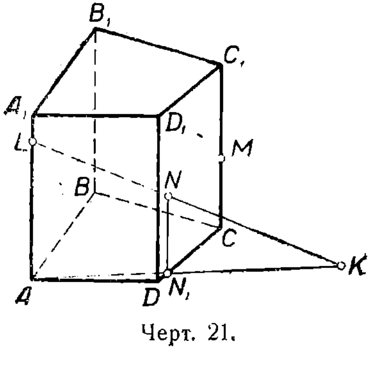
Черт. 20.

141. а) На чертеже 19 показано построение сечения (мн-к $KLMN$) призмы плоскостью, проходящей через три данные точки (K, L и M).

б) На чертеже 20 показано построение точки (N) пересечения плоскости сечения с ребром призмы DD_1.

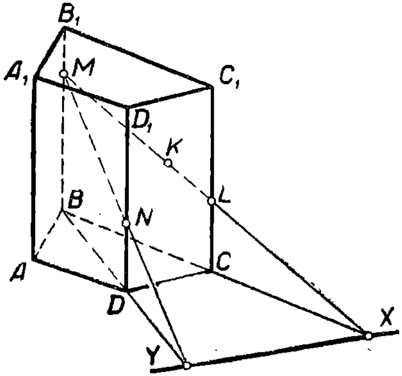
142. а) Пусть точки L, M и K — данные. На чертеже 21 показано построение третьей точки (N) пересечения плоскости сечения с боковой поверхностью призмы. (Аналогичные построения выполняются и в случае б).

143. Указание. См. чертёж 22. Данная точка K лежит в грани BB_1C_1C; xy — прямая, лежащая в плоскости основания.

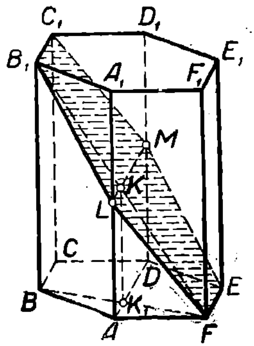


Черт. 21.

На чертеже показано построение точек L, M и N, принадлежащих сечению. Для построения мн-ка сечения необходимо найти точку пересечения плоскости сечения с ребром призмы AA_1, т. е.: 1) провести диагональ (AC) основания призмы; 2) через точку пересечения диагоналей (AC и BD) основания призмы провести прямую, параллельную боковым рёбрам призмы; 3) через точку L и точку пересечения построенной прямой с отрезком MN провести прямую. Эта прямая пересечёт ребро AA_1 (или продолжение ребра) в искомой точке.



Черт. 22.



Черт. 23.

144. Указание. Построение сечения выполняется в следующей последовательности:

1) Проводим диагональ призмы B_1F и диагональ основания BF; 2) проводим диагональ основания AD; через точку пересечения BF и AD (K_1) проводим прямую, параллельную ребру AA_1; отмечаем точку (K) пересечения этой прямой с прямой B_1F; 3) Через точку K проводим прямую, параллельную AD; отмечаем точки L и M пересечения этой прямой с боковыми рёбрами; 4) соединяем последовательно точки F, L, B_1, C, M, E отрезками, получаем искомый мн-к сечения FLB_1C_1ME (см. черт. 23).

144. $\frac{3a^2\sqrt{7}}{2}$; 135°, 180°.

145. В сечении получается трапеция. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

145. 120°.

147. В случае, когда плоскость сечения проходит через середину диагонали куба, в сечении получаем правильный шестиугольник.

148. $3Q\sqrt{2}$.

148. Для определения рёбер (x, y, z) параллелепипеда надо решить систему уравнений: $x^2+y^2=a^2$; $x^2+z^2=b^2$; $y^2+z^2=c^2$.

150. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. 150. $\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2}$.

151. В основании такого параллелепипеда должен лежать прямоугольник. Вершина противоположного основания лежит на перпендикуляре, восставленном к этому прямоугольнику в точке пересечения его диагоналей.

151. Для построения параллелепипеда через каждую из данных прямых провести плоскости, параллельные двум другим прямым.

155. Указание. Объём треугольной призмы составляет половину объёма соответствующего параллелепипеда.

155. Воспользоваться выводами предыдущей задачи.

§ 2

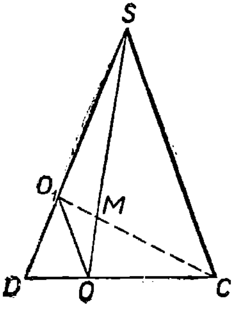
157. а) При значениях n, равных 3, 4, 5.

б) При значениях n, больших 6.

158. 90°.

158. Через данную точку провести плоскости, параллельные граням тетраэдра.

159. Построить плоскости, проходящие через рёбра тетраэдра (выходящие из одной вершины) и через медианы противолежащей вершине грани. Построенные плоскости пересекаются по одной прямой. Каждая из этих плоскостей проходит и через медиану грани, противолежащей взятому ребру. Следовательно, каждая из построенных плоскостей сечения содержит по два рассматриваемых в задаче отрезка (пересекающихся в этой плоскости). Рассмотрим один из таких тр-ков сечения — $\triangle SCD$ (см. черт. 24), где SC — ребро тетраэдра, SD и CD — медианы граней. Пусть SO и CO_1 — отрезки, соединяющие вершины S и C тетраэдра с центрами тяжести противолежащих граней. M — точка пересечения этих отрезков.



Черт. 24.

$$\frac{DO_1}{O_1S} = \frac{DO}{CD} = \frac{1}{2};$$

$\triangle MOO_1 \sim \triangle SMC$. Следовательно,

$$\frac{CM}{MO_1} = \frac{SC}{OO_1} = \frac{3}{1}.$$

160. $$\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{9}.$$

161. Показать, что каждая пара рассматриваемых отрезков является диагоналями параллелограма.

162. Пусть a, b и c — рёбра тетраэдра, выходящие из одной вершины, a_1, b_1 и c_1 — противолежащие им стороны основания. Тогда длина отрезка, соединяющего середины рёбер a и a_1, выразится формулой:

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-(a^2+a_1^2)}.$$

163. Каждая из рассматриваемых плоскостей будет геометрическим местом точек, равноудалённых от двух вершин тетраэдра. Точка пересечения этих плоскостей равноудалена от всех вершин тетраэдра.

164. Эта прямая будет геометрическим местом точек, равноудалённых от граней трёхгранного угла.

164. Эта точка будет одинаково удалена от всех граней тетраэдра.

165. Длина соответствующего отрезка, выходящего из общей вершины S рёбер a, b и c тетраэдра $SABC$, равна:

$$\frac{1}{S_{бок}}\sqrt{S_{бок}\left(a^2S_{SBC}+b^2S_{SAC}+c^2S_{SAB}\right)-\left(a_1^2S_{SAB}S_{SAC}+b_1^2S_{SAB}S_{SBC}+c_1^2S_{SAC}S_{SBC}\right)},$$

где $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности и S_{SBC} и т. п. — площади соответствующих граней.

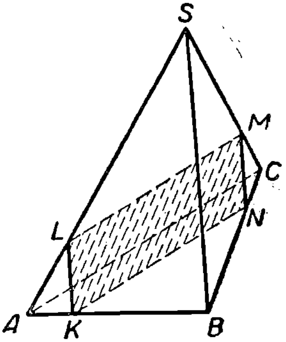
166. Длина отрезка, соединяющего общую вершину рёбер a, b и c с точкой пересечения биссектрис противолежащей этой вершине грани, определяется по формуле:

$$\sqrt{\frac{a^2a_1+b^2b_1+c^2c_1-a_1b_1c_1}{2p_1}},$$

где $2p_1$ — периметр основания.

Указание. Воспользоваться формулами определения биссектрисы тр-ка по его трём сторонам ($\beta_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ и формулой определения трансверсали*) тр-ка: $ax^2=c^2n+b^2m-amn$ (где x—длина трансверсали тр-ка, m и n — отрезки основания a. Отрезок m прилежит к стороне c, и отрезок n прилежит к стороне b).

168. На чертеже 25 показано сечение $KLMN$, параллельное рёбрам SB и AC пирамиды $SABC$.



Черт. 25.

Для построения необходимо провести $KN \parallel AC$, $NM \parallel BS$.

Прямые KN и MN определяют плоскость сечения.

Четырёхугольник сечения ($KLMN$) параллелограм, так как:

1) $LM \parallel KN$,

2) $KL \parallel MN$.

Построенное сечение будет представлять собой прямоугольник, если рёбра AC и BS образуют прямой угол (угол двух скрещивающихся прямых).

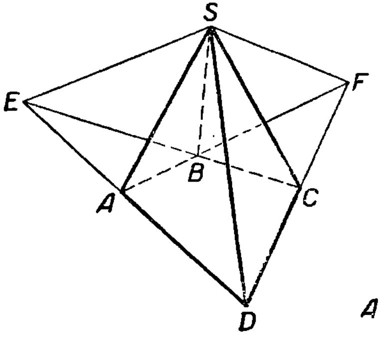
---

*) Трансверсалью тр-ка называется отрезок, соединяющий вершину тр-ка с одной из точек противоположной стороны.

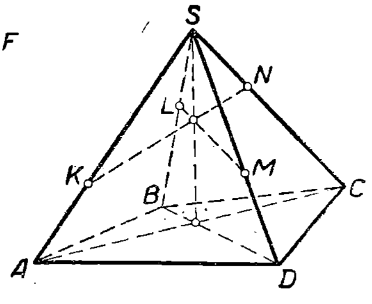
169. Указание. Точки пересечения рассматриваемых прямых лежат на прямой пересечения плоскости основания и плоскости сечения.

170. Плоскости всех боковых граней пирамиды имеют общую точку (вершину пирамиды). Число прямых, по которым пересекаются n таких плоскостей, равно числу сочетаний из n элементов по два: $\frac{n(n-1)}{2}$.

170. В четырёхугольной пирамиде число прямых, по которым пересекаются плоскости её боковых граней, равно шести.



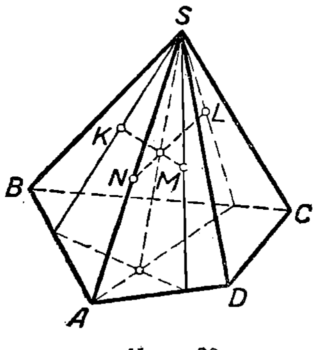
Черт. 26.



Черт. 27.

Отрезками четырёх из этих прямых являются боковые рёбра пирамиды. На чертеже 26 показано построение двух других прямых (SF и SE) для пирамиды $SABCD$. Если противоположные стороны основания пирамиды параллельны, то прямые SF и SE будут параллельны соответствующим сторонам основания.

171. Плоскость, пересекающая боковые грани четырёхугольной пирамиды и параллельная прямым, по которым пересекаются плоскости противоположных граней этой пирамиды, даёт в сечении параллелограм. В сечении получится прямоугольник, если прямые, по которым пересекаются плоскости противоположных граней пирамиды, будут взаимно перпендикулярны.



Черт. 28.

172. а) Пусть на боковых рёбрах пирамиды $SABCD$ даны три точки K, L и M. Для построения сечения пирамиды плоскостью, проходящей через три данные точки, надо предварительно найти точку пересечения этой плоскости (точку N) с четвёртым ребром пирамиды. Построение этой точки N показано на чертеже 27. Соединив точки K, L, M и N отрезками, получим многоугольник сечения.

б) Точки K, L и M лежат в боковых гранях пирамиды $SABCD$ (черт. 28). Плоскость, проходящая через эти три точки, пересекает ребро SA в точке N. Построение точки N показано на чертеже.

в) Требуется построить сечение четырёхугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через сторону CD и точку M, лежащую в грани SAB (черт. 29). Если $CD \parallel AB$, то плоскость сечения пересечёт грань SAB по прямой, проходящей через точку M и параллельной CD.

Если AB и CD пересекаются, то для построения сечения необходимо:

1) продолжить стороны AB и CD до их пересечения в точке E;

2) соединить точку E с точкой M.

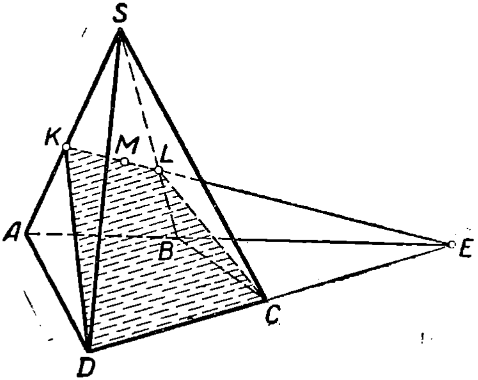
Отрезок KL есть след плоскости сечения на грани SAB. В сечении имеем четырёхугольник $DKLC$.

173. 1) $\frac{2ab}{9}$; 2) $\frac{2ab}{9}$.

Каждое из рассматриваемых сечений представляет собой прямоугольник (см. задачу 168).

174. $\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}$.

174. $\frac{13a^2\sqrt{7}}{24}$.



Черт. 29.

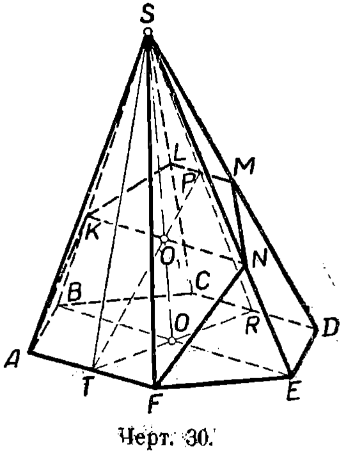
В сечении получаются две трапеции с общим основанием (шестиугольник $AKLMNF$; см. черт. 30).

Указание. Для построения сечения провести TP — медиану тр-ка TSK. $LM \parallel AF$ и $KN \parallel BE$.

175. Площадь κ-го (от вершины пирамиды) сечения равна $\frac{M\kappa^2}{n^2}$. Расстояние сечения от вершины — $\frac{hk}{n}$.

175. $\frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{m}}$.

176. $P(r+b)$.



Черт. 30.

176. $\frac{1}{2}\left(a\sqrt{4h^2+b^2}+b\sqrt{4h^2+a^2}\right)$.

177. Указание. В развёртке получается равнобедренная трапеция.

177. $a^2\sqrt{3}$. **178.** $\frac{h\sqrt{2}}{4}$.

178. $h\sqrt{\frac{k}{n}}$. 180. $\frac{a^2b^2}{a+b}$.

181. Точка пересечения плоскостей, проходящих через рёбра тетраэдра и медианы граней, противолежащих соответствующему ребру.

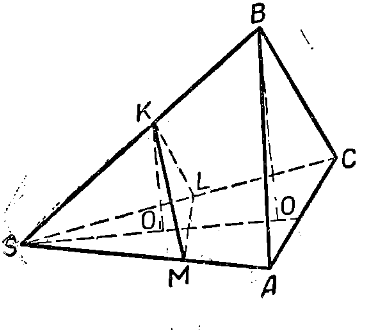
181. Сначала провести секущую плоскость через одно ребро (BC) тетраэдра $SABC$ и середину (точку D) противоположного ему ребра (SA). Этой плоскостью тетраэдр $SABC$ рассечётся на две равновеликие части ($DABC$ и $SDBC$). Затем показать, что при вращении плоскости сечения вокруг прямой, соединяющей середины взятых рёбер (SA и BC), от каждой из полученных частей данного тетраэдра будут одновременно отсекаться и прилагаться равновеликие тетраэдры. (Основанием этих тетраэдров будет мн-к сечения, а вершины их будут расположены соответственно в точках A и S. Отсюда следует, что высоты образовавшихся тетраэдров равны.)

183. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. 183. $\frac{abc}{6}$. **185.** 1 : 8. 185. $1:2\sqrt{2}$.

186. Расположим рассматриваемые пирамиды, как показано на чертеже 31.

$$\frac{\text{Об. пирам } SABC}{\text{Об. пирам. } SKLM}=\frac{\text{Об. пирам. } BSAC}{\text{Об. пирам. } KSML}=\frac{BO\ \text{площ.}\triangle ASC}{KO_1\ \text{площ.}\triangle SML}=$$

$$=\frac{BO\cdot SC\cdot SA}{KO_1\cdot SM\cdot SL}=\frac{SB\cdot SC\cdot SA}{SK\cdot SM\cdot SL}.$$



Черт. 31.

187. $\frac{(k+l)(m+n)(p+l)-kmp}{kmp}$.

187. 2 : 1.

188. Высота SH тетраэдра упадёт в центр круга, описанного около тр-ка ABC. $AH=R$, где R – радиус описанного около тр-ка круга (черт. 32). Площадь тр-ка ABC находится по формуле Герона:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,\,(a+c-b)\,(b+c-a)}.$$

Высота SH определяется из тр-ка ASH: $SH^2=l^2-R^2$. Воспользовавшись затем зависимостью $R=\frac{abc}{4S}$, найдём объём тетраэдра:

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)\,\,l^2-a^2b^2c^2}.$$

188. $DABC$ (черт. 33) — данный тетраэдр.

$$AB=DC=c;\ AC=BD=b;$$
$$BC=AD=a.$$

На основании ABC построим треугольную призму $ABCDEF$. Объём пирамиды $DBEFC$ равен удвоенному объёму данного тетраэдра.

Четырёхугольник $BEFC$ — ромб. Точка пересечения его диагоналей — O.

Объём пирамиды $DBEFC$ равен $\frac{1}{3}\cdot 2BO\cdot CO\cdot CO$.

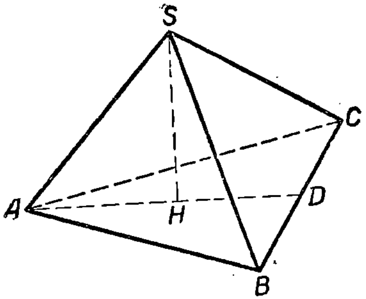
Объём данного тетраэдра в два раза менее.

Определив BO, CO и OD из прямоугольных тр-ков BDO, CDO и OBC, мы получим, что объём тетраэдра будет равен:

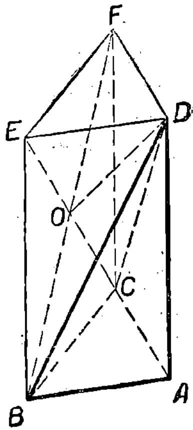
$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}.$$

189. $\dfrac{VQ\sqrt{Q}}{Q\sqrt{Q}-q\sqrt{q}}$.

189. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}(a^3+b^3)^2}$.



Черт. 32.



Черт. 33.

§ 3

190. Построить соответствующую развёртку куба и на этой развёртке построить отрезок, соединяющий две рассматриваемые точки. (Этот отрезок будет делить встретившееся ребро куба в отношении 1 : 2.)

190. Построить развёртку куба так, чтобы через все шесть граней куба можно было провести отрезок, концы которого лежали бы в отмеченных на развёртке двух точках. (При построении развёртки взятая на ребре куба точка будет принадлежать сторонам двух различных квадратов.) Искомое расстояние не зависит от положения выбранной на поверхности куба точки и всегда равно утроенной диагонали грани куба.

191. а) Девять плоскостей симметрии.

Шесть из этих плоскостей симметрии определяются диагональными плоскостями куба. Три плоскости симметрии равноудалены от плоскостей противолежащих граней.

б) Шесть плоскостей симметрии.

192. 24 способами. Число получающихся при этом „самосовмещений" куба равно числу его плоских углов. (Соответствующая теорема верна для любого правильного многогранника.)

192. 12 способами.

193 30 существенно различных способов.

193. 2 существенно различных способа.

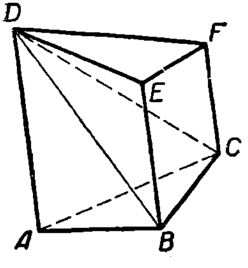
195. Усечённую треугольную призму $ABCDEF$ (черт. 34) можно разложить на три тетраэдра: $DABC$, $DBCE$, $DCEF$. Тетраэдр $DABC$ — один из названных в условии. Объём тетраэдра $DBCE$ не изменится, если его вершину D перенести в точку A. Полученный при этом преобразованный тетраэдр $EABC$ — второй из названных в условии. Объём тетраэдра $DFCE$ не изменится, если его вершины D и E перенести соответственно в точки A и B. Полученный тетраэдр $FABC$ и будет последним из упомянутых в задаче.

195. Объём каждой из пирамид $DABC$, $EABC$, $FABC$ равен $\frac{1}{3}$ произведения площади перпендикулярного сечения призматической поверхности (q) на соответствующее боковое ребро (AD, BE, CF). Следовательно, объём усечённой призмы $ABCDE$ (черт. 34) будет равен $\frac{AD+BE+CF}{3}\cdot q$.

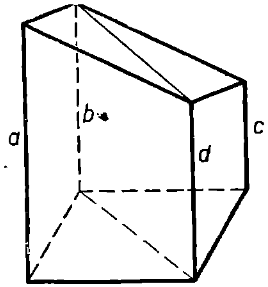
196. Обозначим боковые рёбра усечённого прямого параллелепипеда через a, b, c и d (черт. 35) и площадь его основания через q. Диагональной плоскостью данный усечённый параллелепипед рассечётся на две усечённые призмы. Объём каждой из этих призм определяется по выведенной в предыдущей задаче формуле. Объём данного усечённого параллелепипеда выразится следующим образом:

$$\frac{a+b+d}{3}\cdot\frac{q}{2}+\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{q}{2}=\frac{q}{2}\cdot\frac{a+b+d+b+c+d}{3}=$$

$$=\frac{(a+c)\cdot 3}{3}\cdot\frac{q}{2}=(a+c)\cdot\frac{q}{2}.$$



Черт. 34.



Черт. 35.

196. $\dfrac{m+k}{n+l}$.

197. Три плоскости. Объём куба делится этими плоскостями в следующем отношении:

1) 1 : 23; 2) 7 : 17; 3) 25 : 47.

198. Бесконечное множество плоскостей.

Указание. 1. В одной из боковых граней провести отрезок, параллельный стороне основания призмы и делящий соответствующие боковые рёбра в отношении 1 : 3.

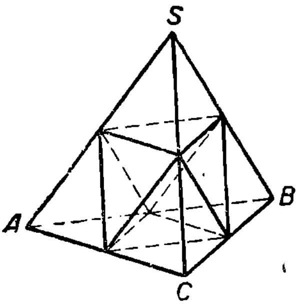
2. Построить прямую, соединяющую середину проведённого отрезка с наиболее удалённой от него вершиной призмы.

Плоскости, проходящие через построенную прямую, будут искомыми.

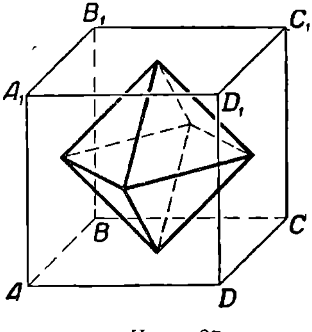
198. Точка, делящая рёбра призмы пополам. Плоскость проходит через середину ребра и середину оси призмы.

199. $\dfrac{b}{2}\sqrt{\dfrac{a-2b}{a+2b}}$. 201. $\dfrac{a^3h^3}{(a+h)^3}$. **202.** (См. черт. 36).

202. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **203.** (См. черт. 37). 203. 1 : 6.



Черт. 36.



Черт. 37.

205. а) 2 n; б) 2 n; в) указание. В одной из граней многогранника, имеющего n вершин, выделим треугольник, вершины которого совпадают с вершинами многогранника, принадлежащими этой грани. Выделенный тр-к определяется тремя элементами. Каждая из оставшихся n-3 вершин многогранника определится тремя элементами, например, расстояниями от вершин выделенного треугольника (т. е. соответствующими диагоналями).

Всего для построения рассматриваемого многогранника необходимо знать $3+(n-3)3=3n-6$; $L=3(n-2)$ его элементов.

ГЛАВА III

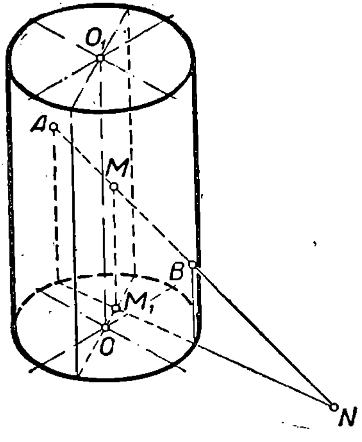
§ 1

210. Точки A и B — данные (черт. 38).

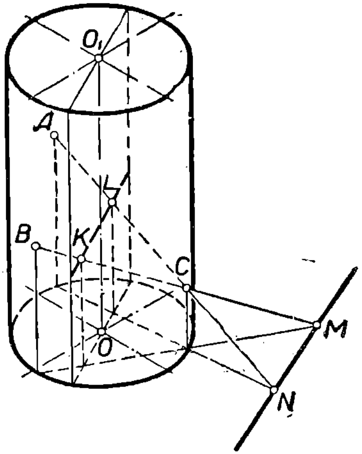
Построение искомых точек (M и N) показано на чертеже 38.

211. Пусть точки A, B и C — данные (черт. 39).

Построение искомых прямых KL и MN показано на чертеже 39.



Черт. 38.



Черт. 39.

212. Указание. Показать, что можно найти точку пересечения этой плоскости с любой образующей цилиндра. На чертеже 40 показано построение точки (K) пересечения плоскости (ABC) с одной из образующих цилиндра (точки A, B и C — данные).

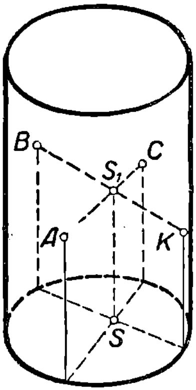
212 — 213. Указание. Сечение цилиндрической поверхности плоскостью строится по найденным точкам пересечения этой плоскости с некоторыми образующими цилиндра.

214. $h=nr$. 214. $h=2r(2\pm\sqrt{3})$.

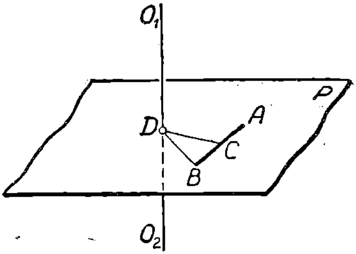
215. $\frac{H \pm \sqrt{H^2 - R^2}}{2}$. 215. 1 : 3.

216. Указание. (См. черт. 41.) Площадь „заметания“ будет равна площади кольца, радиусами которого являются отрезки CD и BD.

$$S = \pi (BD^2 - CD^2) = \pi BC^2 = \pi a^2$$

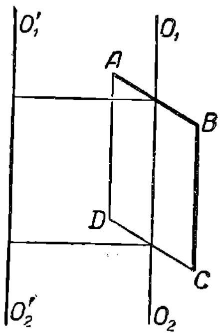


Черт 40.



Черт. 41.

216. Указание. При вращении квадрата $ABCD$ (см. черт. 42) около оси $O'_1O'_2 \parallel O_1O_2$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к плоскости квадрата и проходящей через O_1O_2, объём тела вращения не изменится (см. предыдущую задачу).



Черт. 42.

218. $\frac{\pi R^2 (a + b)}{2}$. 218. $\pi r^2 d$.

Указание. В задачах 218 и 218 данные усечённые цилиндры преобразовать в равновеликие им прямые круговые цилиндры (вращением секущих плоскостей).

219. $\frac{r^2 h (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

§ 2

220. Если данная точка лежит вне конической поверхности, задача имеет два решения.

Если данная точка лежит на конической поверхности, но не совпадает с её вершиной, задача имеет одно решение.

Если данная точка совпадает с вершиной конической поверхности, задача имеет бесконечное множество решений.

Задача не имеет решения, если точка дана во внутренней области конической поверхности.

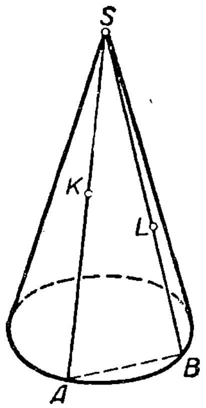
220. Задача имеет решение, если три плоскости пересекаются, но не проходят через одну прямую. Число решений — 4.

221. Три пересекающиеся, но не лежащие в одной плоскости прямые, определяют четыре конических поверхности.

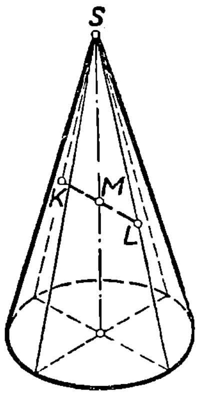
221. Указание. Основанием этих пирамид будут вписанные или описанные около основания конуса правильные многоугольники.

223. а) $\frac{rh\sqrt{3}}{r\sqrt{3}+h}$; б) $\frac{rh\sqrt{2}}{r\sqrt{2}+h}$.

224. В сечении конуса плоскостью, проходящей через точки S, K и L (см. черт. 41), получим равнобедренный тр-к ASB.



Черт. 43.

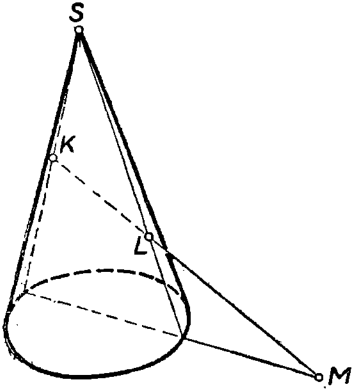


Черт. 44.

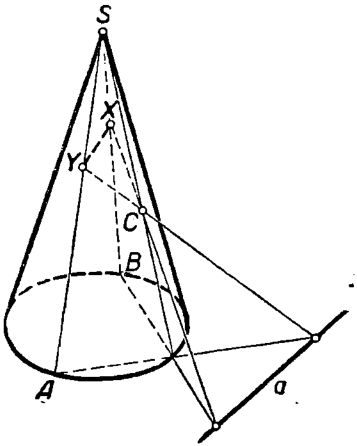
224. Точки K и L — данные (черт. 44). На чертеже показано построение искомой точки (M).

225. Точки K и L — данные (черт. 45). На чертеже показано построение искомой точки (M).

225. На чертеже 46 показано построение прямой xy, по которой пересекаются две плоскости: плоскость, проходящая через точки S, A и B, и плоскость, проходящая через прямую a и точку C.



Черт. 45.



Черт. 46.

226. На чертеже 47 показано построение прямой (KL) пересечения плоскости основания конуса с плоскостью, проходящей через три точки, данные на его поверхности (A, B, C). Проводя произвольную образующую конуса, можно найти точку пересечения этой образующей с построенной плоскостью сечения.

227. а) $180^\circ \sqrt{2} \approx 155^\circ$, б) $\sqrt{3} \cdot 180^\circ \approx 312^\circ$.

228. 30°. 228. $\frac{r}{4}$.

229. $\frac{H\sqrt{2}}{2}$.

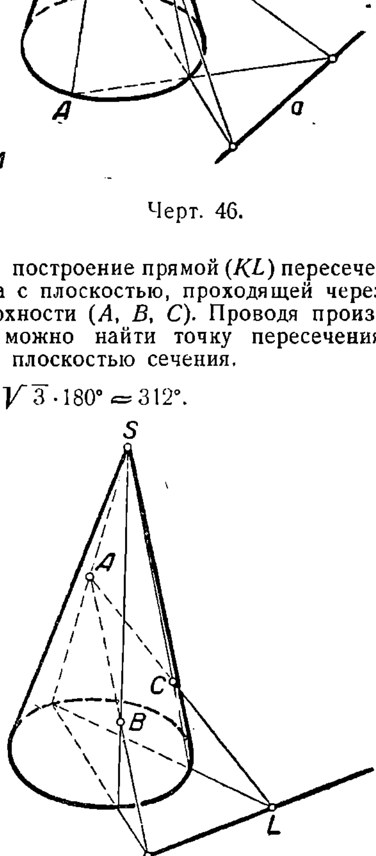
229. $\frac{1}{4}\pi r^2$.

230. $\frac{\pi r^2 m^2}{(m+n)^2}$.

230. 1 : 2 : 3.

231. Если образующую конуса разделить в среднем и крайнем отношении, то больший из полученных её отрезков равен радиусу основания.

231. Образующая равна диаметру основания равностороннего конуса.



Черт. 47.

232. $\frac{\pi h^3}{l}$.

232. $8\pi a^2$. Указание. Дополнить данный усечённый конус до конуса.

233. Отношение объёмов также не изменится.

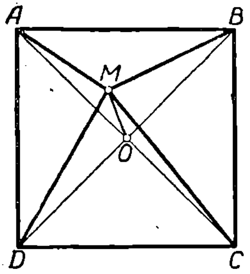
233. 1) $\frac{1}{2} R \sqrt[3]{4} \approx 0{,}8 R$.

2) Нет.

234. а) 25 : 36; б) 91 : 125.

237. Объём тела, образованного вращением тр-ков MAB, MBC, MCD, MDA, будет равен:

$$v = \frac{1}{3} \pi a (h^2 + k^2 + l^2 + m^2), \quad (1)$$



Черт. 48.

где a — сторона квадрата, h, k, l и m — расстояние точки M от соответствующей оси вращения.

Имеют место равенства: $h^2 + k^2 = MB^2$, $l^2 + m^2 = MD^2$.

Пусть O — центр квадрата и $OM = d$. Из тр-ка MBD имеем: $MB^2 + MD^2 = 2d^2 + a^2$. Производя подстановку в формулу (1), получим:

$$v = \frac{1}{3} \pi a (a^2 + 2d^2) \quad \text{(см. черт. 48).}$$

237. $\frac{7 \pi a^3 \sqrt{5}}{30}$.

Указание. Объём тела вращения будет равен сумме объёмов конуса и усечённого конуса без конической выемки.

238. $\frac{U}{4}$. 238. $\frac{2}{3} \pi r R h$.

239. 2 : 1.

239. 27 : 5. Указание. Часть цилиндра, заключённая внутри конической поверхности, состоит из конуса и цилиндра (их общим основанием является общее круговое сечение данного конуса и цилиндра).

240. $\frac{\pi}{2} \sqrt[3]{2 (R^3 + r^3)^2}$

240. $\pi^2 (R^3 - r^3)$.

241. $R^2 + rR - r^2 (3n - 1) = 0$;
при $n = 1$, 7, 19 зависимость между R и r выражается рациональной формулой.

241. $r^2 + Rr - R^2 (n - 1) = 0$;
при $n = 1$, 3, 7 зависимость между r и R выражается рациональной формулой.

§ 3

242. Сфера, радиус которой равен расстоянию от центра шара до плоскости равных круговых сечений.

242. а) Все внутренние точки кругового сечения данного шара плоскостью, проходящей через середину любых трёх рассматриваемых хорд.

б) Указание. Хорды будут параллельны прямой пересечения данных плоскостей.

243. Плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через его середину.

243. Окружность данного радиуса, лежащая в плоскости, перпендикулярной к отрезку, соединяющему данные точки, и имеющая центр в середине этого отрезка.

244. Прямая, проходящая через центр окружности, проведённой через три данные точки, и перпендикулярная к плоскости этой окружности.

245. Плоскость, перпендикулярная к данной прямой и проходящая через взятую на этой прямой точку.

246. Две плоскости, перпендикулярные к плоскости данных прямых и проходящие через биссектрисы углов, образованных этими прямыми. (Если данные прямые пересекаются.)

247. Прямая, перпендикулярная к данной плоскости и проходящая через данную точку. (Из точек этой прямой исключается данная в плоскости точка.)

248. Биссекторные плоскости образовавшихся двугранных углов.

249. Прямая, проходящая через данную точку и центр сферы. (Исключая центр сферы и данную точку.)

252. $\frac{\sqrt{R^2p^2 - S^2}}{p}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ и S — площадь треугольника.

252. $\frac{\sqrt{16\,R^2S^3 - a^2b^2c^2}}{4\,S}$, где S — площадь треугольника.

253. Указание. Рассмотреть сечение шара плоскостью, перпендикулярной к прямой пересечения данных плоскостей и проходящей через данную точку.

254. Площадь шаровой поверхности, построенной на гипотенузе треугольника, как на диаметре, равна сумме площадей шаровых поверхностей, диаметром которых являются катеты.

254. Площади равны.

255. а) Площади равны; б) отношение радиусов равно 3 : 1.

265. $\pi\sqrt{(r_1^2 - r_2^2 - h^2)^2 + 4r_1^2h^2}$. 256. а) $\pi\,(r^2 + h^2)$; б) πa^2.

258. $\frac{4R}{m+1}$. **259.** $\frac{nR}{n-2}$. 259. $\frac{2\pi R^2 h}{R+h}$.

260. $R\sqrt[3]{15}$. **261.** $\frac{m^2(m+3n)}{n^2(n+3m)}$. 261. $\frac{3n-2}{n^3}$.

262. $\frac{5V}{16}$. 262. $5:11$. **263.** $12\frac{2}{3}a^3$ или $144\frac{2}{3}a^3$.

263. $\sqrt[3]{\frac{6p}{\pi}}$. 264. $\frac{\pi}{6}(a^3-b^3)$. **265** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

265. $\frac{6R}{m+2}$.

ГЛАВА IV

266. $\frac{7}{4}S$. 266. $\frac{11}{12}S$ **267.** $1:12$. 267. $\frac{1}{4}a^3$.

Указание. Общая часть всех построенных призм представляет собой куб с ребром $\frac{a}{2}$, на каждой грани которого, как на основании, построены правильные четырёхугольные пирамиды с высотой, равной $\frac{a}{4}$. (Вершины пирамид лежат в центрах граней данного куба.)

268. См задачу **96.** Центром вписанного в тетраэдр шара является точка пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов этого тетраэдра.

268. См. задачу 84. Центром описанного около тетраэдра шара является точка пересечения плоскостей, каждая из которых перпендикулярна к ребру тетраэдра и делит это ребро пополам.

269. а) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

270. а) Биссекторная плоскость двугранного угла при основании должна делить пополам заключённый внутри пирамиды отрезок прямой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при боковых рёбрах пирамиды.

б) Плоскость, делящая пополам угол, образованный образующей с плоскостью основания, должна проходить через середину отрезка, соединяющего центры оснований.

270. Боковые рёбра усечённой пирамиды должны быть равными.

271. $1:2:3$; $1:2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$.

271. $1:3:9$; $1:3\sqrt{3}:27$. **272.** $\frac{a^3(15-8\sqrt{2})}{12}$.

272. $\frac{\pi a^3(8\sqrt{6}-9\sqrt{2})}{108}$. **273.** См. задачи **158, 161.**

273. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. См. **162.** **274.** $\frac{2\pi R^2}{3}$.

Указание. Продолжив все грани тетраэдра до пересечения с поверхностью шара, разделим эту поверхность на 10 частей, из которых 4 бо́льших части равны между собой и 6 меньших также равны. Для определения площади этих частей составить два уравнения с двумя неизвестными.

274. $\frac{S}{6}$.

Указание. Провести через точки пересечения боковых рёбер тетраэдра с поверхностью шара плоскость, параллельную основанию, и свести затем решение к предыдущей задаче.

275. Площадь „шапочки" равна πr^2, т. е. не зависит от R.

276. Радиус описанного шара $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

радиус вписанного шара $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Указание. Диаметр описанного шара равен диагонали октаэдра. Вписанный в октаэдр шар касается его граней в точках пересечения биссектрис этих граней. (Эти точки являются вершинами вписанного в октаэдр куба.)

276. $\pi : 9$.

277. $\frac{a}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$; $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

Указание. Для определения радиуса описанного шара выбрать в додекаэдре 8 вершин так, чтобы эти вершины являлись вершинами вписанного в додекаэдр куба. Диагональ этого куба равна диаметру описанного шара Радиус вписанного шара равен катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна радиусу описанного около додекаэдра шара, а другой катет равен радиусу описанной около его грани окружности.

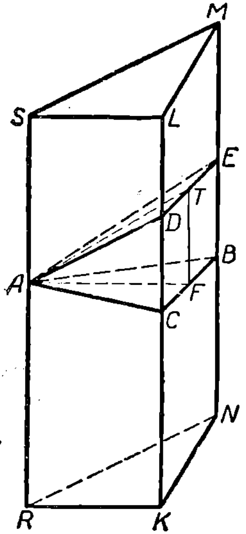
277. $\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $\frac{a}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}}$.

Указание. Выбрать пять вершин икосаэдра, лежащие в одной плоскости. Найти другие пять вершин, лежащих в плоскости, параллельной первой. Тогда диаметр описанного шара будет составлен из высот двух правильных пятиугольных пирамид и расстояний между построенными плоскостями. Радиус вписанного шара определяется как катет прямоугольного тр-ка, гипотенузой которого является радиус описанного шара, и вторым катетом — радиус описанной около грани икосаэдра окружности.

278. $R\sqrt[4]{8}$. 278. 4 : 1 (см. 256) **279.** $\frac{r}{4}$.

279. $\frac{R(\sqrt{6}+2)}{2}$. **280.** $3r$; $\frac{r}{3}$. 280. $\frac{r}{5}(5\pm\sqrt{15})$.

281. Указание. Данный шар вписать в куб. Соединив центр шара с вершинами куба, получим 6 пирамид. В каждую из этих пирамид можно вписать шар.



Черт. 49.

282. 2) Указание. Пусть тр-к ABC (черт. 49) является перпендикулярным сечением данного бруска. Измерив отрезки AB, BC и AC, строим на плоскости тр-к $A_1B_1C_1$, равный тр-ку ABC. Углы построенного тр-ка равны линейным углам названных двугранных углов.

3) а) Пусть плоскость тр-ка ADE наклонена к ребру RS под данным углом α ($\angle SAT=\alpha$) Прямоугольный тр-к AFT (где AF — высота тр-ка ABC и AT — высота тр-ка ADE) может быть построен по катету AF (см предыдущее указание) и острому $\angle TAF=90^\circ-\alpha$. Отложив на ребре бруска отрезок $CD=TF$, построим следы искомого сечения.

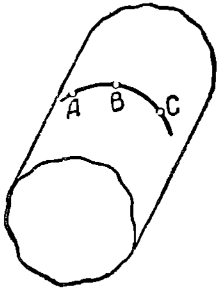
3) б) Построение, аналогичное предыдущему Прямоугольный тр-к AFT строится на плоскости по катету AF и острому углу ATF.

4. Следует определить диаметр окружности, вписанной в тр-к $A_1B_1C_1$.

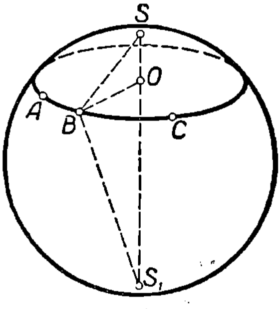
283. Указание. Сначала необходимо построить перпендикулярное сечение этого бруска.

284. Указание. На сохранившейся части цилиндрической поверхности построить след перпендикулярного сечения (дугу соответствующей окружности).

Взять на этой дуге три точки A, B и C, измерить расстояния AB, BC и AC (см. черт. 50). По сторонам, равным найденным отрезкам, построить на плоскости тр-к $A_1B_1C_1$; диаметр описанного около тр-ка $A_1B_1C_1$ круга равен искомому. (Найти этот диаметр построением и вычислением.)



Черт. 50.



Черт. 51.

285. Указание. Из некоторой точки S, лежащей на поверхности шара, описать на этой поверхности окружность (см. черт. 51).

На построенной окружности взять три точки A, B и C и определить радиус r этой окружности (см. предыдущую задачу).

Измерив расстояние SB, можем построить на плоскости прямоугольный тр-к BSS_1 (где SS_1 — диаметр шара) по катету BS, высоте $BO = r$, опущенной на гипотенузу. (Произведя измерение расстояний AB, AC, BC и BS, можно определить диаметр шара путём соответствующих вычислений.)

286. Указание.

Построения, аналогичные выполненным в предыдущей задаче, производятся на сохранившейся части сферической поверхности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *Л. А. Сидорова*
Техн. редактор *М. И. Миронцева*
Корректор *З. И. Почаева*

Сдано в набор 2/VIII 1955 г. Подписано к печати 31/X 1955 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 5,5 (4,51). Уч.-изд. л. 4,51. Тираж 35000 экз.
АО 05599. Учпедгиз, Москва, Чистые пруды, 6. Заказ 164.
Цена 1 руб. 20 коп.

Отпечатано в Книжной фабрике имени Камиль Якуб Отдела издательств и полиграфической промышленности Министерства культуры ТАССР. г. Казань, ул. Баумана, 19, 1955 г.

Цена 1 руб. 20 коп.

Р. С. ЧЕРКАСОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

УЧПЕДГИЗ — 1956