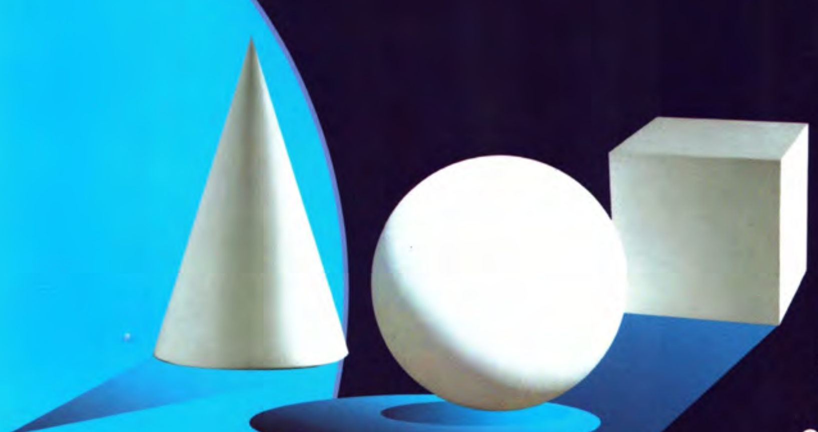
КОНТРОЛЬНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

А. Р. РЯЗАНОВСКИЙ, Д. Г. МУХИН

ГЕОМЕТРИЯ

8 КЛАСС

- аттестация по всем темам курса
- трехуровневый конфигуратор сложности
- диагностические контрольные задачи – комплексная проверка усвоения темы
- вопросы для обязательной устной аттестации
- ответы ко всем заданиям
- рекомендации по оцениванию работ



ЭКЗАМЕН®

КОНТРОЛЬНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

А. Р. РЯЗАНОВСКИЙ, Д. Г. МУХИН

ГЕОМЕТРИЯ

8 КЛАСС

- аттестация по всем темам курса
- трехуровневый конфигуратор сложности
- диагностические контрольные задачи — комплексная проверка усвоенности темы
- вопросы для обязательной устной аттестации
- ответы ко всем заданиям
- рекомендации по оцениванию работ

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2014

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Р99

Рязановский А. Р.

Р99 Геометрия: 8 класс: контрольные измерительные материалы / А. Р. Рязановский, Д. Г. Мухин. — М. : Издательство «Экзамен», 2014. — 96 с. (Серия «Контрольные измерительные материалы»)

ISBN 978-5-377-07660-5

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения)

В данном пособии представлены контрольные измерительные материалы по геометрии для учащихся 8 класса. Тематика предлагаемых тестов охватывает все темы геометрии 8 класса, соответствует программе общеобразовательных учреждений по геометрии и аналогичным материалам ГИА. Их использование позволит оценить усвоение учащимися тем курса, а также подготовить их к тестовой форме проверки знаний.

В конце пособия предложены диагностические контрольные задачи для комплексной проверки усвоенности тем, а также вопросы для обязательной устной аттестации и ответы ко всем заданиям.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Справочное издание

Рязановский Андрей Рафаилович
Мухин Дмитрий Геннадьевич

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

КОНТРОЛЬНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16466 от 25.03.2013 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо.* Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова.* Корректор *Т. И. Шитикова*
Дизайн обложки *А. А. Козлова.* Компьютерная верстка *М. А. Серова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8, www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz; тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Подписано в печать 23.12.2013. Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 2,1. Усл. печ. л. 6. Тираж 10 000 экз. Заказ № 82

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2;
953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в ООО «Красногорская типография»,
143405, Московская обл., Красногорский р-н, г. Красногорск, Коммунальный квартал, д. № 2.
www.ktprint.ru

ISBN 978-5-377-07660-5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ... 6

Тест 1. Многоугольники (40–45) ... 8

Вариант 1 ... 8
Вариант 2 ... 9

Тест 2. Определение, свойства сторон и углов параллелограмма (20–25) ... 11

Вариант 1 ... 11
Вариант 2 ... 12

Тест 3. Свойства высот и биссектрис углов параллелограмма (20–25) ... 14

Вариант 1 ... 14
Вариант 2 ... 15

Тест 4.Ромб, прямоугольник, квадрат (35–40) ... 17

Вариант 1 ... 17
Вариант 2 ... 18

Тест 5. Свойства и признаки параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата (40–45) ... 20

Вариант 1 ... 20
Вариант 2 ... 21

Тест 6. Трапеция (25–30) ... 22

Вариант 1 ... 22
Вариант 2 ... 23

Тест 7. Средняя линия треугольника и трапеции. Теорема Фалеса, теорема о пропорциональных отрезках (30–35) ... 25

Вариант 1 ... 25
Вариант 2 ... 26

Тест 8. Центральная и осевая симметрия (30–35) ... 28

Вариант 1 ... 28
Вариант 2 ... 29

Тест 9. Площадь (40–45) 31
Вариант 1 31
Вариант 2 33
Тест 10. Теорема Пифагора. Обратная теорема Пифагора 35
Вариант 1 35
Вариант 2 36
Тест 11. Подобные треугольники 38
Вариант 1 38
Вариант 2 39
Тест 12. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике 41
Вариант 1 41
Вариант 2 42
Тест 13. Практические задачи на подобие (20–25) 44
Вариант 1 44
Вариант 2 45
Тест 14. Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов 47
Вариант 1 47
Вариант 2 47
Тест 15. Тригонометрические функции острого угла и соотношения между ними. Значения тригонометрических функций острых углов 49
Вариант 1 49
Вариант 2 50
Тест 16. Пропорциональные отрезки в круге 52
Вариант 1 52
Вариант 2 53
Тест 17. Окружность и касательная к окружности 55
Вариант 1 55
Вариант 2 56

Тест 18. Центральные и вписанные углы ... 58
Вариант 1 ... 58
Вариант 2 ... 59
Тест 19. Замечательные точки треугольника. Вписанная и описанная окружности треугольника ... 61
Вариант 1 ... 61
Вариант 2 ... 62
Тест 20. Вписанные и описанные четырехугольники ... 64
Вариант 1 ... 64
Вариант 2 ... 65
Тест 21. Векторы ... 68
Вариант 1 ... 68
Вариант 2 ... 70
Тест 22. Скалярное произведение векторов (без координат) ... 72
Вариант 1 ... 72
Вариант 2 ... 73
Задачи к итоговому тесту по геометрии за курс 8 класса (120–135) ... 75
Вариант 1 ... 75
Вариант 2 ... 77
Диагностические контрольные задачи ... 80
Вопросы для проведения итоговой аттестации за курс геометрии 8 класса ... 85
Ответы к тестам ... 88
Ответы к диагностическим контрольным задачам ... 96

ВВЕДЕНИЕ

Содержание курса геометрии в 8 классе определяется не каким-либо учебником или учебным пособием. Для этого существуют специальные документы: **Программа изучения курса геометрии, Программа развития и формирования универсальных учебных действий для основного общего образования, ФГОС общего образования.** Поэтому представленные в этой книге материалы разработаны так, чтобы ими смогли воспользоваться учителя, работающие по любым учебникам геометрии, входящим в Федеральный перечень учебников, рекомендованных МОиН РФ к использованию в учебном образовательном процессе общеобразовательных учреждений РФ. Вспомогательную роль: определение последовательности тем тестов, которой мы придерживались в данном случае, выполнял учебник «Геометрия 7–9» под редакцией Л.С. Атанасяна.

В этой книге собраны и расположены в определённом порядке варианты небольших самостоятельных работ по курсу геометрии для учащихся 8 классов общеобразовательных школ, которые изучают предмет по УМК под редакцией Л.С. Атанасяна. Эти работы представлены в тестовой форме.

Тематика предлагаемых тестов охватывает все без исключения темы геометрии 8 класса.

Трудность заданий внутри каждого теста постепенно возрастает с возрастанием номера задания, но, в то же время, вполне посильна учащимся любых общеобразовательных школ.

Время выполнения заданий каждого теста, по нашему мнению, не должно превышать продолжительности одного урока — 40–45 минут. Некоторые тесты рассчитаны на меньшее время. Рекомендуемое время (в минутах) выполнения каждого теста указано в его заголовке в скобках.

Примерное оценивание работы мы рекомендуем проводить так, чтобы удовлетворительная оценка была выставлена при условии выполнения не менее 50% заданий теста с учётом всех вопросов, которых иногда больше, чем самих заданий (в одном задании может быть несколько вопросов). Таким образом, возможные варианты оценивания выполнения теста имеют следующий вид.

Процент	Оценка
Менее 50%	два
51%–60%	три
61%–70%	четыре
71%–90%	Пять
91%–100%	Две пятёрки

В книге — 22 теста, посвященных всем темам планиметрии, изучаемым в 8 классе. Книга заканчивается итоговым тестом, состоящим из 14 заданий, разбитых на три части и списком диагностических контрольных задач, которые помогут провести комплексную проверку усвоенности тем. Их при желании учитель может рассматривать в соответствующее время перед тестированием. Отметим, что третья часть итогового теста содержит задачи олимпиадного характера, причём трудные задачи олимпиад. Поэтому результаты решения этих задач мы рекомендуем оценивать только высокими баллами. Это означает, что ученик может получить итоговую оценку «5», не решив при этом ни одной задачи из части 3. Здесь учитель должен ориентироваться на общий уровень подготовки своих учащихся.

В заключение отметим, что наша книга может быть полезна не только учителям математики, ученикам 7–8–9 классов, студентам педагогических университетов, но также и родителям учеников, которые захотят убедиться в успешности своих детей при изучении геометрии. Ко всем тестам и дополнительным контрольным задачам имеются ответы, а иногда указания и решения.

Тест 1. Многоугольники (40–45)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Дан выпуклый десятиугольник $A_1A_2 \dots A_{10}$. Сколько общих точек с прямой A_1A_2 имеет отрезок A_5A_3?

Варианты ответов

1	2	3	4
0	1	Бесконечно много	Нельзя определить

2. Дан невыпуклый десятиугольник $A_1A_2 \dots A_{10}$. Сколько общих точек с прямой A_1A_2 имеет отрезок A_3A_5?

Варианты ответов

1	2	3	4
0	1	Бесконечно много	Нельзя определить

3. Дан выпуклый семиугольник $A_1A_2 \dots A_7$. Сколько всего диагоналей выходят из его вершин A_1 и A_2?

Варианты ответов

1	2	3	4	5
14	10	8	7	Нельзя определить

4. Найдите сумму всех углов выпуклого семнадцатиугольника $A_1A_2 \dots A_{17}$.

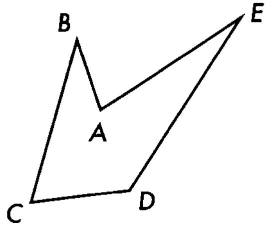
Варианты ответов

1	2	3	4	5
6 120°	360°	2 700°	17 000°	Нельзя определить

Часть II

5. Углы выпуклого четырёхугольника относятся как 2 : 3 : 7 : 6. Найдите величины этих углов.

6. Дан пятиугольник $ABCDE$ (см. рис.), $\angle B = 40°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 140°$, $\angle E = 20°$. Найдите величину угла A.



7. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый шестиугольник?

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Дан выпуклый двенадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$. Сколько общих точек с прямой A_3A_8 имеет ломаная $A_4A_{11} \ldots A_{12}$?

Варианты ответов

1	2	3	4
0	1	Бесконечно много	Нельзя определить

2. Дан невыпуклый двенадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$. Сколько общих точек с прямой A_3A_8 имеет ломаная $A_4A_{11}A_{12}$?

Варианты ответов

1	2	3	4
0	1	Бесконечно много	Нельзя определить

3. Дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2 \ldots A_8$. Сколько всего диагоналей выходят из его вершин A_1 и A_5?

Варианты ответов

1	2	3	4	5
14	10	8	9	Нельзя определить

4. Найдите сумму всех углов выпуклого восемнадцатиугольника $A_1A_2 \dots A_{18}$.

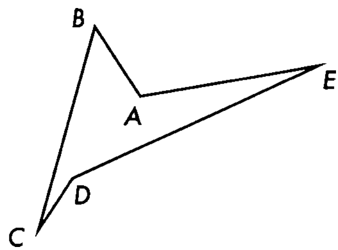
Варианты ответов

1	2	3	4	5
2 880°	360°	3 240°	6 480°	Нельзя определить

Часть II

5. Углы выпуклого четырёхугольника относятся как 1 : 4 : 6 : 7. Найдите величины этих углов.

6. Дан пятиугольник $ABCDE$ (см. рис.), $\angle B = 40°$, $\angle C = 20°$, $\angle D = 190°$, $\angle E = 30°$. Найдите величину угла A.



7. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый семиугольник?

Тест 2. Определение, свойства сторон и углов параллелограмма (20–25)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Из приведённых предложений выберите определение параллелограмма

1) Параллелограмм — четырёхугольник на плоскости, у которого противоположные стороны попарно равны.
2) Параллелограмм — четырёхугольник на плоскости, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
3) Параллелограмм — четырёхугольник на плоскости, у которого противоположные углы попарно равны.
4) Параллелограмм — четырёхугольник на плоскости, у которого противоположные углы попарно равны, противоположные стороны попарно равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам.

2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 128°$. Найдите углы B и C.

Варианты ответов

1		2		3		4		5	
B	*C*	*B*	*C*	*B*	*C*	*B*	*C*	*B*	*C*
128°	128°	128°	52°	52°	128°	52°	52°	Невозможно найти	

3. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 11\angle B$. Найдите $\angle C$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	15	110	165	Невозможно найти

4. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 12$, а периметр 80. Найдите сторону BC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
28	38	34	12	Невозможно найти

Часть II

5. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 34. Периметр треугольника ABC равен 25. Найдите длину диагонали АС параллелограмма $ABCD$.

6. Угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен 60°, $\angle CAB = 20°$. Найдите величину угла BCD, если известно, что он тупой.

7. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°, $BC = 10$, $BD \perp AB$. Найдите периметр параллелограмма.

8. В плоском четырёхугольнике две противоположные стороны равны между собой, а две другие стороны параллельны. Будет ли этот четырёхугольник параллелограммом? Ответ следует обосновать.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Из приведённых предложений выберите те, которые не являются определением параллелограмма

1) Параллелограмм — четырёхугольник на плоскости, у которого противоположные стороны попарно равны.
2) Параллелограмм — четырёхугольник на плоскости, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
3) Если пара параллельных прямых пересекает другую пару параллельных прямых, то полученный в результате четырёхугольники — параллелограмм.
4) Если у плоского четырёхугольника противоположные углы попарно равны, противоположные стороны попарно равны и диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B = 81°$. Найдите углы А и С.

Варианты ответов

1		2		3		4		5	
А	С	А	С	А	С	А	С	А	С
99°	99°	81°	81°	81°	99°	99°	81°	Невозможно найти	

3. В параллелограмме $ABCD$ $5\angle A = \angle B$. Найдите $\angle D$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
30°	60°	120°	150°	Невозможно найти

4. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 40$, а периметр 100. Найдите сторону BC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
60	50	40	10	Невозможно найти

Часть II

5. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 78. Периметр треугольника ABC равен 46. Найдите длину диагонали АС параллелограмма $ABCD$.

6. Угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен 30°, $\angle CAB = 10°$. Найдите величину угла BDC, если известно, что он тупой.

7. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°, $BC = 40$, $BD \perp CD$. Найдите периметр параллелограмма.

8. В плоском четырёхугольнике противоположные углы попарно равны. Будет ли этот четырёхугольник параллелограммом? Ответ следует обосновать.

Тест 3. Свойства высот и биссектрис углов параллелограмма (20–25)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. В параллелограмме $ABCD$ прямая, содержащая высоту, проведённую из вершины острого угла A, образует с прямой DC угол, равный $12°$. Найдите угол B.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
12	24	68	102	Невозможно найти

2. В параллелограмме $ABCD$ прямая, содержащая биссектрису $\angle A$, образует с прямой BC угол, равный $10°$. Найдите угол D.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
100°	150°	120°	160°	Невозможно найти

3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 12$. Найдите расстояние от середины CD до точки пересечения биссектрис углов C и D.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
6	12	24	36	Невозможно найти

4. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен $65°$. Отрезки CC_1 и CC_2 — его высоты. Найдите величину $\angle C_1CC_2$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
135°	135°	115°	165°	Невозможно найти

5. В параллелограмме $ABCD$ отрезок BK — биссектриса $\angle B$ и точка K лежит на стороне AD, причём $AK = 7$, $KD = 23$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
30	74	90	126	Невозможно найти

Часть II

6. Докажите, что точки пересечения всех четырёх биссектрис параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

7. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ делят сторону BC на три части, отношение которых, считая от точки B, равно 2 : 3 : 2. Найдите длины сторон параллелограмма, если его полупериметр равен 216.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. В параллелограмме $ABCD$ прямая, содержащая высоту, проведённую из вершины острого угла A, образует с прямой BC угол, равный 21°. Найдите угол D.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
111°	121°	21°	159°	Невозможно найти

2. В параллелограмме $ABCD$ прямая, содержащая биссектрису $\angle B$, образует с прямой CD угол, равный 40°. Найдите угол A.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
21°	59°	100°	159°	Невозможно найти

3. В параллелограмме $ABCD$ $BC = 50$. Найдите расстояние от середины AD до точки пересечения биссектрис углов A и D.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	20	25	50	Невозможно найти

4. В параллелограмме $ABCD$ высоты CC_1 и CC_2, причём $\angle C_1CC_2 =$ $= 70°$. Найдите величину угла D.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
20°	70°	110°	160°	Невозможно найти

5. В параллелограмме $ABCD$ отрезок BK — биссектриса $\angle B$, точка K лежит на стороне AD, причём $AK = 17$, $KD = 33$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
100	117	132	134	Невозможно найти

Часть II

6. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и AD отложены равные отрезки BF и DE соответственно. Отрезки AF и BE пересекаются в точке M, отрезки DF и CE пересекаются в точке L. Докажите, что $MELF$ — параллелограмм.

7. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ делят сторону BC на три части, отношение которых, считая от точки B, равно $4 : 3 : 4$. Найдите длины сторон параллелограмма, если его полупериметр равен 270.

Тест 4. Ромб, прямоугольник, квадрат (35–40)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Из приведённых утверждений выберите верные
   1) Если в параллелограмме углы, прилежащие к его одной стороне, равны то этот параллелограмм — ромб.
   2) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.
   3) Если в четырёхугольнике диагонали равны, перпендикулярны и одна из них является биссектрисой его противоположных углов, то этот четырёхугольник — квадрат.

2. Диагональ ромба образует с его стороной угол, равный 43°. Найдите тупой угол ромба.
   Варианты ответов

1	2	3	4	5
94	110	137	165	Невозможно найти

3. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AC = 28$ и диагонали пересекаются в точке O. Найдите расстояние от O до стороны CD.
   Варианты ответов

1	2	3	4	5
14	7	10	6	Невозможно найти

4. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в её середине — точке M и сторона $AD = 120$. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.
   Варианты ответов

1	2	3	4	5
480	300	360	720	Невозможно найти

5. В квадрате $ABCD$ проведены биссектрисы углов BAC и DAC, пересекающие стороны BC и CD квадрата в точках M и L соответственно. Найдите наибольший угол треугольника AML.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
167,5	135	75	67,5	Невозможно найти

Часть II

6. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AC = 28$ и диагонали пересекаются в точке О. Найдите высоты ромба.

7. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла C делит сторону AD в отношении 2 : 5. Найдите отношение длин сторон.

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки F и G так, что $BF = CG$. Найдите угол между прямыми BG и AF.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Из приведённых утверждений выберите верные

1) Если в четырёхугольнике диагонали перпендикулярны и равны, то этот четырёхугольник — квадрат.
2) Если в четырёхугольнике диагонали являются биссектрисами его противоположных углов, то этот четырёхугольник — ромб.
3) Если в параллелограмме равны диагонали, то его углы, прилежащие к одной стороне, тоже равны.

2. Диагональ ромба образует с его стороной угол, равный 58°. Найдите острый угол ромба.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
32	64	72	84	Невозможно найти

3. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 120°$, $BD = 32$ и диагонали пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до стороны BC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
8	16	10	24	Невозможно найти

4. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в её середине — точке M и сторона $CD = 20$. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
160	100	80	120	Невозможно найти

5. В квадрате $ABCD$ проведены биссектриса угла BAC, пересекающая сторону BC в точке M. Найдите больший угол треугольника AMC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
67,5	125	65	112,5	Невозможно найти

Часть II

6. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 120°$, $BD = 32$. Найдите высоты ромба.

7. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла C делит сторону AD в отношении $3 : 7$. Найдите отношение сторон этого прямоугольника.

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки P и T так, что $BT = AP$ и отрезки BT и AP пересекаются в точке O. Найдите угол TOP.

Тест 5. Свойства и признаки параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата (40–45)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Докажите, что если в четырёхугольнике противоположные углы попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

2. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины M и L сторон AB и CD соответственно. Диагональ BD пересекает отрезки CM и AL соответственно в точках F и K. Докажите, что
а) $\triangle BFC = \triangle DKA$; б) $\triangle BKA = \triangle DFC$; в) $BF = FK = KD$.

3. Докажите, что если высота, опущенная из тупого угла ромба, делит его сторону пополам, то острый угол ромба равен $60°$.

4. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

5. Дан квадрат $ABCD$ и точки M, L, P, Q на его сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Известно, что $AM = BL = CP = DQ$. Докажите, что $MLPQ$ — квадрат.

Часть II

6. Внутри квадрата $ABCD$ точка G выбрана так, что $\angle GAB = \angle GBA = 60°$. Найдите величину угла AGC.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Докажите, что если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

2. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины M и L сторон AB и CD соответственно. Диагональ BD пересекает отрезки CM и AL соответственно в точках F и G. Докажите, что

   а) $\triangle CFL = \triangle AGM$; б) $\triangle BFM = \triangle DGL$; в) FG делит ML пополам.

3. Высоты BH и BG, опущенные из тупого угла B ромба $ABCD$ таковы, что $BH = AH$. Докажите, что $\angle BCG = 45°$.

4. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая PQ, причём $P \in BC$, $Q \in AD$ и $AP = PC$. Докажите, что $AQCP$ — ромб.

5. Дан квадрат $ABCD$ и точки M, L, P, Q на его сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Известно, что $BM = CL = DP = AQ$. Докажите, что отрезки MP и LQ перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам.

Часть II

6. Вне квадрата $ABCD$ точка S выбрана так, что треугольник ASD — равносторонний. Найдите углы треугольника BSA.

Тест 6. Трапеция (25–30)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $BC = 2$ см и $AD = 20$ см. Из вершины B на основание AD опущена высота BH. Найдите HD.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	8	11	9	Невозможно найти

2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (угол A прямой) основание BC вдвое меньше AD и диагональ $AC = 1$ см. Найдите боковую сторону CD трапеции $ABCD$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
1	2	3	4	Невозможно найти

3. В трапеции $ABCD$ основания BC, AD, диагональ $BD = 18$ см, $\angle BAD = 60°$ и боковая сторона AB перпендикулярна диагонали BD. Найдите высоту трапеции.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
3	9	6	12	Невозможно найти

4. В трапеции $ABCD$, $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA = 70°$. Найдите угол между прямыми AB и CD.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
40°	60°	80°	90°	Невозможно найти

Часть II

5. В трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проходящий через середину H боковой стороны CD пересекает основание AD в его середине — точке О. Найдите $\angle ACD$.

6. В трапеции $ABCD$, $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 40°$. Диагональ AC трапеции делит её на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $BC = 12$ см и $AD = 30$ см. Из вершины B на основание AD опущена высота BH. Найдите HD.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
11	14	18	21	Невозможно найти

2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (угол A прямой) основание BC вдвое меньше AD и боковая сторона $CD = 10$ см. Найдите диагональ AC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
5	10	20	8	Невозможно найти

3. В трапеции $ABCD$ основания BC, AD, диагональ $BD = 28$ см, $\angle BAD = 60°$ и боковая сторона AB перпендикулярна диагонали BD. Найдите высоту трапеции.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
4	7	14	21	Невозможно найти

4. В трапеции $ABCD$, $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 30^\circ$, $\angle CDA = 100^\circ$. Найдите угол между прямыми AB и CD.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
50°	60°	70°	90°	Невозможно найти

Часть II

5. В трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проходящий через середину H боковой стороны CD пересекает основание AD в его середине — точке О. Найдите AD, если $CO = 5$.

6. В трапеции $ABCD$, $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 80^\circ$. Диагональ AC трапеции делит её на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

Тест 7. Средняя линия треугольника и трапеции. Теорема Фалеса, теорема о пропорциональных отрезках (30–35)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. В треугольнике ABC, $BC = 36$ см. Через точку M, которая делит сторону AC так, что $AM : MC = 5 : 7$, проведена прямая ML параллельно прямой AB, пересекающая BC в точке L. Найдите LC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
11	18	20	21	Невозможно найти

2. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равна 51 см. Через точку M, которая делит боковую сторону BC так, что $BM : MC = 11 : 6$, проведена прямая MN параллельно основанию AB, пересекающая AD в точке N. Найдите AN.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
33	22	11	6	Невозможно найти

3. Диагонали четырёхугольника равны 120 см и 248 см. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
240	368	496	128	Невозможно найти

4. Дан произвольный четырёхугольник $ABMT$ (никакие пары противоположных сторон не параллельны). Точки L и H — середины отрезков AM и MB. Точки G и Y — середины отрезков AT и BT. Найдите периметр четырёхугольника $LHYG$, если $AB + MT = 20$

Варианты ответов

1	2	3	4	5
40	30	20	10	Невозможно найти

Часть II

5. В трапеции $ABCD$ на боковой стороне CD отмечена точка H так, что $CH : HD = 2 : 5$. Прямая HG, параллельная основаниям BC и AD, пересекает сторону AB в точке G. Найдите GH, если $BC = 14$, $AD = 21$.

6. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка D так, что $CD : DB = 1 : 2$. В каком отношении прямая, проходящая через точку B и середину отрезка AD делит сторону AC, считая от точки A.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. В треугольнике DEC, $EC = 56$ см. Через точку M, которая делит сторону DC так, что $DM : DC = 3 : 8$, проведена прямая ML параллельно прямой DE, пересекающая EC в точке L. Найдите LC.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	25	20	35	Невозможно найти

2. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равна 32 см. Через точку M, которая делит боковую сторону BC так, что $BM : MC = 7 : 9$, проведена прямая MN параллельно основанию AB, пересекающая AD в точке N. Найдите DN.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
18	28	38	9	Невозможно найти

3. Диагонали четырёхугольника равны 320 см и 68 см. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
640	388	136	252	Невозможно найти

4. Дан произвольный четырёхугольник $ABPN$ (никакие пары противоположных сторон не параллельны). Точки L и H — середины отрезков AP и PB. Точки G и Y — середины отрезков AN и BN. Найдите периметр четырёхугольника $GLHY$, если $AB + PN = 30$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	20	30	40	Невозможно найти

Часть II

5. В трапеции $ABCD$ на боковой стороне CD отмечена точка H так, что $CH : HD = 7 : 2$. Прямая HG, параллельная основаниям BC и AD, пересекает сторону AB в точке G. Найдите GH, если $BC = 9$, $AD = 36$.

6. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка D так, что $AD : DB = 4 : 3$. В каком отношении прямая, проходящая через точку A и середину отрезка CD делит сторону BC, считая от точки B.

Тест 8. Центральная и осевая симметрия (30–35)

ВАРИАНТ 1

Часть I

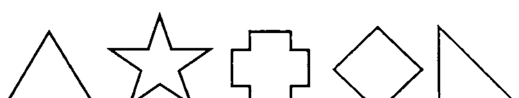
1. Укажите фигуры, из предложенных на рисунке, которые имеют центр симметрии. (Фигуры: равносторонний треугольник, равнобокая трапеция, окружность, параллелограмм, равнобедренный прямоугольный треугольник.)

1 2 3 4 5

Варианты ответов

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

2. Укажите фигуру, из предложенных на рисунке, которая имеет наибольшее число осей симметрии. (Фигуры: равносторонний треугольник, звезда, крест, ромб, равнобедренный прямоугольный треугольник.)



1 2 3 4 5

Варианты ответов

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

3. Длина отрезка $BC = 14$ см. Этот отрезок центрально симметрично отобразили относительно точки O, лежащей на отрезке BC так, что $BC : OC = 3 : 4$. Пусть точка B_1 центрально симметрична точке B. Найдите длину отрезка B_1C.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

4. В треугольнике ABC, $\angle B = 40°$, $\angle C = 70°$, проведена высота AD. Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AD. Найдите угол $\angle BAC_1$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
30°	70°	40°	140°	Не определён

Часть II

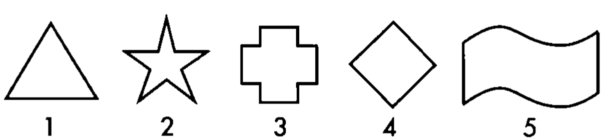
5. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка O. При симметрии относительно точки O точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что четырёхугольник ACA_1C_1 — параллелограмм.

6. Нарисуйте фигуру, имеющую ровно 7 осей симметрии.

ВАРИАНТ 2

Часть I

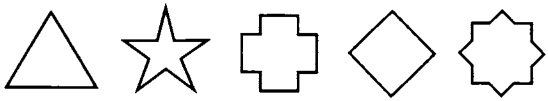
1. Укажите фигуру, из предложенных на рисунке, которая не имеет центра симметрии. (Фигуры: равносторонний треугольник, параллелограмм, окружность, звезда, флаг.)



Варианты ответов

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

2. Укажите фигуру, из предложенных на рисунке, которая имеет наибольшее число осей симметрии. (Фигуры: равносторонний треугольник, звезда, крест, ромб, два квадрата.)



1 2 3 4 5

Варианты ответов

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

3. Длина отрезка $BC = 35$ см. Этот отрезок центрально симметрично отобразили относительно точки O, лежащей на отрезке BC так, что $BO : OC = 5 : 2$. Пусть точка B_1 центрально симметрична точке B. Найдите расстояние между серединами отрезков B_1C и BO.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
12	22,5	30	17,5	40

4. В треугольнике ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 100°$, проведена высота AD. Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AD. Найдите угол $\angle BAC_1$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
110°	70°	40°	140°	Не определён

Часть II

5. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка O. При симметрии относительно точки O точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1, и C_1. Докажите, что четырёхугольник ABA_1B_1 — параллелограмм.

6. Нарисуйте фигуру, имеющую ровно 9 осей симметрии.

Тест 9. Площадь (40–45)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Через внутреннюю точку квадрата, со стороной 12 см, проведены прямые, параллельные его сторонам. Одна прямая делит сторону квадрата в отношении 1 : 5, а другая — в отношении 7 : 5. Образовалось четыре четырёхугольника. Найдите площадь наименьшего четырёхугольника.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
8	10	14	24	7

2. В прямоугольнике площадью 120 см^2, проведена диагональ. Найдите площадь треугольника, две вершины которого совпадают с двумя соседними вершинами прямоугольника, а третья вершина — середина проведённой диагонали.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	40	30	50	Нельзя определить

3. Прямоугольник разделён прямыми, параллельными его сторонам на шесть прямоугольников, площади четырёх из которых указаны на рисунке. Найдите площадь данного прямоугольника.

30	36	
	24	6

Варианты ответов

1	2	3	4	5
125	130	120	115	Нельзя определить

4. Через середину M стороны AB треугольника ABC и через точку L стороны AC, $AL : LC = 2 : 5$, проведена прямая ML. Определите, во сколько раз площадь треугольника AML меньше площади четырёхугольника $BCML$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
10	2	6	9	5

5. Через середину стороны параллелограмма и через вершину, не принадлежащую этой стороне, проведена прямая, отсекающая от параллелограмма треугольник площадью, равной 4. Найдите площадь параллелограмма.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
20	8	12	16	Нельзя определить

6. Высота равнобокой трапеции, равная 6 и опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, больший из которых равен 10. Найдите площадь этой трапеции.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
42	60	36	80	Нельзя определить

Часть II

7. Две стороны параллелограмма равны 10 см и 12 см, а одна из высот равна 6 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

8. Острый угол параллелограмма равен $30°$, а высоты равны 10 см и 20 см. Найдите площадь параллелограмма.

9. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая l параллельная AC. Через вершины A и C проведены две параллельные прямые, пересекающие прямую l соответственно в точках M и L. Найдите площадь четырёхугольника $AMLC$, если площадь $ABCD$ равна 58 см^2.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Через внутреннюю точку квадрата со стороной 24 см, проведены прямые, параллельные его сторонам. Одна прямая делит сторону квадрата в отношении 3 : 1, а другая — в отношении 1 : 7. Образовалось четыре четырёхугольника. Найдите площадь наименьшего четырёхугольника.

Варианты ответов

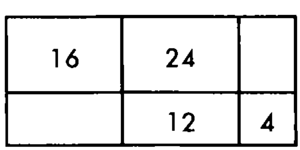
1	2	3	4	5
10	18	24	40	128

2. В прямоугольнике площадью 36 см^2, проведена диагональ. Найдите площадь треугольника, две вершины которого совпадают с двумя соседними вершинами прямоугольника, а третья вершина — середина проведённой диагонали.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
9	5	12	6	Нельзя определить

3. Прямоугольник разделён прямыми, параллельными его сторонам, на шесть прямоугольников, площади четырёх из которых указаны на рисунке. Найдите площадь данного прямоугольника.



Варианты ответов

1	2	3	4	5
60	110	80	70	Нельзя определить

4. Через середину M стороны AB треугольника ABC и через точку L стороны AC, $CL : AC = 1 : 4$, проведена прямая ML. Определите, во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади четырёхугольника $BCLM$.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
7,5	1,5	1,6	5,4	7,2

5. Через середину стороны параллелограмма и через вершину, не принадлежащую ей, проведена прямая, отсекающая от параллелограмма треугольник площадью, равной 5. Найдите площадь параллелограмма.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
20	8	18	30	Нельзя определить

6. Высота равнобокой трапеции, равная 8 и опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, больший из которых равен 12. Найдите площадь этой трапеции.

Варианты ответов

1	2	3	4	5
112	96	64	48	Нельзя определить

Часть II

7. Две стороны параллелограмма равны 20 см и 50 см, а одна из высот равна 11 см. Найдите вторую высоту.

8. Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты равны 2 см и 4 см. Найдите площадь параллелограмма.

9. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая l, параллельная AC. Через вершины A и C проведены две параллельные прямые, пересекающие прямую l соответственно в точках M и L. Найдите площадь четырёхугольника $AMLC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 85 см^2.

Тест 10. Теорема Пифагора. Обратная теорема Пифагора

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 20$, $BC = 12$. Найдите AC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
14	16	18	$4\sqrt{34}$	Нельзя определить

2. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 26$, катеты относятся как $5 : 12$. Найдите больший катет.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	16	18	24	Нельзя определить

3. В треугольнике ABC BH — высота. $AB = 17$, $BH = 15$. Найдите AH.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	6	8	12	Нельзя определить

4. В треугольнике ABC $AB = 7$, $BC = 24$, $AC = 25$. Выберите верное утверждение:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Угол A прямой	Угол B прямой	Угол C прямой	Треугольник ABC не является прямоугольным	Нет верных утверждений

Часть II

5. Найдите сторону квадрата с диагональю $4\sqrt{2}$.

6. Одна из диагоналей прямоугольника равна 17, а одна из сторон равна 8. Найдите периметр прямоугольника.

7. В трапеции $ABCD$ $CD = 7{,}5$; $BC = 4$; $AD = 8{,}5$. Углы A и B прямые. Найдите AB.

8. В треугольнике ABC $AB = 13$; $BC = 14$; $AC = 15$. Найдите высоту AH.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 34$, $BC = 30$. Найдите AC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	16	18	$4\sqrt{34}$	Нельзя определить

2. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, $AB = 34$, катеты относятся как $8 : 15$. Найдите меньший катет

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	16	18	24	Нельзя определить

3. В равнобедренном треугольнике ABC BH — медиана. $AB = BC = 13$, $AC = 10$. Найдите BH.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	6	12	16	Нельзя определить

4. В треугольнике ABC $AB = 20$, $BC = 21$, $AC = 29$. Выберите верное утверждение:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Угол A прямой	Угол B прямой	Угол C прямой	Треугольник ABC не является прямоугольным	Нет верных утверждений

Часть II

5. Найдите сторону ромба с диагоналями 5 и 12.

6. Сумма диагоналей прямоугольника равна 20, а одна из сторон равна 8. Найдите периметр прямоугольника.

7. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Углы A и B прямые. Найдите CD.

8. В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. AH — высота. Найдите BH и CH.

Тест 11. Подобные треугольники

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. В прямоугольном треугольнике ABC, $\angle C = 90°$, проведена высота CH. Сколько пар подобных треугольников образовалось при этом построении?

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	Ни одной

2. В треугольнике ABC, $AB = 12$, $BC = 9$. Отрезок MN параллелен BC, причем точка M лежит на стороне AB, точка N лежит на стороне AC, $AM = 3$. Найдите MN.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	2,25	2,5	6	7

3. В трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна 3, а площадь треугольника AOD равна 27. Найдите AC, если $AO = 6$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	6	8	12	Нельзя определить

4. В треугольнике ABC на стороне AB взяли точку K, а на стороне BC взяли точку N так, что $\angle BAN = \angle BCK$. $AK = 0,5$; $KB = 7,5$; $BN = 5$. Найдите NC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
7,5	5	1,5	7	Нельзя определить

Часть II

5. В треугольнике ABC на стороне AB взяли точку K, а на стороне BC взяли точку N так, что $AK : KB = CN : NB = 2 : 1$. Во сколько раз площадь четырехугольника $AKNC$ больше площади треугольника KBN?

6. В треугольнике ABC на стороне AC выбрали точку D так, что $\angle B + \angle BDC = 180°$. Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

7. В треугольнике ABC медианы AK и BP пересекаются в точке M. Площадь треугольника MKP равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

8. В треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки N и K так, что $\angle BAN = \angle ACB$, $\angle CAK = \angle ABC$. $BN = 1$, $KC = 4$. Найдите AN.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. В прямоугольном треугольнике ABC, $\angle A = 90°$, проведена высота AH. Сколько пар подобных треугольников образовалось при этом построении?

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	Ни одной

2. В треугольнике ABC, $AB = 5$, $BC = 10$. Отрезок MN параллелен AB, причем точка M лежит на стороне AC, точка N лежит на стороне BC, $BN = 2$. Найдите MN.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	2,25	2,5	3	4

3. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна 5, а площадь треугольника AOD равна 20. Найдите BD, если $BO = 3$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	6	9	12	Нельзя определить

4. В треугольнике ABC на стороне AB взяли точку K, а на стороне BC взяли точку N так, что $\angle BAN = \angle BCK$. $AK = 5$; $KB = 3$; $BN = 2$. Найдите NC:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
6,5	10	15	2,5	Нельзя определить

Часть II

5. В треугольнике ABC на стороне AB взяли точку K, а на стороне BC взяли точку N так, что $AK : KB = CN : NB = 3 : 1$. Во сколько раз площадь четырехугольника $AKNC$ больше площади треугольника KBN?

6. В треугольнике KMN на стороне KN выбрали точку D так, что $\angle M + \angle MDN = 180°$. Докажите, что $MK^2 = KN \cdot DK$.

7. В треугольнике ABC медианы AK и BP пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 24. Найдите площадь треугольника MPK.

8. В треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки N и K так, что $\angle BAN = \angle ACB$, $\angle CAK = \angle ABC$. $BN = 4$, $KC = 1$. Найдите AK.

Тест 12. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Вычислите высоту прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если его катеты равны 3 и 4.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	2,4	2,5	3	4

2. В прямоугольном треугольнике *ABC* угол С прямой, *CH* — высота, *AB* = 15, *AH* = 3. Найдите *CH*.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
5	6	7	8	9

3. В прямоугольном треугольнике *ABC* угол С прямой, *CH* — высота. Найдите *AH*, если *AH* : *HB* = 1 : 8, *AC* = 9.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1,5	2	3	6	Нельзя определить

4. Высота прямоугольного треугольника равна 6, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 12. Найдите гипотенузу.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	15	18	21	24

Часть II

5. Сторона ромба равна 10, а одна из диагоналей 16. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны.

6. Биссектрисы углов при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой AB, если $AK = \sqrt{3}$, $AB = 2$.

7. В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно 1 : 2. Найдите отношение проекций этих катетов на гипотенузу.

8. Дан прямоугольник $ABCD$. $AB : AD = 1 : 3$. AH — высота треугольника BAD. Площадь треугольника ABH равна 1. Найдите площадь $ABCD$.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Вычислите высоту прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если его катеты равны 6 и 8.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
4	4,8	5	5,4	6

2. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CH — высота, $AB = 20$, $AH = 2$. Найдите CH.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
5	6	7	8	9

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CH — высота. Найдите AH, если $AH : HB = 1 : 3$, $AC = 4$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1,5	2	3	4	Нельзя определить

4. Высота прямоугольного треугольника равна 5, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 2. Найдите гипотенузу.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12,5	13,5	14,5	15	20

Часть II

5. Сторона ромба равна 5, а одна из диагоналей 6. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны.

6. Биссектрисы углов при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой AB, если $AK = 1$, $AB = 2$.

7. В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно $2 : 3$. Найдите отношение проекций этих катетов на гипотенузу.

8. Дан прямоугольник $ABCD$. $AB : AD = 1 : 2$. AH — высота треугольника BAD. Площадь треугольника ABH равна 3. Найдите площадь $ABCD$.

Тест 13. Практические задачи на подобие (20–25)

ВАРИАНТ 1

1. Длина тени, отбрасываемой тридцатисантиметровой линейкой, равна 15 см. Чему равна высота столба в метрах, если отбрасываемая им тень составляет 3 м?

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
3	4	5	6	Нельзя определить

2. Вычисление недоступного расстояния. На рисунке отмечены измеренные расстояния CD, MD, AM, $\angle MCD = \angle MBA$. Найдите AB в метрах. (Рис. 1).

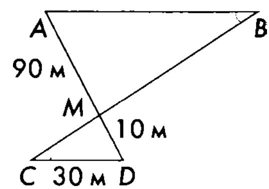


Рис. 1

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
270	130	100	300	Нельзя определить

3. Вычислите глубину колодца (расстояние до воды в метрах) по размерам, заданным на рисунке. (Рис. 2).

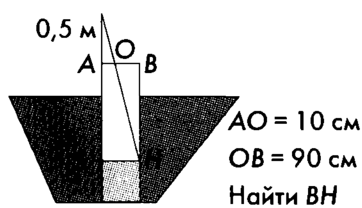


Рис. 2

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	4,5	4	4,5	Нельзя определить

4. Дан прямоугольный лист бумаги размерами 120 мм и 240 мм. Требуется определить площадь (в квадратных сантиметрах) подобного ему прямоугольника, полученного с помощью одного разреза данного прямоугольника.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
24	56	72	108	Нельзя определить

ВАРИАНТ 2

1. Длина тени, отбрасываемой тридцатисантиметровой линейкой, равна 10 см. Чему равна высота столба в метрах, если отбрасываемая им тень составляет 2 м?

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	3	6	9	Нельзя определить

2. Вычисление недоступного расстояния. На рисунке отмечены измеренные расстояния CD, MD, AM, $\angle MCD = \angle MBA$. Найдите AB в метрах. (Рис. 1).

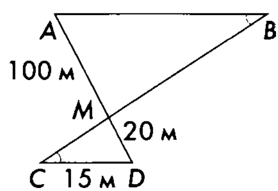
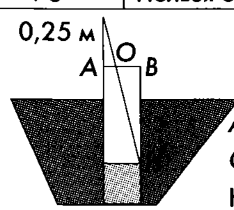


Рис. 1

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
200	155	105	75	Нельзя определить

3. Вычислите глубину колодца (расстояние до воды в метрах) по размерам, заданным на рисунке. (Рис. 2).



AO = 10 см

OB = 80 см

Найти *BH*

Рис. 2

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	12	16	10	Нельзя определить

4. Дан прямоугольный лист бумаги размерами 100 мм и 400 мм. Требуется определить площадь (в квадратных сантиметрах) подобного ему прямоугольника, полученного с помощью одного разреза данного прямоугольника.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
15	25	50	100	Нельзя определить

Тест 14. Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Найдите $\sin 45°$.

2. Найдите $\cos 30°$.

3. Найдите $\mathrm{tg}\, 60°$.

4. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0{,}8$.

   Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,8	0,2	0,6	0,64	0,36

5. Найдите синус угла A треугольника ABC, если $\angle C = 90°$, а косинус угла B равен 0,4.

Часть II

6. Вычислите $4 \sin 30° \,\mathrm{ctg}\, 45° - 8 \sin 60° \,\mathrm{tg}\, 30°$.

7. Вычислите $10\sqrt{3} \cos 60° \,\mathrm{ctg}\, 60° - 12\sqrt{2} \sin 45° \,\mathrm{tg}\, 45°$.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Найдите $\sin 60°$.

2. Найдите $\cos 45°$.

3. Найдите $\mathrm{tg}\, 30°$.

4. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0{,}6$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,8	0,2	0,6	0,64	0,36

5. Найдите косинус угла A треугольника ABC, если $\angle C = 90°$, а синус угла B равен 0,35.

Часть II

6. Вычислите $\sqrt{6}\sin 60° \cos 45° + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30°$.

7. Вычислите $\sqrt{12}\cos 30°(\cos 60° - \mathrm{ctg}\,45°)$.

Тест 15. Тригонометрические функции острого угла и соотношения между ними. Значения тригонометрических функций острых углов

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Дан прямоугольный треугольник FDC, $\angle C = 90°$, $\sin F = 0{,}64$, найдите $\cos D$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,64	0,36	0,5	1	Нельзя определить

2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 5$. Найдите $\cos \angle A$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,25	0,5	0,75	1	Нельзя определить

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CH — высота, $AB = 15$, $\cos \angle A = 0{,}6$. Найдите AH.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
9	5,4	2,5	7,2	9,6

4. Диагонали ромба равны 3 и 4. Найдите синус угла между большей диагональю и стороной ромба.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,2	0,4	0,6	0,8	Нельзя определить

5. Вычислите: $\sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 50°$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	1,25	1,5	3	Нельзя определить

Часть II

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, медиана $CO = 5$. Найдите $\operatorname{ctg} \angle ACO$.

7. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая CD, параллельная AB, причем A и D лежат по разные стороны от прямой BC. DH — высота в треугольнике BCD. $AC = 8$, $BC = 6$, $AB = 10$. Найдите $\cos \angle CDH$.

8. Найдите косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если высота проведенная к боковой стороне меньше этой стороны в 3 раза.

9. Докажите, что сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника не превосходит $\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Дан прямоугольный треугольник FDC, $\angle C = 90°$, $\cos F = 0{,}4$, найдите $\sin D$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,2	0,6	0,8	0,4	Нельзя определить

2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 12$, $AC = 18$. Найдите $\cos \angle A$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,25	0,5	0,75	1	Ни одной

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CH — высота, $AB = 20$, $\cos \angle A = 0{,}6$. Найдите AH.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
9	5,4	2,5	7,2	9,6

4. Диагонали ромба равны 2 и $2\sqrt{3}$. Найдите синус угла между большей диагональю и стороной ромба.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
0,1	0,3	0,5	0,7	Нельзя определить

5. Вычислите: $\sin^2 40° + \sin^2 50° + \sin^2 60°$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	1,25	1,5	1,75	Нельзя определить

Часть II

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 24$, медиана $CO = 13$. Найдите $\operatorname{tg} \angle ACO$.

7. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая CD, параллельная AB, причем A и D лежат по разные стороны от прямой BC, DH — высота в треугольнике BCD. $AC = 8$, $BC = 6$, $AB = 10$. Найдите $\sin \angle CDH$.

8. Найдите котангенс угла при вершине равнобедренного треугольника, если высота проведенная к боковой стороне меньше этой стороны в 3 раза.

9. Докажите, что сумма косинусов острых углов прямоугольного треугольника не превосходит $\sqrt{2}$.

Тест 16. Пропорциональные отрезки в круге

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. В окружности две хорды пересекаются, образуя четыре отрезка. Три из них имеют длину 2, 3, 6. Найдите длину четвертого, если он длиннее всех остальных.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
7,5	8	9	12	18

2. Из точки A, лежащей вне круга, проведены две его секущие. Первая пересекает окружность круга в точках B и C, вторая — а точках D и E, причём $AB = 2$, $BC = 4$, $AE = 12$. Найдите AD, если B лежит между A и C; D между A и E.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

3. Из точки A, лежащей на расстоянии 25 от центра окружности радиуса 15, проведена касательная, точка P — точка касания. Найдите AP.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
10	20	30	40	50

4. В окружности хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке K, причем AB перпендикулярно CD. Найдите AB, если $CK = 1$, а $CD = 10$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
5	7	11	6	9

Часть II

5. Окружность проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, и пересекает его стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Из точки C проведена касательная к окружности CP. Найдите CP, если $AB = 6$, $BC = 9$, а радиус окружности равен 5.

6. Из точки M к окружности проведены касательная MC и секущая AB (т. B лежит между A и M). Найдите MB, если $MC = 2\sqrt{2}$, $AB = 2$.

7. Докажите, что если в окружности две хорды делятся точкой пересечения в одном и том же отношении, то они равны.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. В окружности две хорды пересекаются, образуя четыре отрезка. Три из них имеют длину 2, 3, 4. Найдите длину четвертого, если он длиннее всех остальных.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
7,5	8	6	12	18

2. Из точки A, лежащей вне круга, проведены две его секущие. Первая пересекает окружность круга в точках B и C, вторая — а точках D и E, причём $AB = 3$, $BC = 6$, $AE = 18$. Найдите DE, если B лежит между A и C; D между A и E.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
16,5	20	10,2	14	15

3. Из точки A, лежащей на расстоянии 17 от центра окружности радиуса 8, проведена касательная, точка P — точка касания. Найдите AP.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	15	16	17	22,5

4. В окружности хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке K, причем AB перпендикулярно CD. Найдите AB, если $CK = 1$, а $CD = 5$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
5	7	11	4	9

Часть II

5. Окружность проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, и пересекает его стороны BC и AD в точках P и Q соответственно. Из точки C проведена касательная к окружности CM. Найдите CM, если $AB = 5$, $BC = 15$, а радиус окружности равен 6,5.

6. Из точки M к окружности проведены касательная MC и секущая AB (т. B лежит между A и M). Найдите MB, если $MC = \sqrt{6}$, $AB = 5$.

7. Докажите, что если из точки M вне окружности проведены к ней две секущие MBA и MCD, (B между M и A, C между M и D), причем $MB : BA = MC : CD$, то $MA = MD$.

Тест 17. Окружность и касательная к окружности

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Даны прямая и окружность радиуса 5. Дано расстояние d от центра окружности до прямой. Определите взаимное расположение прямой и окружности:

А. Окружность и прямая касаются.

Б. Окружность и прямая пересекаются в двух точках, причем прямая не проходит через центр.

В. Прямая проходит через центр окружности.

Г. Прямая и окружность не имеют общих точек.

$d = 10$	$d = 5$	$d = 0$	$d = 4$

2. Из точки A проведены две касательные к окружности, причем B и C — точки касания, O — центр окружности. Найдите угол BAC, если угол BOC равен $115°$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
115°	90°	55°	65°	75°

3. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC, B и C — точки касания. Оказалось, что A и O симметричны относительно BC. Найдите $\angle BAC$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
60°	90°	120°	150°	Нельзя определить

4. Хорда AB окружности удалена от центра окружности на $\sqrt{11}$. Найти AB, если диаметр окружности равен 12.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
10	11	12	13	Нельзя определить

Часть II

5. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC, B и C — точки касания; $\angle AOB = 8\angle OAC$. Найдите $\angle BOC$.

6. Радиусы двух окружностей равны 5 и 7, а расстояние между их центрами равно 2. Как расположены эти окружности?

7. O — центр окружности, A — точка вне её. $AO = 10$, радиус окружности равен 6, а угол BAO равен 30°. Как расположена прямая AB относительно окружности?

8. Дан прямоугольный треугольник с катетом 5 и гипотенузой 13. Найдите максимальный возможный радиус окружности с центром в вершине прямого угла, имеющей общие точки с гипотенузой треугольника

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Даны прямая и окружность радиуса 7. Дано расстояние d от центра окружности до прямой. Определите взаимное расположение прямой и окружности:

А. Окружность и прямая касаются.

Б. Окружность и прямая пересекаются в двух точках, причем прямая не проходит через центр.

В. Прямая проходит через центр окружности.

Г. Прямая и окружность не имеют общих точек.

$d = 7$	$d = 7{,}5$	$d = 0$	$d = 6$

2. Из точки A проведены две касательные к окружности, B и C — точки касания, O — центр окружности. Найдите угол BAC, если угол BOC равен 15°.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
15°	90°	155°	165°	75°

3. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC, B и C — точки касания. Оказалось, что B и C симметричны относительно AO. Найдите $\angle BAC$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
60°	90°	120°	150°	Нельзя определить

4. Хорда AB окружности удалена от центра окружности на $\sqrt{21}$. Найти AB, если диаметр окружности равен 10

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
3	4	5	6	Нельзя определить

Часть II

5. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC. $\angle AOB = 8\angle OAC$. Найдите $\angle BAC$.

6. Радиусы двух окружностей равны 5 и 8, а расстояние между их центрами равно 1. Как расположены окружности?

7. O — центр окружности, A — точка вне её. AO = 10, радиус окружности равен 6, а угол BAO равен 45°. Как расположена прямая AB относительно окружности?

8. Дан прямоугольный треугольник с катетом 12 и гипотенузой 20. Найдите максимальный радиус окружности с центром в вершине прямого угла, имеющей общие точки с гипотенузой.

Тест 18. Центральные и вписанные углы

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Хорда делит окружность на 2 дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 3. Найдите вписанный угол, опирающийся на меньшую из этих дуг.

1	2	3	4	5
30°	45°	60°	75°	90°

2. Дана окружность. Центральный угол *AOB* равен 110°. Найдите вписанный угол *BCA*, если отрезки *AB* и *OC* пересекаются.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
55°	90°	110°	125°	70°

3. Окружность проходит через вершину прямого угла *C* и пересекает его стороны в точках *A* и *B*. Найдите радиус окружности, если $AC = 4$, $BC = 3$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	2,5	3	3,5	Нельзя определить

4. Хорды *AB* и *CD* окружности пересекаются в точке *K*, причем $AB = 8$, $CK = 3$, $DK = 4$. Найти *AK*, если известно, что $AK > BK$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
3	4	5	6	Нельзя определить

Часть II

5. Хорда AB окружности с центром O перпендикулярна ее радиусу OC и делит его на отрезки $OK = 1{,}5$ и $CK = 1$. Найдите длину хорды AB.

6. Найдите больший из углов, образованных касательной к окружности в точке A и хордой AB, равной радиусу окружности.

7. Точка A лежит вне круга, ограниченного окружностью ω. Угол с вершиной A высекает на окружности ω дуги градусной меры $40°$ и $88°$. Найдите величину угла A.

8. Хорды AB и CD окружности пересекаются с точке K. Найдите угол AKD, если сумма градусных мер дуг AD и BC равна сумме градусных мер дуг DB и AC.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Хорда делит окружность на 2 дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 5. Найдите вписанный угол, опирающийся на меньшую из этих дуг.

1	2	3	4	5
30°	45°	60°	75°	90°

2. Дана окружность. Центральный угол AOB равен 140°. Найдите вписанный угол BCA, если отрезки AB и OC не пересекаются.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
55°	90°	110°	125°	70°

3. Окружность проходит через вершину прямого угла C и пересекает его стороны в точках A и B. Найдите радиус окружности, если $AC = 6$, $BC = 8$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
4	5	6	8	Нельзя определить

4. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K, причем $AB = 13$, $CK = 3$, $DK = 4$. Найти AK, если известно, что $AK < BK$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	Нельзя определить

Часть II

5. Хорда AB окружности с центром O перпендикулярна ее радиусу OC и делит его на отрезки $OK = 7{,}5$ и $CK = 1$. Найдите длину хорды AB.

6. Найдите градусную меру большей из дуг, заключенных между касательной к окружности в точке A и хордой AB, равной радиусу окружности.

7. Точка A лежит вне круга, ограниченного окружностью ω. Угол с вершиной A высекает на окружности ω дуги градусной меры $20°$ и $82°$. Найдите величину угла A.

8. Хорды AB и CD окружности пересекаются с точке K. Найдите угол AKD, если сумма градусных мер дуг AD и BC вдвое больше суммы градусных мер дуг DB и AC.

Тест 19. Замечательные точки треугольника. Вписанная и описанная окружности треугольника

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Определите положение центра описанной окружности, если наибольший угол треугольника равен:

А. 75° Б. 90° В. 100° Г. 58°

1. Лежит вне треугольника	2. Лежит внутри треугольника	3. Лежит на стороне треугольника	4. Недостаточно данных	5. Такого треугольника не существует

2. Медианы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $AD + CE$, если $AM + CM = 8$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
8	9	10	11	12

3. Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения его (выберите верное утверждение):

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
высот	биссектрис	Серединных перпендикуляров	медиан	Нельзя определить

4. Центр описанной около треугольника окружности (выберите верное утверждение):

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Равноудален от его сторон	Лежит на его средней линии	Равноудален от его вершин	Делит медианы в отношении 2:1 считая от вершины	Лежит на пересечении высот треугольника

Часть II

5. Катеты CB и CA прямоугольного треугольника ABC равны 9 и 12 соответственно. M — точка пересечения медиан. Найдите длину отрезка CM.

6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, стороны которого равны 10, 10 и 12.

7. Найдите отрезки, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12 делится точкой касания вписанной окружности.

8. Найдите расстояние от точки пересечения высот равнобедренного треугольника до его основания, если один из углов треугольника равен 120°, а боковая сторона равна 1.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Определите положение точки пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, если наибольший его угол:

А. 80° Б. 90° В. 100° Г. 55°

1. Лежит вне треугольника	**2. Лежит внутри треугольника**	**3. Лежит на стороне треугольника**	**4. Недостаточно данных**	**5. Такого треугольника не существует**

2. Медианы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $AD + CE$, если $MD + EM = 5$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
11	12	13	14	15

3. Центр описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения его (выберите верное утверждение):

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
высот	биссектрис	Серединных перпендикуляров	медиан	Нельзя определить

4. Центр вписанной в треугольник окружности (выберите верное утверждение):

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Равноудален от его сторон	Лежит на его средней линии	Равноудален от его вершин	Делит медианы в отношении 2:1 считая от вершины	Лежит на пересечении двух высот треугольника

Часть II

5. Катеты CB и CA прямоугольного треугольника ABC равны 18 и 24 соответственно. M — точка пересечения медиан. Найдите длину отрезка CM.

6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, стороны которого равны 5, 5 и 8.

7. Найдите отрезки, на которые меньшая сторона прямоугольного треугольника с катетами 9 и 12 делится точкой касания вписанной окружности.

8. Найдите расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров равнобедренного треугольника до его боковой стороны, если один из углов треугольника равен 120°, а основание равно 6.

Тест 20. Вписанные и описанные четырехугольники

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Определите возможный вид четырехугольника *ABCD*.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Ромб с острым углом 80°	Прямоугольная трапеция	Параллелограмм с углом 110°	Равнобокая трапеция	Четырехугольник с углом 210°

2. Средняя линия трапеции, описанной около окружности равна 5. Боковая сторона равна 6. Найдите вторую боковую сторону.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
3	4	5	6	7

3. Выберите верное утверждение:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Все стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны между собой	Биссектрисы четырехугольника, в который можно вписать окружность, пересекаются в одной точке	Все углы четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны между собой	Диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, равны между собой	Нет верных утверждений

4. Выберите верное утверждение:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Любой параллелограмм можно вписать в окружность	В любой прямоугольник можно вписать окружность	Прямоугольную трапецию нельзя вписать в окружность	Любой ромб можно вписать в окружность	В тупоугольный треугольник нельзя вписать окружность

Часть II

5. В треугольник ABC вписана окружность, и к ней проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке K, а сторону BC в точке M. Известно, что $AK = 3$, $KM = 2$, $MC = 4$. Найдите периметр четырехугольника $AKMC$.

6. Найдите периметр прямоугольника, вписанного в окружность, радиуса 13, если одна из его сторон равна 10.

7. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, пересекает сторону BA в точке P, а сторону CA в точке Q. Известно, что $\angle APQ = 40°$, $\angle ABC = 75°$. Найдите угол A.

8. В трапецию $ABCD$ ($BC||AD$) можно вписать окружность. Точка M лежит на стороне AB, а N лежит на стороне CD. Можно ли вписать окружность в четырехугольник $AMND$? Ответ обоснуйте.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Определите возможный вид четырехугольника $ABCD$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Ромб с острым углом 60°	Параллелограмм с соседними сторонами 2 см и 4 см	Прямоугольник длина которого втрое больше ширины	Трапеция, сумма оснований которой равна боковой стороне	Ни один из вариантов не подходит

2. Средняя линия трапеции, описанной около окружности равна 7. Боковая сторона равна 5. Найдите вторую боковую сторону.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6

3. Выберите верное утверждение:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Все стороны четырехугольника, около которого можно описать окружность, равны между собой	Серединные перпендикуляры четырехугольника, около которого можно описать окружность, пересекаются в одной точке	Все углы четырехугольника, около которого можно описать окружность, равны между собой	Диагонали четырехугольника, описанного около окружности, равны	Нет верных утверждений

4. Выберите верное утверждение:

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
Любой параллелограмм можно описать около окружности	Существует ромб, в который нельзя вписать окружность	В прямоугольную трапецию нельзя вписать окружность	Около любого прямоугольника можно описать окружность	Около тупоугольного треугольника нельзя описать окружность

Часть II

5. В треугольник ABC вписана окружность, и к ней проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке K, а сторону BC в точке M. Известно, что $AK = 4$, $KM = 3$, $MC = 5$. Найдите периметр четырехугольника $AKMC$.

6. Найдите периметр прямоугольника, вписанного в окружность, радиуса 5, если одна из его сторон равна 6.

7. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, пересекает сторону BA в точке P, а сторону CA в точке Q. Известно, что $\angle APQ = 72°$, $\angle ABC = 63°$. Найдите угол A.

8. В трапецию $ABCD$ ($BC || AD$) можно вписать окружность. Точка M лежит на стороне AB, а N лежит на стороне CD, причем $MN || AD$. Можно ли вписать окружность в четырехугольник $AMND$? Ответ обоснуйте.

Тест 21. Векторы

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. На плоскости отмечены три точки: A, B и C. Выберите верное равенство: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BA}$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
а	б	в	г	Нет верных равенств

2. Сколько пар равных векторов изображено на рисунке? (Рис. 1).

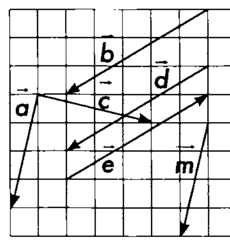


Рис. 1

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	Нет равных векторов

3. Три равносторонних треугольника соединили в трапецию.(Рис. 2). Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{AB}$.

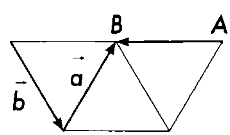


Рис. 2

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{b} - \vec{a}$	$-\vec{a} - \vec{b}$	Нельзя выразить

4. Дан треугольник OAB, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{OM}$, если точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
$\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{2}$	$\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2}$	$\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$	$\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$	Нельзя выразить

5. На рисунке изображена сетка, образованная параллельными прямыми. Все образовавшиеся параллелограммы равны между собой. (Рис. 3). Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$, через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

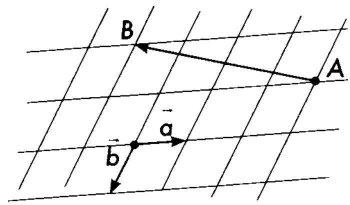


Рис. 3

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Существуют ли такие числа x и y, что $\vec{a} + x\vec{b}$ и $y\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны? Если существуют, то укажите их значения, если не существуют, то докажите это.

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и для некоторых чисел x и y верно равенство $(2x + y)\vec{a} - 3y\vec{b} = 4x\vec{a} + (x - 4y + 1)\vec{b}$. Найдите эти x и y.

Часть II

8. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$ и на отрезке AM — его середина O. Докажите, что $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

9. В параллелограмме $ABCD$ на его сторонах отмечены точки — середина L отрезка AB и точка K на AD так, что $AK : KD = 3 : 11$. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. На плоскости отмечены три точки: A, B и C. Выберите верное равенство: а) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
а	б	в	г	Нет верных равенств

2. Сколько пар равных векторов изображено на рисунке? (Рис. 1).

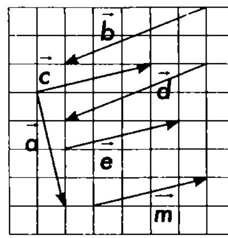


Рис. 1

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	4	3	6	Нет равных векторов

3. Три равносторонних треугольника соединили в трапецию (Рис. 2). Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{AB}$.

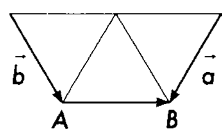


Рис. 2

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{b} - \vec{a}$	$-\vec{a} - \vec{b}$	Нельзя выразить

4. Дан треугольник OAB, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{OM}$, если точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = 1 : 4$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
$\frac{\vec{a}+4\vec{b}}{3}$	$\frac{4\vec{a}+\vec{b}}{3}$	$\frac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}$	$\frac{4\vec{a}+\vec{b}}{5}$	Нельзя выразить

5. На рисунке изображена сетка, образованная параллельными прямыми. Все образовавшиеся параллелограммы равны между собой. (Рис. 3). Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$, через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

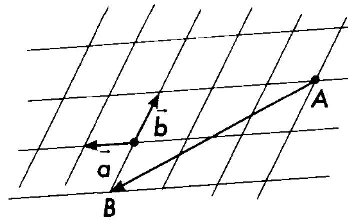


Рис. 3

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Существуют ли такие числа x и y, что $\vec{a} - (x + 1)\vec{b}$ и $y\vec{a} + x\vec{b}$ коллинеарны? Если существуют, то укажите их значения, если не существуют, то докажите это.

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и для некоторых чисел x и y верно равенство $(2x - 6y)\vec{a} - 3x\vec{b} = -4y\vec{a} + (x - y + 9)\vec{b}$. Найдите эти x и y.

Часть II

8. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка M так, что $BM : MC = 3 : 1$ и на отрезке AM — его середина O. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{BC}$.

9. В параллелограмме $ABCD$ на его сторонах отмечены точки — середина L отрезка AB и точка K на AD так, что $AK : KD = 4 : 15$. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке O. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Тест 22. Скалярное произведение векторов (без координат)

ВАРИАНТ 1

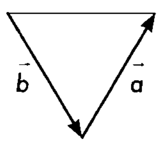
Часть I

1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
1	2	–1	–2	0

2. На рисунке $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены по сторонам равностороннего треугольника, сторона которого равна 10. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Варианты ответов:

1	2	3	4	5
–100	–50	50	100	Нельзя выразить

3. При некотором положительном значении x векторы $x\vec{a} - 2\vec{b}$ и $x\vec{a} + 2\vec{b}$ перпендикулярны. Найдите x, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	1	0,5	0,25	0,75

4. В треугольнике ABC $AB = BC = 3$, $AC = 4$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10

Часть II

5. В треугольнике ABC, $AB = 20$, $BC = 21$, $CA = 13$, точка M — основание высоты AM. Вычислите $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$.

6. Найдите угол между векторами $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$.

ВАРИАНТ 2

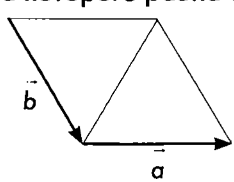
Часть I

1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 4, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
3	6	−3	−6	0

2. На рисунке $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены по сторонам ромба с острым углом 60°, сторона которого равна 6. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Варианты ответов:

1	2	3	4	5
−36	−18	36	18	$6\sqrt{3}$

3. При некотором отрицательном значении x векторы $x\vec{a} - 6\vec{b}$ и $x\vec{a} + 6\vec{b}$ перпендикулярны. Найдите x, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
-6	-4	-1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$

4. В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	45	64	72	100

Часть II

5. В треугольнике ABC, $AB = 4$, $BC = 3\sqrt{15}$, $CA = \sqrt{61}$, точка M — основание высоты AM. Вычислите $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$.

6. Найдите угол между векторами $2\vec{a} + \vec{b}$ и $-3\vec{a} + \vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

ЗАДАЧИ К ИТОГОВОМУ ТЕСТУ ПО ГЕОМЕТРИИ ЗА КУРС 8 КЛАССА (120–135)

ВАРИАНТ 1

Часть I

1. Биссектриса острого угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, которая делит BC на два отрезка 8 см и 12 см. Прямая AM пересекает продолжение стороны CD в точке F. Найдите длину отрезка DF.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
24	16	20	40	Нельзя определить

2. Угол между высотами ромба $ABCD$, опущенными из вершины B, равен $123°$. Найдите острый угол ромба.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
83°	27°	57°	23°	Нельзя определить

3. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его стороны BC и AC в точках K и L соответственно. Известно, $BK = 4$, $KL = 8$, $AB = 12$. Найдите BC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
12	8	24	16	Нельзя определить

4. Периметр ромба $ABCD$ равен 40, периметр треугольника ABD равен 32. Найдите периметр треугольника ABC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
26	28	32	36	Нельзя определить

5. В равнобокой трапеции большее основание равно 25, боковая сторона 15 и диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите меньшее основание трапеции.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
11	7	15	11	Нельзя определить

6. В треугольнике ABC, $AB = 12$, $AC = 16$, $BC = 10$ вписана окружность, касающаяся стороны AC в точке B_1. Найдите AB_1.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
9	10	2	4	Нельзя определить

7. В треугольнике ABC $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{BM}$, где M — точка отрезка AC и $AM : MC = 1 : 2$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
$\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{2}$	$\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}$	$\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$	$\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$	Нельзя определить

Часть II

8. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$, $\sin(\angle A) = 0{,}8$. Найдите BC, высоту CC_1 и длину отрезка BC_1.
Ответ: $BC = 16$; $CC_1 = 9{,}6$; $BC_1 = 12{,}8$.

9. В треугольник ABC длина $\angle B = 60°$, $\angle A = 50°$. Окружность, проходящая через точки B и C вторично пересекает стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Найдите $\angle ALK$.

10. Основание H высоты прямоугольного треугольника делит его гипотенузу AB на отрезки, отношение которых $1 : 4$. Найдите площадь этого треугольника, если $AB = 25$.

11. В трапеции $ABCD$, $(AB||CD)$, отношение оснований равно 2 : 3 и диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника COD, если площадь треугольника AOD равна 6.

12. Точки A, B, C и D в указанной последовательности лежат на окружности радиуса 10 и делят её в отношении 2 : 3 : 4 : 3. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и AD.

Часть III

13. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана такая точка F, что $\angle ABF : \angle FBC = 2 : 3$ и отрезок BF разбивает треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

14. В треугольнике ABC, $\angle B = 80°$, проведена биссектриса BL. Через точку L к окружности, описанной около треугольника BCL, проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке M. Найдите угол ALM.

ВАРИАНТ 2

Часть I

1. Биссектриса острого угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, которая делит BC на два отрезка 5 см и 20 см. Прямая AM пересекает продолжение стороны CD в точке F. Найдите длину отрезка DF.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
11	21	25	32	Нельзя определить

2. Угол между высотами ромба $ABCD$, опущенными из вершины B, равен 67°. Найдите тупой угол ромба.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
103	93	113	123	Нельзя определить

3. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его стороны BC и AC в точках K и L соответственно. Известно, $BK = 6$, $KL = 16$, $AB = 22$. Найдите BC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
22	16	32	20	Нельзя определить

4. Периметр ромба $ABCD$ равен 52, периметр треугольника ABD равен 36. Найдите периметр треугольника ABC.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
60	70	40	50	Нельзя определить

5. В равнобокой трапеции большее основание равно 26, высота — 12 и диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите меньшее основание трапеции.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
10	14	16	18	Нельзя определить

6. В треугольнике ABC, $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 5$ вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке C_1. Найдите длину отрезка AC_1.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
4,5	5,7	7,5	4	Нельзя определить

7. В треугольнике ABC $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{BM}$, где M — точка отрезка AC, $AM : MC = 3 : 1$.

Варианты ответов:

1	2	3	4	5
$\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{2}$	$\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3}$	$\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$	$\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$	Нельзя определить

Часть II

8. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 18$, $\sin(\angle A) = 0{,}8$. Найдите BC, высоту CC_1 и длину отрезка BC_1.

9. В треугольнике ABC длина $\angle C = 80°$, $\angle A = 70°$. Окружность, проходящая через точки B и C вторично пересекает стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Найдите $\angle AKL$.

10. Основание H высоты прямоугольного треугольника делит его гипотенузу AB на отрезки, отношение которых $1 : 9$. Найдите площадь этого треугольника, если $AB = 40$.

11. В трапеции $ABCD$, $(AB||CD)$, отношение оснований равно $3 : 5$ и диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если площадь треугольника COD равна 50.

12. Точки A, B, C и D в указанной последовательности лежат на окружности радиуса 12 и делят её в отношении $6 : 5 : 8 : 5$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и AD.

Часть III

13. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана такая точка F, что $\angle ABF : \angle FBC = 1 : 3$ и отрезок BF разбивает треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

14. В треугольнике ABC, $\angle B = 70°$, проведена биссектриса BL. Через точку L к окружности, описанной около треугольника BCL, проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке M. Найдите угол ALM.

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Вершины параллелограмма лежат на сторонах другого параллелограмма (по одной на каждой стороне). Докажите, что точки пересечения диагоналей параллелограммов совпадают.

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне CD отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите длины отрезков CE и ED, если $AB = 16$, $AD = 5$, $CF = 3$.

3. Докажите, что четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон равнобокой трапеции, является ромбом.

4. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла DCA перпендикулярна стороне AD. Найдите углы ромба.

5. В прямоугольнике серединный перпендикуляр диагонали AC пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 1 : 2$. На какие углы диагональ прямоугольника делит его угол?

6. Длина стороны квадрата $KLMP$ равна 1. На дуге окружности с центром в точке L радиуса 1, лежащей внутри квадрата, выбрана точка N так, что $\angle LMN = 75°$. Найдите длину KN.

7. Основания трапеции равны 1 см и 4 см, а одна из диагоналей равна 6 см. Какой может быть длина второй диагонали этой трапеции?

8. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) проведена высота BH. Точка K — середина AB. Докажите, что $KH \parallel CD$.

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD известно, что $\angle BAC = BDC = 20°$, а угол между диагоналями равен $80°$. Найдите углы трапеции.

10. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18. Точка M — середина стороны AB.

Отрезки AC и MD пересекаются в точке K. Найдите AK и KC.

11. В трапеции $ABCD$ проведены два отрезка с концами на боковых сторонах, параллельные основаниям и делящие боковые стороны на три равные части. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 14 и 26.

12. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $AO = OC$. Точка K — середина AD. Отрезок, соединяющий середины отрезков BK и BO равен 5 см. Найдите сторону CD.

13. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) O — середина высоты BH. Прямая AO пересекает сторону BC в точке A_1. Найдите $BA_1 : A_1C$.

14. В трапеции $KMNP$ ($MN||KP$) проведена прямая ML, параллельная NP и пересекающая сторону KP в точке L. Найдите периметр треугольника, стороны которого — средние линии треугольника KLM, если $KM = 7$, $MN = 6$, $KP = 12$, $NP = 5$.

15. В треугольнике ABC проведена средняя линия, параллельная стороне AC. Она разделила треугольник на четырехугольник и треугольник. Их периметры равны соответственно 12 и 11. Найдите AC и периметр треугольника ABC.

16. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK : KC = 3 : 4$. В каком отношении отрезок AK делит медиану BB_1 треугольника ABC.

17. Диагонали трапеции перпендикулярны и равны 5 см и 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.

18. Диагонали трапеции перпендикулярны и равны 5 см и 12 см. Найдите высоту трапеции.

19. Три окружности, попарно касающиеся друг друга внешним образом, имеют радиусы 2 см, 2 см, 1 см. Найдите радиусы окружностей, касающихся данных трех окружностей.

20. В прямоугольном треугольнике медиана и высота, опущенные на гипотенузу равны соответственно 13 и 12. Найдите периметр треугольника.

21. Существует ли трапеция, основания которой равны 5 и 12, а диагонали равны 6 и 10? (Ответ обоснуйте.)

22. В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. В каком отношении биссектриса угла A делит биссектрису угла B, считая от точки B.

23. Углы при большем основании трапеции равны 40° и 50°, боковые стороны равны 8 и 6. Найдите основания трапеции, если средняя линия равна 11.

24. Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из них в отношении 3 : 5. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до оснований трапеции, если ее высота равна 24.

25. Из отрезков длиной 3, 6, 7, 9, 14, 18 составьте два подобных треугольника и найдите отношение длин биссектрис меньших углов этих треугольников.

26. В треугольнике ABC угол $A = 45°$. AD, BE и CF — высоты. Найдите угол EDF.

Указание: докажите, что треугольники ABC и AEF подобны.

27. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна основаниям $AD = 8$ и $BC = 2$. $\angle B + \angle D = 270°$. Найдите BD.

Указание: докажите, что треугольники ABD и CDB подобны.

28. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$, AH и CK — высоты. Найдите площадь треугольника HBK, если площадь треугольника $ABC = 4$.

Указание: треугольники ABC и HBK подобны.

29. Стороны параллелограмма равны 5 и 26. Прямая, параллельная одной стороне параллелограмма, разбивает его на два неравных подобных параллелограмма. Найдите длины сторон этих параллелограммов.

30. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, CC_1 Найдите длину A_1C_1, если $AC = 39$, $\sin B = \frac{12}{13}$.

31. Определите синус и косинус острого угла, если сумма его тангенса и котангенса равна 2, 9.

32. Докажите, что если α, β — острые углы и $\alpha < \beta$, то $\sin\alpha < \sin\beta$.

33. Докажите, что если α, β — острые углы и $\alpha < \beta$, то $\cos\alpha > \cos\beta$.

34. Докажите, что если α, β — острые углы и $\alpha < \beta$, то $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

35. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла A. Найдите длину AB, если периметр трапеции 35 см и $\angle D = 60^\circ$.

36. Докажите, что прямая, проходящая через 2 точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок, соединяющий точки касания этих окружностей с их общей касательной.

37. Окружность касается основания AC равнобедренного треугольника ABC в его середине, проходит через вершину B и пересекает боковые стороны в точках M и N. Докажите, что прямые MN и AC параллельны.

38. Окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника и продолжений двух его катетов. Докажите, что диаметр окружности равен периметру треугольника.

39. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке K Известно, что $AK = 4$ и $BC = 7$. Найдите периметр треугольника ABC.

40. Вне прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K так, что $\angle BKD = 90^\circ$. Найдите угол AKC.

41. Докажите, что если угол опирается на диаметр окружности, а его вершина лежит вне окружности, то этот угол острый.

42. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC, в котором один из углов равен 120°, отрезок OH равен основанию. (O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот).

43. В треугольник с углами 40°, 60°, 80° вписана окружность. Найдите углы треугольника с вершинами в точках касания.

44. Окружность с центром на стороне AB треугольника ABC проходит через точку B, касается стороны AC в точке C и пересекает сторону AB в точке D. Найдите углы треугольников ABC и BCD, если $\angle ABC = 30^\circ$.

45. Даны два треугольника, у которых равны по два угла, а так же одинаковые радиусы вписанных окружностей. Докажите, что эти треугольники равны.

46. Вершины четырехугольника $CDEF$ лежат на окружности. Известно, что его диагонали перпендикулярны, $\angle CED = 10°$, $\angle DEF = 70°$. Найдите углы четырехугольника $CDEF$.

47. В окружность вписан семиугольник, одна сторона которого равна радиусу окружности, а остальные равны между собой. Найдите углы семиугольника.

48. Окружность касается всех сторон пятиугольника, длины которых 5, 7, 9, 10 и 11. Найдите отрезки, на которые точка касания делит меньшую сторону.

49. Около трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) можно описать окружность и в нее можно вписать окружность. Найдите все ее стороны, если $AB = 2$, а средняя линия трапеции равна 7.

50. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, причем $AO = AB$. Найдите угол C.

51. В треугольнике ABC угол B равен 60°. AL и CN — биссектрисы. Их пересечение — точка I.

А) Докажите, что около четырехугольника $LBNI$ можно описать окружность.

Б) Докажите, что $IN = IL$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ЗА КУРС ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

1. Многоугольники выпуклые и невыпуклые. Вершины, стороны, диагонали многоугольника. Сумма углов выпуклого n-угольника. Виды четырёхугольников: квадрат, прямоугольник, ромб, ромбоид, параллелограмм, трапеция, произвольный четырёхугольник.
2. Параллелограмм, свойства углов, сторон и диагоналей параллелограмма.
3. Свойство биссектрис углов параллелограмма. Свойство углов, образованных высотами параллелограмма, проведёнными из одной вершины[1].
4. Признаки параллелограмма (сформулировать и доказать не менее трёх признаков).
5. Ромб, свойства сторон и диагоналей ромба.
6. Свойство высот ромба.
7. Прямоугольник, свойство диагоналей прямоугольника.
8. Квадрат, свойство диагоналей квадрата.
9. Трапеция, виды трапеций, свойство углов и диагоналей равнобокой трапеции.
10. Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках.
11. Средняя линия треугольника и трапеции. Свойства средней линии треугольника и трапеции.

---

[1] Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллельны, либо совпадают, а биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, перпендикулярны.

12. Площадь плоской фигуры, свойства площади. Площадь квадрата и площадь прямоугольника.
13. Площадь параллелограмма, площадь ромба: формулы для вычисления площади параллелограмма и площади треугольника. Площадь треугольника,
14. Площадь треугольника: формулы для вычисления площади треугольника. Свойство площадей треугольников, имеющих а) общую высоту (равные высоты); б) общую сторону (равные стороны); общий угол (равные углы).
15. Площадь трапеции, формулы для вычисления площади трапеции.
16. Теорема Пифагора и ей обратная.
17. Подобные треугольники. Коэффициент подобия. Понятие о подобии произвольных фигур. Подобные прямоугольники и подобные трапеции.
18. Свойство подобных треугольников. Свойство площадей подобных треугольников.
19. Признаки подобия треугольников.
20. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.
21. Свойство биссектрисы треугольника.
22. Тригонометрические функции острых углов: соотношения сторон и углов прямоугольного треугольника. Простейшие свойства тригонометрических функций острого угла.
23. Значения тригонометрических функций для углов: 0°; 30°; 45°; 60°; 90°.
24. Тригонометрические функции тупых углов и углов, больше развёрнутого.
25. Значения тригонометрических функций для углов: 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°.

26. Окружность и круг. Касательная к окружности. Расположение прямой и относительной окружности (число общих точек прямой и окружности) и относительно круга. Свойство касательной к окружности.

27. Свойство касательных к окружности, проведённых через одну точку. Единственность касательной к окружности, проведённой через данную точку окружности.

28. Касание окружностей и касание кругов.

29. Центральные и вписанные углы. Теорема о величинах центрального и вписанного углов, опирающихся на равные дуги. Теорема о вписанном угле, опирающемся на диаметр и ей обратная. Теорема об углах, опирающихся на одну дугу и ей обратная.

30. Углы с вершиной внутри и вне круга. Угол между касательными, проведёнными к окружности из одной точки. Угол между касательной и хордой.

31. Пропорциональные отрезки в круге.

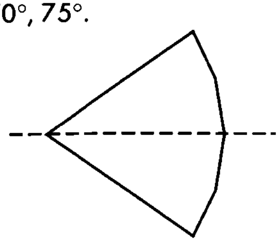
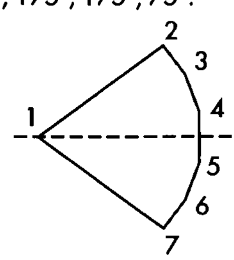
32. Замечательные точки треугольника.

33. Вписанные и описанные четырёхугольники, их свойства и признаки.

34. Векторы. Сложение, вычитание векторов. Коллинеарные векторы. Умножение вектора на число. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

35. Скалярное произведение векторов и его вычисление. Свойство скалярного произведения. Вычисление угла между векторами с помощью их скалярного произведения. Условие перпендикулярности векторов. Проекция вектора.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Тест 1		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	1	2
2	4	4
3	3	4
4	3	1
5	40°, 60°, 140°, 120°	20°, 80°, 120°, 140°
6	280°	260°
7	Решение. Пусть α_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ углы выпуклого шестиугольника и α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — острые углы. Тогда $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i < 4 \cdot 90 = 360°$. Но сумма $\sum_{i=1}^{6}\alpha_i = 720°$, Значит, $\alpha_5 + \alpha_6 > 360°$ и значит, хотя бы один из этих углов больше развёрнутого. Поэтому четырёх острых углов быть не может. Приведём пример шестиугольника с тремя острыми углами: 60°, 75°, 170°, 170°, 170°, 75°.  Ответ: 3.	Решение. Пусть α_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$ углы выпуклого семиугольника и α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — острые углы. Тогда $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i < 4 \cdot 90° = 360°$. Но сумма $\sum_{i=1}^{7}\alpha_i = 900°$, значит, $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 > 540°$ и значит, хотя бы один из этих углов больше развёрнутого. Поэтому четырёх острых углов быть не может. Приведём пример семиугольника с тремя острыми углами: 50°, 75°, 175°, 175°, 175°, 175°, 75°.  Ответ: 3.

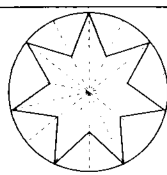
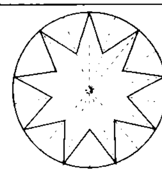
Тест 2			Тест 3		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**	**Номер задания**	**1 вариант**	**2 вариант**
1	2	1, 3, 4	**1**	4	1
2	3	1	**2**	4	3
3	4	4	**3**	1	3
4	1	4	**4**	3	2
5	8	7	**5**	2	4
6	100°	140°	**7**	90, 90 126, 126 или 48, 48, 168, 168	72, 72, 198, 198 или 105, 105, 165, 165
7	30	120			
8	Нет, этим свойством обладает трапеция с равными боковыми сторонами	Будет			

Тест 4		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	2	2, 3
2	1	2
3	2	1
4	3	4
5	4	4
6	14, 14	16, 16
7	2 : 7 или 5 : 7	3 : 10 или 7 : 10
8	90°	90°

Тест 5		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
6	135°	30°, 75°, 75°

Тест 6		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	3	4
2	1	2
3	2	3
4	4	1
5	90°	10
6	20°, 40°, 140°, 160°, или 40°, 80°, 100°, 140°	40°, 80°, 100°, 140°, или 70°, 80°, 100°, 110°

Тест 7		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	4	4
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	16	30
6	2 : 3	7 : 4

Тест 8		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	3, 4	1
2	2	5
3	3	3
4	1	2
6		

Тест 9		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	2	2
2	3	1
3	1	4
4	3	3
5	4	1
6	2	2
7	5 см или 7,2 см	4,4 см или 27,5 см

Окончание табл.

Номер задания	1 вари-ант	2 вари-ант
8	400 см^2	16 см^2
9	58 см^2. Указание: площадь треугольника *ADC* составляет пловину площади каждого из параллелограммов *ABCD* и *AMLC*.	85 см^2. Указание: площадь треугольника *ADC* составляет половину площади каждого из параллелограммов *ABCD* и *AMLC*.

Тест 10			Тест 11		
Номер задания	**1 вари-ант**	**2 вари-ант**	**Номер задания**	**1 вари-ант**	**2 вари-ант**
1	2	2	**1**	3	3
2	4	2	**2**	2	5
3	8	3	**3**	3	3
4	2	2	**4**	4	2
5	4	6,5	**5**	В 8 раз	В 15 раз
6	46	28	**7**	12	2
7	6	7,5	**8**	2	2
8	12	5 и 9			

Тест 12			Тест 13		
Номер задания	**1 вари-ант**	**2 вари-ант**	**Номер задания**	**1 вари-ант**	**2 вари-ант**
1	2	2	**1**	4	3
2	2	2	**2**	1	4
3	3	2	**3**	2	1
4	2	3	**4**	3	2
5	4,8	2,4			
6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			
7	1 : 4	4 : 9			
8	20	30			

Тест 14		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	3	1
5	0,4	0,35
6	–2	2,5
7	–7	–1,5

Тест 15		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	1	4
2	1	3
3	2	4
4	3	3
5	2	4
6	0,75	2,4
7	0,8	0,6
8	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$2\sqrt{2}$
9	Ответ: пусть $\sin A + \sin B = a$, тогда $\sin A + \cos A = a > 0$ и $a^2 - 1 = \sin 2A \le 1$. Следовательно, $a^2 \le 2 \Leftrightarrow 0 < a \le \sqrt{2}$ ч. т. д. Этот факт можно доказать и другим рассуждением. А именно: Пусть $\sin A + \sin B = t$, тогда $\sin A + \cos A = t > 0$, т.е. $t = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} > 0$ (a, b, $\sqrt{a^2+b^2}$ — стороны прямоугольного треугольника).	Ответ: пусть $\cos A + \cos B = a$, тогда $\sin A + \cos A = a > 0$ и $a^2 - 1 = \sin 2A \le 1$. Следовательно, $a^2 \le 2 \Leftrightarrow 0 < a \le \sqrt{2}$, ч. т. д.

Окончание табл.

Номер задания	1 вариант	2 вариант
9	Следовательно $t^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = 1 + \frac{2ab}{a^2+b^2} > 0$. Неравенство $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$ докажем способом «от противного». Пусть $\frac{2ab}{a^2+b^2} > 1$, тогда $2ab > a^2 + b^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a-b)^2 < 0$, что невозможно. Следовательно, $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$. Отсюда $0 < t^2 \leq 2$ и $0 < t \leq \sqrt{2}$.	Другое доказательство этого факта приведено в задаче 9 варианта 1.

Тест 16			Тест 17		
Номер задания	1 вариант	2 вариант	Номер задания	1 вариант	2 вариант
1	3	3	1	$d = 10$ — Г $d = 5$ — А $d = 0$ — В $d = 4$ — Б	$d = 7$ — А $d = 7{,}5$ — Г $d = 0$ — В $d = 6$ — Б
2	1	1	2	4	4
3	2	2	3	2	5
4	4	4	4	1	2
5	3	$3\sqrt{5}$	5	$160°$	$20°$
6	2	1	6	Окружности касаются внутренним образом	Окружность меньшего радиуса лежит в круге, ограниченном окружностью большего радиуса, и общих точек окружности не имеют

Окончание табл.

Тест 17		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
7	Пересекает окружность в двух точках	Окружность и прямая не имеют общих точек
8	12	16

Тест 18			Тест 19		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**	**Номер задания**	**1 вариант**	**2 вариант**
1	2	1	**1**	1 — В, 2 — А, 3 — Б, 5 — Г	1 — В, 2 — А, 3 — Б, 5 — Г
2	4	3	**2**	5	5
3	2	2	**3**	2	3
4	4	1	**4**	3	1
5	4	8	**5**	5	10
6	150°	300°	**6**	6,25	$\frac{25}{6}$
7	24°	31°	**7**	3 и 10	3 и 6
8	90°	120°	**8**	1,5	3

Тест 20		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	4	1
2	2	2
3	2	2
4	3	4
5	14	18
6	68	28
7	65°	45°
8	Нельзя. Решение: Пусть в четырёхугольник $AMND$ вписана окружность. Тогда, по теореме, $AD + MN = AM + ND$.	Нельзя. В трапеции $ABCD$ (BC — меньшее основание) выполняется равенство $AD + BC = AB + CD$.

Окончание табл.

Номер задания	1 вариант	2 вариант
8	Из условия следует, что $AD + BC = AB + CD$. Вычтем из второго равенства первое. Получим, что $BC - MN = BM + CN$ или $BC = BM + MN + NC$. Но последнее равенство невозможно, т.к. $BM + MN + NC > BN + NC > BC$ (по неравенству треугольника). Противоречие.	Для трапеции $AMND$ $AM + DN < AB + DC$ (поскольку $AM < AB$ и $DN < DC$). Далее, $MN + AD > BC + AD$, так как $MN > BC$. В силу равенства $AD + BC = AB + CD$ имеем $AM + DN \neq MN + AD$.

Тест 21			Тест 22		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**	**Номер задания**	**1 вариант**	**2 вариант**
1	1; 2	1	1	4	4
2	2	2	2	2	2
3	4	3	3	1	1
4	3	4	4	4	4
5	$-4\vec{a} - \vec{b}$	$-4\vec{a} - \vec{b}$	5	480	46
6	Существуют, например, $x = -1; y = 1$	Существуют, например, $x = -0{,}5; y = 1$	6	45°	135°
7	$x = 1, y = 2$	$x = -3, y = -3$			
9	$AO = \frac{3}{20}(\vec{AB} + \vec{AD})$	$AO = \frac{4}{27}(\vec{AB} + \vec{AD})$			

Задачи к итоговому тесту		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1	3	3
2	3	3
3	2	1
4	4	4
5	2	1

Окончание табл

Задачи к итоговому тесту		
Номер задания	**1 вариант**	**2 вариант**
6	1	1
7	4	4
8	$BC = 16$; $CC_1 = 9{,}6$; $BC_1 = 12{,}8$.	$BC = 24$; $CC_1 = 14{,}4$; $BC_1 = 19{,}2$.
9	$70°$	$30°$
10	125	240
11	9	18
12	$2{,}5(\sqrt{2}+\sqrt{6})$	$6(1+\sqrt{2})$
13	$\angle A = 36°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 54°$ или $\angle A = \left(32\frac{8}{11}\right)°$, $\angle B = \left(81\frac{9}{11}\right)°$, $\angle C = \left(65\frac{5}{11}\right)°$. $\angle A = \left(77\frac{1}{7}\right)°$, $\angle B = \left(64\frac{2}{7}\right)°$, $\angle C = \left(38\frac{4}{7}\right)°$.	$\angle A = 22{,}5°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 67{,}5°$ или $\angle A = \left(47\frac{7}{13}\right)°$, $\angle B = \left(55\frac{5}{13}\right)°$, $\angle C = \left(83\frac{1}{13}\right)°$. $\angle A = \left(25\frac{5}{7}\right)°$, $\angle B = \left(102\frac{6}{7}\right)°$, $\angle C = \left(51\frac{3}{7}\right)°$.
14	$40°$	$35°$

ОТВЕТЫ К ДИАГНОСТИЧЕСКИМ КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

2. $CE = 6$, $ED = 10$; **4.** 60°, 60°, 120°, 120°; **5.** 30° и 60°; **6.** 1; **7.** От 1 до 11 см; **9.** 60°, 60°, 120°, 120° или 70°, 70°, 110°, 110°; **10.** 6 и 12; **11.** 18 и 22; **12.** 20 см; **13.** 1 : 2; **14.** 9; **15.** 1 и 22; **16.** 3 : 2; **17.** 6,5; **18.** $\frac{60}{13}$ см; **19.** $\sqrt{5} \pm 2$; **20.** $10\sqrt{13} + 26$; **21.** Нет; **22.** $\frac{a+c}{b}$; **23.** 6 и 16; **24.** 9 и 15; **25.** 1 : 2; **26.** 90°; **27.** 4; **28.** 1; **29.** 5,5; 25; 25 и 1, 1, 5, 5; **30.** 15; **31.** $\frac{2}{\sqrt{29}}$ и $\frac{5}{\sqrt{29}}$; **35.** 7; **39.** 22; **40.** 90°; **43.** 70, 60, 50; **44.** 30°, 30°, 120° и 30°, 60°, 90°; **46.** 140°, 70°, 40°, 110°; **47.** 125°, 125°, 130°, 130°, 130°, 130°, 130°; **48.** 1 и 4; **49.** $CD = 12$, $BC = AD = 7$; **50.** 30° или 150°.

КОНТРОЛЬНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Предлагаемое пособие позволит быстро и эффективно определить уровень усвоения учащимися изучаемого материала. Издание содержит по три варианта тестовых заданий по всем темам курса.

Ученики смогут:

- оперативно проверять свои знания;
- отрабатывать умения и навыки решения геометрических задач;
- готовиться к ГИА и ЕГЭ.

Родители найдут:

- ориентир для определения достижений ребёнка и его пробелов в обучении;
- возможность оказать помощь в случае неуспеваемости.

Преподаватели получат уникальную возможность:

- существенно экономить учебное время;
- быстро проверить уровень усвоения учащимися изучаемого материала;
- выявить творческий потенциал каждого ученика.

Пособие прошло апробацию во многих регионах России, имеет положительные заключения от специалистов институтов развития образования. Пособие практично, современно по содержанию и оформлению. По нему легко учить и интересно учиться.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства ***«ЭКЗАМЕН»*** допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

ЭКЗАМЕН®