Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Физико-
технологический
институт

В. А. ВОЛКОВ

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И РАДОНА

Учебно-методическое пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. А. Волков

РЯДЫ ФУРЬЕ.
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И РАДОНА

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве ***учебно-методического пособия*** *для студентов,*
обучающихся по программе бакалавриата и специалитета
по направлениям подготовки
140801.65 – Электроника и автоматика физических установок;
210100.62 – Электроника и наноэлектроника;
201000.62 – Биотехнические системы и технологии;
200100.62 – Приборостроение;
221700.62 – Стандартизация и метрология;
230100.62 – Информатика и вычислительная техника;
230400.62 – Информационные системы и технологии

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517.518.45(075.8)
ББК 22.161.5я73
В67

Рецензенты: кафедра прикладной математики Уральского государственного экономического университета (завкафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Б. Мельников);
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. М. Ф. Прохорова (ИММ УрО РАН)

Научный редактор − канд. физ.-мат. наук, доц. Р. М. Минькова

Волков, В. А.

В67 Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона : учебно-методическое пособие / В. А. Волков. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 32 с.

ISBN 978-5-7996-1252-8

В пособии рассмотрены основные понятия теории рядов Фурье и преобразования Фурье, условия разложимости функции в ряд Фурье и в интеграл Фурье. Показана связь преобразования Фурье и преобразования Радона. Продемонстрировано применение преобразования Радона в компьютерной томографии.

Пособие предназначено для студентов физико-технологического института и соответствует федеральному государственному образовательному стандарту третьего поколения.

Библиогр.: 8 назв. Рис. 9.

УДК 517.518.45(075.8)
ББК 22.161.5я73

ISBN 978-5-7996-1252-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория рядов Фурье в той или иной мере изложена практически во всех учебниках по высшей математике. Интегральное преобразование Фурье можно найти во многих методических пособиях и учебниках. Интегрального преобразования Радона нет ни в одном учебнике по математике из списка основной и дополнительной рекомендуемой литературы. Между тем это интегральное преобразование служит математической основой компьютерной томографии и обязательно должно быть изучено студентами соответствующих специальностей. Учитывая тесную связь и взаимозависимость этих разделов математики, мы в данных методических указаниях изложили их с единой точки зрения, сделав акцент на практическом применении интегрального преобразования Радона. Последнее, по нашему мнению, должно повысить мотивацию студентов при изучении как этих разделов, так и курса высшей математики в целом.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f(x)$ – функция, определенная на всей числовой оси. Число T называется периодом этой функции, если для любого x выполняется соотношение:

$$f(x+T)=f(x). \tag{1}$$

Если T есть период функции, то nT, где n – любое целое число, также является периодом рассматриваемой функции. Функция, имеющая период, отличный от нуля, называется периодической.

Всякая периодическая функция, отличная от постоянной, имеет среди своих положительных периодов наименьший. Обычно под словом «период» понимают наименьший из положительных периодов.

Если функция $f(x)$ имеет период T, то $\varphi(x)=f(ax)$ имеет период T/a.

Действительно,

$$\varphi\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)=\varphi(x). \tag{2}$$

Если $f(x)$ имеет период T, то интеграл от этой функции, взятый в пределах, отличающихся на T, не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, т. е.

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx. \qquad (3)$$

Формула (3) будет использоваться далее для вычисления коэффициентов Фурье.

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π

Поставим задачу: разложить сложную периодическую функцию на простые периодические функции, т. е. функции вида

$$A\sin(\omega x + \alpha). \qquad (4)$$

Такие функции называют простыми гармониками. Функцию (4) можно представить в виде

$$a\cos\omega x + b\sin\omega x. \qquad (5)$$

Это простая гармоника с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Если мы хотим разложить функцию с периодом 2π на простые гармоники, то их частоты следует выбирать так, чтобы каждая из этих гармоник имела 2π в качестве одного из своих периодов. Таким образом, в качестве гармоник следует брать гармоники с частотами $\omega = n$, где n – натуральное число.

Допуская в качестве составляющей еще и постоянную функцию, для которой любое число является периодом, приходим к такой задаче: разложить функцию $f(x)$ с периодом 2π в ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots \qquad (6)$$

или

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n\sin nx), \qquad (7)$$

где $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ – некоторые постоянные.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для последующих вычислений нам потребуются интегралы

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx, \quad J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx, \tag{8}$$

$$J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx, \ J_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx, \ J_5 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx, \tag{9}$$

где m и n – натуральные числа. Имеем

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi, \quad n = 0, \\ \dfrac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \ n \neq 0, \end{array} \right. \tag{10}$$

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left[\begin{array}{ll} 0, & n = 0, \\ \dfrac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq 0, \end{array} \right. \tag{11}$$

$$J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = \left[\begin{array}{l} 0, \ m \neq n, \\ \pi, \ m = n, \end{array} \right. \tag{12}$$

$$J_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = \left[\begin{array}{l} 0, \ m \neq n, \\ \pi, \ m = n, \end{array} \right. \tag{13}$$

$$J_5 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx = 0. \tag{14}$$

Формулы (10)–(14) будут использоваться при разложении функций в ряды Фурье.

РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ С ПЕРИОДОМ 2π

Рассмотрим функцию $f(x)$ с периодом 2π.

Предположим, что эта функция оказалась такой, что для нее нашлось разложение в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos x + b_1 \sin x\right) + \ldots + \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) + \ldots \tag{15}$$

Проинтегрируем обе части этого равенства в пределах от $-\pi$ до π. Почленное интегрирование в правой части (15) (законное в силу предположенной равномерной сходимости) с учетом (10) и (11) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \left(a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos xdx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin xdx \right) + \ldots +$$
$$+ \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx \right) + \ldots = \pi a_0. \tag{16}$$

Умножая соотношение (15) на $\cos mx$ и интегрируя почленно в пределах от $-\pi$ до π с учетом (10)–(14), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx + \left(a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\cos mxdx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos mxdx \right) + \ldots +$$
$$+ \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos mxdx \right) + \ldots = \pi a_m. \tag{17}$$

Аналогично, умножая соотношение (15) на $\sin mx$ и интегрируя почленно в пределах от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \pi b_m. \tag{18}$$

Таким образом,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx. \tag{19}$$

Числа a_0, a_m, b_m (m = 1, 2, 3, …) называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Заметим, что их можно найти безотносительно к существованию разложения (15).

Определение. Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π. Вычислим для нее коэффициенты Фурье (19) и составим ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right).$$

Этот ряд называется рядом Фурье функции $f(x)$, что записывается так

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{20}$$

Знак «~» в (20) означает равенство левой части формулы ее правой части с учетом теоремы Дирихле.

ТЕОРЕМА ДИРИХЛЕ

Допустим, что функция $f(x)$, заданная на промежутке от $-\pi$ до π, или непрерывна, или имеет внутри этого промежутка лишь конечное число точек разрыва. Предположим, что все эти точки разрыва обладают следующим свойством: если $x = x_1$ есть точка разрыва, то существуют конечные односторонние пределы функции $f(x)$ при стремлении x к x_1. Обозначим эти пределы через $f(x_1+0)$ и $f(x_1-0)$. Такие точки разрыва называют точками разрыва первого рода. На конце $x = -\pi$ рассмотрим только правосторонний предел $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x) = f(-\pi+0)$, на конце $x=\pi$ рассмотрим только левосторонний предел $\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x) = f(\pi-0)$.

Предположим, что $f(x)$ имеет на промежутке $(-\pi, \pi)$ конечное число максимумов и минимумов, т. е. промежуток $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число частей, в каждой из которых функция $f(x)$ меняется монотонно. Указанные выше условия называются условиями Дирихле. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке $(-\pi, \pi)$, если она непрерывна на этом промежутке или имеет конечное число точек разрыва первого рода, а также если она имеет конечное число максимумов и минимумов на этом промежутке. Такие функции называются кусочно-непрерывными и кусочно-монотонными.

Приведем (без доказательства) одну из основных теорем теории рядов Фурье – теорему Дирихле.

Если функция $f(x)$, заданная на промежутке $(-\pi, \pi)$, удовлетворяет на этом промежутке условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится на всем промежутке $(-\pi, \pi)$, и сумма этого ряда:

а) равна $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри промежутка;

б) равна $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ во всех точках разрыва $f(x)$;

в) равна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ на концах промежутка, т. е. при $x=\pm\pi$.

Замечание. Сумма ряда Фурье является функцией периодической с периодом 2π.

Рассмотрим несколько примеров разложения функций в ряд Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале (–π, π), где $f(x)=\left[\begin{array}{l} x,\ -\pi<x<0, \\ 2x,\ 0\le x<\pi. \end{array}\right.$

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}xdx+\int\limits_{0}^{\pi}2xdx\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}x\cos mxdx+\int\limits_{0}^{\pi}2x\cos mxdx\right)=\frac{1}{\pi m^2}\left[(-1)^m-1\right],$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}x\sin mxdx+\int\limits_{0}^{\pi}2x\sin mxdx\right)=\frac{3}{m}(-1)^{m+1}.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...\right)+3\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\right).$$

Этот ряд сходится к $f(x)$ на промежутке (–π, π); в точках $x=\pm\pi$ его сумма равна $\dfrac{\pi}{2}$. Кроме того, сумма ряда Фурье является функцией периодической с периодом 2π. График суммы данного ряда показан на рис. 1.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\left[\begin{array}{l} c_1,\ -\pi<x<0, \\ c_2,\ \ 0<x<\pi, \end{array}\right.$

где c_1 и c_2 – постоянные, причем $c_1<0,\ c_2>0.$

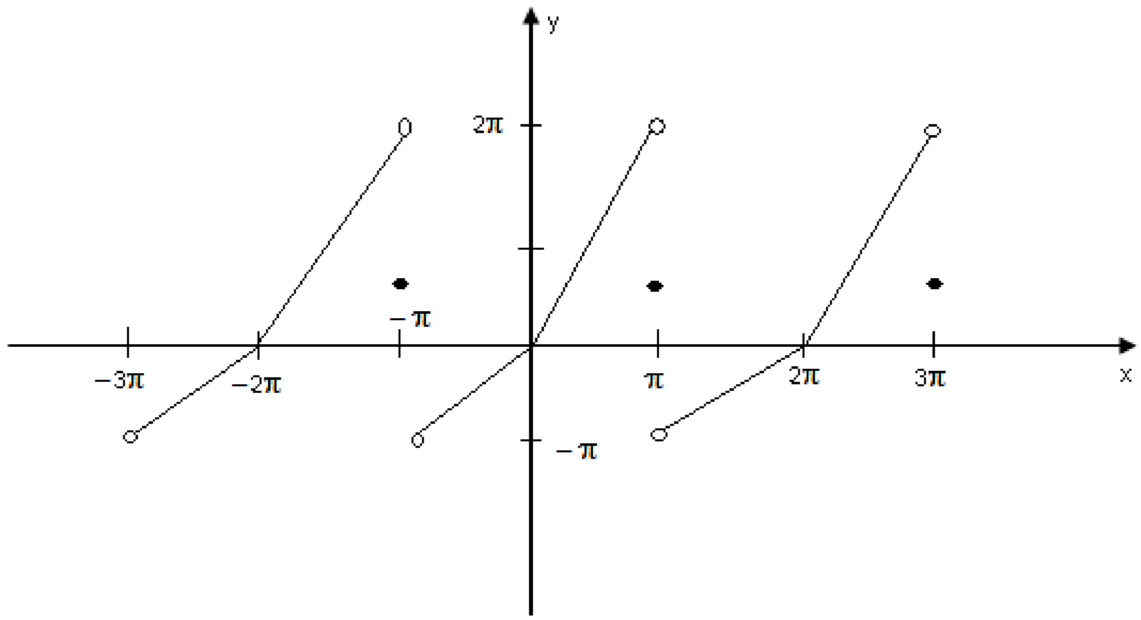

Рис. 1. График суммы ряда из примера 1

Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} c_1 dx + \int_{0}^{\pi} c_2 dx\right) = c_1 + c_2,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} c_1 \cos mx dx + \int_{0}^{\pi} c_2 \cos mx dx\right) = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} c_1 \sin mx dx + \int_{0}^{\pi} c_2 \sin mx dx\right) = \frac{c_1 - c_2}{\pi m}\left((-1)^m - 1\right),$$

т. е. $b_m = 0$ при четном m и $b_m = \dfrac{2(c_1 - c_2)}{\pi m}$ при нечетном m. Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

Поэтому сумма этого ряда равна c_1 при $-\pi < x < \pi$, c_2 при $0 < x < \pi$ и $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$ при $x = 0, \pm\pi$. Кроме того, сумма ряда Фурье является функцией периодической с периодом 2π (рис. 2).

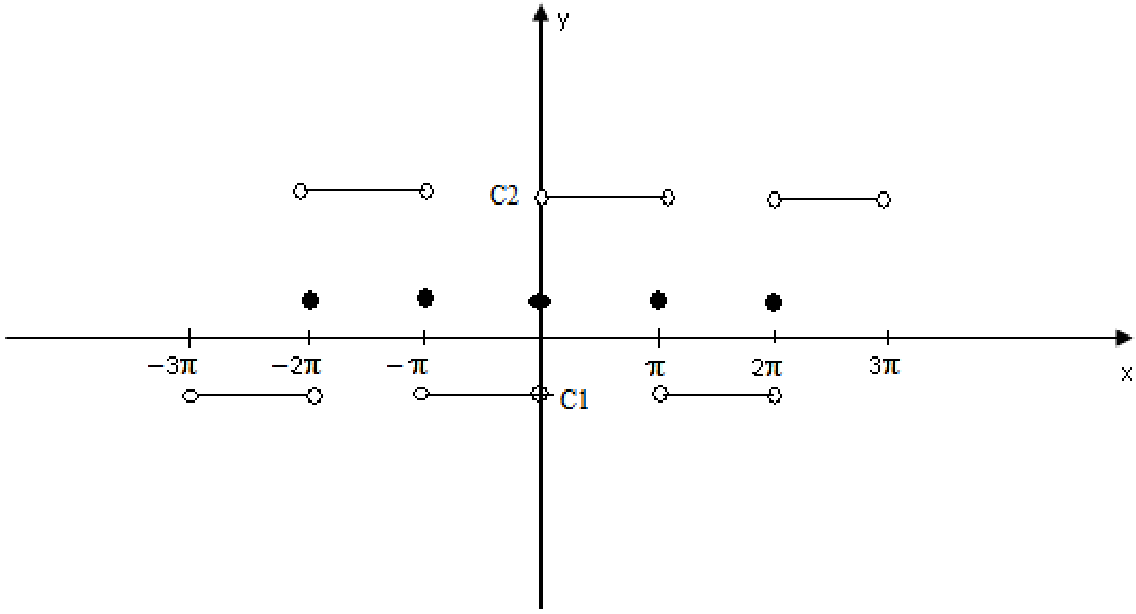

Рис. 2. График суммы ряда Фурье из примера 2

Пример 3. Написать ряд Фурье для функции $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

Определим коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} odx+\int_{0}^{\pi} xdx\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos mxdx=\frac{1}{\pi m^2}\left((-1)^m-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi m^2}, & m-\text{нечетное},\\ 0, & m-\text{четное},\end{cases}$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin mxdx=-\frac{\cos m\pi}{m}=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & m-\text{нечетное},\\ -\dfrac{1}{m}, & m-\text{четное}.\end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).$$

Сумма этого ряда показана на рис. 3.

В примерах 1–3 рассмотрены разложения в ряд Фурье функций общего вида в смысле их четности-нечетности.

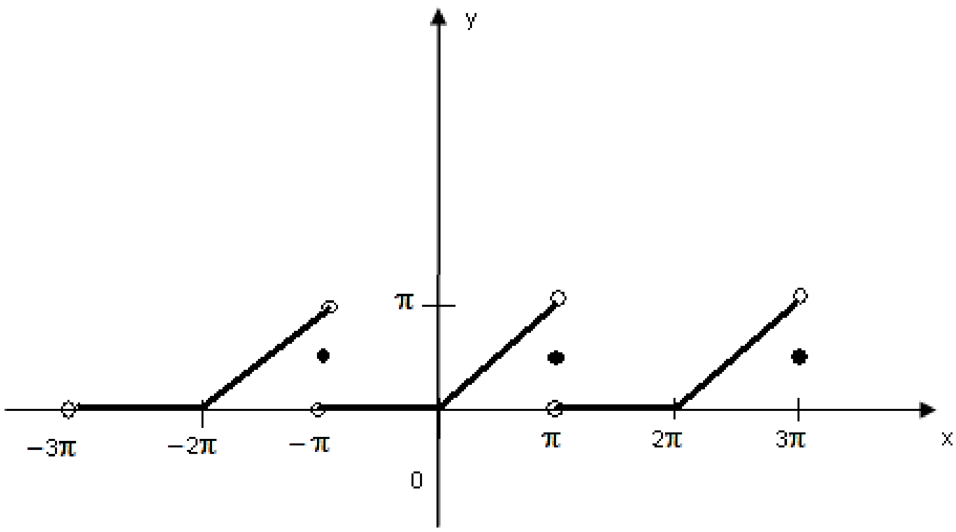

Рис. 3. Сумма ряда Фурье из примера 3

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

По свойствам определенного интеграла, если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \tag{21}$$

а если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \tag{22}$$

Поэтому коэффициенты Фурье для четной функции будут равны

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \tag{23}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos mxdx, \tag{24}$$

$$b_m = 0, \tag{25}$$

а для нечетной функции

$$a_0 = a_m = 0, \tag{26}$$

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin mxdx. \tag{27}$$

Таким образом, ряд Фурье для четной функции с периодом 2π выглядит следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx, \tag{28}$$

а для нечетной

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx. \tag{29}$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = |x|$, период которой равен 2π.

Очевидно, $f(x)$ – четная функция, поэтому в силу формул (23)–(25), (28)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos mx dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^m - 1}{m^2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{\pi m^2}, & m - \text{нечетное}, \\ 0, & m - \text{четное}. \end{bmatrix}$$

Искомое разложение есть

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Сумма ряда Фурье является функцией 2π – периодической и совпадает с $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Пример 5. Написать ряд Фурье для функции, заданной на промежутке $(-\pi, \pi)$ формулой $f(x) = x$, период которой равен 2π (рис. 4).

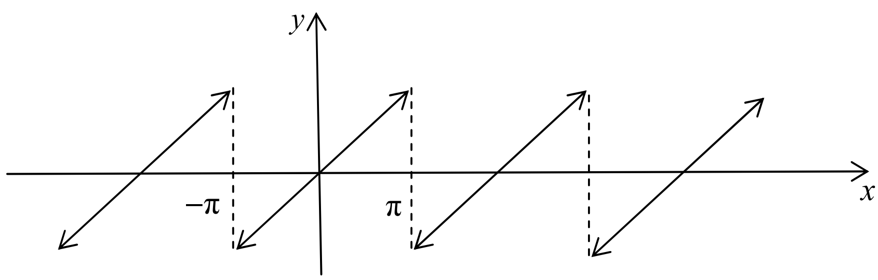

Рис. 4. График функции $f(x)$, рассмотренной в примере 5

Эта функция нечетная на промежутке $[-\pi, \pi]$, поэтому

$$a_0 = a_m = 0,$$

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin mx dx = \frac{2}{m}(-1)^{m+1}.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье

$$f(x) \sim 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

Сумма ряда Фурье является функцией 2π – периодической и совпадает с $f(x)$ в точках ее непрерывности; в точках разрыва $x_n = \pi + 2\pi n \ (n \in Z)$ сумма ряда равна $\frac{f(x_n + 0) + f(x_n - 0)}{2} = 0$.

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПЕРИОДОМ

Пусть $f(x)$ – функция с произвольным периодом $2l$ (где l – полупериод). Полагая $x = at$, получим функцию с периодом $\frac{2l}{a}$. Выберем a так, чтобы $\frac{2l}{a} = 2\pi$, т. е. $a = \frac{l}{\pi}$. Тогда подстановка $x = \frac{lt}{\pi}$ приводит нас к функции $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ с периодом 2π.

Предполагаем, что $f(x)$ имеет на отрезке $[l, l]$ не более конечного числа точек разрыва первого рода и абсолютно интегрируема на этом отрезке. Тогда в точках непрерывности имеем

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mt + b_m \sin mt\right), \tag{30}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt, \ a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos mtdt, \ b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin mtdt. \tag{31}$$

Переходя в формулах (30) и (31) от переменной t к переменной x, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right), \tag{32}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \ a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx, \ b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx, \tag{33}$$

$$\left(m = 1, 2, 3, \dots\right).$$

В случае четной функции с периодом $2l$ все $b_m = 0$; тогда в точках непрерывности $f(x)$ получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l}, \tag{34}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{35}$$

Если $f(x)$ – нечетная функция с периодом $2l$, то получаем в точках непрерывности

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{l}, \tag{36}$$

где

$$b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{37}$$

Пример 6. Записать ряд Фурье заданной на интервале $(-a, a)$ функции $f(x) = e^x$, период которой есть $T = 2a$.

Получим

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} e^x dx = \frac{e^a - e^{-a}}{a},$$

$$a_m = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} e^x \cos\frac{m\pi x}{a}dx = a\left(e^a - e^{-a}\right)\cdot\frac{(-1)^m}{a^2 + \pi^2 m^2},$$

$$b_m = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} e^x \sin\frac{m\pi x}{a}dx = \pi\left(e^a - e^{-a}\right)\cdot\frac{(-1)^{m+1}\cdot m}{a^2 + \pi^2 m^2}$$

и ряд Фурье в виде

$$\frac{e^a - e^{-a}}{2a} + a(e^a - e^{-a})\left(-\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{a^2+\pi^2} + \frac{\cos\frac{2\pi x}{a}}{a^2+\pi^2\cdot 2^2} - \frac{\cos\frac{3\pi x}{a}}{a^2+\pi^2\cdot 3^2} + \ldots\right) +$$

$$+\pi(e^a - e^{-a})\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{a^2+\pi^2} - \frac{2\sin\frac{2\pi x}{a}}{a^2+\pi^2\cdot 2^2} + \frac{3\sin\frac{3\pi x}{a}}{a^2+\pi^2\cdot 3^2} - \ldots\right).$$

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию $|\sin x|$.

Эта функция четная с периодом $\pi \left(2l=\pi,\ l=\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_m=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2mx dx=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4m^2-1},\quad b_m=0.$$

Отсюда получаем

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{4m^2-1}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\frac{\cos 6x}{35}+\ldots\right).$$

Во всех точках данный ряд сходится к самой функции.

Пример 8. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале (–1, 1) формулой $f(x)=x^3$, период которой $T=2$.

Это нечетная функция, $T=2l=2$, т. е. $l=1$. Тогда

$$a_0=a_m=0,\quad b_m=2\int_0^1 x^3\sin m\pi x dx=\frac{2}{\pi m}\left(\frac{6}{\pi^2 m^2}-1\right)\cdot(-1)^m.$$

Следовательно, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{6}{\pi^2}-1\right)\sin \pi x+\frac{2}{\pi\cdot 2}\left(\frac{6}{\pi^2\cdot 2^2}-1\right)\sin 2\pi x-\frac{2}{\pi\cdot 3}\left(\frac{6}{\pi^2\cdot 3^2}-1\right)\sin 3\pi x+\ldots$$

На рис. 5 приведен график суммы этого ряда.

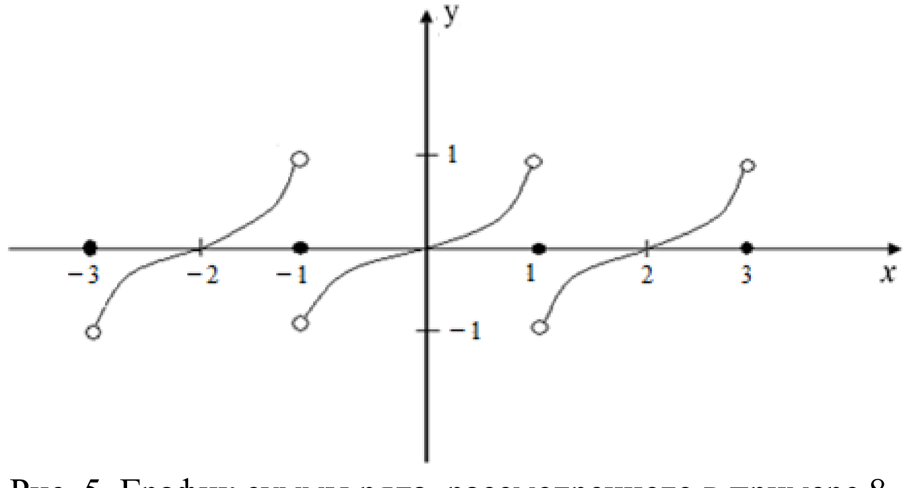

Рис. 5. График суммы ряда, рассмотренного в примере 8

Таким образом, в примерах 6–8 рассмотрены разложения в ряд Фурье функций с произвольным периодом.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ОТРЕЗКЕ [0, *l*]

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[0,\ l]$. Найдем соответствующий ей ряд Фурье на данном промежутке. Для этого дополним определение этой функции каким-либо образом на промежутке $[-l,\ 0]$. Получим, таким образом, новую функцию $F(x)$, совпадающую на отрезке $[0,\ l]$ с функцией $f(x)$. Эту функцию $F(x)$, заданную на $[-l,\ l]$, можно разложить в ряд Фурье, который для $x \in [0,\ l]$ дает разложение функции $f(x)$. Обычно используются два продолжения $f(x)$ на промежуток $-l \le x < 0$: четное и нечетное. В первом случае получим разложение $f(x)$ в ряд по косинусам, во втором – по синусам.

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0,\ l]$, может быть продолжена единственным образом на всю числовую прямую так, что получится четная функция с периодом $2l$. Для четного продолжения $f(x)$ на промежуток $[-l,\ 0]$ возьмем график заданной на отрезке $[0,\ l]$ функции $f(x)$ и присоединим к нему график, симметричный с ним относительно оси ординат. Тогда получится график четной функции, совпадающий с графиком заданной функции на отрезке $[0,\ l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении четных функций в ряды Фурье следует, что если $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то внутри этого отрезка в точках непрерывности имеем разложение в ряд косинусов

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l}, \tag{38}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx.$$

Аналогичным образом функция $f(x)$ может быть продолжена нечетным образом. Возьмем график заданной на интервале $(0, l)$ функции и присоединим к нему график, симметричный заданному относительно начала координат. Тогда получится график нечетной функции, совпадающий с графиком заданной функции на интервале $(0, l)$.

Отсюда следует, что внутри отрезка $[0,\ l]$ в точках непрерывности функции $f(x)$ имеем разложение в ряд синусов

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{l}, \qquad b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{39}$$

Пример 9. Разложить заданную на интервале $(0,1)$ функцию $f(x)=1-x$ а) в ряд косинусов; б) в ряд синусов.

В случае а) $f(x)$ продолжим четным образом и используем разложение (38), где

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x)dx = 1,$$

$$a_m = 2\int_0^1 (1-x)\cos m\pi x dx = \frac{2(1-(-1)^m)}{\pi^2 m^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2 m^2}, & m - \text{нечетное}, \\ 0, & m - \text{четное}. \end{cases}$$

Тогда искомое разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, \quad x\in(0;1).$$

Сумма ряда Фурье является функцией периодической с периодом $T=2$ и совпадает с четным продолжением $f(x)$ на промежутке $(-1;\ 1)$ (рис. 6).

В случае б) $f(x)$ продолжим нечетным образом и используем разложение (39), где

$$b_m = 2\int_0^1 (1-x)\sin m\pi x dx = -\frac{2}{\pi m}.$$

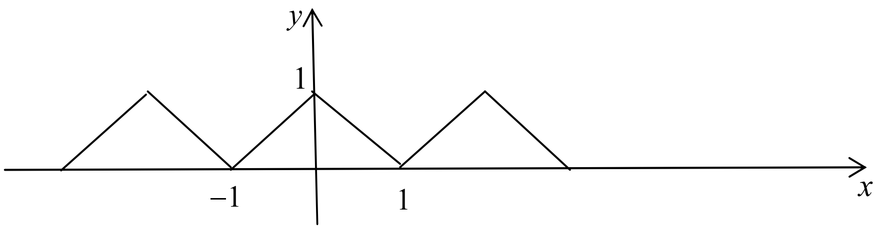

Рис. 6. Сумма ряда Фурье для четного продолжения функции

При этом искомый ряд Фурье запишется так:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi x}{m}, \quad x\in(0;\ 1).$$

Сумма ряда Фурье является функцией периодической с периодом $T=2$ и совпадает с нечетным продолжением $f(x)$ на промежутке $(-1;\ 1)$ (рис. 7).

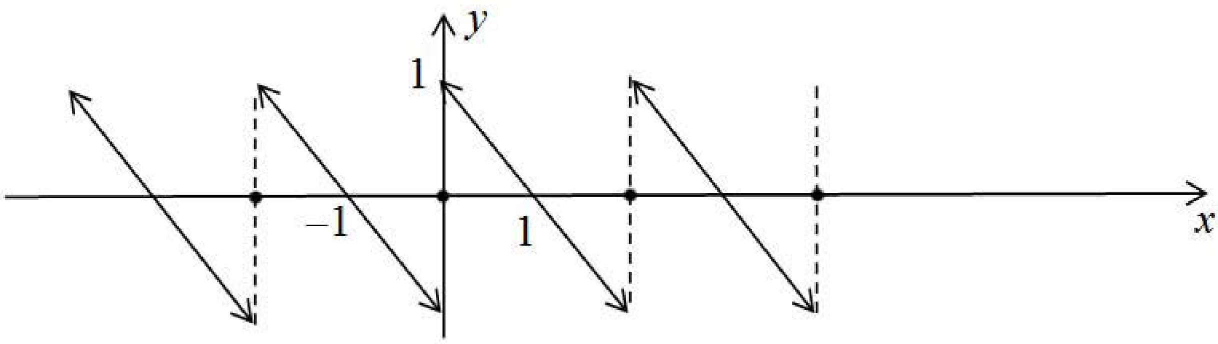

Рис. 7. Сумма ряда Фурье для нечетного продолжения функции

Данный пример показывает, что разложения одной и той же функции в ряд Фурье могут коренным образом отличаться друг от друга при различных продолжениях функции на вторую половину периода.

РЯД ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Возьмем для удобства $T = 2\pi$, т. е. $l = \pi$. Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{40}$$

где при $k = 1,\ 2,\ 3...$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx. \tag{41}$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx, \quad e^{-ikx} = \cos kx - i\sin kx, \tag{42}$$

откуда получим

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \ \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) = \frac{-i}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx}). \tag{43}$$

Подставляя (43) в ряд (40), запишем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - \frac{ib_k}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx})\right),$$

или

$$f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx}, \tag{44}$$

где

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \; c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \tag{45}$$

Во второй сумме в соотношении (44) заменим k на «$-k$», тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{ikx} \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \tag{46}$$

Здесь

$$k > 0:\; c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i \sin kx)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

$$k = 0:\; c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{47}$$

$$k < 0:\; c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(-kx) + i \sin(-kx))dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Таким образом, для любых целых k справедлива формула

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{48}$$

Итак, для периодической функции с периодом $T = 2\pi$ комплексная форма ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{49}$$

где c_k определяется формулой (48). Для периодической функции с произвольным периодом $T = 2l$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \text{ где } c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{k\pi x}{l}} dx. \tag{50}$$

Отметим, что комплексная форма ряда Фурье наиболее удобна для перехода к интегральному преобразованию Фурье.

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ и абсолютно интегрируемую на нем; последнее означает, что существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = Q, \tag{51}$$

где Q – конечное число.

Допустим, что функция $f(x)$ такова, что она разлагается в ряд Фурье на любом интервале $(-l, l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right), \tag{52}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx,\ \ b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{53}$$

Подставляя (53) в (52), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{m\pi t}{l}dt\right)\cos\frac{m\pi x}{l} +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{m\pi t}{l}dt\right)\sin\frac{m\pi x}{l} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{m\pi t}{l}\cos\frac{m\pi x}{l} + \sin\frac{m\pi t}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\right]dt = \tag{54}$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{m\pi(t-x)}{l}dt.$$

Выясним, какой вид примет это разложение при $l \to \infty$.
Введем следующие обозначения:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l},\ \ \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots,\ \omega_m = \frac{m\pi}{l},\ \ \Delta\omega_m = \frac{\pi}{l}. \tag{55}$$

Подставляя (55) в (54), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_m(t-x)dt\right)\Delta\omega_m. \tag{56}$$

Перейдем в (56) к пределу при $l \to \infty$. Первое слагаемое при этом стремится к нулю

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt = \frac{Q}{2l} \to 0. \qquad (57)$$

При любом фиксированном l выражение, стоящее в (56) в скобках, есть функция ω_m, а ω_m принимает значения от $\frac{\pi}{l}$ до ∞. Справедливо следующее утверждение (доказательство опускаем): если функция $f(x)$ кусочно монотонна на каждом конечном интервале $(-l, l)$, ограничена и абсолютно интегрируема на бесконечном интервале, то соотношение (56) при $l \to \infty$ запишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega. \qquad (58)$$

Выражение в правой части (58) называется интегралом Фурье для функции $f(x)$ в действительной форме. Это равенство справедливо во всех точках непрерывности $f(x)$. В точках разрыва имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (59)$$

Поскольку

$$\cos\omega(t-x) = \cos\omega t\cos\omega x + \sin\omega t\sin\omega x, \qquad (60)$$

формулу (58) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega. \qquad (61)$$

Так как ранее было допущено, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, то интегралы по t в (61) существуют.

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt = 0. \qquad (62)$$

Для нечетной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt. \qquad (63)$$

В первом случае (61) запишется так:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega, \qquad (64)$$

а во втором –

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega. \qquad (65)$$

Обозначим в (64)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = F(\omega), \qquad (66)$$

тогда выражение (64) можно записать так:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F(\omega)\cos\omega x d\omega, \qquad (67)$$

где $F(\omega)$ называется косинус-преобразованием Фурье для функции $f(x)$.

Аналогично обозначим в (65)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt = \varphi(\omega) \qquad (68)$$

и получим для (65) формулу

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \varphi(\omega)\sin\omega x d\omega, \qquad (69)$$

где $\varphi(\omega)$ называется синус-преобразованием Фурье для функции $f(x)$.

Пример 10. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1, \\ 1/2, & |x|=1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ – четная, следовательно

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega.$$

Вычислим

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = \int_0^1 \cos\omega t dt = \frac{\sin\omega t}{\omega}\Bigg|_0^1 = \frac{\sin\omega}{\omega}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega.$$

Пример 11. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Используем формулы (66) и (68):

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos\omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2}{4+\omega^2},$$

$$\varphi(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin\omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{4+\omega^2}.$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Будем называть непериодическую функцию $f(x)$ оригиналом по Фурье, если она на любом конечном отрезке является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной (либо кусочно-гладкой), а также абсолютно интегрируемой на всей числовой оси.

Теорема Фурье. Если непериодическая функция $f(x)$, определенная на интервале $(-\infty, +\infty)$, является оригиналом по Фурье, то во всех точках ее непрерывности справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\right)d\omega, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{70}$$

(без доказательства).

Правую часть формулы (70) называют интегралом Фурье в комплексной форме для данной функции. Интегральную формулу Фурье (70) можно записать иначе:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{71}$$

где

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (72)$$

называется спектральной плотностью функции $f(x)$. Интеграл в соотношении (71) вычисляется как несобственный в смысле главного значения. Функция $A(\omega)=|F(\omega)|$ называется амплитудным частотным спектром, а функция $\varphi(\omega)=\arg F(\omega)$ – фазовым частотным спектром функции $f(x)$.

Можно показать, что комплексная форма интеграла Фурье (70) преобразуется в действительную форму (56) интеграла Фурье.

Пример 12. Для рассмотренной в примере 11 функции $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ найти спектральную плотность $F(\omega)$, амплитудный и фазовый частотные спектры $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

Данная функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой и кусочно-гладкой, т. е. условия разложимости этой функции в интеграл Фурье выполняются. Поэтому разложение функции $f(x)$ в интеграл Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \qquad (*)$$

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(2+i\omega)t}dt=-\frac{1}{2+i\omega}e^{-(2+i\omega)t}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{1}{2+i\omega}=\frac{2-i\omega}{4+\omega^2},$$

$$A(\omega)=|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega)=\arg F(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}F(\omega)}{\operatorname{Re}F(\omega)}=-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}.$$

Равенство $(*)$ справедливо для всех x, кроме точки разрыва первого рода $x=0$.

Итак, для непериодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям разложимости в интеграл Фурье, можно (переобозначив переменную интегрирования) записать

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \quad x\in(-\infty,\infty), \qquad (73)$$

где

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx,\quad \omega\in(-\infty,\infty). \qquad (74)$$

Здесь равенство (74) называется прямым преобразованием Фурье (ППФ), (73) – обратным преобразованием Фурье (ОПФ), $f(x)$ – оригиналом, $F(\omega)$ – Фурье-образом (изображением по Фурье).

Подобно интегральному преобразованию Лапласа соответствие между оригиналом $f(x)$ и изображением $F(\omega)$ обозначим $f(x) \doteqdot F(\omega)$.

Основные свойства преобразования Фурье.

Если $f(x) \doteqdot F(\omega)$ и $g(x) \doteqdot G(x)$, то

1) $\alpha f(x)+\beta g(x)\doteqdot \alpha F(\omega)+\beta G(\omega)$ (линейность ПФ);
2) $f^{(k)}(x)\doteqdot (i\omega)^k F(\omega)$ (дифференцирование оригинала);
3) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \doteqdot -\frac{i}{\omega}F(\omega)$ (интегрирование оригинала);
4) $f(x-\beta)\doteqdot e^{-i\omega\beta}F(\omega)$ (теорема запаздывания);
5) $e^{i\beta x}f(x)\doteqdot F(\omega-\beta)$ (теорема смещения);
6) $f(\alpha x)\doteqdot \frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ (теорема подобия);
7) $(-i)^k x^k f(x)\doteqdot F^{(k)}(\omega)$ (дифференцирование изображения);
8) $F(x)\doteqdot 2\pi f(-\omega)$ (симметрия ПФ);
9) $f_1 * f_2 \doteqdot F_1(\omega)F_2(\omega)$, где $f_1(x)*f_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt$ (теорема о свертке) и т. д.

Для нахождения изображения по оригиналу и оригинала по изображению можно использовать определения (73) и (74), а можно, не вычисляя интегралов, воспользоваться подробными таблицами изображений и свойствами преобразования Фурье. Как и в случае преобразования Лапласа, некоторые действия над оригиналами сводятся к более простым действиям над их изображениями. Поэтому иногда бывает проще исходную задачу для оригинала с помощью ППФ свести к более простой задаче для изображения, решить последнюю и с помощью ОПФ вернуться к оригиналу – решению исходной задачи.

Подобно (73) и (74) можно записать прямое двумерное преобразование Фурье от функции двух переменных $f(x,y)$ (оригинала)

$$F(k_x,\, k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x,\, y) dy, \qquad (75)$$

где $F(k_x, k_y)$ – двумерное Фурье-изображение, и $(k_x x + k_y y) \equiv \vec{k}\vec{r}.$ Тогда обратное преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}} F(k_x,\, k_y) dk_y. \qquad (76)$$

Двумерное преобразование Фурье понадобится для рассмотрения интегрального преобразования Радона.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

В 1917 году математик И. Радон предложил интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье и связанное с последним. Важнейшее свойство преобразования Радона – обратимость, т. е. возможность восстанавливать исходную функцию по ее преобразованию Радона.

Рассмотрим случай функции двух переменных (именно он наиболее важен на практике). Пусть $f(x, y)$ функция двух действительных переменных, определенная на всей плоскости и достаточно быстро убывающая на бесконечности (так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились). Тогда преобразованием Радона функции $f(x, y)$ называется функция

$$R(s,\, \alpha) = \int\limits_{L=AA'} f(x,\, y) dL = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\alpha - z\sin\alpha, s\sin\alpha + z\cos\alpha) dz. \qquad (77)$$

Преобразование Радона имеет простой геометрический смысл – это интеграл от функции $f(x, y)$ вдоль прямой AA', перпендикулярной вектору $\vec{n} = (\cos\alpha,\, \sin\alpha)$ и проходящей на расстоянии s (измеренном вдоль вектора $\vec{n}$ с соответствующим знаком) от начала координат (рис. 8). Уравнение прямой AA' есть: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - s = 0.$

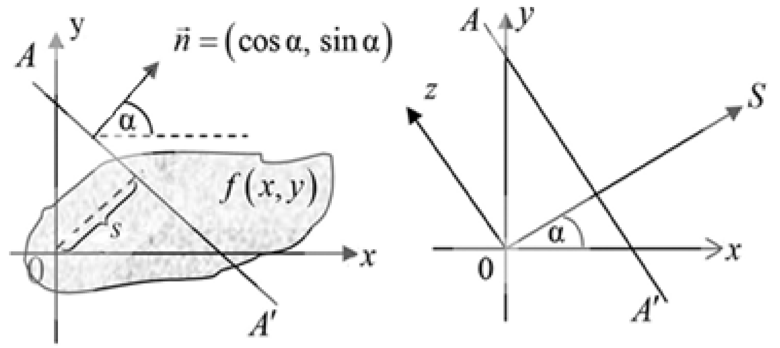

Рис. 8. Двумерное преобразование Радона

Новые переменные (s, z) получены из старых (x, y) путем поворота на угол α против часовой стрелки. В этих координатах уравнение прямой AA' будет $s = \text{const}$, где значение константы равно расстоянию от начала координат до прямой AA'. Из аналитической геометрии известно, что $x = s\cos\alpha - z\sin\alpha$, $y = s\sin\alpha + z\cos\alpha$, а обратное преобразование дает $s = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $z = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$.

Рассмотрим связь преобразования Радона с преобразованием Фурье. По формуле (75) двумерное преобразование Фурье от функции $f(x, y)$ есть

$$F(k_x,\ k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x,\ y) dy. \tag{78}$$

Заметим, что показатель экспоненты в этом интеграле не изменяется, если мы двигаемся вдоль прямой, перпендикулярной вектору $\vec{k} = (k_x,\ k_y)$, и изменяется наиболее быстро, если мы двигаемся вдоль этого вектора. Поэтому от переменных (x, y) перейдем к новым переменным (s, z) и обозначим $\vec{k} = (k_x,\ k_y) = \omega(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, т. е. введем полярную систему координат на плоскости $k_x O k_y$. Сделав замену переменных в интеграле (78), получим

$$F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\omega s} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\alpha - z\sin\alpha, s\sin\alpha + z\cos\alpha) dz \right). \tag{79}$$

В (79) учтено, что $k_x x + k_y y = \omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = \omega s$, а якобиан преобразования при такой замене переменных в двойном интеграле равен единице.

Таким образом, с учетом (77)

$$F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} R(s, \alpha) ds, \tag{80}$$

т. е. одномерное преобразование Фурье от преобразования Радона для функции $f(x,y)$ есть двумерное преобразование Фурье от функции $f(x,y)$. Поскольку двумерное преобразование Фурье достаточно хорошей функции обратимо, то обратимо и преобразование Радона.

Вернемся к формуле обращения для двумерного преобразования Фурье (76) –

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} F(k_x,\ k_y) dk_y, \tag{81}$$

которую перепишем в полярных координатах

$$f(x,\, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} e^{i\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) d\alpha. \qquad (82)$$

Соотношение (82) с учетом (80) дает нам формулу обратного преобразования Радона

$$f(x,\, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} e^{i\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \tilde{R}(\omega,\, \alpha) d\alpha, \qquad (83)$$

где

$$\tilde{R}(\omega,\, \alpha) \equiv F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s,\, \alpha) e^{-i\omega s} ds. \qquad (84)$$

Выражение (83) является одним из вариантов записи обратного преобразования Радона, а также определяет метод реконструкции $f(x,\, y)$ из ее проекций $R(s,\, \alpha_i)$, который называется методом Фурье-синтеза. В этом методе сначала нужно сформировать из большого количества одномерных Фурье-образов проекций по полярной сетке $\tilde{R}(\omega,\, \alpha_i)$ двумерный спектр $\tilde{R}(\omega,\, \alpha)$, а затем выполнить обратное двумерное преобразование Фурье в полярной системе координат от $\tilde{R}(\omega,\, \alpha)$. Существуют и другие методы реконструкции $f(x,\, y)$ из $R(s,\, \alpha)$.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Поскольку применения преобразования Фурье описаны во многих учебниках, уделим основное внимание применению преобразования Радона.

В компьютерной томографии линейка детекторов измеряет поглощение исследуемым объектом параллельного пучка излучения (например, рентгеновских лучей в медицинской томографии, сейсмических волн в геофизической томографии). В соответствии с законом Бугера – Ламберта – Бера интенсивность излучения, измеряемая детектором в точке s линейки детекторов, $I = I_0 e^{-D}$, где I_0 – интенсивность излучения до прохождения лучами объекта, $D = \int_{AA'} \rho(x, y) dz.$ Здесь $\rho(x, y)$ – показатель поглощения вещества объекта для данного типа излучения, а интеграл берется вдоль прямой AA', проходящей через данный детектор и перпендикулярной линейке детекторов, z –

координата на этой прямой (рис. 9). Соответственно, логарифм от интенсивности, взятый с обратным знаком, дает преобразование Радона от показателя поглощения. Вращая систему из источника излучения и детектора вокруг объекта (оставаясь при этом в одной плоскости), или вращая сам объект вокруг оси, перпендикулярной плоскости, показанной на рис. 9, получают множество луч-сумм в выбранном срезе объекта. Затем, используя один из методов реконструкции, можно восстановить распределение показателя поглощения в любой точке прозондированной плоскости объекта.

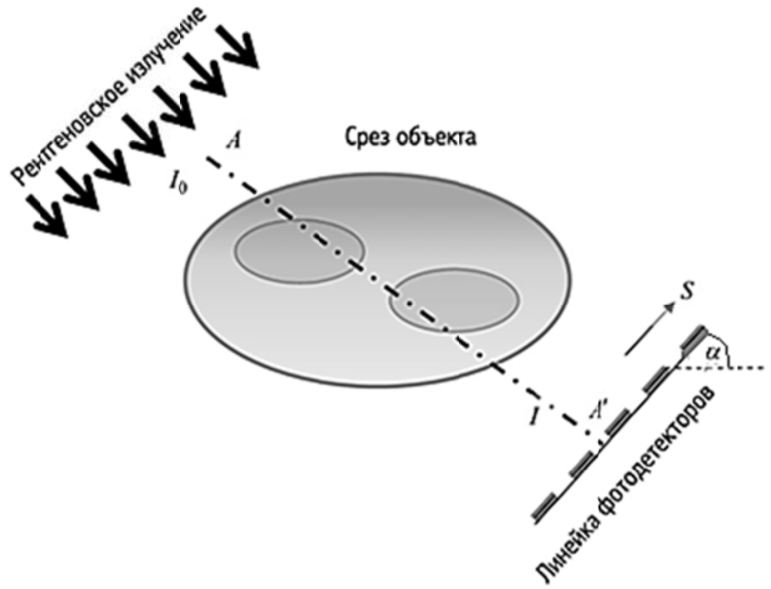

Рис. 9. Схема получения рентгеновской томограммы

Математические основы компьютерной томографии были заложены И. Радоном еще в 1917 году. Он предложил интегральное преобразование, позволяющее восстанавливать многомерные функции по их интегральным характеристикам. Однако этот метод не находил практического применения до тех пор, пока не появились рентгеновские установки, позволяющие получать большое число высококачественных снимков, необходимых для восстановления внутренней структуры реальных объектов, и быстродействующие ЭВМ, способные эти снимки обрабатывать. Первый в мире рентгеновский компьютерный томограф был продемонстрирован Хаунсфилдом в 1972 году. Внедрение методов компьютерной томографии в медицину позволило существенно повысить эффективность диагностики и обеспечило создание новых методов лечения. В настоящее время методы компьютерной томографии широко используются во многих областях науки и техники.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1986. – 408 с.
2. Голикова Е. А. Дифференциальные уравнения, ряды, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра / Е. А. Голикова, А. В. Зенков, А. С. Соболева. – Екатеринбург : УрФУ, 2010. – 130 с.
3. Грузман И. С. Математические задачи компьютерной томографии / И. С. Грузман // Соросовский образовательный журнал. – 2001. № 5. – С. 117–121.
4. Зенков А. В. Дифференциальные уравнения и ряды /А. В. Зенков, Е. А. Голикова. – Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2008. – 78 с.
5. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П. И. Романовский. – М. : Наука, 1980. – 336 с.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 2 т. / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – 656 с.
7. Троицкий И. Н. Компьютерная томография / И. Н. Троицкий. – М. : Радио и связь, 1989. – 151 с.
8. Шмелев П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П. А. Шмелев. – М. : Высшая школа, 1983. – 176 с.

Учебное издание

Волков Владимир Алексеевич

**РЯДЫ ФУРЬЕ.
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И РАДОНА**

Редактор *О. В. Климова*
Корректор *А. А. Загоруйко*
Компьютерный набор *В. А. Волкова*
Компьютерная верстка *Т. С. Криницыной*

Подписано в печать 25.08.2014. Формат 60×90 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.-изд. л. 1,4. Тираж 100 экз. Заказ № 1559.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru