ПЕНЗЕНСКИЙ ОБЛАСТНОЙ ИНСТИТУТ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ УЧИТЕЛЕЙ

И. П. ЕГОРОВ

ВВЕДЕНИЕ В НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Приволжское книжное издательство
Пензенское отделение — 1972

ПЕНЗЕНСКИЙ ОБЛАСТНОЙ ИНСТИТУТ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ УЧИТЕЛЕЙ

И. П. ЕГОРОВ

ВВЕДЕНИЕ В НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Приволжское книжное издательство
Пензенское отделение — 1972

От автора

В первой главе рассматриваются общие вопросы аксиоматики. Во второй главе после краткой характеристики „Начал“ Евклида дается аксиоматическое определение евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Показывается, что геометрия Лобачевского совпадает с геометрией гипотезы острого угла четырехугольников Хайяма—Саккери.

В третьей главе излагаются основные факты планиметрии Лобачевского, причем особое внимание уделяется простейшим кривым. В четвертой главе выясняется существование так называемых предельных поверхностей в пространстве Лобачевского, на которых индуцируется евклидова геометрия. Этот факт позволяет ввести формулы тригонометрии треугольников и построить аналитическую геометрию на плоскости Лобачевского.

В заключительной пятой главе дается изложение элементов эллиптической геометрии и геометрии обобщенных пространств. В ней выясняются удивительные свойства пар окружностей в эллиптической плоскости, пересекающихся в четырех точках или дважды касающихся, и пар прямых в пространстве, скрещивающихся и одновременно равноотстоящих друг от друга.

В добавлениях I—III речь идет о геометрии и группах преобразований, символических исчислениях и формализации геометрии, обосновании евклидовой геометрии по Вейлю. Для более глубокого понимания материала в тексте приводятся задачи, требующие применения координатного метода в геометрии Лобачевского и эллиптической геометрии. Ответы и указания к решению задач помещены в конце книги.

Книга написана для учителей математики средней школы в качестве учебного пособия по факультативному курсу „Понятие о неевклидовых геометриях и об аксиоматическом методе в геометрии“.

Автор надеется, что в предлагаемой книге учитель найдет все необходимое при изучении с учениками свойств важнейших пространств, отличных от евклидова пространства.

Книга может быть использована также студентами физико-математических факультетов педагогических институтов и лицами, изучающими геометрию самостоятельно.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность А. Я. Султанову за оказанную мне помощь при чтении корректуры.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Открытие аксиоматического метода приписывается Пифагору, греческому ученому V века до нашей эры. Но впервые этот метод успешно применил в «Началах» Евклид в III веке до нашей эры. В «Началах» прежде всего даются определения и перечисляются основные допущения — постулаты и аксиомы. Затем идут теоремы, которые Евклид стремился доказывать по правилам логики на основании принятых постулатов и аксиом.

Развитие аксиоматического метода далее было связано с открытием неевклидовых геометрий и созданием теории множеств. Геометрия Лобачевского и теория множеств вызвали появление ряда важнейших исследований по общим вопросам аксиоматики. Они содействовали распространению в математике метода научного исследования с помощью аксиом.

Аксиоматический метод является в настоящее время основным методом не только в геометрии, но и во многих других разделах современной математики.

Для того чтобы выяснить, что же представляет собою аксиоматический метод, мы обратимся, например, к евклидовой геометрии. В ней доказываются различные теоремы, причем доказательство каждой теоремы опирается на определения, аксиомы и ранее полученные теоремы. Доказательства последних, в свою очередь, основываются на предыдущих теоремах, определениях и положенных в основу аксиомах. В итоге мы придем к аксиомам, как к простейшим **отправным предложениям**.

Аналогичное положение имеет место для определений понятий. Всякое понятие определяется через ранее введенные понятия и аксиомы. В результате указанной редукции мы придем в конце концов к понятиям, которые уже не сводятся к более простым и представляют собою отправные **неопределяемые понятия.** Эти понятия называются **основными** понятиями, и они также описываются **аксиомами.**

Задача выбора основных понятий и аксиом, их описывающих, является одной из важных задач оснований геометрии. Эта задача решается неоднозначно и требует от математика определенного навыка и внимания.

Указанным путем может быть построена и любая другая аксиоматическая теория.

Сущность аксиоматического метода в двух словах состоит в следующем. Полагая в основу построения аксиоматической теории некоторое число предложений, называемых **аксиомами**, мы должны из них вывести все другие предложения теории при помощи лишь одних логических законов.

Таким образом, аксиомы являются **исходными положениями** научной теории, которые выведены из взаимосвязей изучаемых понятий. Они в своих предпосылках имеют опытное происхождение.

Математика является одной из самых абстрактных наук. Но ее понятия отражают свойства реальных вещей и отношений между ними. Поэтому аксиомы не являются продуктом свободного творения математиков. Они не есть и условные соглашения, как это считал А. Пуанкаре. Ошибочно смотреть также на аксиомы как на истины, не нуждающиеся в доказательствах в силу их очевидности.

Система аксиом должна удовлетворять определенным требованиям и, в первую очередь, требованию совместности или непротиворечивости. Необходимо отметить, что одни аксиомы, даже если они и удовлетворяют требованию совместности, не позволяют еще построить саму теорию строгим образом, так как в действительности дальнейшие ее построения ведутся без точного указания общелогических правил вывода.

Дальнейшее развитие аксиоматического метода привело математиков к понятию символического исчисления. Последнее характеризуется заданием не только системы аксиом, но и правил вывода. В теории символических исчислений получен ряд важнейших результатов, составляющих новую ступень в развитии аксиоматического метода исследования. Этому вопросу посвящено специальное приложение в конце книги.

В настоящее время усиленно развиваются аксиоматические теории, в основе которых лежат теоретико-множественные понятия. Такие теории приводят нас к понятию математической структуры. Точнее, **аксиоматическая теория** является математической структурой, если ее аксиомы сформулированы в терминах теории множеств.

Аксиомы иногда характеризуют не одну с точностью до изоморфизма структуру, а некоторое множество математических структур. Совокупность всех структур, определенных данной системой аксиом, называется **родом** этих структур.

Две структуры одного и того же рода называются **изоморфными**, если можно установить взаимно однозначное отображение элементов одной структуры на элементы другой, при котором элементам в первой структуре, связанным некоторыми основными отношениями, отвечают элементы во второй структуре, находящиеся в одноименных отношениях.

Если математические структуры не принадлежат к одному роду, т. е. определяются разными системами аксиом, то теории эти все же могут быть связанными друг с другом. Особого внимания естественно заслуживает случай, когда эти структуры приводят **к одной и той же теории**, т. е. случай эквивалентности данных структур. Приведем точное определение этого понятия. Две математические структуры называются **эквивалентными**, если в каждой из них можно построить основные понятия другой теории так, что все аксиомы этой другой теории будут теоремами в первой математической структуре.

Примером эквивалентных структур будут, как мы убедимся ниже, гильбертовская и вейлевская системы аксиом евклидовой геометрии. В третьей главе мы познакомимся с другими примерами эквивалентных систем аксиом.

Для правильной ориентировки необходимо отметить, что математические структуры, усиленно изучаемые математиками в настоящее время, принадлежат к одному из следующих трех типов.

Первый тип структур составляют так называемые **алгебраические структуры**. Структуры этого типа описывают свойства одной или нескольких алгебраических операций. К алгебраическим структурам принадлежат группы, векторные пространства, кольца, поля и другие.

Остановимся подробнее, например, на понятии группы. Группой называется структура, состоящая из множества элементов G и определенной на этом множестве операции **умножения**, позволяющей любым двум элементам x, y отнести третий элемент $z = xy$ при условии, что выполняются следующие аксиомы 1—4.

АКСИОМЫ ТЕОРИИ ГРУПП

1) Любым двум элементам x, y данного множества, взятым в определенном порядке, можно отнести по операции умножения определенный элемент z, принадлежащий тому же множеству:

$$z = xy;$$

2) Операция умножения удовлетворяет ассоциативному закону, т. е. для любых трех элементов x, y, z, принадлежащих множеству G, справедливо равенство:

$$x(yz) = (xy)z;$$

3) Существует правая единица, т. е. такой элемент e, что для любого элемента x, принадлежащего множеству G, имеет место

$$xe = x;$$

4) Для любого элемента x из множества G существует правый

обратный элемент x', принадлежащий также G, т. е. такой элемент, что

$$xx' = e.$$

Так определяется абстрактная группа. Это определение совершенно не касается природы элементов множества и смысла групповой операции умножения. Элементы множества могут быть любой природы, так же как и групповая операция $\varphi(x, y) = xy$ может быть любой операцией, лишь бы удовлетворились указанные четыре аксиомы. Из этих аксиом 1 — 4 следует, что 1) группа допускает только одну правую единицу; 2) левая единица в группе необходимо является правой; 3) правый обратный элемент является одновременно и левым; 4) всякий элемент в группе имеет не более одного обратного элемента. Приведем примеры групп:

а) множество целых (рациональных, вещественных) чисел составляет группу по операции сложения. Единицей группы является число нуль;

б) множество рациональных (действительных) чисел без нуля составляет группу по операции умножения. Единицей группы является обычная единица;

с) множество подстановок из n цифр составляет по операции умножения подстановок группу с $n!$ элементами. При $n = 3$, например, получим группу подстановок из трех цифр, содержащую шесть элементов.

Существуют другие группы, также содержащие шесть элементов и неизоморфные группе подстановок из трех цифр. Например, совокупность вращений евклидовой плоскости вокруг данной точки O на углы, кратные $\frac{\pi}{3}$, образуют группу. Умножение элементов здесь понимается в смысле последовательного осуществления данных вращений. Неизоморфность этих групп следует из того, что умножение в группе вращений коммутативно, т. е. не зависит от порядка сомножителей, а в группе подстановок — некоммутативно, т. е. произведение элементов, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей.

Другой тип структур представляют математические **структуры порядка.** Это структуры, в которых изучаются отношения между элементами $x \leqslant y$ данного множества, выражаемые словами «x меньше или равен y». Множество называется **упорядоченным**, если его элементы находятся в отношении **предшествования**, обозначаемого символом $\leqslant$, причем выполняются следующие аксиомы 1 — 3.

АКСИОМЫ ПОРЯДКА

1. Для любого элемента x имеет место $x \leqslant x$.
2. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.
3. Если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Примерами таких множеств будут, в частности, множества натуральных и вещественных чисел, упорядоченные по величине. **Множество называется частично упорядоченным, если некоторые** его пары элементов находятся в отношении предшествования $\leqslant$, удовлетворяющего аксиомам порядка. Важным примером частично упорядоченного множества является множество подмножеств данного множества, упорядоченных по включению.

Третий тип математических структур составляют так называемые топологические структуры. Такими структурами являются, в частности, евклидовы пространства и пространства Лобачевского. В топологических структурах изучаются различные обобщения понятий окрестности, предела и непрерывности функций. Эти структуры в основном рассматриваются в топологии и дифференциальной геометрии.

§ 2. ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ (ИНТЕРПРЕТАЦИИ) СИСТЕМЫ АКСИОМ

Абстрактность понятий в современной математике вовсе не означает отхода от задач, которые ставятся перед нами окружающей действительностью. Наоборот, аксиоматические теории могут быть применены и успешно применяются на практике в самых неожиданных ситуациях, в которых удается подходящим образом найти некоторые объекты и связать их первоначальными основными отношениями так, чтобы все аксиомы были выполнены.

Предположим, что мы имеем некоторую математическую структуру, т. е. дано некоторое множество, элементы которого находятся между собою в определенных отношениях, описываемых данной системой аксиом. Из этих аксиом можно выводить логическим путем новые предложения, причем основные образы и отношения, как и сами аксиомы, понимаются формально и, следовательно, не имеют никакого конкретного смысла.

Допустим далее, что для данной системы аксиом существует такая совокупность каких-нибудь конкретных предметов и отношений между ними, что все аксиомы становятся истинными,. Тогда логические выводы, вытекающие из данных аксиом, также будут истинными высказываниями об этих предметах и построенных между ними отношениях. В логических выводах о свойствах данных предметов, разумеется, совершенно не принимаются во внимание другие их возможные свойства, не упоминаемые в аксиомах. Таким образом, основные объекты математической теории можно считать предметами любой природы и основные отношения между ними могут иметь любой конкретный смысл, лишь бы эти предметы и отношения удовлетворяли всем требованиям данной системы аксиом. Иными словами, с основными и производными понятиями аксиоматической теории можно связывать различный смысл.

Всякий конкретный выбор основных образов и основных отношений между ними, удовлетворяющий требованиям данной системы аксиом, называется **моделью** или **интерпретацией** этой системы аксиом. Приведенные выше примеры групп и частично упорядоченных множеств могут служить моделями соответствующих аксиом теории групп и аксиом порядка. С моделями других систем аксиом мы познакомимся в следующем параграфе и других главах книги.

Два слова о частично упорядоченных конечных множествах. Эти множества и упорядочивающие их отношения изображаются при помощи диаграмм следующим образом. Элементы множества изображаются кружочками, расположенными на плоскости на различных уровнях. Если элементы x, y сравнимы и $x \leqslant y$, то кружочек, изображающий элемент y, расположен на более высоком уровне, т. е. выше кружочка, изображающего элемент x, причем из первого кружочка можно перейти во второй **по крайней мере по одной** какой-нибудь **ломаной,** звенья которой опускаются вниз.

Рис. 1.

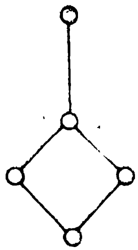

Рис. 2.

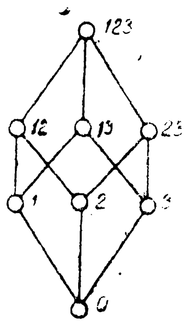

Рис. 3.

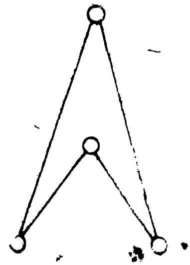

Рис. 4.

Если элемент x непосредственно предшествует элементу y, то соответствующие кружочки соединяются отрезком. В этом случае говорят, что элемент y покрывает элемент x. В других случаях сравниваемые элементы соединяются ломаными. Несравнимые элементы не соединяются ни с какими опускающимися вниз звеньями. Если кружочки являются вершинами лишь **одной** ломаной, то говорят о линейном порядке элементов данного множества (рис. 1). На рис. 3 элементы 1, 2 не сравнимы, элементы 1,123 сравнимы.

Важным примером частично упорядоченного множества являются совокупности упорядоченных по включению подмножеств данного множества. На рис. 3 изображена совокупность всех подмножеств трехэлементного множества, упорядоченная по правилу включения. Кружочек на самом низком уровне изображает пустое подмножество, кружочки предшествующего уровня — одноэлементные подмножества, кружочки следующего уровня — двухэлементные подмножества. Наконец, на самом высоком уровне кружочек изображает данное трехэлементное множество как несобственное подмножество. Примерами бесконечных частично упорядоченных множеств могут служить множества целых или вещественных чисел, упорядоченных по величине, и другие.

Большой интерес представляют структуры (не путать с математическими структурами!)—так называемые частично упорядоченные множества, в которых любые два элемента x, y имеют точную верхнюю и нижнюю грани. Верхней гранью подмножества x, y называется такой элемент a, что $x \leqslant a$, $y \leqslant a$. Верхняя грань a называется точной, если она связана с любой другой верхней гранью b данного подмножества соотношением $a \leqslant b$. Нижней гранью подмножества x, y называется такой элемент c, что $c \leqslant x$, $c \leqslant y$. Эта грань c называется точной нижней гранью если любая другая нижняя грань d меньше или равна c. На рис. 1, 2 и 3 изображены диаграммы структур, состоящие из четырех, пяти и восьми элементов соответственно. На рис. 4, изображено частично упорядоченное множество, не являющееся структурой.

§ 3. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ, НЕЗАВИСИМОСТЬ И ПОЛНОТА СИСТЕМЫ АКСИОМ. ПРИМЕРЫ

При аксиоматическом построении математической дисциплины мы принимаем некоторые предложения в качестве аксиом, из которых другие предложения выводятся по правилам обычной логики. Однако не всякую совокупность предложений данной теории можно принять в качестве системы аксиом. Несомненно, что основным требованием, предъявляемым к системе аксиом, должно быть требование непротиворечивости или совместности. Наряду с требованием непротиворечивости при исследовании системы аксиом интересуются также требованиями независимости и полноты. Разберем по отдельности каждое из указанных требований.

Рассмотрим сначала требование непротиворечивости. Оно сводится к тому, чтобы при логическом развертывании аксиоматической теории мы не смогли бы прийти к противоречию, когда наряду с предложением A выводилось бы в этой теории и его отрицание $\bar{A}$. В противоречивой аксиоматической теории можно доказать все, что угодно. Поэтому она не имеет никаких приложений и должна быть отброшена.

Возникает вопрос — каким образом можно установить непротиворечивость данной системы аксиом? Этот вопрос сводится к другому вопросу—построению интерпретации рассматриваемой системы аксиом. Более точно, если данные аксиомы допускают интерпретацию на совокупности некоторых образов и отношений между ними другой непротиворечивой теории, то из этих данных аксиом невозможно вывести противоречия. Действительно, наличие указанной интерпретации позволяет свести вопрос о непротиворечивости данной системы аксиом к вопросу непротиворечивости уже построенной аксиоматической теории. Следовательно, вопрос о непротиворечивости системы аксиом здесь решается в условном смысле. **Именно мы заключаем, что данная система аксиом** непротиворечива, **если непротиворечива** теория, на понятиях которой реализованы **эти аксиомы.**

Перейдем теперь к вопросу независимости аксиом. Система аксиом называется независимой (независимой в смысле предшествования), если никакую из аксиом невозможно вывести как теорему из остальных (из предшествующих) аксиом. Чтобы показать независимость аксиомы α от остальных (от предшествующих ей аксиом), достаточно построить такую интерпретацию, в которой бы выполнялись все (предшествующие) аксиомы, кроме данной, а аксиома α не выполнялась бы. Если аксиома окажется зависимой от других аксиом системы, то ее можно доказать на основании остальных аксиом и перевести в теоремы.

Аксиоматика многих математических теорий удовлетворяет требованию полноты. Система аксиом называется полной, если любые две ее интерпретации изоморфны. Другой смысл полноты системы аксиом приводится в конце книги во втором дополнении.

Разберем требования совместности, независимости и полноты системы аксиом на трех примерах — аксиомах инцидентности, теории действительных чисел и сравнения величин.

Пример 1. Возьмем аксиомы инцидентности плоскостной геометрии. Основные образы в этой геометрии — точки и прямые, основное отношение — инцидентность точек и прямых. Вся совокупность точек и прямых называется плоскостью.

АКСИОМЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ ПЛОСКОСТИ

1. Любым двум различным точкам можно отнести прямую, им инцидентную.
2. Любым двум различным точкам можно отнести не более одной прямой, им инцидентной.
3. На каждой прямой существует по крайней мере две точки, ей инцидентные.
4. Существует тройка точек, не инцидентных одной прямой.

Легко доказать, что эта система аксиом совместна. Действительно, пусть нам задан какой-нибудь треугольник ABC. Объявляя его вершины A, B, C «точками», а стороны AB, AC, BC — «прямыми», мы убеждаемся непосредственной проверкой в справедливости всех аксиом при обычном понимании инцидентности точек и прямых. Построенная модель состоит из трех точек и трех прямых, соответствующих вершинам и сторонам треугольника ABC.

Зададимся теперь вопросом — как доказать независимость данных утверждений? Другими словами, каким образом можно установить, что каждая из аксиом 1—4 существенна, т. е. ни одна из аксиом не может быть получена как следствие из остальных аксиом. Поставленная таким образом задача является простейшей задачей на независимость данной системы аксиом. Независимость каждой аксиомы от остальных трех аксиом будем доказывать указанным в определении методом. Докажем сначала независимость первой аксиомы. Возьмем для этого в качестве точек вершины прямоугольника (рис. 5), а в качестве прямых — его стороны. Инцидентность будем понимать в обычном смысле. Очевидно, все аксиомы здесь выполняются за исключением первой аксиомы. Первая аксиома для точек A, C не выполняется: не существует прямой, инцидентной данным точкам, так как диагонали прямоугольника в построенной геометрии не есть прямые.

Перейдем к рассмотрению независимости второй аксиомы. Для этого построим геометрию из четырех точек и семи прямых, указанных на чертеже. К прежним четырем точкам и сторонам прямоугольника добавляются в качестве прямых диагонали AC и BD,

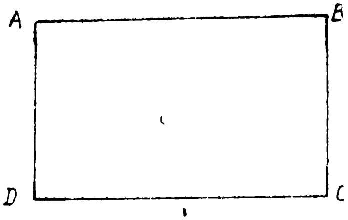

Рис. 5.

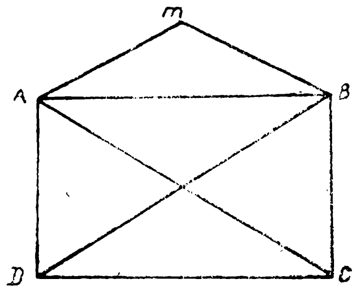

Рис. 6.

а также прямая AmB. Инцидентность точек и прямых понимается также в обычном смысле (рис. 6). Для точек A и B в построенной геометрии существуют две различные прямые AB и AmB, инцидентные указанным точкам.

Чтобы доказать независимость третьей аксиомы от всех остальных, построим геометрию, пространство которой состоит из трех

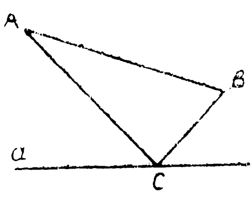

Рис. 7.

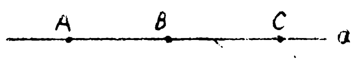

Рис. 8.

точек A, B, C и четырех прямых AB, AC, BC, и a (рис. 7). В этой модели выполняются все аксиомы, кроме третьей аксиомы. На прямой a существует лишь одна точка C, ей инцидентная.

Для доказательства независимости четвертой аксиомы от всех остальных аксиом достаточно привести модель, пространство которой состоит из одной прямой и трех точек, ей инцидентных (рис. 8). Очевидно, на ней все аксиомы выполняются, кроме четвертой. Следовательно, система плоскостных аксиом соединения 1 — 4 совместна и независима.

Совсем просто доказывается, что система аксиом 1—4 инцидентности не удовлетворяет требованию полноты. Действительно, эти аксиомы допускают модели на конечных и бесконечных множествах — множествах разной мощности. Между одноименными образами указанных моделей невозможно установить даже взаимно однозначного соответствия, следовательно, такие модели заведомо не изоморфны между собою.

Пример 2. Множество элементов, именуемых числами, называется **полем действительных чисел,** если оно **упорядочено** некоторым отношением «$<$» и любым двум элементам x, y сопоставляется по некоторой операции **сложения** элемент $u = x + y$ и по другой операции **умножения** элемент $v = xy$, причем удовлетворяются следующие аксиомы 1—5.

АКСИОМЫ ТЕОРИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Совокупность всех чисел образует коммутативную группу по операции сложения;

2. Совокупность всех чисел, за исключением нулевого числа, образует также коммутативную группу по умножению.

3. Сложение и умножение чисел связаны дистрибутивным законом:

$$z(x + y) = zx + zy.$$

4. (Аксиома порядка и монотонности). Для любых двух **различных** чисел справедливо одно из отношений $x < y$ или $y < x$, **причем**

a) если $x < y$ и $y < z$, то $y < z$;

b) если $x < y$, то $x + u < y + u$ для любого u;

c) если $x < y$ и $u > 0$, то $xu < yu$.

5. (Аксиома непрерывности). Если все числа разделить на два непустых класса так, что каждое число второго класса **больше** каждого числа первого класса, то существует число **наибольшее** в первом классе или наименьшее во втором классе.

Непротиворечивость этой системы аксиом доказывается с помощью **сечений** рациональных чисел. Вводимые сечения и известные отношения между ними позволяют построить основные понятия поля действительных чисел так, что все аксиомы 1—3 выполняются. Построенная модель позволяет сделать вывод о том, что аксиоматика поля вещественных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика рациональных чисел. Непротиворечивость же аксиоматики рациональных чисел, в свою очередь, сводится к непротиворечивости аксиоматики натуральных чисел.

Другой моделью поля вещественных чисел может служить множество бесконечных десятичных дробей. Если число x целое, т. е. $x = n$, то такой бесконечной дробью будет $x = (n - 1), 999\ldots$ Если же x является конечной десятичной дробью $x = n, n_1 \ldots n_k$, то соответствующей бесконечной дробью будет

$x = n, n_1 \ldots (n_k - 1) 99\ldots$ Наконец, если x не есть рациональное число, то при любом k имеем

$$n, n_1 \ldots (n_k - 1) < x < n, n_1 \ldots n_k.$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы 1—5 будут выполняться. Построенная модель поля вещественных чисел иногда называется **арифметической.** Аксиоматика поля вещественных чисел удовлетворяет также требованию **полноты,** т. е. любые две ее модели изоморфны. Идея доказательства этого утверждения состоит в следующем. Берется произвольная модель поля вещественных чисел и доказывается, что она изоморфна арифметической модели. Прежде всего, в этой данной модели определены по первым двум аксиомам элементы с числами 0,1. Сложение и умножение позволяет на основании аксиом 1—5 отнести элементам данной модели соответствующие числа (координаты). Если произвольный элемент x получает целое число n, то ему из арифметической реализации отнесем дробь $(n-1)$, 999..., если же x не имеет целую координату, то она будет заключена в интервале $(n, n+1)$. Затем этот интервал делится на десять равных частей, и если данный элемент получит координату вида n, n_1, то ему отнесем n, (n_1-1) 999... из арифметической модели. В противном случае интервал (n_1, n_1+1) снова будем делить на десять равных частей и повторять приведенные рассуждения.

Пример 3. Рассмотрим еще один пример, представляющий особый интерес для учителя математики. Множество y элементов какой угодно природы называется **величиной,** а его элементы — значениями этой величины, если между любыми двумя упорядоченными элементами x, y данного множества

$$G = \{x, y, z \ldots\}$$

могут иметь место отношения $x\alpha y$, $x\beta y$, $x\gamma y$, выражаемые соответственно словами „x равно y", „x меньше y" и „x больше y", удовлетворяющие следующим свойствам (аксиомам) сравнений.

АКСИОМЫ СРАВНЕНИЯ ВЕЛИЧИН

1. Любые два упорядоченные элемента x, y множества G находятся, по крайней мере, в одном из отношений α, β, γ.

2. Отношение $x \alpha y$ исключает отношение β, т. е. если имеет место $x \alpha y$, то отношение $x \beta y$ не имеет места.

3. В том же смысле отношение $x \alpha y$ исключает отношение γ.

4. Отношение α рефлексивно, т. е. каждый элемент данного множества находится в отношении α к самому себе.

5. Отношение α симметрично, т. е. если $x \alpha y$ имеет место, то имеет место также отношение $y \alpha x$.

6. Отношение $x \alpha y$ транзитивно, т. е. если $x \alpha y$, $y \alpha z$ имеют место, то имеет место отношение $x \alpha z$.

7. **Отношение** $x \beta y$ транзитивно.

8. Отношение $x\gamma y$ транзитивно.

Из данных аксиом сравнения следует, что отношение β несимметрично. Действительно, пусть между элементами x, y имеет отношение $x\beta y$. Если бы выполнялось еще отношение $y\beta x$, то из этих двух отношений следовало бы $x\beta x$ (акс. 7), что невозможно в силу аксиом 4, 2.

Аналогично можно доказать, что отношение $x\beta y$ исключает отношение $x\gamma y$. В каждом отношении между x, y можно любой из этих элементов заменить на равный ему элемент. Очевидно также, что аксиомы сравнения не изменятся, если отношение β заменим отношением γ и наоборот, отношение γ — отношением β. Таким образом, каждой доказанной теореме для отношения β можно автоматически сформулировать аналогичную теорему для отношения γ.

Рассмотрим требования совместности, независимости и полноты системы аксиом сравнения. Начнем с выяснения совместности аксиом 1 — 8. Возьмем для этого множество, содержащее пять элементов x, y, z, u, v, и предположим, что между любыми двумя элементами этого множества существует по крайней мере одно из отношений α, β, γ. Отношения между элементами мы будем изображать при помощи таблицы 1.

Таблица 1

	x	y	z	u	v
x	α	α	α	γ	γ
y	α	α	α	γ	γ
z	α	α	α	γ	γ
u	β	β	β	α	γ
v	β	β	β	β	α

Таблица 2

	x	y	z	u	v	w
x	α	α	α	γ	γ	δ
y	α	α	α	γ	γ	δ
z	α	α	α	γ	γ	δ
u	β	β	β	α	γ	δ
v	β	β	β	β	α	δ
w	δ	δ	δ	δ	δ	α

В этой таблице отношение между данными элементами выписывается на пересечении соответствующей строки и столбца. Так, например, элементы z, y находятся в отношении α, так как этот символ записан на пересечении строки z и столбца y. Аналогичным образом таблица показывает, что элементы u, v находятся в отношении γ. Нетрудно проверить, что установленные таблицей 1 отношения α, β, γ между элементами данного множества удовлетворяют требованиям всех аксиом сравнения. Следовательно, система аксиом 1 — 8 совместна.

Докажем теперь, что эта система аксиом независима, т. е. никакая из аксиом 1 — 8 не может быть доказана как теорема из остальных аксиом. Чтобы доказать независимость первой аксиомы, добавим к предыдущему множеству с отношениями α, β, γ шестой элемент w, находящийся с прежними элементами в новом отношении δ (см. таблицу 2).

Из этой таблицы следует, что отношения α, β, γ удовлетворяют аксиомам сравнения 1—8. Однако добавленный элемент связан с прежними элементами отношением δ и не связан ни с одним из них прежними отношениями α, β, γ. На рассматриваемом множестве выполнены все аксиомы, кроме первой. Следовательно, эта аксиома не зависит от остальных аксиом сравнений.

Чтобы доказать независимость аксиомы 2 от остальных семи аксиом, достаточно присоединить к таблице 1 отношение $x\beta y$. Таким образом, на пересечении первой строчки и второго столбца будут записаны два отношения $x\alpha y$ и $x\beta y$. Теперь отношение α не исключает отношения β между теми же элементами, т. е. аксиома 2 не имеет места, тогда как другие аксиомы выполнены.

По двойственности отношений β и γ из аксиом сравнения следует, что аксиома 3 не является следствием остальных аксиом.

Если в таблице 2 заменить все δ и α в последней строчке через β, остальные δ через γ, то получим таблицу, в которой не выполняется лишь аксиома 4. Следовательно, аксиома 4 не зависит от остальных аксиом сравнения.

Таблица 3

	x	y	z	u	v
x	α	α	α	γ	γ
y		α		γ	γ
z			α	γ	γ
u	β	β	β	α	γ
v	β	β	β	β	α

Таблица 4

	x	y	z	u
x	α	α	α	γ
y	α	α	β	γ
z	α	γ	α	γ
u	β	β	β	α

Из таблицы 3 следует, что все аксиомы 1—8 выполняются, кроме аксиомы 5. Таким образом, аксиома о симметричности отношения не зависит от остальных аксиом сравнения.

В таблице 4 не выполняется лишь аксиома 6, так как из отношений $z\alpha x$ и $x\alpha y$ не следует отношение $z\alpha y$. Остальные аксиомы сравнения выполняются. Этим доказывается независимость аксиомы 6 от остальных аксиом.

Для доказательства независимости аксиомы 7 от остальных аксиом сравнения служит таблица 5.

Таблица 5

	x	y	z	u	v
x	α	α	α	β	β
y	α	α	α	β	β
z	α	α	α	γ	γ
u	β	β	β	α	γ
v	β	β	β	β	α

Эта таблица показывает, что из отношений $u\beta x$ и $x\beta v$ не следует отношение $u\beta v$, т. е. аксиома 7 не выполняется, остальные же аксиомы имеют место.

По двойственности отношений β и γ заключаем, что последняя аксиома не зависит также от остальных аксиом. Следовательно, система аксиом сравнения (учения о величинах) независима. Читатель без труда убедится, что рассматриваемая система аксиом неполная.

Мы рассмотрели требования непротиворечивости, независимости и полноты системы аксиом на примерах простейших систем аксиом инцидентности, теории вещественных чисел и сравнения величин. Можно убедиться также, что приведенная в предыдущем параграфе система аксиом теории групп совместна, независима и неполна. Совместность и неполнота групповых аксиом следуют из указанных там примеров групп.

Выше были разобраны некоторые понятия, лежащие в основе аксиоматических теорий. Опираясь на эти понятия, мы рассмотрим в следующей главе логическую структуру «Начал» Евклида и приведем гильбертовскую аксиоматику евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

ГЛАВА II

АКСИОМАТИКА ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Геометрия возникла в древнем Вавилоне и Египте в связи с измерением площадей земельных участков и объемов тел. В седьмом веке до нашей эры геометрия усиленно развивалась под влиянием греческих математиков. В это время, например, Фалес знал теорему о том, что вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, является прямым. Пифагор, Демокрит и Платон имели свои математические школы. Дальнейшее развитие греческой геометрии связано с Евдоксом, Апполонием, Эратосфеном и Архимедом. Особенно большой вклад в геометрию внес Евклид, александрийский ученый IV — III века до нашей эры. Уже тогда был поставлен вопрос о логическом обосновании геометрии. Надо было произвести выбор основных понятий и аксиом так, чтобы можно было вывести из них по законам формальной логики основные факты, которыми располагала греческая математика. Этой проблеме систематизации математических фактов и были посвящены «Начала» Евклида. В средние века математика перешла к арабам и дальнейшее ее развитие, вплоть до XVII века, происходило уже менее интенсивно.

Особенно больших успехов математики добились за последние 150 — 200 лет в связи с возникновением метода координат, анализа бесконечно малых величин и открытием неевклидовых геометрий.

§ 1. «НАЧАЛА» ЕВКЛИДА, ИХ ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ

«Начала» состоят из 13 книг, которые представляют собою в действительности главы, посвященные отдельным вопросам математики. В них дано безупречное для того времени построение геометрии. Евклид начинает изложение с определений и перечисления постулатов и аксиом. Затем идут теоремы, которые доказываются по правилам логики на основании постулатов, аксиом и предыдущих теорем.

В первой книге рассматриваются признаки равенства треугольников, зависимости углов и сторон в треугольнике, внешний угол треугольника и параллельные линии. Во второй книге изучаются равновеликие треугольники, в третьей — свойства окружностей. Четвертая книга посвящена вписанным и описанным многоугольникам. В пятой книге изучается теория пропорций, в шестой—теория подобия фигур. В седьмой, восьмой, девятой и десятой книгах рассматривается арифметика в геометрической форме. В последних трех книгах излагается стереометрия.

В некоторых изданиях «Начал» содержатся еще две книги, посвященные теории многогранников. Однако, многие историки считают, что Евклид не является автором этих книг. Они установили, что автором четырнадцатой книги является Гипсикл. Пятнадцатая книга написана неизвестным автором.

Остановимся подробнее на первой книге. Она начинается с 23 определений. Приведем некоторые из них.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же — длина без ширины.
3. Концы линии — точки.
4. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину и т. д.

Последнее определение в первой книге связано с параллельными линиями. Эти линии Евклид определяет следующим образом. Параллельными прямыми называются прямые, которые находятся в одной плоскости и при неограниченном продолжении ни с той, ни с другой стороны не пересекаются. Далее Евклид перечисляет постулаты и аксиомы.

ПОСТУЛАТЫ

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. Каждую прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из любого центра можно описать окружность любым радиусом.
4. Все прямые углы равны между собою.
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

АКСИОМЫ

1. Равные одному и тому же равны между собою.
2. Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. Если к неравным прибавляются равные, то целые будут неравны.

5. **Удвоенные одного и того же равны между собою.**

6. Половины одного и того же равны между собою.

7. Совмещающиеся друг с другом равны между собою.

8. Целое больше части.

9. Две прямые не содержат пространства.

Сделаем одно замечание. В некоторых переводах «Начал» четвертый и **пятый постулаты** помещены в качестве соответственно десятой и **одиннадцатой аксиом.** Есть основания предполагать, что отправные предложения геометрического характера Евклид считал постулатами, более общие отправные предложения—аксиомами. Отметим, что в настоящее время математиками не делается различий между постулатами и аксиомами. Все предложения, положенные в основу построения математической теории, называются **аксиомами.**

В «Началах» теоремы и основные задачи на построения именуются предложениями. Они располагаются в логическом порядке так, что новое предложение доказывается на основании доказанных ранее предложений, постулатов, аксиом и определений.

Не пользуясь пятым постулатом, Евклид доказывает в первой книге теорему о внешнем угле треугольника — во всяком треугольнике внешний угол больше каждого из внутренних, ему противолежащих. Доказательство этой теоремы, как и многих других теорем, дословно повторяется в учебниках по геометрии. На основании теоремы о внешнем угле треугольника он рассматривает следующую теорему о сумме двух углов треугольника.

Теорема. Во всяком треугольнике сумма любых двух углов меньше двух прямых.

Докажем, что в треугольнике ABC сумма углов β и γ при вершинах B и C меньше двух прямых. Продолжим для этого сторону BC и рассмотрим смежные углы x и y к углам β и γ треугольника.

По теореме о внешнем угле треугольника имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\gamma &< x,\\ \beta &< y.\end{aligned} \tag{1}$$

Так как x, y смежные углы к β и γ, то

$$\begin{aligned}\beta + x &= 2d\\ \gamma + y &= 2d\end{aligned} \tag{2}$$

Почленное сложение (1) и (2) дает:

$$2(\beta + \gamma) + x + y < 4d + x + y.$$

Следовательно,

$$\beta + \gamma < 2d.$$

Из этой теоремы непосредственно следует, что две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны. Она позволяет также уточнить формулировку пятого постулата. Требование Евклида о том, чтобы точка пересечения прямых располагалась с той стороны относительно третьей прямой, с которой сумма углов меньше двух прямых, излишнее. Его можно доказать на основании рассмотренной теоремы о сумме двух углов треугольника. Действительно, пусть прямые b и c пересечены третьей прямой a так, что сумма внутренних односторонних углов β и γ меньше двух прямых (рис. 9).

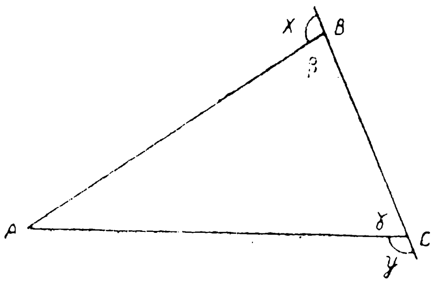

Рис. 9.

$$\beta + \gamma < 2d.$$

Предположим, что точка пересечения A прямых b и c располагается справа относительно прямой a. Тогда в треугольнике ABC можно указать пару углов, сумма которых больше двух прямых, что невозможно по предыдущей теореме.

В своих «Началах» Евклид дал новый вариант оснований геометрии и арифметики. Наряду с его «Началами» существовали другие варианты изложения оснований. Авторами прежних вариантов были Гиппокрит, Февдий, Евдокс и другие. «Начала» этих ученых не дошли до нас, их построения не были известны даже Проклу, жившему в пятом веке нашей эры.

Задача построения указанных оснований была решена Евклидом с большим мастерством. С появлением «Начал» Евклида аналогичные сочинения предшественников остались в тени. «Начала» на протяжении более чем двух тысяч лет являлись образцом математической строгости. По ним учились все математики до последнего времени. Школьная геометрия и теперь в основном излагает «Начала» Евклида.

Однако с точки зрения современной математики в «Началах» содержатся существенные недостатки. Основные недостатки «Начал» состоят в следующем. В книгах Евклида не выделяются явно основные понятия. В них отсутствуют неопределяемые понятия, и Евклид стремился определить все понятия. Поэтому, естественно, часть определений в «Началах» оказалась логически не действующей. Равенство Евклид вводит на основе движений, однако аксиомы движений у него отсутствуют. В них совершенно отсутствуют аксиомы порядка и непрерывности.

§ 2. ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ

Исключительная роль при построении «Начал» принадлежит пятому постулату, который лежит в основе теории параллельных линий и подобия фигур. Остановимся, прежде всего, на истории возникновения его формулировки. Для этого приведем без доказательства следующие теоремы 27—29 из «Начал» Евклида о параллельных прямых.

Предложение 27. Если прямая, падающая на две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собою, то прямые будут параллельны друг другу.

Предложение 28. Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние углы, вместе равные двум прямым, то прямые параллельны между собою.

Предложение 29. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собою, и внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, и внутренние углы вместе равны двум прямым.

Первые две из этих теорем устанавливают признаки параллельности прямых. Третья теорема является обратной к первым двум. Вопрос о доказательстве этой теоремы без использования пятого постулата поставлен был еще до Евклида. В своих «Началах» Евклид также не смог дать доказательства этого предложения. При построении «Начал» он принял одно из эквивалентных друг другу утверждений предложения 29 в качестве пятого постулата. Действительно, среди доказываемых утверждений этого предложения имеется следующее: если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма внутренних односторонних углов равняется двум прямым. Это предложение по существу и представляет собою то, что утверждает пятый постулат. В самом деле, обратное предложение к данному будет вида: если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равняется двум прямым, то прямые параллельны. Затем, построив предложение, противоположное последнему, мы получим следующее утверждение. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов не равняется двум прямым, то прямые непараллельны, т. е. пересекаются. Это предложение, противоположное обратному, эквивалентно исходному и буквально совпадает с 5-ым постулатом Евклида (стр. 18). Правда, в полученном утверждении ничего не говорится о расположении точки пересечения данных прямых относительно третьей прямой, однако этот факт, как мы видели выше, может быть доказан.

Из всех постулатов и аксиом Евклида 5-ый постулат отличается громоздкостью формулировки. Поэтому с выходом «Начал» встала проблема 5-го постулата: доказать 5-ый постулат на основании остальных четырех постулатов и девяти аксиом. Необходимо отметить, что вопрос об изложении теории параллельных линий по существу был поставлен еще до Евклида. Не случайно поэтому Евклид поместил свой постулат о параллельных в списке постулатов на последнее место, и при выводе теорем в первой книге употребление его отодвигалось по возможности далее. Все это показывает, что Евклид стремился сначала обойтись без постулата о параллельных, надеясь доказать и перевести его из постулатов в теоремы. Трудности проблемы вызвали множество попыток доказательства 5-го постулата. Перечислим лишь некоторые из них.

Посидоний (I век до н. э.) дал другое определение параллельных. Две прямые называются параллельными, если они всюду находятся на одинаковом расстоянии одна от другой. Это определение предполагает, что геометрическое место точек, удаленных от данной прямой по одну ее сторону на данное расстояние, есть прямая. Допущенная ошибка известна под названием «постулирования основания».

Птоломей (II век нашей эры) в своем доказательстве 5-го постулата, как утверждает Прокл, исходил из допущения, что сумма внутренних односторонних углов при параллельных с одной стороны и сумма таких же углов с другой стороны одновременно больше, равна или меньше двух прямых.

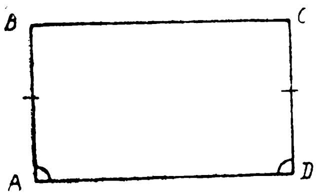

Рис. 10.

Прокл (V век н. э.) при доказательстве 5-го постулата исходил из предположения, что расстояние между непересекающимися прямыми является ограниченной величиной.

Хайям (XI век) изучал четырехугольник $ABCD$ (рис. 10), в котором углы A, D прямые и $AB = DC$. 5-ый постулат он доказывал на основании постулата Аристотеля: две сходящиеся прямые линии пересекаются.

Валлис (XVII век), доказывая 5-ый постулат, исходил из явного допущения, что для всякой фигуры существует подобная ей фигура любых размеров.

Саккери (XVII — XVIII вв.) изучал, аналогично Хайяму, четырехугольники с двумя прямыми углами (рис. 10) при одной стороне и равными боковыми сторонами. Относительно равных углов и он делал три исключающих друг друга предположения в зависимости от того, будут ли они острые, прямые или тупые, т. е. имеет ли место соответственно гипотеза острого, прямого или тупого углов. Развивая систему следствий, Саккери легко привел к противоречию гипотезу тупого угла. При дальнейшем исследовании гипотезы острого угла Саккери ошибочно приходил к следующему выводу: асимптотически сближающиеся прямые в бесконечно удаленной точке должны иметь общий перпендикуляр, а это «противно природе прямой».

Свои результаты он опубликовал на последнем году своей жизни в работе «Евклид, очищенный от всяких пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии».

В своем сочинении Саккери по существу наметил путь, по которому позднее пришли к неевклидовой геометрии ее творцы. Мы приведем в § 4 в терминах гильбертовской аксиоматики рассуждения Саккери, так как они за исключением последней части безупречны и играют большую роль в обоснованиях геометрии.

Ламберт (XVIII век), изучая четырехугольник с тремя прямыми углами, примыкал к идеям Саккери. В отличие от Саккери он не допускал в своих исследованиях ошибок и нигде не утверждал, что доказал 5-ый постулат. Из полученной системы следствий гипотезы острого угла Ламберт пришел к утверждению, что «третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере».

Ламберт и Саккери по существу стояли на пороге открытия неевклидовой геометрии. Много теорем из этой геометрии ими было получено, но открывателями ее так и не стали из-за убеждения, что евклидова геометрия является единственно возможной непротиворечивой системой. Они четко различали противоречия получаемых предложений с привычными пространственными представлениями и противоречия логической недопустимости их.

Лежандр (XVIII век) доказывал 5-ый постулат из допущения, что сумма углов треугольника равняется двум прямым. Позднее он дал другое доказательство, в предположении, что через любую точку внутри данного угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны.

В. Больяи (XIX век), отец И. Больяи — творца неевклидовой геометрии, при доказательстве 5-го постулата исходил из предположения, что около любого треугольника можно описать окружность.

Мы не будем далее продолжать перечисление попыток доказательства 5-го постулата. Приведенные примеры убедительно приводят нас к следующему выводу. Попытки доказательства 5-го постулата на основании остальных постулатов и аксиом Евклида неизменно оканчивались неудачей. Авторы доказательств в своих рассуждениях использовали явным или скрытым образом наглядно очевидные предложения, которые при тщательном анализе оказывались предложениями, эквивалентными самому постулату.

Проблема 5-го постулата занимала математиков более двух тысяч лет. Впервые эту проблему решил в 1826 г. великий русский математик Н. И. Лобачевский. Он доказал, что 5-ый постулат не доказуем с помощью остальных постулатов и аксиом Евклида. Для доказательства он принял вместо 5-го постулата предположение, согласно которому на плоскости через точку A, не лежащую на прямой a, можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающиеся с a. Дальнейшие рассуждения привели Лобачевского к новой безупречной геометрической системе. Это открытие неевклидовой геометрии несомненно принадлежит к числу величайших достижений человеческой мысли. Независимо от Лобачевского эту новую геометрию открыли И. Больяи и К. Гаусс.

Исследования Н. И. Лобачевского привели к коренной ломке прежних представлений о пространстве и показали, что наряду с геометрией Евклида, считавшейся единственной возможной геометрической системой, имеет место другая логически безупречная система — геометрия Н. И. Лобачевского. Основные факты геометрии Лобачевского излагаются в следующей главе. Этими краткими сведениями из истории 5-го постулата мы здесь и ограничимся.

§ 3. СИСТЕМА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА (ОБЗОР).

Аксиоматическое обоснование геометрии впервые было дано Гильбертом в 1899 г., уже после того как была открыта неевклидова геометрия. Вскоре затем появились системы аксиом Пеано, Кагана, Шура и др. Точечно векторная аксиоматика евклидовой геометрии была предложена Вейлем в 1918 г.

В аксиоматике Гильберта содержится 20 аксиом и описывают они восемь основных понятий. Основные понятия: точки, прямые, плоскости — называются **основными образами.** Основные понятия P_1 — инцидентности точки и прямой, P_2 — инцидентности точки и плоскости, а также понятие P_3 — «лежать между» или короче «между» для трех точек, инцидентных прямой, P_4 — конгруентности отрезка отрезку и P_5 — конгруентности угла углу — называются **основными отношениями.** Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии состоит из пяти групп, описывающих отношения между основными образами.

Первая группа аксиом называется аксиомами соединения (инцидентности). Она описывает отношения инцидентности точки и прямой, точки и плоскости.

Вторая группа аксиом называется аксиомами порядка. Она описывает основное отношение «лежать между», связанное с тремя точками, инцидентными прямой.

Третья группа аксиом называется аксиомами конгруентности; она описывает отношения конгруентности соответственно отрезка отрезку и угла углу.

Четвертая группа аксиом называется также аксиомами непрерывности и описывает свойства непрерывности расположения точек на прямой.

Пятая группа называется также аксиомой параллельности. Первая группа содержит 8 аксиом, вторая — 4, третья — 5, четвертая — 2 и пятая — одну аксиому. Отметим также, что в первой группе аксиом имеются две аксиомы [I (3), I (4)], с двумя требованиями, во второй группе имеется одна такая аксиома. В третьей группе первая аксиома содержит два требования, а четвертая — три требования. Во всей системе аксиом, состоящей из 20 аксиом, содержится 26 требований.

В геометрии Евклида рассматриваются три множества M_1, M_2, M_3, элементы которых являются соответственно точками, прямыми и плоскостями. Между элементами этих множеств определены основные отношения $P_1 - P_5$ так, что эти образы и отношения удовлетворяют всем аксиомам гильбертовой аксиоматики. Совокупность элементов указанных трех множеств $M_1 - M_3$ с отношениями $P_1 - P_5$ между ними и называется **евклидовым пространством**.

Если в первой группе аксиом сохранить лишь первые три аксиомы, то они вместе с аксиомами других групп аксиом составят систему аксиом евклидовой плоскости. Евклидова плоскость определяется как совокупность точек и прямых. Эти точки и прямые с основными отношениями P_1, $P_3 - P_5$, разумеется, удовлетворяют требованиям всех 15 аксиом гильбертовой аксиоматики планиметрии.

I. АКСИОМЫ СОЕДИНЕНИЯ

Эта группа аксиом характеризует основные отношения P_1, P_2, инцидентности (синонимы — принадлежности, лежать на, проходить через) соответственно точек и прямых, а также точек и плоскостей.

1. Любым двум различным точкам можно отнести прямую, им инцидентную (рис. 11).

Рис. 11.

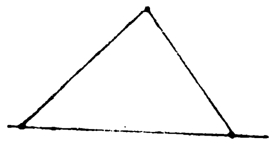

Рис. 12.

2. Двум различным точкам можно отнести не более одной прямой a, им инцидентной.

3. На каждой прямой существует по крайней мере пара точек, ей инцидентных. Существует тройка точек, не инцидентных одной прямой (рис. 12).

Рис. 13.

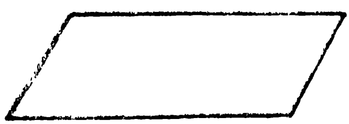

Рис. 14

4. Любым трем точкам, не инцидентным прямой, можно отнести плоскость, им инцидентную (рис. 13). На каждой плоскости есть по крайней мере одна точка, ей инцидентная (рис. 14).

5. Трем различным точкам, не инцидентным одной прямой, можно отнести не более одной плоскости, им инцидентной.

6. Если две точки прямой инцидентны плоскости, то и каждая точка прямой инцидентна этой плоскости (рис. 15).

Прямая называется **инцидентной плоскости,** если всякая точка, инцидентная в смысле P_1 данной прямой, инцидентна в смысле P_2 данной **плоскости.**

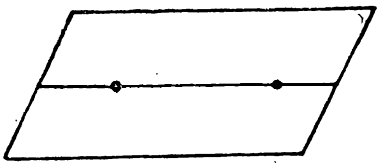

Рис. 15.

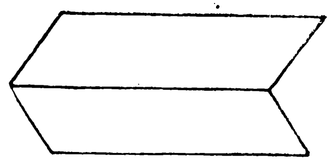

Рис. 16.

7. Если две плоскости имеют общую точку, им инцидентную, то они имеют по крайней мере еще одну точку, также им инцидентную (рис. 16).

8. Существует четверка точек, не инцидентных одной плоскости (рис. 17).

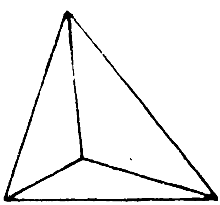

Рис. 17.

Из первых двух аксиом легко выводится следующая теорема.

Теорема 1. Две различные точки определяют одну и только одну прямую, им инцидентную в смысле правила P_1.

Из третьей и четвертой аксиом выводится аналогичная теорема для плоскостей.

Теорема 2. Три точки, не инцидентные в смысле P_1 одной прямой, определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную по правилу P_2.

Далее из этих аксиом легко также выводится следующее предложение.

Теорема 3. Прямая a и не инцидентная ей точка A определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную.

В самом деле, на прямой a имеется по крайней мере две точки B, C, ей инцидентные. Эти точки и данная точка A не инцидентны прямой. Таким образом, по третьей аксиоме найдется плоскость, инцидентная точкам A, B, C, и, следовательно, прямой a. Единственность плоскости гарантируется четвертой аксиомой. Итак, мы получили одну и только одну плоскость, инцидентную прямой a и точке A. Для каждой плоскости по четвертой аксиоме можно найти по крайней мере одну точку, ей инцидентную. Нетрудно доказать следующее предложение.

Теорема 4. На каждой плоскости можно найти по крайней мере три точки, не инцидентные прямой.

Наметим доказательство этой теоремы. По восьмой аксиоме существуют четыре точки, не инцидентные плоскости. Обозначим эти точки буквами M, N, P, Q. Разумеется, никакие три точки из них не инцидентны прямой. Если случится, что из четырех точек M, N, P, Q три инцидентны данной плоскости, то теорема доказана. Пусть теперь две точки, например M, N, инцидентны данной плоскости α. Так как плоскость α и плоскость MPQ имеют общую M, то они по аксиоме I (7) имеют еще одну общую точку, например A. Нетрудно доказать, что A, M, N является искомой тройкой точек. Случай, когда из четырех указанных выше точек лишь одна точка, например M, инцидентна данной плоскости, сводится к предыдущему. Пусть теперь ни одна из точек M, N, P, Q не лежит в плоскости. По четвертой аксиоме существует по крайней мере точка T, инцидентная данной плоскости. Рассмотрим теперь тройки точек TMN и TPQ. Точки по крайней мере одной из этих троек не инцидентны прямой. Эти три точки, например, T, M, N, определяют плоскость, имеющую с данной плоскостью общую точку S. По седьмой аксиоме такие плоскости имеют еще одну общую точку S. Тогда точки T, S, P, Q не инцидентны одной плоскости, и мы опять приходим к рассмотренному ранее случаю.

II. АКСИОМЫ ПОРЯДКА

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы ввести основное отношение P_3 «лежать между», относящееся к любым трем различным точкам, инцидентным прямой. В эту группу входит четыре аксиомы.

1. Если A, B, C — три точки, инцидентные прямой, и точка B лежит в смысле P_3 между точками A, C, то: а) точки A, B, C — различны; б) точка B лежит между точками A, C.

2. Для любых двух точек A, B, инцидентных прямой a, существует точка C прямой a такая, что точка B лежит между точками A и C в смысле P_3 (аксиома неограниченного продолжения прямой).

3. Для трех различных точек, инцидентных прямой, существует не более одной из них, которая лежит в смысле P_3 между двумя оставшимися.

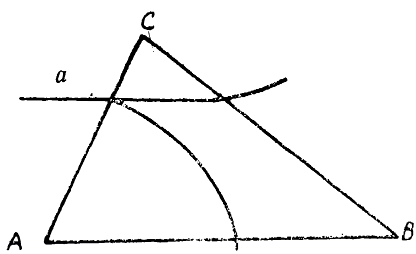

Рис. 18.

Приведенные аксиомы называются **линейными аксиомами порядка**. Совокупность двух точек A и B и всех точек, которые обладают свойством P_3 быть между точками A и B, называется отрезком. Точки, лежащие между A и B, называются **точками отрезка**. Совокупность трех точек A, B, C, не инцидентных прямой, и трех отрезков, образованных парами этих точек, называется **треугольником**; точки A, B, C называются **вершинами**, а отрезки AB,

AC, BC — сторонами треугольника. Прямая a называется **пересекающейся с отрезком AC, если существует точка** O отрезка AC, инцидентная прямой a. Отношение „лежать между“ мы будем в дальнейшем обозначать звездочкой, поставленной над буквой, обозначающей точку, которая лежит между двумя другими. Прямая, инцидентная точкам A и B, обозначается ниже через (AB).

4. **Аксиома Паша. Пусть задан треугольник ABC и в его плоскости прямая a, не проходящая через A, B, C.** Если прямая a пересекает одну сторону AC треугольника, то она пересекает также или вторую AB или третью его сторону BC (рис. 18).

ГЕОМЕТРИЯ ПЕРВЫХ ДВУХ ГРУПП АКСИОМ

Теорема 5. Каждый отрезок AB имеет по крайней мере одну точку.

Доказательство. По третьей аксиоме найдется точка C, не инцидентная прямой (AB) (рис. 19).

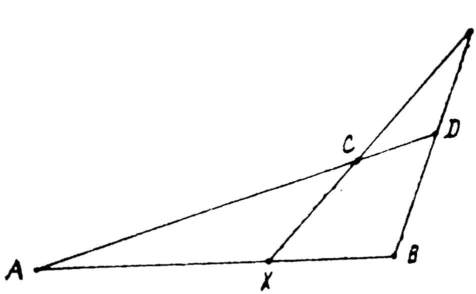

Рис. 19.

Применим теперь к точкам A, C прямой (AC) аксиому неограниченного продолжения. Существует такая точка D, что C обладает свойством быть между A, D. По этой же аксиоме для точек B и D прямой (BD) можно найти точку E такую, что D обладает свойством быть между B, E. Рассмотрим теперь треугольник ABD и прямую (EC). Они удовлетворяют условиям аксиомы Паша. Действительно, прямая EC не проходит через вершины треугольника и пересекает сторону AD в точке C, так как C между A, D. Следовательно, прямая EC пересечет сторону AB или сторону BD. Очевидно, эта прямая (EC) не пересечет сторону BD, так как она уже пересекает прямую (BD) в точке E, т. е. $\overset{*}{D}BE$. Итак, EC пересекает сторону AB в некоторой искомой точке X.

Следствие. За каждой точкой A на прямой a нет непосредственно следующей точки. Доказывается этот факт от противного. В самом деле, пусть за точкой A непосредственно следует точка B. Совокупность точек A и B дает отрезок и по доказанной теореме существует точка X между A и B. Получили противоречие. Строгое определение предшествования и следования дается ниже.

Теорема 6. Из трех различных точек, инцидентных прямой a, одна и только одна обладает свойством лежать между двумя оставшимися.

По третьей аксиоме второй группы II (3) из трех различных точек A, B, C, инцидентных прямой, искомых точек — не более одной. Остается доказать, что для точек A, B, C случай отсутствия точки со свойством быть между двумя оставшимися не имеет места. Если $\overset{*}{A}BC$ или $\overset{*}{C}AB$, то теорема доказана.

Пусть теперь эти случаи не имеют места, докажем, что $\overset{*}{B}AC$ (рис. 20).

Возьмем теперь по аксиоме I (3) точку D, не инцидентную прямой (AC). По аксиоме неограниченного продолжения для точек B, D и прямой BD найдется точка E такая, что $\overset{*}{D}BE$. Далее применим к прямой (CD) и треугольнику ABE аксиому Паша. Указанная прямая не проходит в смысле P_1 через вершины треугольника. В самом деле, пусть точка A инцидентна прямой (CD). Так как прямой (CD) инцидентны точки A и C, то она совпадает с прямой a. Следовательно, точка D также инцидентна прямой a, что невозможно.

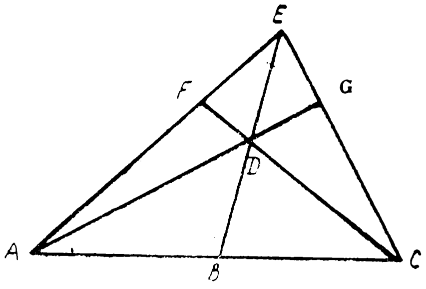

Рис. 20.

Если точка B инцидентна прямой (DC), то этой последней инцидентны точки B и C. Прямая (DC) снова совпадает с прямой a, что невозможно в силу выбора точки D.

Пусть теперь инцидентны прямая (CD) и точка E. Так как точки D, E инцидентны прямой, то этой прямой инцидентна и точка B. Прямая (CD) совпадает с исходной прямой, и мы приходим к прежнему противоречию. Далее прямая (CD) пересекает сторону BE треугольника в точке D потому, что $\overset{*}{D}BE$.

Итак, условия применимости аксиомы Паша для прямой (CD) и треугольника ABE выполнены. Мы привели здесь подробные рассуждения, так как в дальнейшем аналогичные доказательства будут опускаться.

Итак, по аксиоме Паша, прямая (CD) пересечет сторону AE или сторону AB треугольника ABE. Нетрудно доказать рассуждением от противного, что прямая (CD) не пересекает стороны AB. В самом деле, если прямая (CD) пересекает сторону AB в точке X, то (CD) будет совпадать с прямой a, что невозможно, как мы видели выше. Следовательно, прямая (CD), пересекает сторону AE в некоторой точке F, т. е. ($\overset{*}{F}AE$). Применим теперь аксиому Паша к прямой (AD) и треугольнику BEC. Повторяя буквально приведенные выше рассуждения, мы убедимся, что прямой (AD) не инцидентна ни одна из вершин треугольника. Кроме того, (AD) пересекает одну сторону BE треугольника, так как $\overset{*}{D}BE$. Таким образом эта прямая пересечет еще одну сторону BC или CE. Сторону BC указанная прямая не пересечет, что сразу следует из рассуждений от противного. Действительно, если бы прямая (AD) пересекала сторону BC в точке Y, то эта прямая совпадала бы с a, что невозможно. Итак, прямая (AD) пересечет сторону CE в некоторой точке G, т. е. $\overset{*}{G}CE$.

Применим далее аксиому Паша к треугольнику AGE и прямой (CF). Эта прямая пересекает сторону AE указанного треугольника. Проводя рассуждения, подобные приведенным выше, мы установим, что прямая (FC) пересечет сторону AG в точке D, т. е. $\overset{*}{D}AG$. Применим, наконец, еще аксиому Паша к треугольнику AGC и прямой (BE). Последняя прямая не инцидентна вершине треугольника и пересекает сторону AG в точке D, так как мы доказали выше, что $\overset{*}{D}AG$. По аксиоме Паша, прямая (ED) пересечет сторону GC или AC. Нетрудно доказать, что (ED) не пересекает GC. Следовательно, (ED) пересекает AC. Мы уже знали, что прямые ED и AC имеют общую точку B. Теперь мы доказали, что эта точка B является точкой отрезка AC, т. е. $\overset{*}{B}AC$. Теорема доказана. Она уточняет аксиому II (3) в том смысле, что из трех точек, инцидентных прямой, не может иметь место случай отсутствия точки со свойством быть между двумя оставшимися.

Перейдем к аналогичной теореме, уточняющей аксиому Паша. По аксиоме Паша прямая, пересекающая одну из сторон треугольника и не проходящая в смысле P_1 через его вершины, пересекает также вторую или третью сторону. Аксиомой не исключается тот случай, когда указанная прямая пересекает вторую или третью сторону одновременно. Такая прямая пересечет, следовательно, все три стороны треугольника. Мы докажем следующее предложение.

Теорема 7. Не существует прямой, не проходящей в смысле P_1 через вершины треугольника ABC и пересекающей все его три стороны.

Докажем эту теорему от противного. Предположим, что нашлась прямая a, не инцидентная вершинам данного треугольника ABC и пересекающая стороны AB, AC и BC соответственно в точках X, Y, Z (рис. 21).

Таким образом, из трех точек X, Y, Z, инцидентных прямой, одна и только одна будет точкой, лежащей между двумя оставшимися. Пусть $\overset{*}{Y}XZ$. Применим аксиому Паша к треугольнику BXZ и прямой (*AC*). Очевидно, последняя не проходит через вершины указанного треугольника и пересекает его сторону *XZ* в точке *Y*, так как *Y* «между» *X*, *Z*. Следовательно, *AC* пересечет сторону *BX* или *BZ*. Однако *AC* и *BX* уже имеют общую точку *A*, и эта точка не есть «между» оставшимися *B*, *X*, так как в этой тройке точек $\overset{*}{X}AB$. Аналогично (*AC*) не пересекается со стороной *BZ*. Прямая (*AC*) пересекается с прямой (*BZ*) в точке *C*, но из трех точек *B*, *Z*, *C* точка *Z* „между" *B*, *C*. Теорема доказана.

Мы привели подробные доказательства последних теорем для того, чтобы получить навык в обращении с новым основным отношением P_3 — отношением лежать между любых трех различных точек, инцидентных прямой.

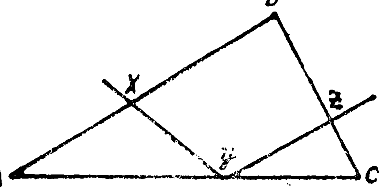

Рис. 21.

Теорема 8. Если *AC* и *AD* два отрезка, причем точка *C* принадлежит второму отрезку и *B* — любая точка первого отрезка, то *C* является точкой отрезка *BD*.

Возьмем точку *E*, не инцидентную прямой (*AD*), и применим к точкам *B* и *E* аксиому II (2). Из этой аксиомы следует, что существует такая точка *F*, что $\overset{*}{E}BF$. Применим теперь три раза аксиому Паша — к прямой (*FC*) и треугольникам *ABE*, *AED*, *BED*. Вершины этих треугольников не инцидентны указанной прямой. Так как прямая (*FC*) не пересекает двух сторон *AB* и *BE* первого треугольника, то она не пересекает также и третью его сторону: в противном случае, по аксиоме Паша, прямая (*FC*) пересекала бы одну из сторон *AB* и *BE*, что невозможно (рис. 22).

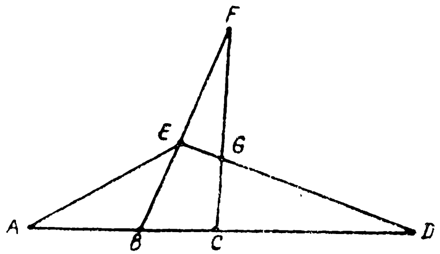

Рис. 22.

Далее (*FC*) пересекает сторону *AD* второго треугольника. По аксиоме Паша она пересечет еще одну сторону треугольника. Прямая (*FC*), как мы видели, не пересекается со стороной *AE*. Следовательно, она пересекает сторону *DE* в некоторой точке *G*, т. е. $\overset{*}{G}DE$

Рассмотрим теперь прямую (*FC*) и третий треугольник *BED*. По только что доказанному прямая пересекает сторону *ED* и не пересекает стороны *BE*, так как она уже пересекает прямую (*BE*) в точке F и $\overset{*}{E}BF$. Таким образом, (FC) пересекает сторону BD в точке C. Теорема доказана.

Теорема 9. Если AC и AB два отрезка, причем точка C принадлежит второму отрезку, то всякая точка D первого отрезка является также точкой второго отрезка.

Для доказательства теоремы возьмем точку E, не инцидентную прямой (AD). По аксиоме II (3) для точек C и E прямой (CE) можно найти такую точку F этой прямой, что $\overset{*}{E}CF$. Применим теперь три раза аксиому Паша к прямой (FD) и треугольникам BEC, ECA и AEB. Вершины этих треугольников не инцидентны указанной прямой. Так как прямая (FD) не пересекает двух сторон EC и BC первого треугольника, то она не пересекает и третью сторону BE. Заметим, что отсутствие общих точек прямой (FD) и стороны BC гарантируется предыдущей теоремой. Далее прямая (FD) пересекает сторону AC второго треугольника в точке D, так как $\overset{*}{D}AC$ (рис. 23).

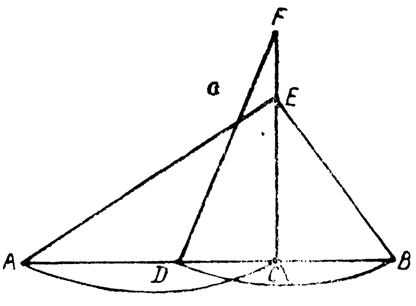

Рис. 23.

Указанная прямая (FD) не пересекает стороны EC, так как прямая (FD) уже пересекается с прямой (EC) в точке F и $\overset{*}{E}FC$. Следовательно, (FD) пересекает по аксиоме Паша сторону AE в точке G, т. е. $\overset{*}{G}AE$. Рассмотрим, наконец, прямую (FD) и третий треугольник AEB. Так как (FD) пересекает по только что доказанному сторону AE треугольника третьего и не пересекает стороны BE, то она пересекает сторону AB в точке D. Следовательно, $\overset{*}{D}AB$, т. е. точка D лежит между точками A, B.

Теорема 10. Если AC и BD два отрезка, инцидентные одной прямой, причем $CA\overset{*}{B}$, $B\overset{*}{C}D$, то C, B являются точками отрезка AD.

Возьмем, как и в предыдущей теореме, точку E, не инцидентную прямой (AB). Далее по аксиоме II (2) для точек B, E найдем F (рис. 22) такую, что $\overset{*}{E}BF$. Рассматривая прямую (FC) и треугольники ABE, AED и BED, мы заключаем, что $\overset{*}{C}AD$. Аналогично доказывается и вторая часть теоремы, что точка B лежит между точками A, D.

Из этих теорем легко выводится теорема о том, что всякий отрезок имеет бесчисленное множество точек.

Перейдем теперь к теореме о делении точек прямой некоторой ее точкой на два множества или два класса.

Теорема 11. Все точки прямой a, за исключением точки O, можно разбить на два множества так, что: 1) если M, N точки разных множеств, то отрезок MN содержит точку O; 2) если M, N точки одного множества, то отрезок MN не содержит точку O.

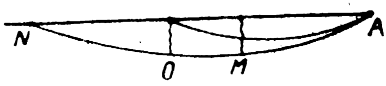

Рис. 24.

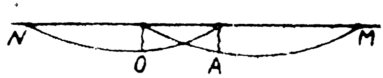

Рис. 25.

Из аксиомы I (3) следует, что на прямой a существует другая точка $A \neq O$, инцидентная этой прямой. По аксиоме II (2) неограниченного продолжения по точкам O, A. можно найти бесчисленное множество точек, инцидентных данной прямой. Для доказательства этой теоремы разобьем точки прямой a, за исключением точки O, на два класса по следующему закону f: если точка M совпадает с точкой A, то она считается точкой первого множества. Пусть точка M не совпадает с точкой A. В этом случае она считается первого множества, если из трех различных точек M, O, A точка O не есть между M, A; точка M считается по закону f второго множества, если из трех точек M, O, A точка O есть между A, M. Докажем теперь, что построенное разбиение точек является искомым. Возьмем для этого любые две точки разных множеств. Точки первого и второго множества обозначим соответственно буквами M и N. Докажем, что отрезок MN содержит точку O. Пусть $\overset{*}{M}OA$. Тогда точки A, M, O, N (рис. 24) удовлетворяют условиям теоремы 8, и MN содержит точку O. Пусть теперь $\overset{*}{A}OM$ (рис. 25). В этом случае четверка точек $ANOM$ удовлетворяет условиям указанной теоремы и отрезок MN снова содержит точку O. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Множества точек, которые мы получили при разбиении точек прямой a точкой O, называются **лучами**. Следовательно, точки прямой a всякой ее точкой O разбиваются на два луча. Точка O называется **началом этих лучей**. Отметим, что лучи, как и отрезки, являются точечными множествами. Напомним также, что прямая в гильбертовой аксиоматике является элементарным образом и не распадается на точки. В этом смысле совокупность обоих лучей и их начала—точки O—не совпадает с прямой.

В геометрии первых двух групп аксиом можно ввести ряд новых понятий. Пусть три точки A, B, C инцидентны одной прямой. Точки A и B называются расположенными с одной стороны по отношению к точке C, если они принадлежат к одному из лучей, порожденных точкой C. Точки A и B называются **расположенными**

по разные стороны по отношению к точке C, если они принадлежат разным лучам, порожденным точкой C. Эту теорему можно обобщить на плоскость следующим образом.

Теорема 12. Все точки плоскости α, за исключением точек некоторой ее прямой a, можно разбить на два множества так, что: 1) если точки M, N точки разных множеств, то прямая a пересекает отрезок MN; 2) если точки M, N одного множества, то прямая a не пересекает отрезка MN.

Из четвертой теоремы геометрии первой группы аксиом следует, что существует точка A плоскости α, не инцидентная прямой a. Для доказательства теоремы мы построим следующее правило f разбиения точек плоскости α, за исключением точек прямой a, на два множества. Если текущая точка M плоскости совпадает с точкой A, то она считается точкой первого множества. Пусть теперь точка M не совпадает с A и будет общего положения. В этом случае точка M считается первого множества, если прямая a не пересекает отрезка AM. Точка M считается точкой второго множества, если прямая пересекает отрезок AM. Нетрудно доказать, что построенное разбиение точек плоскости α является искомым. Пусть M, N точки первого множества и точки A, M, N не инцидентны прямой. Разумеется, ни одна из последних точек не инцидентна прямой a. Так как эта прямая не пересекает двух сторон AM и AN треугольника AMN, то она не пересекает также и третью сторону MN, что и требовалось доказать. Пусть теперь M, N точки второго множества. В этом случае a пересекает две стороны AM и AN треугольника. Следовательно, прямая a не пересекает сторону MN, и теорема тоже справедлива.

Перейдем ко второй части теоремы. Пусть M и N являются точками разных множеств. Можно считать, что M обозначает точку первого множества, а буква N — точку второго множества. Прямая a и треугольник MNA удовлетворяют условиям аксиомы Паша. Так как указанная прямая пересекается со стороной AN и не пересекается со стороной AM, то она пересекается со стороной MN. Теорема доказана. Нетрудно также разбирается исключительный случай, когда точки A, M, N инцидентны прямой.

Множество точек, которые мы получили при разбиении точек плоскости прямой a, называются **полуплоскостями**. Следовательно, точки плоскости разбиваются всякой ее прямой на две полуплоскости. Прямая a, производящая деление, называется **ребром этих полуплоскостей.**

Отметим также, что полуплоскости, как лучи и отрезки, являются точечными множествами. Плоскость в гильбертовой аксиоматике является элементарным образом и не раскладывается на точки. Совокупность полуплоскостей и точек прямой a не совпадает с исходной плоскостью.

Эта теорема позволяет ввести следующие понятия. Пусть точки A, B и прямая a инцидентны одной плоскости α. Две точки

A и B называются расположенными с одной стороны по отношению к прямой a, если они принадлежат одной из полуплоскостей, порожденных прямой a. Эти точки называются **расположенными по разные стороны по отношению к прямой a, если они принадлежат разным полуплоскостям.**

Нетрудно доказать, что множество точек, инцидентных прямой, можно упорядочить в геометрии первых двух групп аксиом. Множество называется упорядоченным, если между его элементами

$$A, B, C, \ldots$$

существует отношение «предшествовать» (обозначается символом $<$), удовлетворяющее следующим двум свойствам:

1) если A и B различные элементы множества, то или $A < B$ или $B < A$;

2) если $A < B$, $B < C$, то $A < C$.

Второе свойство предшествования называется свойством транзитивности, если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C. Мы введем предшествование сначала для точек луча, затем обобщим построения на точки всей прямой.

Пусть дана прямая a и ей инцидентная точка O. Эта точка позволяет разбить все остальные точки прямой на два луча a_1 и a_2. Введем правило предшествования для точек луча a_1 следующим образом. Если точки A и B принадлежат рассматриваемому лучу, то будем называть **ту точку из них предшествующей**, которая обладает свойством быть между оставшейся точкой и началом луча O. Нетрудно установить, что так введенное предшествование f_1 для точек луча удовлетворяет указанным двум требованиям. Действительно, построенное правило из двух различных точек луча одну и только одну точку выделяет в качестве предшествующей. Этот факт следует из теоремы, уточняющей аксиому II (3) и теоремы о делении точек прямой некоторой ее точкой на два множества. Убедимся теперь в том, что f_1 транзитивно. Пусть для трех точек A, B, C имеют место два предшествования: A предшествует B и B предшествует C. Докажем, что A предшествует C. Так как понятие предшествования точек A и B сводится к понятию между точек O, A, B, то предыдущую задачу можно сформулировать в следующем виде. Если O, A, B, C такие точки прямой a, что $\overset{*}{A}OB$, $\overset{*}{B}OC$, то $\overset{*}{A}OC$. Этот факт на самом деле имеет место, как это следует из доказанной выше теоремы. Можно убедиться также, что наряду с введенным понятием предшествования, можно построить противоположное предшествование $\overline{f_1}$; если A и B по-прежнему принадлежат лучу a_1, то будем называть ту точку из них предшествующей, которая не обладает свойством лежать между оставшейся точкой и началом луча O. Противоположное предшествование $\overline{f_1}$ также применимо к любым двум различным точкам луча и транзитивно.

Введем теперь правило предшествования для точек, инцидентных прямой a. Возьмем на ней любые две точки A, B. Если эти точки принадлежат одному лучу a_1, то 1) определяется предшествующая по правилу f_1. Мы считаем также, что: 2) начало луча O предшествует точкам луча a_1; 3) точки второго луча предшествуют началу; 4) точки луча a_2 предшествуют точкам луча a_1. Наконец, 5) если точки A, B принадлежат второму лучу a_2, то предшествующая определяется по правилу $\bar{f_1}$.

Нетрудно доказать, что так построенное правило предшествования f точек прямой транзитивно и применимо к любой паре различных точек прямой. Это предшествование не зависит от выбора точки O. Прямая, точки которой упорядочены по правилу предшествования, называется направленной прямой или осью.

В геометрии первых двух групп аксиом вводится понятие угла. Пусть заданы две различные прямые a и b с общей точкой O. Эта точка разбивает точки указанных прямых на пары лучей a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно. Углом $\widehat{a_1 b_1}$ называется совокупность двух лучей с общим началом O. Точка O называется **вершиной угла**. Лучи a_1, b_1 называются **сторонами угла**. **Внутренними точками угла** $\widehat{a_1b_1}$ называется множество точек плоскости (a, b), принадлежащее одновременно полуплоскостям $(a_1\ b)$ и (a, b_1). Точки плоскости (a, b), не принадлежащие сторонам угла и отличные от начала O и внутренних точек, называются **внешними точками угла**.

III. АКСИОМЫ КОНГРУЕНТНОСТИ

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы описать отношение конгруентности P_4 отрезка отрезку и конгруентности P_5 угла углу.

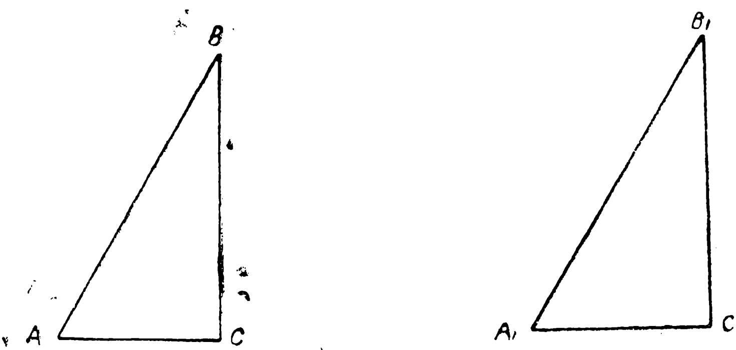

Рис. 26.

1. Пусть дан отрезок AB, а также прямая a' и точка на ней A'. На прямой a' существует B' с той или с другой стороны, относительно A' такая, что отрезок AB конгруентен отрезку $A'B'$ или $AB \equiv A'B'$; требуется также, чтобы $AB \equiv BA$.

2. Если $AB \equiv A''B''$, $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A'B'$.

3. Пусть AB и BC два отрезка без общих точек на прямой a и если $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, причем $B'A'C'$, то $AC \equiv A'C'$.

4. Пусть $\widehat{a_1 b_1}$ угол с вершиной O. При любой точке O' и выходящем из нее луче a_1', по любую сторону прямой a' можно построить в заданной плоскости, инцидентной a', один и только один второй луч b_1' такой, что

$$\widehat{a_1 b_1} \equiv \widehat{a_1' b_1'}.$$

Требуется также, что $\widehat{a_1 b_1} \equiv \widehat{a_1 b_1}$, $\widehat{a_1 b_1} \equiv \widehat{b_1 a_1}$.

5. Пусть заданы два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ таких, что $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (рис. 26).

ГЕОМЕТРИЯ ПЕРВЫХ ТРЕХ ГРУПП АКСИОМ

Эта геометрия, как и предыдущая геометрия аксиом соединения и геометрия первых двух групп аксиом, не является евклидовой. Докажем сначала выполнимость в ней свойств рефлексивности, взаимности и транзитивности понятия конгруентности отрезка отрезку.

Теорема 13. Если $AB \equiv A'B'$, то $AB \equiv B'A'$.

Доказательство. Так как $AB \equiv A'B'$ и по второй половине первой аксиомы $B'A' \equiv A'B'$, то по аксиоме III (2) имеем

$$AB \equiv B'A',$$

что и требовалось доказать.

Теорема 14. Всякий отрезок конгруентен самому себе.

Так как по второму требованию аксиомы III (1) имеем $AB \equiv BA$, то, меняя порядок следования точек в правой части конгруентности на основании первой теоремы, мы получим

$$AB \equiv AB.$$

Теорема 15. Если $AB \equiv A'B'$, то $A'B' \equiv AB$.

Применим предыдущую теорему к отрезку $A'B'$:

$$A'B' \equiv A'B'.$$

Так как по условию отрезок $AB \equiv A'B'$, то по аксиоме III (2) следует

$$A'B' \equiv AB.$$

Теорема 16. Если $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A''B''$.

Действительно, $AB \equiv A'B'$ по условию и $A''B'' \equiv A'B'$ по доказанному свойству взаимности. Отсюда следует на основании аксиомы III (2), что $AB \equiv A''B''$.

В последних трех теоремах мы установили рефлексивность, взаимность и транзитивность понятия конгруентности отрезков. Аналогичные теоремы о взаимности и транзитивности имеют место для основного отношения P_5 конгруентности угла углу. Однако доказательство этих свойств возможно лишь после установления признаков конгруентности треугольников. Напомним, что свойство рефлексивности отношения P_5 фиксируется аксиомой III (4).

Введем теперь ряд определений. Говорят, что **отрезок** AB **больше отрезка** CD, и употребляя специальное обозначение, записывают $AB > CD$, если существует такая точка M отрезка AB, что

$$AM \quad CD.$$

Если $AB > CD$, то говорят также, что отрезок CD меньше отрезка AB и записывают $CD < AB$. Пусть на прямой a дан отрезок AB. Точка O называется серединой отрезка, если

$$AO \quad OB.$$

Можно доказать, что всякий отрезок имеет середину и притом только одну и эта середина является точкой отрезка AB. Отметим, что понятия больше и меньше для отрезков и середины данного отрезка введены лишь в геометрии первых трех групп аксиом. В этой геометрии мы не располагаем теорией длин отрезков и величин углов. Однако, в ней имеется теория сравнения отрезков и углов, треугольников и других фигур.

Два угла называются **смежными**, если одна сторона у них общая, две другие инцидентны прямой. Угол, конгруентный своему смежному, называется **прямым**. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного из них являются продолжением сторон другого. Нетрудно доказать, что вертикальные углы конгруентны между собою.

Угол, образованный одной стороной треугольника и продолжением другой стороны, называется **внешним углом треугольника**. Справедлива теорема: внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним. Две прямые называются **перпендикулярными**, если они образуют при пересечении прямые углы. Из данной точки на данную прямую можно опустить перпендикуляр и притом единственный.

В рассматриваемой геометрии аксиом I—III имеют место все три признака конгруентности треугольников. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Каждый угол можно разделить пополам. В этой геометрии справедливы теоремы о том, что большая сторона треугольника лежит против большего угла и каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.

Остановимся подробнее на отображениях точечных множеств. Закон, по которому всякому элементу одного множества сопоставляется элемент другого или того же самого множества, называется **отображением**. Отображение $y=f(x)$ называется **взаимно**

однозначным, если оно любым двум различным элементам x_1, x_2 первого множества относит различные элементы y_1, y_2 из второго множества и преобразованные элементы y заполняют все второе множество.

Для всякого взаимно однозначного отображения f можно построить обратное отображение. **Обратное отображение** φ по определению относит всякому элементу y второго множества тот элемент x из первого множества, который при отображении f переходит в y: $y = f(x)$.

Взаимно однозначное отображение множества на себя называется **преобразованием** этого множества. Последовательное осуществление двух преобразований f_1, f_2 в указанном порядке приводит к новому преобразованию, которое называется **произведением** данных преобразований. Совокупность преобразований называется **группой преобразований**, если она замкнута относительно операции умножения любых двух преобразований и операции построения обратного преобразования.

Возьмем теперь в качестве множества элементов совокупность всех точек пространства геометрии первых трех групп аксиом. Преобразование точек такого пространства называется **движением**, если оно любую пару точек A и B переводит в точки A' и B' так, что

$$AB = A'B'.$$

Движение пространства называется **вращением**, если оно оставляет неподвижной некоторую точку (центр вращения) пространства. Движение называется вращением вокруг прямой, если оно оставляет эту прямую точечно неподвижной.

Нетрудно доказать, что произведение двух движений, как и обратное преобразование к заданному движению, являются также движениями. Отсюда следует, что совокупность всех движений пространства первых трех групп аксиом составляет группу. Нетрудно доказать, что: 1) точки, лежащие на прямой, переходят при движении в точки, также лежащие на прямой; 2) точки, лежащие на плоскости, при движении переходят в точки, лежащие на некоторой плоскости. Каждое движение сохраняет основное отношение лежать между.

Движения мы определили в геометрии первых трех групп аксиом на основе аксиом конгруентности. Можно было бы эти движения принять в качестве основного понятия и описать их свойства следующими аксиомами 1—6.

III'. АКСИОМЫ ДВИЖЕНИЙ

1. Движения сохраняют основные образы и отношения между ними.

2. Совокупность движений составляет группу преобразований.

3. Если при движении начало и луч остаются на месте, то каждая точка луча остается на месте.

4. Существует единственное движение, которое начало O, луч a_1 и полуплоскость с ребром a переводит соответственно в заданные начало $\tilde{O}$, луч $\tilde{a}_1$ и полуплоскость с ребром $\tilde{a}$.

5. Существует движение, переводящее концы отрезка друг в друга.

6. Существует движение, переводящее стороны угла друг в друга.

В геометрии первых двух групп аксиом и аксиом 1—6 движений все аксиомы конгруентности, в свою очередь, могут быть доказаны, как теоремы. Таким образом, аксиомы конгруентности эквивалентны аксиомам 1—6 движений относительно аксиом первых двух групп I—II. Две группы предложений A и B называются **эквивалентными** относительно системы аксиом C, если из аксиом C, A следует предложение B, а из аксиом C, B следует A.

IV. АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Основное назначение этой группы аксиом состоит в том, чтобы ввести длины отрезков и величины углов, а также описать свойство непрерывности расположения точек на прямой.

1. Аксиома Архимеда. Пусть даны два произвольных отрезка AB и CD; существует такое натуральное n, что (рис. 27).

$$nCD > AB.$$

Отрезок nCD по определению означает отрезок CD_n, где D_n точка луча CD, полученная при последовательном откладывании отрезков: $CD = DD_2 = D_2D_3 \ldots D_{n-1}D_n$.

Аксиома Архимеда позволяет в геометрии первых трех групп аксиом построить теорию длин отрезков.

Рис. 27.

2. Аксиома Кантора. Пусть на прямой дана последовательность отрезков, удовлетворяющих двум требованиям: 1) каждый следующий отрезок вложен в предыдущий; 2) не существует отрезка, принадлежащего всем отрезкам последовательности. Тогда существует точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Эта аксиома позволяет строить отрезок заданной длины. Нетрудно доказать, что точка в аксиоме Кантора, принадлежащая всем отрезкам последовательности, единственная.

V. АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Через любую точку A, не инцидентную прямой a, можно провести в плоскости (A, a) не более одной прямой, пересекающейся с прямой a.

V′. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Через любую точку A, не инцидентную прямой a, можно провести в плоскости (A, a) по крайней мере две различные прямые, не пересекающиеся с прямой a.

Геометрия аксиом всех пяти групп аксиом I — IV — V называется **евклидовой геометрией.** Геометрия аксиом групп I — IV — V′ называется **геометрией Лобачевского.** Геометрия, построенная на первых четырех группах аксиом, называется **абсолютной геометрией**. Ясно, что теоремы абсолютной геометрии одновременно являются теоремами евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского Таким образом, в гильбертовой аксиоматике в основе евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского лежат три множества, элементы которых именуются соответственно точками, прямыми и плоскостями, причем между ними определены основные отношения $P_1 — P_5$ так, что удовлетворяются все требования аксиом I — IV — V или I — IV — V′; совокупность элементов указанных трех множеств и отношений $P_1 — P_5$ между ними называется соответственно *евклидовым пространством* и *пространством Лобачевского*. Если в первой группе аксиом взять лишь первые три аксиомы, а остальные группы аксиом II — IV — V и II — IV — V′ оставить без изменения, то получим соответственно плоскость Евклида и плоскость Лобачевского.

Подчеркнем еще раз, что с основными образами и отношениями мы не связываем в абстрактной геометрии никакого конкретного смысла. Точки, прямые и плоскости и основные отношения между ними представляются как понятия, полное описание которых дается системой аксиом. Нас совершенно не интересуют другие свойства, не порожденные основными понятиями. Природа основных образов может быть любой, лишь бы они и допускаемые ими основные отношения удовлетворяли требованиям системы аксиом.

В абсолютной геометрии можно построить понятие числовой оси. В самом деле, возьмем направленную прямую — ось и на ней некоторую точку O. Каждой точке данной прямой отнесем вещественное число по следующему правилу. Если точка O предшествует точке M, то соответствующее число равняется длине отрезка OM, если же точка M предшествует точке O, то число отличается знаком от длины отрезка. Условимся также относить точке O число нуль. Построенное отображение всех точек прямой на все вещественные числа взаимно однозначно — каждой точке соответствует число, разным точкам соответствуют разные числа и всякое вещественное число оказывается сопоставленным с некоторой точкой прямой. Ось, точкам которой отнесены указанным способом вещественные числа, называется **числовой осью**. Можно убедиться, что построенное отображение сохраняет порядок, т. е. если точки M, N имеют координаты x_M, x_N, то точка M тогда и только тогда предшествует точке N, когда $x_M < x_N$. Это свойство прямой называется **непрерывностью**. Свойство непрерывности прямой позволяет установить в абсолютной геометрии следующее предложение Дедекинда.

Если все точки направленной прямой распределены по некоторому закону на два непустых класса так, что 1) каждая точка относится к одному и только одному классу; 2) точка первого класса предшествует точкам второго класса, то существует точка, которая является либо последней точкой первого класса, либо первой точкой второго класса.

Обратно, если к аксиомам первых трех групп присоединить это предложение Дедекинда, то предложения Архимеда и Кантора, составляющие группу аксиом непрерывности, могут быть доказаны как теоремы. Другими словами, в геометрии I — III групп аксиом предложение Дедекинда эквивалентно предложениям Архимеда и Кантора. Напомним, что предложения A и B **эквивалентны** относительно системы аксиом C, если из C и A следует предложение B, а из C и B следует предложение A.

Теперь нетрудно построить систему координат в плоскости абсолютной геометрии. Действительно, пусть две взаимно ортогональные прямые Ox и Oy пересекаются в точке O. На каждой из них выберем положительное направление и при помощи единичного отрезка построим числовые оси Ox, Oy. Возьмем далее произвольную точку M на плоскости xOy и опустим из нее перпендикуляр $M\tilde{M}$ на ось Ox. Координату x точки $\tilde{M}$ на оси Ox примем за абсциссу точки M. За ординату точки M примем длину отрезка $M\tilde{M}$ с положительным или отрицательным знаком в зависимости от того, лежит ли точка M и положительная полуось Oy соответственно по одну или по разные стороны относительно оси Ox. Эти построения позволяют построить обычную аналитическую геометрию и прийти к арифметической модели аксиом I — V, в которой точками являются упорядоченные пары вещественных чисел (x, y). В качестве прямых в этой реализации принимаются упорядоченные тройки (u, v, w), определенные с точностью до пропорциональности, причем первые два числа u и v одновременно не обращаются в нуль. Точка (x, y) и прямая (u, v, w) называются **инцидентными**, если сумма

$$ux + vy + w$$

равняется нулю. Пусть теперь три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) инцидентны прямой. Рассмотрим первые числа x_1, x_2, x_3, соответствующие данным точкам. Нетрудно убедиться, что они различны или совпадают друг с другом. Если одно из них по величине заключено между другими, то считают, что соответствующая точка лежит между оставшимися. Если первые числа совпадают, то соответствующее правило строится по вторым числам. Два отрезка$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ называются *конгруентными*, если существует отображение вида

$$\bar{x} = x\cos\varphi \mp y\sin\varphi + a,$$
$$\bar{y} = x\sin\varphi \pm y\cos\varphi + b, \qquad (*)$$

переводящее точки отрезка (x_1, y_1), (x_2, y_2) в точки отрезка $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Два угла конгруентны, если их лучи являются соответствующими при некотором отображении вида (*).

Гильбертовская система аксиом евклидовой геометрии удовлетворяет требованию полноты. Напомним, что по определению система аксиом называется полной, если любые две ее модели изоморфны, т. е. можно установить между ними взаимно однозначное отображение, при котором основные образы первой модели, связанные между собою некоторыми основными отношениями, переходили бы в соответствующие основные образы второй модели, связанные одноименными отношениями. Система аксиом евклидовой геометрии — полная. Этот факт следует из того, что всякая модель аксиом евклидовой геометрии изоморфна арифметической. Идея доказательства последнего предложения состоит в следующем. Всякой точке M в данной модели, имеющей декартовы координаты (x, y), отнесем в рассмотренной выше арифметической модели точку (x, y). Если прямая в первой модели характеризуется уравнением $ux + vy + w = 0$, то в арифметической модели отнесем ей прямую (u, v, w) и т. д. Так построенное отображение будет изоморфизмом.

§ 4. О ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ ХАЙЯМА — САККЕРИ

Рассмотрим четырехугольник с двумя прямыми углами, прилежащими к одной его стороне AD. Эту сторону AD четырехугольника будем называть **нижним основанием**, противоположную сторону BC **верхним основанием**, а остальные две стороны AB и DC четырехугольника — **боковыми сторонами** (рис. 28). Углы $\angle B$ и $\angle C$ называются **углами при верхнем основании.**

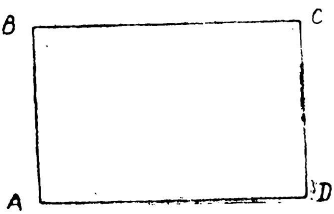

Рис. 28.

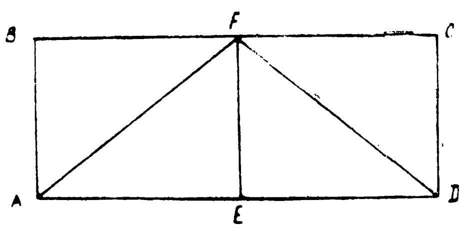

Рис. 29.

Теорема 17. Если в четырехугольнике с двумя прямыми углами боковые стороны равны, то углы при верхнем основании равны. Если же боковые стороны не равны, то против большей стороны лежит и больший угол.

Действительно, пусть боковые стороны равны: $AB = CD$. Докажем, что $\angle B$, $\angle C$ при верхнем основании также равны. Пусть точка E середина отрезка AD, т. е. $AE = ED$ (рис. 29). Восстановим из нее перпендикуляр EF к нижнему основанию. Он не будет пересекаться с боковыми сторонами: в противном случае из точки пересечения можно было бы опустить два перпендикуляра на прямую AD. Так как середина E является точкой отрезка AD, то прямая EF пересечет по аксиоме Паша вторую сторону AC треугольника ACD. Далее, применяя опять эту аксиому к прямой EF и треугольнику ABC, мы установим пересечение перпендикуляра с верхним основанием BC четырехугольника с двумя прямыми углами. Легко также следует конгруентность прямоугольных треугольников AFE и DFE (по равным катетам). Итак, $AF = FD$. Треугольники ABF и ДFC также равны по двум сторонам и углу, заключенному этими сторонами.

Отсюда следует, что углы $\angle B$, $\angle C$, расположенные против равных сторон AF и DF в рассматриваемых равных треугольниках, равны. Первая часть теоремы доказана. Из нее следует также, что F является серединой верхнего основания. Отрезок EF соединяет середины оснований и перпендикулярен к каждому из них.

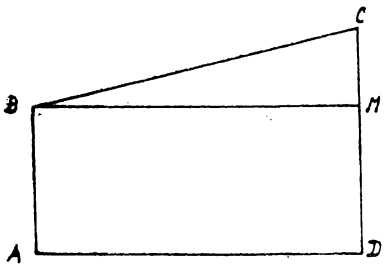

Рис. 30.

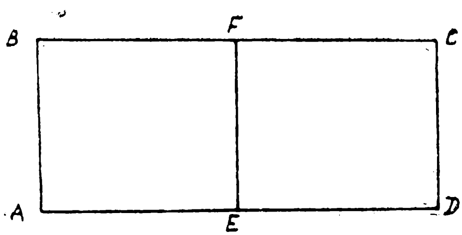

Рис. 31.

Пусть боковые стороны четырехугольника AB, CD не равны (рис. 30), например, $AB < CD$. Докажем, что $\angle B > \angle C$. По определению «больше» следует существование такой точки M стороны CD, что $AB = DM$. Применяя теорему о внешнем угле треугольника, мы получим:

$$\angle B > \angle MBA = \angle BMD > \angle C,$$

т. е. против большей боковой стороны в четырехугольнике с двумя прямыми углами лежит больший угол, при верхнем основании. Теорема доказана. Справедлива обратная теорема и доказывается она легко рассуждениями от противного.

Четырехугольник с двумя прямыми углами и равными боковыми сторонами называется **четырехугольником Хайяма—Саккери** по имени таджикского и итальянского математиков Хайяма (XI век) и Саккери (XVIII век), подробно и независимо изучавших свойства таких четырехугольников. По доказанной выше теореме, верхние углы в четырехугольниках Хайяма — Саккери равны. Будучи равными, эти углы при верхнем основании могут быть острыми, прямыми или тупыми. Соответственно этим случаям для каждого четырехугольника Хайяма — Саккери имеют место три гипотезы:

1) гипотеза острого угла, если $\angle B = \angle C$ — острые;
2) гипотеза прямого угла, если $\angle B = \angle C$ — прямые;
3) гипотеза тупого угла, если $\angle B = \angle C$ — тупые.

Теорема 18. Верхнее основание четырехугольника Хайяма — Саккери больше, равно или меньше нижнего, если соответственно имеет место гипотеза острого, прямого или тупого углов. Справедлива обратная теорема.

Отрезок EF, как выяснили в предыдущей теореме, соединяет середины верхнего и нижнего оснований и составляет с ними прямые углы (рис. 31).

Пусть $ABCD$ является четырехугольником Хайяма — Саккери. Рассмотрим четырехугольник $ABEF$ с двумя прямыми углами при нижнем основании EF. Углы при верхнем основании здесь $\angle A$, $\angle B$; первый угол является прямым, а второй угол соответственно гипотезам острого, прямого или тупого углов, может быть острым, прямым или тупым. В первом случае $\angle A > \angle B$ и по доказанной теореме $BF > AE$. Умножая это неравенство почленно на двойку, мы получим $BC > AD$, так как F и E середины сторон BC и AD. Если в заданном четырехугольнике имеет место гипотеза прямого или тупого углов, то $\angle A \leqslant \angle B$ и по выше доказанной теореме $BF \leqslant AE$. Удваивая почленно эти соотношения, мы окончательно получим

$$BC \leqslant AD.$$

Справедлива и обратная теорема. Она легко доказывается от противного.

Теорема 19. Пусть $ABCD$ является четырехугольником Хайяма — Саккери. Возьмем далее на верхнем основании и его продолжении точки K и L соответственно. Опустим перпендикуляры KK_1, LL_1 на нижнее основание. Тогда имеют место соотношения

$$LL_1 = AB = KK_1,$$
$$LL_1 > AB > KK_1,$$
$$LL_1 < AB < KK_1,$$

при гипотезах соответственно прямого, острого или тупого углов. Справедлива обратная теорема.

Докажем сначала второе равенство $AB = KK_1$. Пусть это равенство не выполняется, тогда $AB > KK_1$ или $AB < KK_1$. Возьмем четырехугольник $ABKK_1$ с прямыми углами при вершинах A, K_1 неравными боковыми сторонами, так как по предположению

$AB > KK_1$. Следовательно, $\angle BKK_1$ тупой. Рассмотрим теперь четырехугольник KK_1CD с двумя прямыми углами при вершинах K_1, D и неравными боковыми сторонами, так как $AB = CD > KK_1$. Таким образом, смежный с $\angle BKK_1$, угол $\angle CKK_1$ также тупой, что невозможно. Повторяя эти рассуждения в предположении $AB < KK_1$, мы получим новое противоречие — смежные углы $\angle BKK_1$ и $\angle CKK_1$, острые.

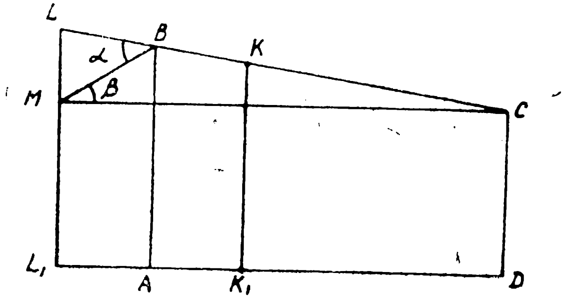

Рис. 32.

Докажем теперь первое равенство $LL_1 = AB$. Пусть $LL_1 > AB$, т. е. существует точка MLL_1 такая, что $ML_1 = AB$ (рис. 32). Обозначим $\angle LBM$, $\angle BMC$ буквами α и β соответственно. Так как

$$\angle MBA = d - \alpha = \angle BML_1,$$

то имеем

$$\angle CML_1 = d - \alpha - \beta = \angle MCD.$$

Таким образом,

$$\angle MCB = \alpha + \beta.$$

С другой стороны, внешний угол $\alpha = \angle LBM$ треугольника MBC должен быть больше этого угла $\alpha + \beta$. Полученное противоречие показывает, что предположение $LL_1 > AB$ также не имеет места.

Пусть далее $LL_1 < AB$, т. е. существует на луче LL_1 такая точка M, что LML_1 и $ML_1 = AB$. Обозначим $\angle MBL$, $\angle BLM$ буквами α и β соответственно. Угол α является внешним углом $\triangle BMC$, а внутренний $\angle MCB$ равняется $\alpha + \beta$, что невозможно.

Аналогично доказывается теорема в других случаях, когда имеет место гипотеза острого или тупого углов.

Теорема 20. Пусть две прямые a и b перпендикулярны к третьей прямой (AB). Если из точек $C, E, \ldots$, прямой A опустить перпендикуляры CC_1, EE_1 на другую прямую, то углы

$$\angle ACC_1, \ \angle AEE_1$$

являются одновременно прямыми, острыми или тупыми.

Пусть угол $\angle ACC_1$, острый. Отложим далее отрезок $A\overline{C} = AC$ и опустим из C перпендикуляр $\overline{C}\overline{C}_1$ на прямую b (рис. 33).

Нетрудно установить, что $C_1CC\overline{C}_1$ является четырехугольником Хайяма — Саккери. Действительно, возьмем на продолжении верхнего основания точку E и опустим на нее перпендикуляр EE_1, на прямую b. По предыдущей теореме $EE_1 > CC_1 = C\overline{C}_1$. Итак, в четырехугольнике $E_1 E \overline{C}\, \overline{C}_1$ с двумя прямыми углами при вершинах $\overline{E}_1$, E_1 боковые стороны не равны. Так как по ранее показанной теореме против большей стороны лежит больший угол,

$$y < x < d.$$

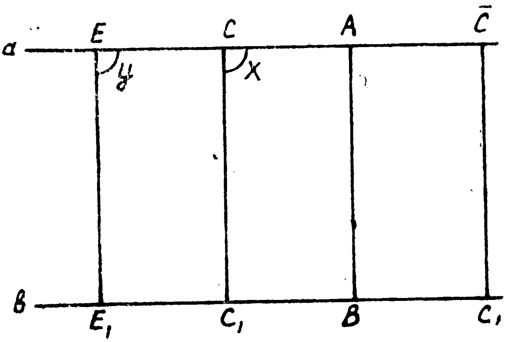

Рис. 33.

Таким образом, угол AEE_1 также острый. Эти рассуждения незначительно изменяются в случае, если $\angle ACC_1$ тупой или прямой. Справедлива обратная теорема. Докажем теперь следующую важную теорему об одновременности гипотезы во всех четырехугольниках Хайяма—Саккери.

Теорема 21. Если для одного какого-нибудь четырехугольника Хайяма — Саккери справедлива одна из трех гипотез, то она имеет место для любого четырехугольника Хайяма — Саккери.

В самом деле пусть в четырехугольнике $ABCD$ Хайяма—Саккери справедлива гипотеза острого угла, т. е. углы $\angle B = \angle C$, например, острые. Докажем, что в любом другом четырехугольнике $A'B'C'D'$ Хайяма — Саккери пространства абсолютной геометрии выполняется эта же гипотеза, т. е. угол $\angle B'$ острый. Для доказательства восстановим из середины E перпендикуляр к нижнему основанию. Он является также перпендикуляром к верхнему основанию и делит его пополам. Построим общий перпендикуляр $E'F'$ к обоим основаниям во втором четырехугольнике $A'B'C'D'$. Отложим далее (рис. 34, 35)

$$EA_1 = ED_1 = E'A', \quad A_1B_1 = C_1D_1 = A'B', \quad EF_1 = E'F'.$$

В результате этих построений получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ Хайяма—Саккери, равный заданному $A'B'C'D'$. Пусть сторона A_1B_1 пересекает верхнее основание в точке K. Существование этой точки гарантируется аксиомой Паша.

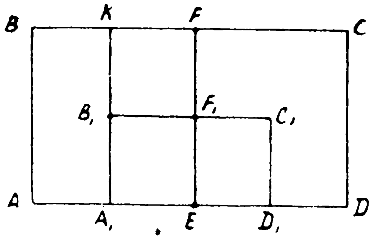

Рис. 34.

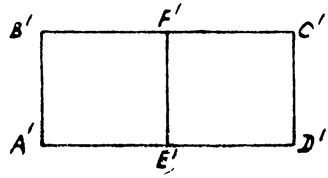

Рис. 35.

Две прямые (BC) и (AD) перпендикулярны к третьей (EF). На первой из этих прямых взяты точки B, K и опущены перпендикуляры BA, KA_1 на вторую прямую. По предыдущей теореме углы $\angle ABF$, $\angle A_1KF$ являются острыми (напомним, что $\angle ABF$ по условию теоремы меньше прямого).

Далее рассмотрим прямые (A_1B_1) и (EF_1). Они перпендикулярны к третьей прямой (AE). На первой прямой взяты точки B_1, K и опущены перпендикуляры B_1F_1, KF на вторую прямую. Углы $\angle A_1B_1F_1$, $\angle A_1KF$ будут по предыдущей теореме одновременно острыми, так как известно, что угол $\angle A_1KF$ острый. Следовательно угол

$$\angle A_1B_1F_1$$

острый и в четырехугольнике $A'B'C'D'$ Хайяма—Саккери справедлива также гипотеза острого угла. Эти рассуждения с небольшими изменениями повторяются в случае, когда в четырехугольнике $ABCD$ Хайяма — Саккери справедлива гипотеза прямого или тупого углов.

Из этой теоремы следует, что имеется три сорта пространств абсолютной геометрии. Пространство с гипотезой острого угла, в котором для каждого четырехугольника Хайяма — Саккери справедлива лишь гипотеза острого угла. Аналогично получим пространства с гипотезой прямого или тупого углов.

Рассмотрим теперь вопрос о сумме углов треугольника. Здесь справедлива следующая теорема.

Теорема 22. Если в каком-нибудь треугольнике сумма углов меньше, равняется или больше двух прямых, то во всяком треугольнике сумма углов также будет меньше, равна или больше двух прямых, причем в пространстве имеет место соответственно гипотеза острого, прямого или тупого углов.

Докажем теорему сначала для прямоугольных треугольников (рис. 36, 37). Пусть сумма углов в прямоугольном треугольнике

ABC равняется двум прямым. Докажем, что сумма углов в любом другом прямоугольном треугольнике $A_1B_1C_1$ также равняется двум прямым. В дальнейшем предполагается, что $\angle C = \angle C_1$ прямой. Восстановим из вершины острого угла A в плоскости треугольника ABC перпендикуляр к AC и отложим $AD = BC$. Четырехугольник $ADBC$ является четырехугольником Хайяма—Саккери. Так как $\triangle ADB$ равняется $\triangle ABC$ по двум сторонам и заключенному ими углу, то верхнее основание четырехугольника $ABCD$ равняется нижнему. По обратной теореме о четырехугольнике Хайяма — Саккери мы заключаем, что в $ABCD$ справедлива гипотеза прямого угла.

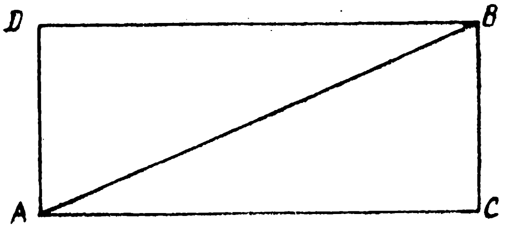

Рис. 36.

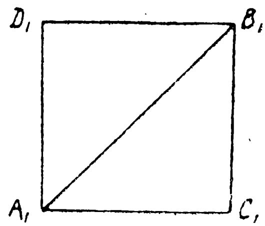

Рис. 37.

Построим теперь перпендикуляр A_1D_1 к катету A_1C_1 в плоскости второго треугольника и отложим $A_1D_1 = B_1C_1$. Полученный четырехугольник Хайяма — Саккери по только что доказанной теореме имеет также гипотезу прямого угла, как и четырехугольник $ABCD$. Следовательно, верхнее основание D_1B_1 равняется нижнему и треугольники $A_1B_1D_1$ и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Отсюда следует, что острый угол

$$\angle D_1A_1B_1 = \angle A_1B_1C_1,$$

вместе с углом $\angle A_1$ составляет прямой угол. Таким образом, сумма всех трех углов треугольника $A_1B_1C_1$ равняется двум прямым. Если сумма углов в первом треугольнике ABC меньше двух прямых, то в четырехугольнике Хайяма — Саккери $ABCD$ верхнее основание больше нижнего и осуществляется гипотеза острого угла.

Эта гипотеза имеет место и в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$. В нем, таким образом, $B_1D_1 > A_1C_1$. В треугольниках $A_1B_1D_1$ и $A_1B_1C_1$ имеем $A_1D_1 = B_1C_1$ и A_1B_1 общая сторона. Против большей стороны лежит больший угол, т. е. $\angle D_1A_1B_1 > \angle B_1$. Следовательно,

$$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 < \angle A_1 + \angle D_1A_1B_1 + d = 2d.$$

Теорема доказана и в этом случае. Эта теорема также просто доказывается и для гипотезы тупого угла.

Пусть теперь треугольник ABC непрямоугольный. Можно считать, что AC обозначает наибольшую сторону. Опустим из вершины B на эту сторону перпендикуляр BD. Основание D перпендикуляра является точкой стороны AC (рис. 38,39).

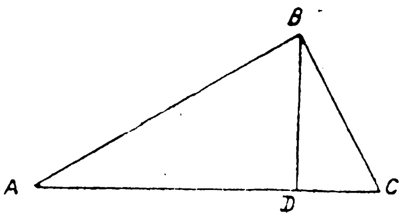

Рис. 38.

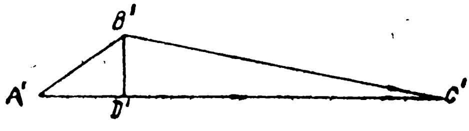

Рис. 39.

Построим также высоту $B'D'$ второго треугольника. Нетрудно видеть, что сумма S_{ABC} углов треугольника ABC связана с S_{ABD} и S_{BCD} следующим образом:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD} - 2d.$$

Если $S_{ABC} < 2d$, то из указанного равенства вытекает, что

$$S_{ABD} + S_{BDC} < 4d.$$

Так как $\triangle ABD$, $\triangle BDC$ прямоугольные треугольники и для них теорема доказана, то

$$S_{ABD} < 2d, \ S_{BDC} < 2d.$$

Следовательно,

$$S_{A'B'D'} < 2d, \ S_{B'D'C'} < 2d.$$

Отсюда выводим, что

$$S'_{A'B'C'} = S'_{A'B'D'} + S'_{B'D'C'} - 2d < 2d.$$

Аналогичные рассуждения повторяются для случая, когда $S_{ABC} = 2d$ или $S_{ABC} > 2d$.

Теорема Лежандра 23. В пространстве абсолютной геометрии не существует треугольника, сумма углов которого больше двух прямых, т. е. не имеет места гипотеза тупого угла.

Докажем теорему от противного. Пусть существует в пространстве абсолютной геометрии треугольник ABC, сумма углов которого больше двух прямых. Для доказательства продолжим сторону AC треугольника (рис. 40).

Построим последовательно, как указано на рисунке, $(n-1)$ треугольников, равных данному. Таким образом, имеем

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = AC,$$

$$\angle B_1A_1A_n = \angle B_2A_2A_n = \ldots = \angle B_{n-1}A_{n-1}A_n = \angle BAC,$$

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_{n-1}B_{n-1} = AB$$

Все треугольники равны друг другу по двум сторонам и заключенному ими углу. Соединим отрезками пары точек BB_1, B_1B_2, $\ldots$, $B_{n-1}B_n$. Заметим, что они, вообще говоря, не лежат на одной прямой. По условию

$$\angle A + \angle B + \angle C > 2d.$$

С другой стороны, очевидно

$$\angle A + \angle BCB_1 + \angle C = 2d.$$

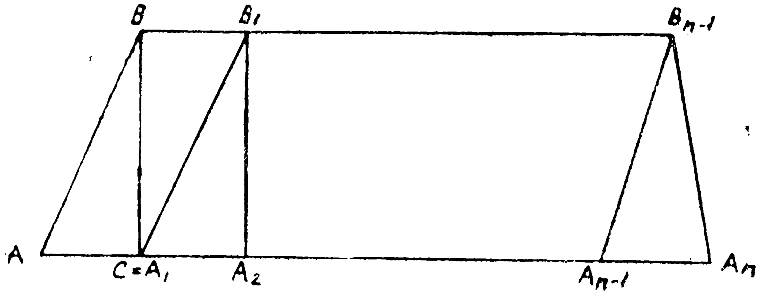

Рис. 40.

Отсюда вытекает, что

$$\angle B > \angle BCB_1.$$

Этот факт позволяет заключить, что в треугольниках ABC и BB_1C стороны, лежащие против указанных углов, связаны неравенством аналогичного смысла, т. е.

$$AC > BB_1.$$

Учитывая, что ломаная $ABB_1 \cdots B_{n-1}B_n$ больше замыкающей AA_n, мы будем иметь

$$AB + BB_1(n-1) + BC > nAC.$$

Перебросим слагаемое nBC в правую часть:

$$AB + BC - BB_1 > n(AC - BB_1).$$

Мы только что доказали в первой части теоремы, что разность $AC - BB_1$, является отрезком. Последнее неравенство, содержащее в левой части фиксированный отрезок и натуральный произвольный сомножитель n, невозможно по аксиоме Архимеда. Теорема доказана. Итак, мы доказали, что если в пространстве осуществляется гипотеза прямого угла, то сумма углов любого треугольника постоянна и равна двум прямым; если же осуществляется гипотеза острого угла, то сумма углов любого треугольника переменна и менее двух прямых. Мы докажем теперь теорему о том, что эти два сорта пространств совпадают соответственно с евклидовым пространством и пространством Лобачевского.

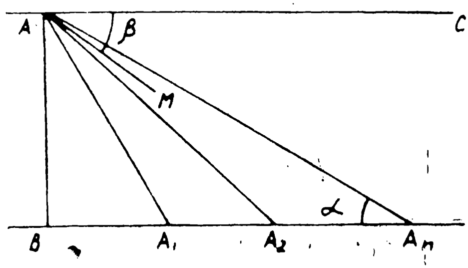

Рис. 41.

Теорема 24. Если имеет место гипотеза прямого угла, то через каждую точку A, не лежащую на данной прямой a, можно провести в плоскости (A, a) не более одной прямой, не пересекающейся с прямой a. Если же справедлива гипотеза острого угла, то таких прямых можно провести бесчисленное множество. Справедлива обратная теорема.

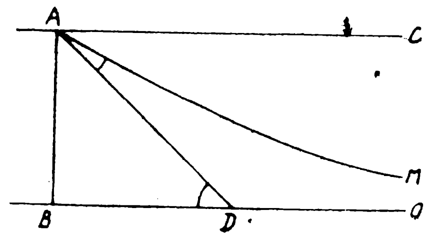

Рис. 42.

Разберем сначала эту теорему в предположении, что справедлива гипотеза прямого угла. Опустим из точки A перпендикуляр AB на данную прямую a. Прямая, проходящая через A и перпендикулярная AB, не пересекается с прямой a. Докажем, что любая другая прямая, проходящая через A, пересекает прямую a. Для доказательства отложим на прямой a отрезок BA_1, равный AB, затем последовательно строим отрезки

$$A_1A_2 = AA_1, \quad A_2A_3 = AA_2 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим последовательность равнобедренных треугольников (рис. 41)

$$ABA_1, \ AA_1A_2, \ AA_2A_3, \ldots, \ AA_{n-1}A_n, \ldots$$

Так как по условию справедлива гипотеза прямого угла, то сумма углов треугольника равняется двум прямым. Отсюда следует, что острый угол первого треугольника равняется $d/2$, для второго треугольника $\angle A_2 = d/2^2$. Легко доказать по индукции, что величина острого угла $\angle A_n$ прямоугольного треугольника ABA_n определяется по формуле

$$\angle A_n = d/2^n..$$

Обозначим для простоты углы $\angle AA_nB$, $\angle MAC$ буквами α и β соответственно. В этой геометрии накрестлежащие углы AA_nB и A_nAC равны. Действительно, первый из них на основании гипотезы прямого угла составляет с углом $\angle A_nAB$ прямой угол, а второй угол $\angle A_nAC$ по построению с углами $\angle A_nAB$ составляет также прямой угол. Существует натуральное n такое, что

$$d/2^n < \beta.$$

Это означает, что луч AM принадлежит внутренности угла $\angle BAA_n$ треугольника BAA_n. Такой луч, как можно доказать на основании аксиомы Паша, пересечет противоположную сторону BA_n рассматриваемого треугольника.

Перейдем теперь ко второй части теоремы, когда в пространстве абсолютной геометрии справедлива гипотеза острого угла. Опустим из A перпендикуляр AB на прямую a. Здесь также прямая AC, перпендикулярная к AB, не пересекается с прямой a. Докажем наличие других прямых, проходящих через A и непересекающихся с a (рис. 42). Возьмем какую-нибудь точку D на прямой a, так как сумма углов треугольника ABD теперь меньше двух прямых, то сумма острых углов этого треугольника меньше прямого. Поэтому вторая сторона AM угла $\angle DAM$, равного $\angle ADB$, принадлежит внутренности прямого угла $\angle BAC$. Прямая AM также не пересекается с прямой a. В самом деле, пусть AM пересечет прямую a в точке O. Рассмотрим треугольник AOD. В этом треугольнике угол $\angle ADB$ равняется несмежному внутреннему $\angle DAM$, что невозможно. Итак, пространство с гипотезой прямого угла является евклидовым пространством и пространство с гипотезой острого угла является пространством Лобачевского. Справедлива обратная теорема. Вообще справедливость приведенных выше обратных теорем вытекает из следующего известного закона обратимости. Если справедлива теорема с возможными условиями и независимыми для них заключениями, то для такой теоремы автоматически имеет место обратная теорема. Из показанной теоремы следует, что предложения о гипотезах прямого и острого углов в абсолютной геометрии эквивалентны, соответственно аксиомам параллельности Евклида и Лобачевского.

Рассмотрим теперь вопрос о связи пятого постулата с подобием фигур.

Теорема 25. Если существует два неравных треугольника с попарно равными тремя углами, то имеет место евклидова геометрия.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ два треугольника, для которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 43, 44). Так как треугольники не равны, то найдется по крайней мере одна пара неравных сторон, например, AB и A_1B_1. Можно считать, что $AB > A_1B_1$. Следовательно, откладывая от точки B на стороне AB отрезок A_1B_1, мы получим

$$BA_2 = B_1A_1.$$

Нетрудно доказать далее, что сторона A_2C_2 угла $\angle BA_2C_2$, конгруентного углу $\angle A_1$, пересекается со стороной BC в некоторой точке C_2. В самом деле, пусть C_2 совпадает с точкой C, тогда $\angle C > \angle C_1$, что невозможно. Если же C_2 будет внешней точкой отрезка BC, то A_2C_2 пересечет сторону AC в точке X: внешний угол C треугольника CC_2X окажется больше внутреннего угла C_1, что также невозможно. Итак, A_2C_2 пересекает сторону BC в точке C_2.

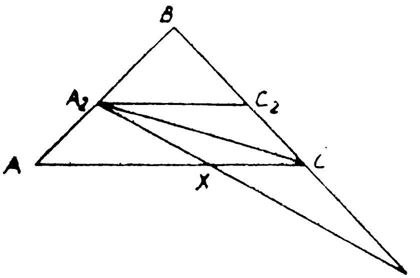

Рис. 43.

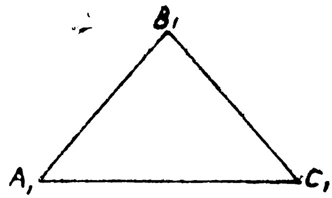

Рис. 44.

Рассмотрим **теперь** сумму углов четырехугольника AA_2C_2C. Она **равняется четырем** прямым.

$$\angle A + \angle AA_2C_2 + \angle A_2C_2C + \angle C = 4d,$$

так как второе и третье слагаемые равны соответственно $2d - A$ и $2d - C$. Заметим далее, что диагональю A_2C этот четырехугольник разбивается на два треугольника и левая часть предыдущего равенства является суммой углов этих треугольников:

$$S_{AA_2C} + S_{A_2C_2C} = 4d.$$

Отсюда следует, что

$$S_{AA_2C} = S_{A_2C_2C} = 2d.$$

Таким образом, справедлива гипотеза прямого угла, т. е. имеет место евклидова геометрия, что и требовалось доказать.

Доказанное предложение можно высказать также в следующем виде. Подобные треугольники существуют только в евклидовом пространстве; в геометрии Лобачевского отсутствуют подобные фигуры.

Так как геометрия гипотезы прямого угла является хорошо изученной евклидовой геометрией, то в дальнейшем мы более подробно рассмотрим геометрию Лобачевского.

ГЛАВА III

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Великий русский математик, творец неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде (г. Горький) в семье, по одним сведениям, архитектора, а по другим — землемера. В 1802 — 1807 гг. Лобачевский обучался в Казанской гимназии.

Далее, в 1807 г. он поступил в незадолго перед тем открывшийся Казанский университет. Из среды своих сверстников во время учебы он выделялся большими способностями и успехами по математике. Его склонность к занятиям по математике развивалась под влиянием талантливого учителя гимназии Г. И. Карташевского и видного профессора университета Бартельса. Высокий уровень преподавания ими математики положительно сказался на развитии способностей и выработке научного мировоззрения Лобачевского.

В 1809 г. Лобачевский был утвержден камерным студентом. Камерные студенты в то время избирались самими студентами из числа отличных по успехам и поведению для помощи отстающим. Следует отметить, кстати, что поведение Лобачевского было неровное. Для руководства университета Лобачевский был прежде всего студентом, нарушавшим установленные правила поведения. При утверждении камерным студентом в аттестации говорилось, что в последнее время Лобачевский ведет себя хорошо. Однако вскоре в 1810 г. его лишают звания камерного студента за сочувствие студентам, допускавшим проступки, и выносят ему выговор.

В мае 1811 г. помощник инспектора указывает в своем рапорте, что Лобачевский многократно подавал худые примеры для своих товарищей, неоднократно был наказываем и не всегда исправлялся. В последующем рапорте указывалось также, что Лобачевский в значительной степени проявлял признаки «безбожия. Инспекция ставила вопрос о принятии решительных мер к Лобачевскому. Обсуждение вопроса о поведении было перенесено на Совет. Будущему великому математику грозило даже исключение из университета.

Только по настоянию профессоров, у которых учился Лобачевский, Совет ограничился вынесением ему выговора.

На следующем Совете в августе 1811 г. Лобачевскому присваивается звание магистра с целью приготовления его к профессорскому званию. Он занимается со студентами, повторяя и разъясняя им пройденный на лекциях материал.

Затем в 1814 г. Лобачевский был повышен в звании адъюнкта чистой математики и приступил к чтению лекций. В 1816 г. он получает звание профессора и принимает более деятельное участие в жизни университета.

Перейдем теперь к краткой характеристике научных исследований Лобачевского. Прежде всего отметим, что в первые годы преподавательской деятельности он, как и многие другие математики, пытался доказать пятый постулат Евклида. Подобно Хайяму, Саккери и Ламберту, им делались выводы из противоположного пятому постулату допущения с расчетом прийти к противоречию. Но вскоре Лобачевский стал приходить к выводу, что в действительности никакого противоречия не имеется и получаемая совокупность теорем составляет новую, более общую геометрию по сравнению с обычной. 11 февраля 1826 г. на факультете был заслушан доклад Лобачевского, в котором приводилось доказательство того, что пятый постулат не может быть получен логическим путем из других постулатов и аксиом Евклида. Этот вывод Лобачевский получил в результате создания им новой неевклидовой геометрии. Несмотря на кажущуюся противоречивость, эта созданная геометрия такая же логически безупречная, как и евклидова. В 1829—1830 гг. Лобачевский опубликовал свои исследования под названием «О началах геометрии». В начале этого сочинения Лобачевский дал серьезную критику «Началам» Евклида, отмечая содержащиеся в них неясности и туманные формулировки. Он указывает, что никакая математическая наука не должна начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, мы начинаем геометрию. Далее в его сочинении подчеркивается, что нельзя терпеть такого недостатка строгости, который имеется в теории параллельных.

Следует особо подчеркнуть, что Лобачевский допускал существование различных геометрий, и вполне «возможно в природе некоторые силы следуют одной, другие своей особой геометрии». В основу построения геометрии можно положить пятый постулат или его отрицание «без всякого противоречия впоследствии,— пишет Лобачевский,—отчего и происходят две геометрии». Вскоре после открытия своей геометрии он предпринял попытку вычисления дефекта треугольника, образованного Землей в двух ее положениях и ближайшей звездою Сириусом. Дефект оказался незначительным в пределах точности инструментов. Таким образом, как заключает Лобачевский, очень вероятно, что евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными. Однако новая геометрия открывает обширное поле исследований и содержит евклидову геометрию как предельный случай.

Примерно в то же время пришел независимым путем к открытию неевклидовой геометрии молодой венгерский математик Иоганн Больяи. Свои исследования он опубликовал в 1831 г. в небольшой по объему работе «Аппендикс» в виде добавления к книге по геометрии отца Вольфгана Больяи.

Первая публикация Лобачевского по геометрии, в которой излагалась новая геометрия, была совершенно не понята русскими и зарубежными математиками. В частности, он встретил полное непонимание его идей и русской Академией Наук. Более того, известный математик Остроградский открыто насмехался над исследованиями Лобачевского. В 1834 г. в одном из номеров журнала «Сын Отечества» была опубликована резко отрицательная и оскорбительная рецензия на работу «О началах геометрии».

Но Лобачевский не впадает в уныние. Он дает более развернутое изложение своих результатов и в 1835—1838 гг. печатает в Ученых записках «Воображаемую геометрию» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Вскоре первое сочинение переводится на французский язык и сокращенное изложение второй книги издается в Берлине на немецком языке.

В «Новых началах» приводятся аналитические рассуждения о непротиворечивости созданной геометрии и углубляется ее приложимость к вычислению интегралов.

Последнее его сочинение «Пангеометрия» издано одновременно на русском и французском языках в 1855 г. По доходчивости изложения это сочинение уступает «Новым началам», хотя последние написаны также непростым языком. Вообще статьи и книги Лобачевского предельно кратки и сжаты, поэтому чтение их требует довольно значительной подготовки.

Лобачевский принимал деятельное участие в жизни университета. Он входил в состав комитета по строительству учебных корпусов и в течение 10 лет возглавлял управление научной библиотекой. Несколько лет работал деканом физико-математического факультета, принимал участие в училищном комитете, контролирующем состояние преподавания в училищах Казанского учебного округа. Лобачевский в течение 19 лет (1827—1846 гг.) был ректором университета (до сих пор он остается единственным ректором с таким многолетним стажем в истории Казанского университета). Лобачевский был всесторонне образованным человеком. Он часто читал лекции не только по математике, но и по физике, астрономии. Глубоко содержательная его «Речь о важнейших предметах воспитания», опубликованная в 1832 г. в «Казанском вестнике», и в настоящее время комментируется на страницах наших журналов и газет.

В 1846 г. Лобачевский был отстранен от работы в университете и назначен помощником попечителя Казанского учебного округа. Отстранение от работы в университете, которому он отдал всю свою жизнь, и многолетние напряженные научные исследования великого геометра разрушающе сказались на его здоровье. Он быстро стал стареть и слепнуть. За год до смерти Лобачевский завершает под диктовку своим ученикам последнее свое сочинение — «Пангеометрию».

Н. И. Лобачевский умер 12 февраля 1856 г., умер непонятый современниками. Это объясняется тем, что авторитет евклидовских «Начал» был (и остается в настоящее время) настолько значительным, что до Лобачевского вообще никто не осмеливался ни критиковать по-настоящему евклидовы «Начала», ни подозревать существование других геометрий. Лобачевскому впервые удалось парализовать в своих исследованиях влияние евклидовых «Начал» и тем самым в корне подорвать их авторитет как единственно возможной геометрической теории. Только Гаусс понимал и высоко ценил исследования Лобачевского. В письме к Шумахеру Гаусс называет Лобачевского как знатока в истинно геометрическом духе. Но высказывания Гаусса о Лобачевском, как и первый печатный отзыв В. Больяи о его исследованиях, не дошли до творца неевклидовой геометрии. В том же письме Гаусс замечает, что эти идеи ему известны были ранее, но исследования свои он при жизни не опубликовывал.

Понадобилось более века, чтобы математики поняли исследования Лобачевского и своими словами в более доходчивой форме изложили его геометрию. Эта геометрия уже несколько десятков лет теперь преподается как учебная дисциплина в высшей школе у нас и за рубежом.

Всю жизнь Лобачевский неустанно развивал новую геометрию и стремился сделать более доходчивым свое открытие. В итоге он получил вполне законченную геометрическую теорию и мог свободно решать в своей геометрии все задачи, аналогичные задачам, которые обычно рассматриваются в евклидовой геометрии.

Но насколько трудно тогда было овладеть идеями этой геометрии, подтверждает следующий факт. Среди учеников Лобачевского не нашлось за всю многолетнюю его работу в университете ни одного, который бы продолжил гениальные исследования своего учителя или изложил бы последнее в более современной форме.

Исследования Бельтрами, Клейна и Пуанкаре значительно содействовали распространению идей Лобачевского. Бельтрами показал в 1868 г., что формулы новой геометрии можно получить при рассмотрении фигур не на сфере, а на псевдосфере, и тем самым логическая безупречность геометрии Лобачевского была полностью установлена. Выводы Бельтрами со всей очевидностью показали неуместность иронии открытых насмешек, с которыми относились многие математики при жизни Лобачевского к его исследованиям.

Открытие геометрии Лобачевского имело огромное значение для дальнейшего развития математики и других наук. Эта геометрия оказала большое влияние на развитие научного мировоззрения. Она определила на долгие годы дальнейшие исследования ряда направлений в математике.

Ниже дается краткое изложение основных фактов геометрии Лобачевского и подчеркивается ее связь с геометрией сферы чисто мнимого радиуса в пространстве Минковского.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ИХ СВОЙСТВА

Геометрия Лобачевского получается из абсолютной геометрии при предположении, что выполняется **аксиома Лобачевского. Напомним эту аксиому:** через любую точку A, **не инцидентную прямой** a, **можно провести в плоскости** (A, a) **по крайней мере две различные прямые, не пересекающиеся с прямой** a.

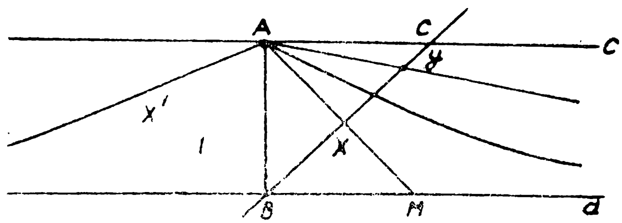

Рис. 15.

Мы установили выше, что геометрия Лобачевского является геометрией гипотезы острого угла для четырехугольников Хайяма — Саккери. Таким образом, в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше двух прямых. Там же мы доказали, что в этой геометрии не существует подобных треугольников.

Введем понятие параллельных прямых в геометрии Лобачевского. Возьмем прямую a и не инцидентную ей точку A. Опустим далее из этой точки A перпендикуляр AB на данную прямую a и, кроме того, проведем прямую AC, перпендикулярную к AB. Полученные две прямые AC и a, перпендикулярные к AB, не пересекаются. Таким образом, все прямые, проходящие через точку A, можно разбить на два непустых множества: на множество прямых, пересекающих прямую a, и множество прямых, не пересекающих ее (рис. 45).

Это разбиение прямых пучка с центром в точке A индуцирует разбиение точек направленной прямой BC на два класса. Точки B и C считаются соответственно первого и второго класса. Всякую точку Y отрезка BC считаем первого или второго класса, смотря по тому, пересекается или не пересекается прямая AY с прямой a. Точки, предшествующие точке B, считаются точками первого класса, и точки, которым предшествует точка C, — второго класса. Это разбиение удовлетворяет условиям сечения Дедекинда. Следовательно, на прямой BC существует точка X, производящая деление точек на два класса. Она, в свою очередь, определяет пограничную прямую AX. Полученная пограничная прямая AX, отделяющая прямые AM, пересекающиеся с a, от других прямых пучка AM, не пересекающихся с a, называется прямой, параллельной к прямой a в точке A в направлении AX.

Нетрудно доказать также, что параллельные прямые принадлежат к множеству прямых пучка с центром в A, не пересекающих прямую a. Действительно, если бы AX пересекалась с прямой a, то точка X, производящая сечение точек прямой BC на классы, была бы точкой первого класса и не являлась бы последней в этом классе, что невозможно. Отметим, кстати, что непересекающиеся и непараллельные прямые называются сверхпараллельными прямыми. На рисунке 45 прямая AX, параллельная к прямой a, изображена с точки зрения евклидовой геометрии в виде кривой, асимптотически приближающейся к прямой a. Однако такая несовершенная иллюстрация не позволяет нам утверждать, что евклидова геометрия единственно возможная геометрия. Напротив, геометрия Лобачевского такая же логически безупречная система, как и евклидова. Вопрос о моделях геометрии Лобачевского мы будем обсуждать в конце четвертой главы (см. § 8).

Рассмотрим теперь ряд теорем о параллельных прямых. Предварительно получим критерий параллельности. Мы выяснили, что если AX параллельна прямой a в каком-нибудь направлении, то эти прямые являются непересекающимися. Обнаруженное свойство в дальнейшем называется критерием непересечения. Далее из определения параллельности прямой AX и прямой a в данной точке A можно получить следующее важное свойство, характеризующее свойство пограничности прямой AX. Возьмем для этого на прямой a какую-нибудь точку B и рассмотрим угол BAC с вершиной в A и внутренностью, обращенной в сторону параллельности AX прямой a в точке A. Угол BAC в дальнейшем называется углом, обращенным в сторону параллельности. В частности, если сторона AB угла BAC перпендикулярна к прямой a, то угол BAC называется **углом параллельности.** Теперь нетрудно охарактеризовать свойство пограничности AX: Любой луч AK, принадлежащий внутренности какого-нибудь угла BAC, обращенного в сторону параллельности, пересекает прямую a. Этот критерий в дальнейшем мы называем критерием угла. Обратно, если для двух прямых AX и a выполняется критерий непересечения и критерий угла BAX, обращенного в сторону исследуемой параллельности, то прямая AX параллельна прямой a в точке A в направлении AX. Рассмотрим некоторые теоремы о свойствах параллельных прямых.

Теорема 1. Прямая AX, параллельная в точке A прямой a в данном направлении, остается параллельной в том же направлении для всякой своей точки C.

Пусть сначала точка C расположена в сторону параллельности относительно точки A. Возьмем на a какую-нибудь точку B. Для доказательства параллельности прямой AX к прямой a в точке C в указанном направлении достаточно доказать выполнимость указанного выше критерия непересечения и критерия угла. Критерий непересечения, очевидно, выполняется, так как AX по условию была параллельна a в точке A и критерий непересечения и угла с вершиной в A выполнялись.

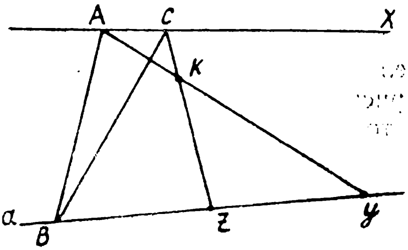

Рис. 46.

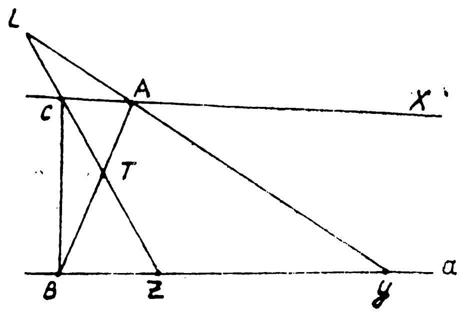

Рис. 47.

нялись. Выясним теперь выполнимость критерия угла с вершиной в точке C. Мы докажем, что всякий луч CK (рис. 46), принадлежащий внутренности угла BCX, обращенного в сторону исследуемой параллельности, пересечет прямую a. Возьмем для доказательства на луче CK точку K. Прямая AK пересечет a в некоторой точке Y. Далее по аксиоме Паша, примененной к $\triangle ABY$ и прямой CK, мы выводим, что CK пересекает a в некоторой точке Z.

Пусть точка C располагается по другую сторону относительно точки A (рис. 47). Для доказательства критерия угла, мы возьмем на продолжении луча CK точку L и проведем прямую LA. Луч AN принадлежит углу BAX, обращенному в сторону параллельности AX к прямой a в точке A, и пересекает a в некоторой точке Y. С другой стороны, прямая LK, очевидно, пересекает отрезок AB в точке T, так как луч CK принадлежит внутренности угла BCX. Применяя теперь аксиому Паша к треугольнику BAY и прямой CK, мы докажем, что луч CK пересечет сторону BY указанного треугольника в некоторой точке Z. Теорема доказана.

Таким образом, свойство параллельности прямой AC к прямой a выполняется в каждой ее точке, если оно имело место в какой-нибудь одной точке C. Поэтому мы будем в дальнейшем просто говорить, что прямая AC параллельна прямой a (не указывая относительно какой точки) в данном направлении. Докажем теперь в следующих двух теоремах свойства взаимности и транзитивности параллельности прямых.

Теорема 2. Если прямая a параллельна в каком-нибудь направлении прямой b, то прямая b также параллельна прямой a в том же направлении.

Возьмем для доказательства некоторую точку A на прямой a. В этой точке A прямая a параллельна прямой b в указанном направлении. Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую b. Докажем теперь, что b параллельна a в точке B (рис. 48). Критерий непересечения этих прямых выполняется, так как прямая a по условию является параллельной прямой b. Установим справедливость критерия угла с вершиной в точке B. Возьмем для этого любой луч BC, принадлежащий внутренности $\angle ABX$, обращенного в сторону рассматриваемой параллельности, и докажем, что он пересечет прямую AX. Опустим из A перпендикуляр AD на BC.

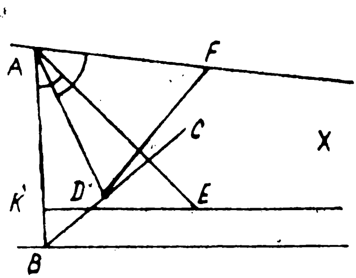

Рис. 48.

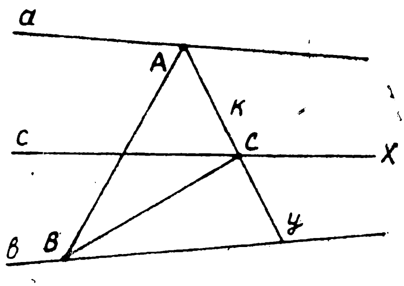

Рис. 49.

Отложим далее отрезок $AK = AD$, $AF = AE$ и $\angle DAF = \angle KAE$. В результате указанных построений мы придем к треугольникам KAE и DAF, которые конгруентны по двум сторонам и заключенному углу. Отсюда вытекает, что угол ADF является прямым, так как он конгруентен прямому углу AKE первого треугольника.

Следовательно, лучи DB и DF инцидентны одной прямой и BD пересекает прямую AX в точке F. Теорема доказана. Вследствие этой теоремы можно говорить, что прямые a и b параллельны между собою, не указывая, какая одна из них была первоначально параллельна другой.

Теорема 3. Две прямые a, b, параллельные третьей прямой c в одном и том же направлении, параллельны между собою в том же направлении.

Разберем сначала случай, когда прямые a и b лежат по разные стороны относительно прямой c (рис. 49). Критерий непересечения здесь выполняется автоматически, так как прямые a, b лежат в разных полуплоскостях. Чтобы установить критерий угла, возьмем точки A и B, инцидентные соответственно прямым a и b. Всякий луч AK, принадлежащий углу BAX, обращенному в сторону параллельности, пересекает прямую c в точке C. Этот факт следует из того, что по условию прямые a и c параллельны. Так как луч CK принадлежит внутренности угла

BCX, обращенного в сторону рассматриваемой параллельности, то он пересечет сторону в некоторой точке Y.

Пусть теперь прямые a, b лежат по одну сторону относительно прямой c (рис. 50). Критерий непересечения прямых a и b здесь также выполняется: в противном случае через точку пересечения O проходили бы две прямые a, b, параллельные прямой c в одном и том же направлении. Возьмем на прямых a, b, c соответственно точки A, B и C. Пусть луч CK принадлежит внутренности углов BCM и ACM. Он пересечет прямые b и a в некоторых точках D и E. Возьмем теперь произвольный луч EL, принадлежащий внутренности угла CEM, обращенного в сторону рассматриваемой параллельности a и b. Докажем, что он пересечет прямую b. В самом деле, указанный угол является углом, обращенным в сторону параллельности параллельных по условию прямых a, c. Луч EL пересекает, следовательно, прямую c в некоторой точке X. Применяя далее к треугольнику CEX и прямой b аксиому Паша, мы немедленно получим пересечение EL с прямой b в некоторой точке Y. Прежде чем перейти к рассмотрению других свойств пар параллельных прямых, введем понятие дефекта треугольника.

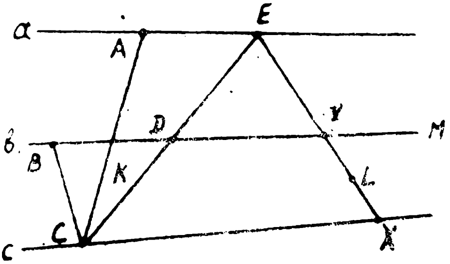

Рис. 50.

Пусть нам задан треугольник ABC. Его сумма углов, как было установлено выше, меньше двух прямых. Величина

$$_{ABC} = 2d - A - B - C$$

называется **дефектом треугольника** ABC. Разбиение треугольника ABC лучом, выходящим из какой-нибудь вершины и принадлежащим его внутренности, называется трансверсальным. О дефектах трансверсальных треугольников справедливо следующее очевидное предложение.

Теорема 4. Дефект треугольника ABC равняется сумме дефектов составляющих его трансверсальных треугольников.

Действительно, по определению дефекта $\triangle_{ABC} = 2d - A - B - C$.

С другой стороны, так как DAC (рис. 51), то

$$S_{ABC} = A + B + C = S_{ABD} + S_{BDC} - 2d.$$

Следовательно,

$$\triangle_{ABC} = 2d - S_{ABD} - S_{BDC} + 2d = \triangle_{ABD} + \triangle_{BDC}.$$

Теорема доказана. Опираясь на это предложение, мы рассмотрим в заключении параграфа еще две теоремы об особенностях параллельных прямых в геометрии Лобачевского.

Теорема 5. Для любого острого угла всегда можно найти прямую, перпендикулярную к одной стороне и параллельную в то же время к другой его стороне.

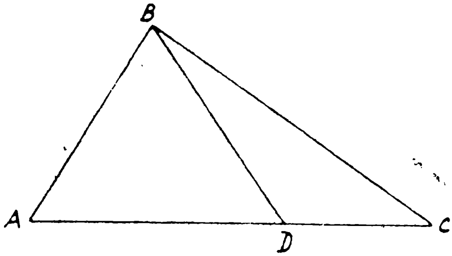

Рис. 51

Возьмем на одной стороне угла A_1OB_1 точку A_1 и опустим перпендикуляр A_1B_1 на другую сторону. Отложим далее от точки B_1 отрезок $B_1B_2 = OB_1$. Из точки B_2 восстановим перпендикуляр к прямой B_2O. Если он не пересечет вторую сторону угла, то дальнейшие построения на этом закончим. Если же он пересечет вторую сторону в некоторой точке A_2, то построим отрезок $B_2B_3 = OB_2$ и восстановим перпендикуляр из точки B_3. Если этот перпендикуляр не пересечет вторую сторону угла, то построение новых отрезков производить не будем. В противном случае повторим указанные построения — отложим отрезок $B_3B_4 = OB_3$ и т. д.

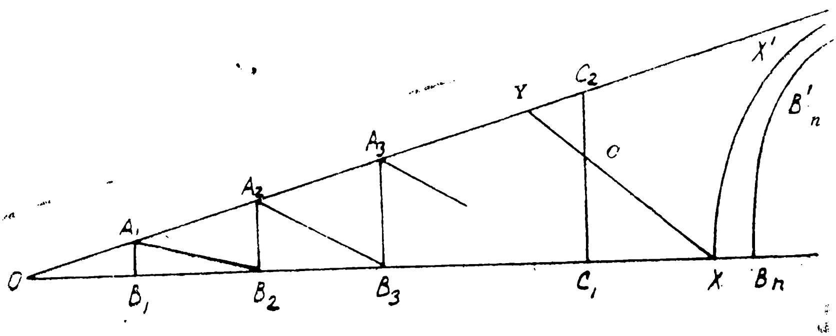

Рис. 52.

Обозначим через Δ дефект треугольника OA_1B_1. По доказанной выше теореме дефект $\Delta_{OA_1B_2}$ равняется двум дефектам 2Δ (рис. 52). Так как треугольник OA_2B_2 состоит из трансверсальных треугольников OA_1B_2 и $A_1B_2A_2$ то

$$\Delta_{OA_2B_2} > 2\Delta.$$

По методу математической индукции, мы получим следующие неравенства для дефектов получающихся треугольников:

$$\Delta_{OA_3B_3} > 2^2\Delta,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta_{OA_nB_n} > 2^{n-1}\Delta.$$

Из этих неравенств следует, что найдется такое натуральное n, для которого дефект $\triangle_{OA_nB_n}$ треугольника OA_nB_n окажется более двух прямых, что невозможно. Таким образом, треугольника OA_nB_n фактически не существует, т. е. при указанном n перпендикуляр $B_n B_n'$, восстановленный из точки B_n, не пересекает второй стороны угла. Применим теперь к точкам прямой OB_1 разбиение Дедекинда. Точки O, B_1, B_2,..., из которых восстановленные перпендикуляры пересекают вторую сторону, а также им предшествующие, отнесем к первому классу, все остальные — ко второму. Существует точка X, производящая деление точек указанной прямой на классы. Перпендикуляр XX', восстановленный из X к прямой OX, является искомым. В самом деле, XX' не пересекает прямую OA_1: если бы XX' пересекала OA, то точка X, производящая деление точек прямой OB_1 на классы, была бы не последней точкой первого класса, что невозможно. Чтобы доказать справедливость критерия угла, мы возьмем любой луч XC, принадлежащий внутренности угла OXX', обращенного в сторону рассматриваемой параллельности. Опустим из C перпендикуляр CC_1 на OB_1. Этот перпендикуляр CC_1 пересечет вторую сторону угла в точке C_2. Применяя теперь к треугольнику OC_1C_2 и прямой XC аксиому Паша, мы убедимся в том, что XC пересечет сторону OC_2 указанного треугольника в некоторой точке Y. Теорема доказана.

Если повторить приведенные рассуждения для вертикального угла, то мы получим полосу плоскости, ограниченную прямыми XX' и $\overline{X}\overline{X}'$, перпендикулярными прямой OB_1. В этой полосе располагается прямая OA_1, которая в одном направлении параллельна XX' и в другом направлении параллельна $\overline{X}\overline{X}'$. Рассмотрим теперь две параллельные прямые. Для таких пар прямых справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Расстояния точек одной параллельной до другой беспредельно уменьшаются в направлении параллельности и неограниченно растут в противоположном направлении. Существует прямая, перпендикулярная к одной из параллельных и параллельная к другой.

Пусть прямые a и b параллельны. Мы докажем, что на прямой a существует такая точка E, что перпендикуляр EF, опущенный на прямую b, будет меньше любого наперед заданного отрезка ε. Для доказательства возьмем на a какую-нибудь точку A и опустим из нее перпендикуляр AB на прямую b. Если $AB < \varepsilon$, то теорема доказана. Если $AB = \varepsilon$, то теорема также доказана, так как расстояние любой точки D луча AO меньше ε. Предположим теперь, что $AB > \varepsilon$. Построим на BA какой-нибудь отрезок $BC < \varepsilon$, где $\widehat{CBA}$. Проведем через C прямые CO и CO', параллельные прямой BD в обоих направлениях (рис. 53).

Пусть прямая $O'C$ пересекает AO в некоторой точке D. Эта точка пересечения существует, так как луч CD принадлежит внутренности угла $\angle ACO$, обращенного в сторону параллельности прямых CO и AO. Отложим на прямой a в сторону параллельности отрезок $ED = CD$. Опустим далее из точек D и E перпендикуляры DD_1 и EE_1 на прямую b. Нетрудно доказать сначала равенство треугольников CDD_1 и DD_1E (по двум сторонам и заключенному углу), а затем равенство прямоугольных треугольников CBD_1 и EE_1D_1 (по гипотенузе и острому углу). Отсюда следует

$$EE_1 = BC < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

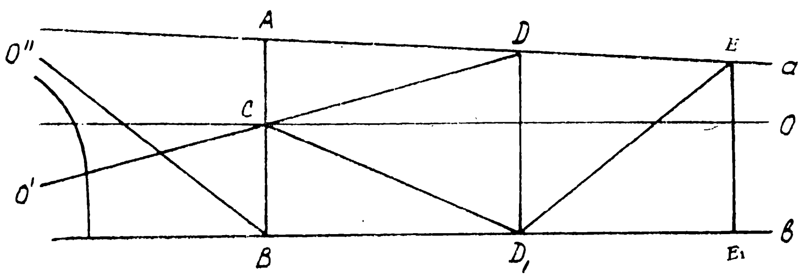

Рис. 53.

Перейдем теперь ко второй части теоремы. Мы докажем, что перпендикуляры EE_1 неограниченно растут в противоположном направлении. Тот факт, что указанные перпендикуляры растут сразу, следует из рассмотрения четырехугольника $ABEE_1$ с двумя прямыми углами при нижнем основании и неравными углами при верхнем основании. Чтобы доказать неограниченность роста этих перпендикуляров в направлении, противоположном направлению параллельности, мы отложим на прямой a от точки A последовательно n равных отрезков: $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n$. Опустим из концов отрезков перпендикуляры A_1B_1, $A_2B_2, \ldots A_nB_n$ на b (рис. 54).

Предположим по построению $B_2C_2 = B_1A_1$, $B_1C_1 = BA$, $A_1D_1 = A_1C_1$. Треугольники $A_2A_1D_1$ и A_1C_1A равны по двум сторонам и заключенному ими углу. Рассмотрим теперь четырехугольник $B_1B_2A_2D_1$ с двумя прямыми углами при нижнем основании B_1B_2. Один из углов при верхнем основании больше прямого. Следовательно, второй угол при верхнем основании является острым. Отсюда выводим соответствующее неравенство для боковых сторон:

$$B_2C_2 + C_2A_2 > B_1A_1 + A_1D_1.$$

Учитывая, что $B_2C_2 = B_1A_1$ и $A_1D_1 = A_1C_1$, получим

$$A_2C_2 > A_1C_1.$$

Повторяя эти рассуждения для точек A_3, A_4, ..., A_n, мы будем иметь

$$A_nB_n > AB + nA_1C_1.$$

Таким образом, расстояния A_nB_n растут неограниченно.

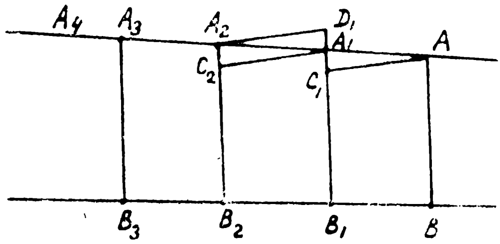

Рис. 54.

Для доказательства третьего утверждения теоремы проведем через точку B прямую BO'', параллельную a в направлении DA (рис. 53). Если при точке B смежные углы $O'BO''$ и $O''BO$ равны, то прямая BO'' — искомая. Если смежные углы при точке B неравны и, например, $O'BO''$ — острый, то среди перпендикуляров, восстановленных из точек стороны BO' острого угла, найдется перпендикуляр $O'O''$, параллельный другой его стороне BO'', т. е. параллельный к прямой DA.

§ 3. СВЕРХПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ИХ СВОЙСТВА

Две прямые в плоскости Лобачевского могут быть пересекающимися и непересекающимися. Непересекающиеся прямые в свою очередь разделяются на параллельные прямые и непараллельные. Непересекающиеся и непараллельные прямые называются **сверхпараллельными прямыми.** Докажем следующую теорему о сверхпараллельных прямых.

Теорема 7. Две сверхпараллельные прямые имеют общий перпендикуляр и притом единственный, он является кратчайшим расстоянием между этими прямыми.

Доказательство. Обозначим сверхпараллельные прямые буквами a и b. Возьмем на прямой b произвольную точку A и проведем через нее прямые AX и AX', параллельные прямой a в том и другом направлениях. Рассмотрим далее острые углы, образованные лучами AX и AX' с прямой b. По доказанной выше теореме найдется прямая BX, перпендикулярная к прямой b и параллельная второй стороне AX острого угла. Аналогично существует прямая CX', перпендикулярная к прямой b и параллельная второй стороне AX' (рис. 55) второго острого угла $\angle CAX'$.

Пусть теперь точка E является серединой отрезка BC, т. е. $BE = EC$. Опустим из этой точки E перпендикуляр EF на прямую

a. Докажем, что EF перпендикулярен к прямой b и является, таким образом, общим перпендикуляром к прямым a, b. Для доказательства проведем через точку E прямые EX и EX', параллельные в обоих направлениях к прямой a. Нетрудно видеть

$$\angle BEX = \angle CEX',$$

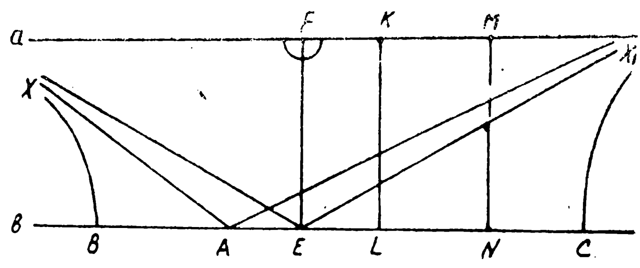

Рис. 55.

как углы параллельности для равных отрезков BE и EC соответственно. Аналогично

$$\angle FEX = \angle FEX',$$

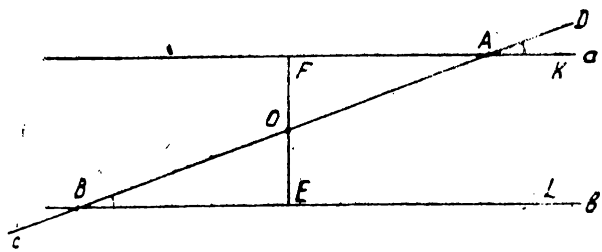

Рис. 56.

как углы параллельности к одному и тому же отрезку EF. Почленное сложение этих равенств приводит нас к равенству смежных углов FEB и FEC. Таким образом, EF является общим перпендикуляром сверхпараллельных прямых a, b. Докажем единственность общего перпендикуляра. Пусть наряду с EF нашелся еще один общий перпендикуляр MN к прямым a, b. В таком случае существует четырехугольник $EFMN$ с четырьмя прямыми углами. Отсюда следует, что сумма углов треугольников, на которые разбивается этот четырехугольник диагональю, равняется двум прямым, что невозможно.

Также просто доказывается, что EF реализует кратчайшее расстояние между этими прямыми. В самом деле, возьмем на прямой a точку K и опустим из нее перпендикуляр KL на прямую b. Из четырехугольника $EFKL$ с двумя прямыми углами при нижнем основании EL следует, что угол F при верхнем основании — прямой, а K — острый. Следовательно,

$$EF < KL.$$

Докажем теперь еще одну теорему, на которую мы будем опираться при исследовании угла параллельности.

Теорема 8. Прямые a и b, составляющие с третьей прямой c равные соответственные углы, являются сверхпараллельными. Пусть прямые a и b пересечены третьей прямой c так, что соответственные углы DAK и DBL равны (рис. 56). $\angle DAK = \angle DBL$. Пусть также точка O является серединой отрезка $AB: AO = OB$. Опустим из O перпендикуляры OE и OF на прямые b и a соответственно. Рассмотрим далее прямоугольные треугольники OAF и OEB. Они равны, так как имеют равные гипотенузы и острые углы при вершинах A и B. Отсюда следует, что другие острые углы этих треугольников также равны и лучи OE и OF инцидентны одной прямой. Следовательно, прямые a и b являются сверхпараллельными.

§ 4. УГОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Напомним определение угла параллельности. Пусть даны две прямые a и b, параллельные между собою в каком-нибудь направлении. Возьмем на прямой a точку A и опустим из нее перпендикуляр AB на вторую прямую. Угол $\angle BAO$ называется **углом параллельности** для отрезка AB и обозначается символом $\Pi(AB)$. Очевидно, углы параллельности для равных отрезков равны (рис. 57). С возрастанием аргумента функция $\Pi(AB)$, которая называется также функцией Лобачевского, убывает. Докажем следующую теорему.

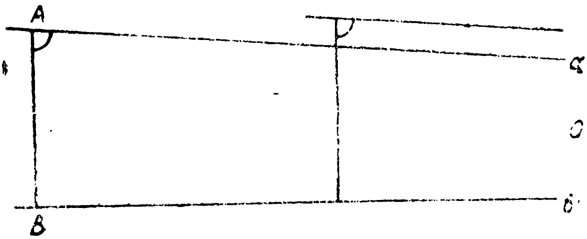

Рис. 57.

Теорема 9. Функция Лобачевского $\Pi(p)$ является непрерывной монотонно убывающей функцией от своего аргумента p.

Пусть по условию AC перпендикулярна к прямой a (рис. 58). Из точек B и C проведем прямые, параллельные прямой AS в данном направлении. Введем обозначение $AB = p$ и $AC = p'$. В дальнейшем предположим также, что из точек A, B, C точка, лежащая между другими, обозначается буквой B. Такой точкой является одна из последних двух, так как A является основанием перпендикуляра BC на прямую a. Таким образом, по условию $p < p'$. Построим $\angle BCK = \angle ABS$. Сторона CK построенного угла не может принадлежать углу BCS, обращенному в сторону параллельности прямых CS и BS. В самом деле в противном случае CK пересечет BS в некоторой точке X, что невозможно по предыдущей теореме. Сторона CK также не может и совпасть с CS, так как CS и BS оказались бы сверхпараллельными прямыми по указанной теореме 8. Итак, мы имеем

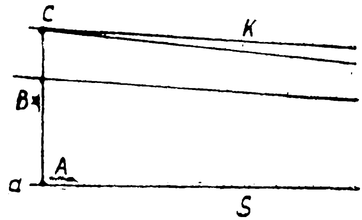

Рис. 58.

$$\Pi(p) > \Pi(p')$$

Так как эта монотонно убывающая функция принимает все значения из интервала $(O, \frac{\pi}{2})$ по доказанной выше теореме 5, то $\Pi(p)$ непрерывна.

§ 5. ОКРУЖНОСТЬ, ЭКВИДИСТАНТА И ОРИЦИКЛ

Прежде чем перейти к изучению простейших кривых на плоскости Лобачевского, определим понятие пучков прямых линий.

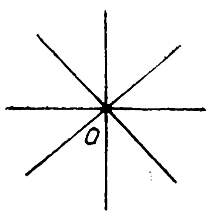

Рис. 59.

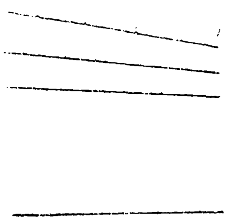
Рис. 60.

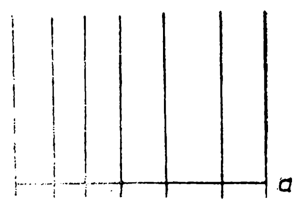

Рис. 61.

Совокупность всех прямых плоскости Лобачевского, пересекающихся в общей точке O, называется пучком прямых первого рода. Точка O называется центром пучка (рис. 59).

Совокупность прямых плоскости Лобачевского, параллельных между собой в одном направлении, называется пучком прямых второго рода. Говорят также, что этот пучок имеет бесконечно удаленный центр (рис. 60).

Совокупность прямых плоскости Лобачевского, перпендикулярных одной прямой, a, называется пучком третьего рода. Прямая a называется осью пучка. Говорят также, что пучок прямых третьего рода имеет идеальный центр (рис. 61).

Очевидно, две прямые плоскости однозначно определяют пучок, к которому они принадлежат. Через каждую точку плоскости проходит одна прямая, принадлежащая пучку. Мы считаем, что заданная точка не является центром в случае пучка прямых первого рода. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 10. Перпендикуляры, восстановленные из середин сторон треугольника, принадлежат к одному пучку первого, второго или третьего рода.

Пусть два перпендикуляра, восстановленные из середин K, L сторон AB и BC треугольника ABC, пересекаются в точке O. Докажем, что третий перпендикуляр также пройдет через эту точку O (рис. 62).

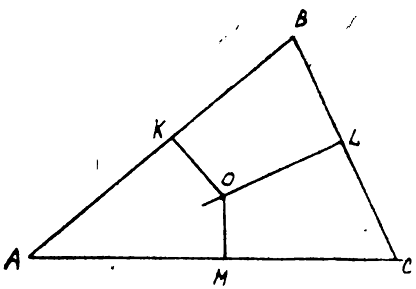

Рис. 62.

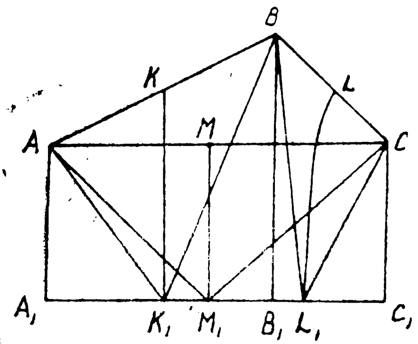

Рис. 63.

Из треугольника ABO следует, что $AO = OB$; аналогично из треугольника BOC следует $BO = OC$. Следовательно, $AO = OC$ и треугольник AOC является равнобедренным. В таком случае медиана OM является высотой. Перпендикуляр, восстановленный из середины стороны AC, проходит через точку O. Все три перпендикуляра принадлежат пучку прямых первого рода.

Пусть теперь перпендикуляры KK_1 и LL_1, восстановленные из середин K и L указанных сторон, перпендикулярны некоторой прямой a (рис. 63).

Опустим на прямую a перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 из вершин данного треугольника. Из равенства прямоугольных треугольников AKK_1 и KBK_1 (по двум катетам) следует, что $AK_1 = BK_1$. Далее из равных прямоугольных треугольников AA_1K_1 и BB_1K_1 выводим, что $AA_1 = BB_1$. Аналогично из равенства прямоугольных треугольников BLL_1 и CLL_1 а также прямоугольных треугольников BB_1L_1 и CC_1L_1, мы выводим, что $BB_1 = CC_1$. Следовательно, вершины треугольника ABC равно удалены от прямой a:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

Следовательно, четырехугольник AA_1C_1C является четырехугольником Хайяма — Саккери. Выше мы установили, что прямая, соединяющая середины M и M_1 верхнего и нижнего оснований этого четырехугольника, является общим перпендикуляром к этим основаниям. Итак, все три перпендикуляра принадлежат пучку прямых третьего рода.

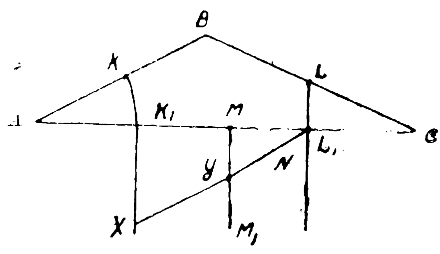

Рис. 64.

Предположим теперь, что два перпендикуляра параллельны. Все три перпендикуляра, нетрудно показать, пересекают большую сторону треугольника, например, в точках K_1, M, L_1 (рис. 64). Из этих трех точек K_1, M, L_1 прямой AC одна из них обладает свойством лежать между оставшимися, пусть MK_1L_1. Любые два рассматриваемые перпендикуляра параллельны, в противном случае имели бы место первый или третий случаи. Докажем, что перпендикуляр MM_1, восстановленный из середины M стороны AC, параллелен прямым LL_1 и KK_1 в том же направлении. Критерий непересечения выполняется. Возьмем произвольный луч L_1N, принадлежащий внутренности угла $K_1L_1M_1$, обращенного в сторону исследуемой параллельности. Он пересечет параллельную прямую KK_1 в точке X. Далее, применяя к треугольнику K_1L_1X и прямой MM_1 аксиому Паша, получим, что MM_1 пересекается с L_1X_1 в некоторой точке Y. Теорема доказана.

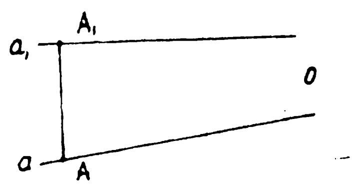

Рис. 65.

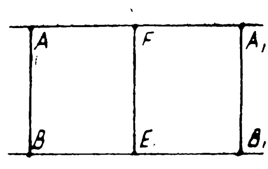

Рис. 66.

Перейдем теперь к определению простейших кривых линий на плоскости Лобачевского. Предварительно введем понятие соответствующих точек прямых пучка. Пусть на плоскости Лобачевского задан пучок прямых первого, второго или третьего рода. Возьмем две прямые, принадлежащие какому-нибудь пучку (рис. 65).

Точки A и A_1 на прямых a и a_1 данного пучка называются соответствующими, если

$$\angle OAA_1 = \angle OA_1A.$$

Заметим, что O обозначает центр для пучка прямых первого и второго рода и ось для пучка прямых третьего рода. Соответствующие точки A, A_1 на прямых пучка первого рода характеризуются тем, что они равно удалены от центра пучка:

$$OA = OA_1.$$

Для прямых пучка третьего рода эти точки характеризуются тем, что они равно удалены от оси пучка (рис. 66).

Действительно, если A и A_1 соответствующие точки на прямых пучка третьего рода, то BAA_1B_1 является четырехугольником Хайяма — Саккери и, следовательно,

$$AB = A_1B_1.$$

В рассмотренных случаях можно сказать также, что соответственные точки A и A_1 являются симметрическими относительно биссектрисы полосы. Под биссектрисой полосы для двух прямых пучка первого рода мы понимаем обычную биссектрису угла AOA_1. В случае прямых пучка третьего рода биссектрисой полосы двух прямых AB и A_1B_1 по определению является общий перпендикуляр верхнего и нижнего оснований четырехугольника BAA_1B_1 Хайяма — Саккери. Для пучка прямых второго рода биссектрисой полосы двух прямых a и a_1 является прямая, относительно которой они симметричны. Эта прямая принадлежит рассматриваемому пучку прямых. Действительно, возьмем на указанных прямых пучка второго рода соответственно точки M, N (рис. 67). По

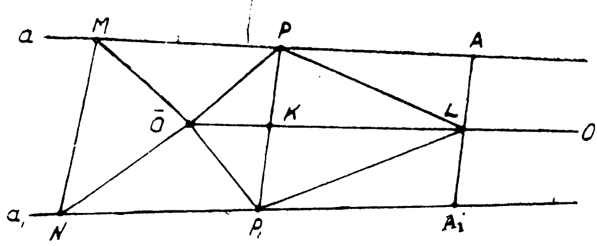

Рис. 67.

строим далее биссектрисы углов OMN и ONM, обращенных в сторону параллельности. Эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке $\overline{O}$. Опустим из этой точки $\overline{O}O$ перпендикуляры $\overline{O}P$ и $\overline{O}P_1$ на прямые a и a_1 пучка. Пусть далее $\overline{O}O$ является биссектрисой угла $P\overline{O}P_1$. Докажем, что $\overline{O}O$ является биссектрисой полосы прямых a и a_1. Заметим, что треугольник $P_1\overline{O}P$ является равнобедренным и точки P, P_1 являются симметричными относительно прямой $\overline{O}O$. Нетрудно доказать также, что любая точка A прямой a при симметрии относительно $\overline{O}O$ переходит в точку прямой a_1 и обратно. Этот факт следует из равенства пар треугольников KPL и KP_1L, а также PAL и P_1A_1L.

Итак, соответствующие точки двух прямых, принадлежащих пучку прямых данного рода, характеризуются тем, что они являются симметрическими относительно биссектрисы полосы, образованной проходящими через них прямыми пучка. Из этого факта и доказанной выше теоремы о принадлежности перпендикуляров, восстановленных из середин сторон треугольника, одному пучку непосредственно выводится следующее предложение.

Теорема 11. Две точки на прямых какого-нибудь пучка, соответствующие третьей, являются соответственными между собою.

Совокупность точек на прямых пучка первого, второго или третьего рода, соответствующих данной точке, **называется простейшей кривой линией.** Из предыдущей теоремы следует, что все точки простейшей линии равноправны. Простейшие кривые линии для прямых первого, второго и третьего пучков называются соответственно **окружностями, предельными линиями** и **эквидистантами** или **линиями равных расстояний.** Предельные линии и эквидистанты не являются замкнутыми линиями.

Теорема 12. Никакие три точки простейшей кривой линии не лежат на одной прямой.

Пусть три точки A, B, C линии равных расстояний принадлежат одной прямой, причём $\dot{B}AC$.

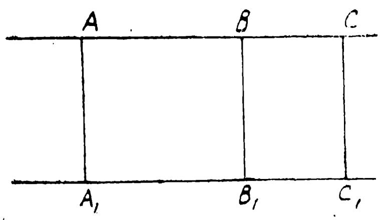

Рис. 68.

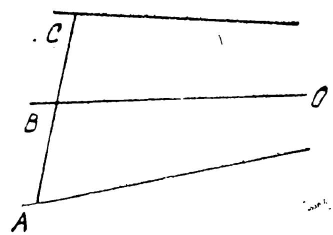

Рис. 69.

Из четырехугольников Хайяма — Саккери A_1ABB_1, A_1ACC_1 и B_1BCC_1 (рис. 68) следует, что

$$\angle ABB_1 = \angle B_1BC$$

Это означает, что на плоскости осуществляется гипотеза прямого угла, что невозможно.

Пусть три точки A, B, C предельной линии лежат на прямой (рис. 69).

Отсюда следует

$$\angle ABO = \angle BAO = \angle ACO = \angle CBO$$

и все эти углы являются прямыми, что невозможно. Аналогично рассматривается и случай точек окружности, лежащих на прямой. Большую роль в дальнейшем играют предельные линии. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 13. Всякая прямая, проходящая через точку предельной линии и составляющая с осью острый угол, пересекает эту линию еще в одной точке.

В самом деле, пусть прямая AM проходит через точку A предельной линии и составляет с осью AO острый угол α (рис. 70). Среди перпендикуляров, восстановленных из точек стороны AM, найдется перпендикуляр BO, параллельный прямой AO в указанном направлении. Таким орбазом,

$$\alpha = \Pi(AB).$$

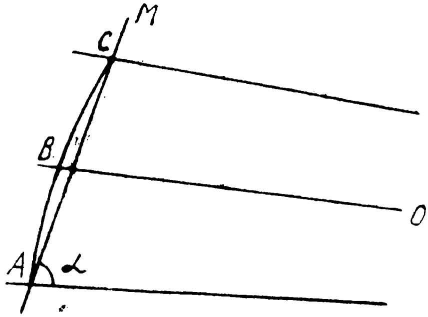

Рис. 70.

Построим теперь на луче BM отрезок $BC = AB$. Очевидно, точка C является искомой точкой — второй точкой пересечения с предельной линией. Действительно,

$$\angle BAO = \angle BCO$$

как углы параллельности равных отрезков AB и BC.

Установим теперь конгруентность предельных линий, предварительно уточнив понятие конгруентности. Две линии называются конгруентными, если существует взаимнооднозначное отображение точек одной линии на точки другой, при котором соответствующие хорды равны. Следовательно, любые две точки M, N первой кривой переходят при установленном отображении в M', N' так что отрезки MN и $M'N'$ равны:

$$MN = M'N'.$$

Теорема 14. Любые две предельные линии конгруентны друг другу.

Пусть даны две предельные линии κ и κ_1 (рис. 71, 72). Для доказательства конгруентности этих линий надо установить взаимно однозначное отображение точек одной линии на точки другой так, чтобы соответствующие хорды были равны. Хорды MN и M_1N_1 понимаются соответствующими, если отображение, устанавливающее конгруентность линий, переводит точки M, N первой предельной линии соответственно в M_1, N_1 второй предельной линии.

Возьмем на предельных линиях κ, κ_1 произвольные точки A, A_1 соответственно. Будем считать, что отображение f точке A линии κ относит точку A_1 на линии κ_1. Проведем через эти точки A, A_1 оси a и a_1. Возьмем далее любую точку M на первой предельной линии. Угол MAO острый, так как является углом параллельности $\Pi(AM/2)$ для отрезка $AM/2$. Отложим этот острый угол при A_1 и стороне A_1O_1. По предыдущей теореме вторая сторона угла, составляющая острый угол с осью a_1,

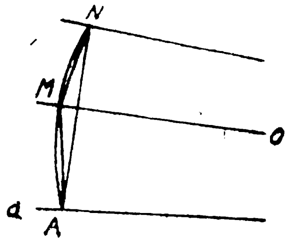

Рис. 71.

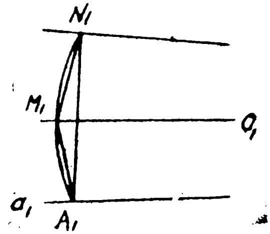

Рис. 72.

пересекает предельную линию еще в одной точке. Эту точку M_1 мы будем считать соответствующей для точки M по определению отображения f. Докажем теперь, что построенное отображение является искомым. Возьмем для этого любую пару точек M, N на первой предельной линии. Они при отображении f переходят в точки M_1 и N_1 второй линии. Легко установить, что треугольники AMN и $A_1M_1N_1$ конгруентны, так как $AM = A_1M_1$, $AN = A_1N_1$ и $\angle MAN = \angle M_1A_1N_1$. Отсюда следует, что $MN = M_1N_1$. Теорема доказана.

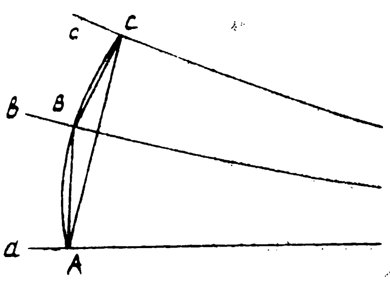

Рис. 73.

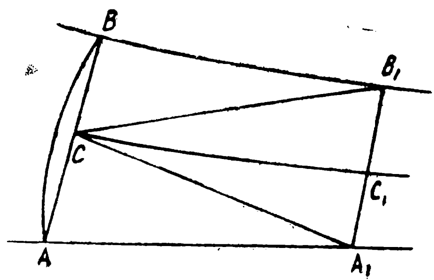

Рис. 74.

Для трех точек A, B, C предельной линии можно ввести понятие „лежать между". **Точка** B называется **„лежащей между точками"** A и C, если оси a и c лежат в разных полуплоскостях, определенных осью b. Нетрудно показать также, что если B лежит между A, C, то $\angle BCO > \angle ACO$ и обратно (рис. 73).

Таким образом, понятие «между» для точек предельной линии можно описать при помощи углов. Оно позволяет обычным образом ввести понятие дуги предельной линии. Совокупность точек A и B предельной линии и всех точек, обладающих свойством быть «между» ними, называется *дугой* предельной линии. Дуга AB больше дуги AM, если $\overset{*}{M}AB$. Нетрудно также установить, что равным хордам соответствуют равные дуги, большей хорде соответствует большая дуга.

На предельных линиях справедлива аксиома Архимеда и принцип Дедекинда. На них можно ввести измерение дуг.

Простейшие кривые линии, построенные на прямых одного пучка, называются **концентрическими.** Докажем еще одну теорему о концентрических предельных линиях.

Теорема 15. Концентрические предельные линии отсекают на осях пучка равные отрезки.

Возьмем пучок прямых второго рода. Пусть на прямых этого пучка даны концентрические предельные линии AB и A_1B_1. Докажем, что $AA_1 = BB_1$. Построим для этого биссектрису полосы, составленную осями AA_1 и BB_1 (рис. 74). Она является прямой CC_1 рассматриваемого пучка, где C и C_1 являются серединами хорд AB и A_1B_1 дуг концентрических предельных линий. Из равенства треугольников B_1C_1C и A_1C_1C, а также треугольников BB_1C и AA_1C выводим, что $AA_1 = BB_1$. Теорема доказана.

§ 6. ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Найдем прежде всего формулу, связывающую длины дуг концентрических предельных линий, ограниченных данными осями. Так как по доказанной выше теореме концентрические предельные линии отсекают на осях равные отрезки, то искомая формула для соответствующих дуг S_1, S_1' и S_2, S_2' позволяет утверждать, что (рис. 75).

$$S_1' = f(S_1),\quad S_2' = f(S_2),\quad S_1' + S_2' = f(S_1 + S_2).$$

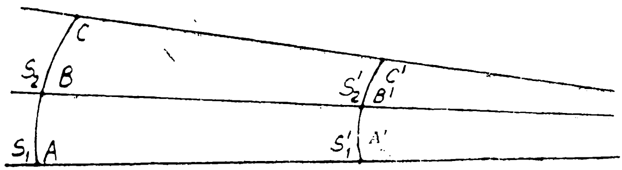

Рис. 75.

Отсюда выводим, что функция $f(s)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$f(s_1 + s_2) = f(s_1) + f(s_2).$$

Так как $f(s)$ является монотонно возрастающей, то

$$f(s) = \alpha s \qquad (1)$$

где α зависит лишь от отрезка, отсекаемого предельными линиями на осях пучка.

Чтобы выяснить эту зависимость, возьмем три концентрические предельные линии такие, что s и s' отсекает на осях отрезок x, и предельные линии s' и s'', отсекающие отрезок y. Таким образом, имеем

$$s = \varphi(x)s', \quad s' = \varphi(y)s'', \quad s = \varphi(x+y)s''.$$

Из этих формул следует, что

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Так как функция $\varphi(x) > 1$ и возрастающая, то

$$s = e^{\frac{x}{\kappa}} s', \qquad (2)$$

где постоянная κ называется радиусом кривизны геометрии Лобачевского. Из полученной формулы следует, что при $x = \kappa$, мы получим $s = es'$ (рис. 76).

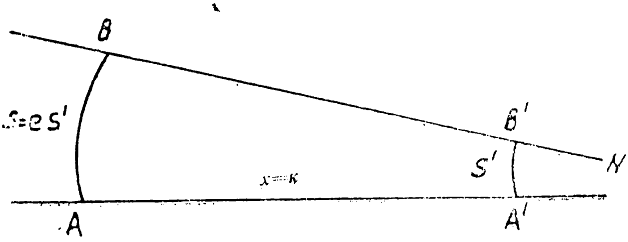

Рис. 76.

Таким образом, геометрически радиус кривизны пространства Лобачевского означает такой отрезок, отсекаемый на осях пучка второго рода концентрическими предельными линиями, при котором дуга S больше другой соответствующей дуги S' в $e = 2{,}7...$ раз.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Возьмем на оси a пучка второго рода некоторую точку A и опустим из нее перпендикуляр $AB = y$ на другую данную ось b того же пучка. Построим далее предельную линию на данном пучке как геометрическое место точек, соответствующих точке B. Пусть дуга BC этой предельной линии ограничена осями a и b. Опустим также из C перпендикуляр $CD = x$ на ось b. В дальнейшем длину отрезка AC обозначим через z. Займемся теперь выяснением связей между x, y, z, s (рис. 77).

Возьмем для этого две взаимно перпендикулярные прямые OM и ON и построим пучок прямых, параллельных ON в указанном направлении.

Проведем заградительную прямую MN, по определению параллельную сторонам OM и ON прямого угла. Пусть σ обозначает дугу предельной линии, соответствующей вершине O прямого угла, ограниченную осями OM и ON. Разумеется, так построенные дуги предельных линий для различных прямых углов имеют одинаковую длину σ (рис. 78).

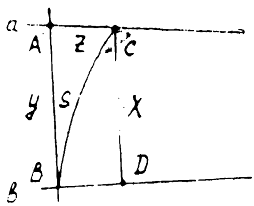

Рис. 77.

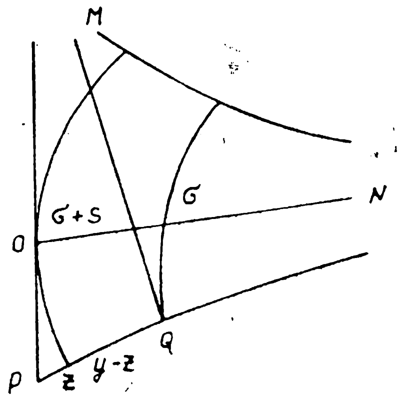

Рис. 78.

Отложим на продолжении OM отрезок $OP = y$. Проведем прямую PN, принадлежащую рассматриваемому пучку. На стороне PN по доказанной ранее теореме найдется точка Q, из которой восстановленный перпендикуляр станет параллельным второй стороне PM острого угла MPN. Построим далее по точкам O и Q концентрические предельные линии. Очевидно, что дуги этих предельных линий, ограниченные осями PN и MN пучка, имеют длины $\sigma + s$ и σ соответственно. Легко видеть по доказанной выше формуле, что

$$\sigma + s = \sigma e^{\frac{y-z}{k}}.$$

Если же отрезок $OP = y$ отложить на луче OM, то получим второе соотношение между этими величинами (рис. 79).

В самом деле, проведем прямую PN, параллельную ON. Отложим далее на продолжении луча PN отрезок $PQ = y$. Перпендикуляр, восстановленный из точки Q, параллелен OM. Построим по точкам O и Q концентрические предельные линии. Дуги этих линий, ограниченные осями MN и ON, имеют соответственно длины $\sigma - s$ и σ. По формуле (2) мы имеем

$$\sigma - s = \sigma e^{\frac{-y-z}{k}}$$

Почленное сложение последних двух формул приводит к равенству

$$2\sigma = \sigma e^{\frac{-z}{\kappa}}\left(e^{\frac{y}{\kappa}} + e^{-\frac{y}{\kappa}}\right).$$

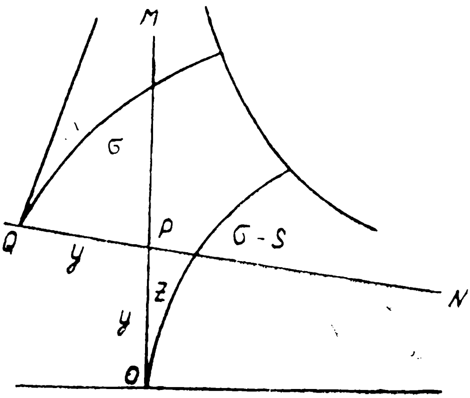

Рис. 79.

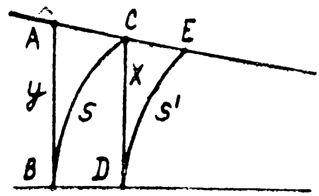

Рис. 80.

Отсюда следует, что

$$e^{\frac{z}{\kappa}} = \operatorname{ch}\frac{y}{\kappa}. \tag{3}$$

Почленное вычитание тех же равенств дает

$$2s = \sigma e^{-\frac{z}{\kappa}}\left(e^{\frac{y}{\kappa}} - e^{-\frac{y}{\kappa}}\right).$$

Исключая здесь второй множитель, мы получим на основании предыдущей формулы

$$s = \sigma \operatorname{th}\frac{y}{\kappa}. \tag{4}$$

Выясним теперь связь длины дуги s с указанным выше отрезком x. Построим для этого дугу s', ограниченную осями a и b предельной линии соответствующей точки D (рис. 80).

Применяя формулу (4) к x и s', получим

$$s' = \sigma \operatorname{th}\frac{x}{\kappa}.$$

С другой стороны, дуги s и s' связаны по формуле (2):

$$s = s' e^{\frac{CE}{\kappa}}$$

Входящий сюда сомножитель $e^{\frac{CE}{\kappa}}$ можно заменить на $\operatorname{ch}\frac{x}{\kappa}$ по формуле (3)

$$e^{\frac{CE}{\kappa}} = \operatorname{ch} \frac{x}{\kappa}.$$

Исключая из последних трех равенств s' и $e^{\frac{CE}{\kappa}}$, мы окончательно будем иметь:

$$s = \sigma \operatorname{sh} \frac{x}{\kappa}. \tag{5}$$

Для получения формул, связывающих элементы прямоугольного треугольника, остановимся вкратце на некоторых фактах трехмерного пространства Лобачевского.

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 1. ПОНЯТИЕ О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В пространстве Лобачевского имеются понятия и теоремы абсолютной геометрии. Это будут понятия и теоремы, не зависящие от пятого постулата. К абсолютной геометрии, в частности, принадлежат следующие предложения. Из каждой точки можно опустить или восстановить перпендикуляр к данной плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. Две прямые, перпендикулярные плоскости, инцидентны плоскости. Если прямая перпендикулярна плоскости, то всякая плоскость, инцидентная этой прямой, перпендикулярна данной плоскости. Прямая, перпендикулярная к линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей и лежащая в одной из них, перпендикулярна и к другой плоскости. Проекцией прямой на плоскость является прямая или точка. Справедлива также теорема о трех перпендикулярах. В эту геометрию без изменения переносятся понятия двугранного и линейного угла ортогональной проекции точки на плоскости.

Докажем следующую вспомогательную теорему, которая в дальнейшем будет иметь многочисленные применения.

Теорема 1. Если через две параллельные прямые провести пересекающиеся плоскости, то линия пересечения их параллельна этим прямым в том же направлении.

Пусть через параллельные прямые a, b проходят пересекающиеся по прямой c плоскости (M, a) и (M, b). Очевидно, каждая пара прямых a, c и b, c инцидентна плоскости. Ограничимся доказательством параллельности одной пары прямых, например, b, c, так как для другой пары прямых это доказательство буквально должно быть повторено. Для доказательства теоремы установим критерий непересечения и критерий угла. Справедливость критерия непересечения устанавливается рассуждениями от противного. В самом деле, пусть b и c имеют общую точку O. Эта точка принадлежит, следовательно, всем трем плоскостям: (M, a), (M, b) и

(a, b) (рис. 81). Она инцидентна, в частности, пересечению последних двух плоскостей, т. е. прямой b. Итак, параллельные по условию прямые a, b имеют общую точку O, что невозможно. Рассмотрим теперь критерий угла. Возьмем для этого на прямых a, b, c по точке A, B, C. Плоскость ABC пересекается с плоскостью

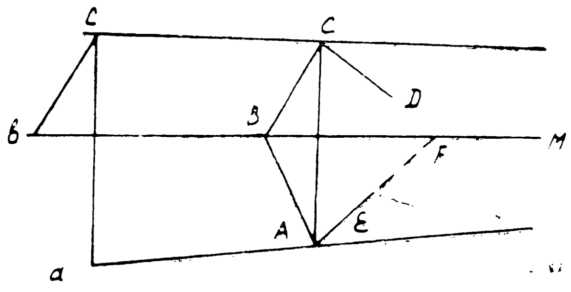

Рис. 81.

(a, c) по прямой AC. Возьмем угол BCM, обращенный в сторону исследуемой параллельности прямых b и c в точке C. Пусть произвольный луч CD принадлежит внутренности этого угла и докажем, что он пересечет прямую b. Рассмотрим для этого плоскость ACD. Она пересекает плоскость (a, b) по прямой, луч которой AE принадлежит углу BAM, обращенному в сторону параллельности прямых a и b. Таким образом, AE пересечет прямую b в некоторой точке F. Ясно, что F является точкой пересечения CD с прямой b. Теорема доказана. Установим теперь транзитивность параллельности прямых в пространстве.

Теорема 2. Две прямые, параллельные третьей прямой в одном и том же направлении, параллельны между собою.

Пусть прямые a и b параллельны прямой c в одном направлении. Возьмем на a точку A и проведем плоскости (A, b) и (A, c) (рис. 82).

Покажем, что эти плоскости пересекаются по прямой a. Действительно, пересекающиеся плоскости (A, b) и (A, c) проходят через параллельные прямые b и c. Следовательно, прямая пересечения этих плоскостей по предыдущей теореме проходит через точку A и параллельна прямым b, c в данном направлении. Но единственной прямой, проходящей через A и параллельной c в этом направлении, является a.

Две прямые в пространстве Лобачевского могут быть инцидентны или неинцидентны плоскости. В первом случае эти прямые могут быть пересекающимися, параллельными и непересекающимися (сверхпараллельными). В евклидовой геометрии существуют связки прямых двух родов: совокупность прямых, проходящих через заданную точку пространства, и совокупность прямых, параллельных друг другу. В пространстве же Лобачевского имеются три рода связок прямых. Связка прямых первого рода представляет собою совокупность прямых, проходящих через заданную точку пространства — центр связки, **связка прямых второго рода** — совокупность параллельных между собою прямых в заданном направлении и **связка прямых третьего рода** по определению образована прямыми, перпендикулярными заданной плоскости. Говорят также, что связка прямых **второго рода** имеет **бесконечно удаленный центр**, а связка прямых **третьего рода — идеальный центр**. Через каждую точку пространства, не являющуюся центром связки, проходит одна прямая, принадлежащая связке. Нетрудно также видеть, что любые две прямые связки принадлежат плоскости. Плоскости, проходящие через прямые связки, называются **плоскостями связки**. Докажем теперь теорему о прямой пересечения плоскостей связки.

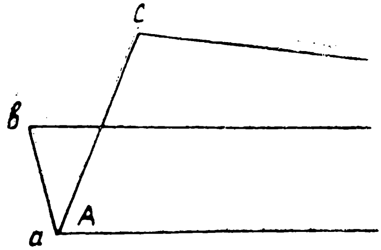

Рис. 82.

Теорема 3. Если две плоскости связки пересекаются, то прямая пересечения принадлежит связке.

Эта теорема очевидна для связки прямых первого рода. Она справедлива также по теореме (1) для прямых связки второго рода. Пусть теперь пересекающиеся плоскости принадлежат связке третьего рода. Так как они перпендикулярны основной плоскости связки, то этой последней перпендикулярна и прямая пересечения данных плоскостей связки. Рассмотрим теперь свойства прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского.

Пусть дана плоскость α и не принадлежащая ей прямая a. Спроектируем ортогонально точки этой прямой на α. Обозначим полученную прямую — проекцию прямой a, буквой a'. Прямая называется пересекающейся, параллельной непересекающейся (сверхпараллельной) с плоскостью α, если она соответственно пересекается, параллельна или сверхпараллельна со своей проекцией a' на эту плоскость.

Разберем случай, когда прямая пересекается с плоскостью. **Углом прямой с плоскостью** называется угол, составленный данной прямой со своей проекцией, на данную плоскость. Нетрудно доказать, что он является наименьшим из множества углов, образованных этой наклонной со всяким другим направлением в рассматриваемой плоскости. Действительно, пусть OB наклонная и OB' ее проекция на плоскость. Опустим из точки B перпендикуляр BB'. Подошва перпендикуляра B' является проекцией точки B данной наклонной. Пусть OD любая другая прямая в плоскости α, проходящая через O, причем пусть $OD = OB'$. Рассмотрим треугольники OBB' и OBD. У них одна сторона OB общая и $OB' = OD$, а третьи стороны не равны: BD как наклонная больше BB'. Следовательно, угол BOD больше угла BOB'.

Рассмотрим теперь случай прямой, параллельной плоскости. Имеет место следующее предложение.

Теорема 4. Если прямая параллельна прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Если прямая a параллельна ортогональной проекции a' на данную плоскость, то теорема доказана. Пусть теперь a параллельна некоторой прямой b, лежащей в плоскости α. В этом случае через прямую a проходит проектирующая плоскость, а через прямую b — данная плоскость α. Эти плоскости пересекаются по прямой a', параллельной прямым a, b по теореме (1) в том же направлении. Таким образом, a параллельна a' и теорема доказана.

Если a сверхпараллельна плоскости α, тогда они имеют общий перпендикуляр, и он является кратчайшим расстоянием между данной прямой и плоскостью.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств плоскостей в пространстве Лобачевского.

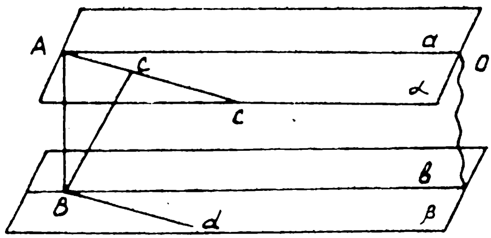

Рис. 83.

Пусть α и β две плоскости. Возьмем на первой из них точку A и опустим перпендикуляр AB на вторую плоскость. Далее из подошвы перпендикуляра B опустим перпендикуляр BC снова на первую плоскость. Если AB и BC совпадают, то плоскости — не пересекающиеся. Они имеют общий перпендикуляр AB, являющийся кратчайшим расстоянием между данными плоскостями. Если AB и BC различны, то плоскость ABC перпендикулярна обеим данным плоскостям. В самом деле, эта плоскость перпендикулярна к плоскости α, так как проходит через перпендикулярную к ней прямую BC; она перпендикулярна к плоскости β, так как проходит через перпендикулярную к ней прямую AB. Две плоскости называются **параллельными**, если существует такая третья плоскость, перпендикулярная к данным плоскостям и пересекающая их по параллельным прямым.

Теорема 5. Параллельные плоскости не имеют общих точек. По условию плоскости α и β параллельны. Следовательно, существует плоскость ABC, пересекающая α и β по параллельным прямым a и b. Возьмем точку A на прямой a. Опустим из нее перпендикуляр AB на b (рис. 83).

Докажем, что любая прямая c плоскости α, проходящая через точку A, имеет общий перпендикуляр со своей проекцией d на плоскости β. Так как

$$\angle OAB = \Pi(AB) < \angle BAC,$$

причем $\angle BAC$ острый угол, то прямые c и d сверхпараллельны. Отсюда следует, что плоскости α и β не имеют общих точек.

Докажем теперь следующее важное для дальнейшего предложение.

Теорема 6. Через прямую, параллельную данной плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, не пересекающуюся с ней.

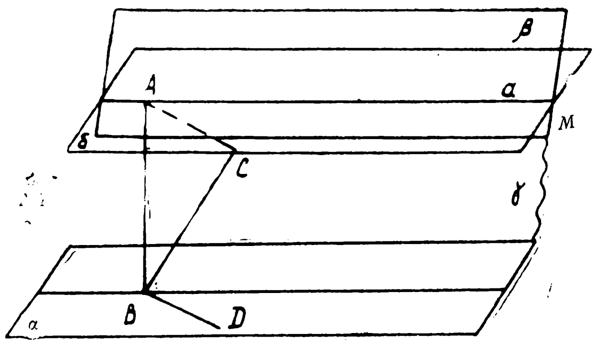

Рис. 84.

Возьмем для доказательства на прямой a, параллельной плоскости α, точку A и опустим из нее перпендикуляр AB на плоскость α. Плоскость γ, определенная прямой a и перпендикуляром AB, перпендикулярна плоскости α. Они пересекаются по ортогональной проекции a' прямой a на плоскость α. Проведем далее через прямую a (рис. 84) плоскость β, перпендикулярную плоскости γ. Полученная плоскость проходит через данную прямую и по доказанному выше не имеет общих точек с плоскостью α. Докажем теперь, что всякая другая плоскость δ, проходящая через a, пересекается с α. Для доказательства опустим из точки B перпендикуляр BC на плоскость δ. Подошва C этого перпендикуляра не инцидентна прямой a. Угол BAC является углом прямой AB с плоскостью δ. Таким образом,

$$\angle BAC < \angle BAM = \Pi(AB).$$

Отсюда вытекает, что прямая AC пересекается со своей ортогональной проекцией BD на плоскость α. Следовательно, плоскости α и δ пересекаются.

Если прямые a и a' не пересекаются и не параллельны, то плоскость β сверхпараллельна с плоскостью α. Общий перпенди-

куляр прямых a и a' будет также общим перпендикуляром для плоскостей α и β. Он является кратчайшим расстоянием между указанными плоскостями. Этот факт следует из теоремы о четырехугольниках с двумя прямыми углами при нижнем основании.

§ 2. ПОНЯТИЕ ОБ ОРИСФЕРЕ И ЕЕ ГЕОМЕТРИИ

В пространстве Лобачевского на прямых связки можно ввести понятие соответствующих точек, аналогично тому, как это понятие вводилось выше для прямых пучка на плоскости. Точки A и A_1 на прямых a и a_1 связки считаются **соответствующими**, если отрезок AA_1 составляет равные углы с этими прямыми.

Теорема 7. Две точки на прямых связки, соответствующие третьей соответственны между собою.

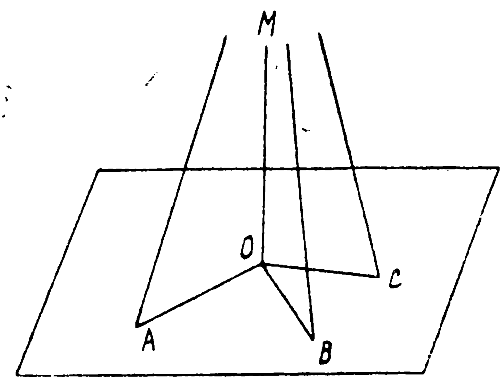

Рис. 85.

Для прямых связки первого рода соответствующие точки равно удалены от центра связки. Для прямых связки третьего рода соответствующие точки также равно удалены от основной плоскости и теорема в обоих случаях очевидна.

Чтобы разобрать эту теорему для прямых связки второго рода, мы предварительно установим следующий факт. Если из точек плоскости α, не принадлежащей связке прямых второго рода, провести прямые связки, то их проекции на эту плоскость пересекаются в единой точке. Действительно, возьмем на плоскости α точку A. Проведем из этой точки прямую a связки. Если она перпендикулярна плоскости α, то теорема, очевидно, справедлива. Пусть теперь a не перпендикулярна α. Проекцию прямой a на плоскости α обозначим через a'. Отложим на ней отрезок AO так, чтобы $\angle OAM = \Pi(OA)$.

Очевидно, прямая OM перпендикулярна плоскости α и принадлежит к связке. В точке O пересекаются проекции всех прямых связки (рис. 85).

Докажем теперь указанную теорему для связки прямых второго рода. По условию точки A и B соответствуют точке C. Если эти точки инцидентны прямой, то справедливость заключения вытекает из аналогичной теоремы для прямых пучка второго рода. Если A, B, и C не инцидентны прямой, то все ортогональные проекции прямой связки на плоскость ABC принадлежат пучку прямых первого рода. Центр этого пучка прямых является центром описанного около треугольника ABC круга, так как (рис. 86)

$$AO = CO = BO.$$

Действительно, так как биссектриса MD полосы BCM перпендикулярна BC, то ее проекция инцидентна O. Аналогично проекция биссектрисы EM полосы ACM также проходит через точку O.

Опустим теперь из центра O перпендикуляр OF на AB. Подошва перпендикуляра делит сторону AB пополам, и прямая FM связки является биссектрисой полосы ABM. Этот факт следует из теоремы абсолютной геометрии, обратной к теореме о трех перпендикулярах.

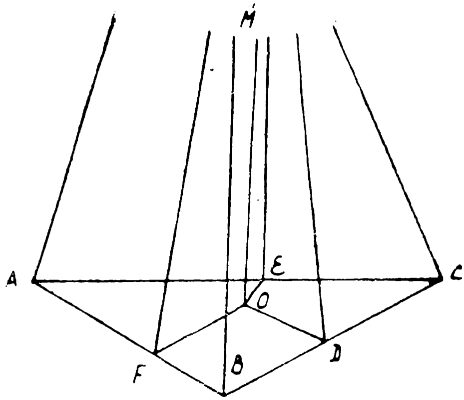

Рис. 86.

Геометрическое множество точек на прямых связки, соответствующих данной точке, называется **простейшей поверхностью** в геометрии Лобачевского. Простейшие поверхности, построенные на прямых связки первого, второго и третьего рода, называются соответственно **сферой**, предельной поверхностью и поверхностью равных расстояний или эквидистантной поверхностью. Предыдущая теорема устанавливает равноправие точек на простейшей поверхности. Простейшая поверхность, построенная как множество точек на прямых связки, соответствующих заданной точке, определяется любой другой своей точкой. Простейшие поверхности являются поверхностями вращения. Сфера получается вращением окружности вокруг диаметра. Эквидистантная поверхность и предельная поверхность также получаются от вращения эквидистанты и соответственно предельной линии вокруг какой-нибудь оси связки. Из полученных простейших поверхностей важное значение для дальнейшей теории имеют предельные поверхности. Для этих поверхностей справедливо следующее предложение.

Теорема 8. Во множестве точек и предельных линий предельной поверхности справедлива евклидова геометрия.

Докажем, что на предельной поверхности можно ввести основные отношения инцидентности точки и предельной линии, лежать между для трех точек предельной линии и конгруентности отрезков и углов так, что все аксиомы евклидовой планиметрии будут выполнены. Прежде всего условимся понимать инцидентность точки и предельной линии в обычном смысле. Рассмотрим аксиомы первой группы аксиом. Обратимся к первой аксиоме: двум точкам A и B предельной поверхности можно отнести предельную линию, им инцидентную. Легко видеть, что аксиома выполняется. В самом деле, точкам A, B отвечают оси a, b связки прямых второго рода. Эти a, b определяют плоскость, которая пересечет предельную поверхность по искомой предельной линии. Следующая аксиома — двум точкам можно отнести не более одной предельной линии, им инцидентной, — также выполняется очевидным образом. Справедлива и последняя аксиома инцидентности: на всякой прямой существуют по крайней мере две точки, существуют три точки, не инцидентные одной прямой. В действительности на всякой предельной линии имеется бесчисленное множество точек, ей инцидентных.

Для того, чтобы убедиться в справедливости аксиом порядка, предварительно введем понятие точки, лежащей между двумя другими. Пусть три точки A, B и C инцидентны предельной линии. В таком случае соответствующие им оси a, b, c лежат в плоскости связки. Из этих трех прямых, параллельных друг другу в одном направлении имеется одна и только одна прямая, например, b, относительно которой оставшиеся прямые a и c лежат в разных полуплоскостях. В этом случае будем говорить, что точка B «лежит между» точками A и C. Нетрудно убедиться, что так введенное понятие лежать между для трех точек, инцидентных предельной линии, удовлетворяет всем аксиомам порядка. Конгруентность отрезка отрезку понимается в смысле конгруентности дуг предельных линий. Угол между предельными линиями понимается в смысле двугранного угла, грани которого содержат указанные лучи предельных линий. Конгруентность углов сводится к конгруентности двугранных углов. Первые четыре аксиомы очевидно соблюдаются. Последняя аксиома также выполняется. Она по существу выражает известный в абсолютной геометрии признак равенства двух трехгранных углов по двум линейным углам и заключенному ими двугранному углу. Аксиомы четвертой группы выполняются, так как для точек предельной линии выполняется принцип Дедекинда.

Убедимся теперь в справедливости аксиомы параллельности. Пусть дана на предельной поверхности точка A, не инцидентная предельной линии l. В связке прямых второго рода им отвечают ось a и плоскость связки λ соответственно. Ось a параллельна плоскости λ по установленному выше признаку. Следовательно, через эту прямую, параллельную плоскости λ, можно провести и притом только одну плоскость, как мы доказали выше, не пересекающую λ. Итак, аксиома параллельности также выполняется и на предельной поверхности реализуется **евклидова** геометрия, что и требовалось доказать.

§ 3. ВЫВОД ФОРМУЛ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Выясним сначала принцип вывода формул, связывающих элементы прямоугольного треугольника. Возьмем в плоскости Лобачевского некоторый прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C и острыми углами $A = (\alpha)$ и $B = (\beta)$. Восстановим из вершины A перпендикуляр AO к плоскости этого треугольника. Построим затем в пространстве связку прямых второго рода, параллельных указанному перпендикуляру в направлении AO. Рассмотрим далее порожденную прямыми связки предельную поверхность, соответствующую точке A.

Предельная поверхность касается плоскости треугольника в точке A и расположена относительно этой плоскости в полупространстве, содержащем полупрямую AO. Спроектируем теперь осями связки BO и CO другие вершины прямоугольного треугольника на предельную поверхность. В результате на предельной поверхности мы получим треугольник $A_1B_1C_1$, сторонами которого являются дуги предельных линий. Докажем прежде всего, что полученный треугольник является прямоугольным. В самом деле, BC по условию перпендикулярна AC. С другой стороны, AC является ортогональной проекцией на плоскость треугольника наклонной CO. По теореме абсолютной геометрии о трех перпендикулярах, мы выводим, что BC перпендикулярна также прямой CO. Таким образом, BC перпендикулярна плоскости CAO. Далее, так как плоскость BCO проходит через перпендикуляр BC к плоскости ACO, то сами плоскости BCO и ACO перпендикулярны. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ является прямоугольным на предельной поверхности с прямым углом при вершине C_1. Построим теперь в проектирующей плоскости дугу CB_2 концентрической предельной линии. Свяжем теперь элементы прямоугольного треугольника Лобачевского с соответствующими элементами евклидова прямоугольного треугольника на предельной поверхности. Пусть (a), (b) обозначают катеты, противолежащие вершинам A и B, (c) — гипотенуза треугольника ABC. Соответствующие элементы треугольника на предельной поверхности обозначим через

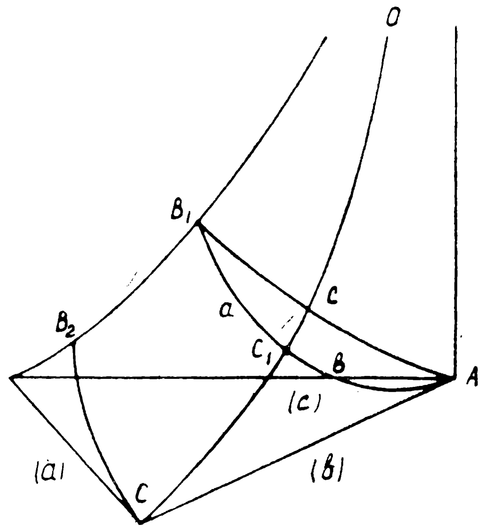

Рис 87.

a, b и c. Отметим также, что рассматриваемое отображение является конформным в точке O и угол $(\alpha) = \alpha$. Оно переводит прямые плоскости Лобачевского в прямые предельной поверхности (рис. 87).

Обозначим длину отрезка CC_1 через z. По ранее полученным формулам планиметрии Лобачевского, имеем

$$c = \sigma\, th\frac{(c)}{\kappa},\quad b = \sigma\, th\frac{(b)}{\kappa}.$$

Получим теперь связь a и (a). Так как

$$\smile B_2C = \sigma\, th\frac{(a)}{\kappa}.\quad B_2C = ae^{\frac{CC_1}{\kappa}} = a\,\mathrm{ch}\frac{(b)}{\kappa},$$

то

$$a = \sigma\, th\frac{(a)}{\kappa}\Big/\mathrm{ch}\frac{(b)}{\kappa}.$$

Итак, мы пришли к следующим формулам, связывающим соответствующие элементы треугольников:

$$a = \sigma\, th\frac{(a)}{\kappa}\Big/\mathrm{ch}\frac{(b)}{\kappa}, \tag{6}$$

$$b = \sigma\, th\frac{(b)}{\kappa}, \tag{7}$$

$$c = \sigma\, th\frac{(c)}{\kappa}. \tag{8}$$

Перейдем теперь к выводу формул прямоугольного треугольника. Так как на предельной поверхности осуществляется евклидова геометрия, то из треугольника AB_1C_1 мы имеем

$$b = c\cos\alpha.$$

Исключая из этого равенства b и c с помощью формул (7), (8), получим

$$th\frac{(b)}{\kappa} = th\frac{(c)}{\kappa}\cos(\alpha). \tag{9}$$

Получим теперь теорему Пифагора для прямоугольного треугольника в плоскости Лобачевского. Будем исходить из равенства

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

выражающего теорему Пифагора для прямолинейного прямоугольного треугольника AB_1C_1 на предельной поверхности. На основании (6—8) имеем

$$th^2\frac{(c)}{\kappa} = \frac{th^2\frac{(a)}{\kappa}}{\mathrm{ch}^2\frac{(b)}{\kappa}} + th^2\frac{(b)}{\kappa}.$$

Отсюда получаем

$$1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{(c)}{\kappa}}=\frac{1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{(a)}{\kappa}}}{\mathrm{ch}^2\frac{(b)}{\kappa}}+1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{(b)}{\kappa}}$$

и окончательно

$$\mathrm{ch}\frac{(c)}{\kappa}=\mathrm{ch}\frac{(a)}{\kappa}\,\mathrm{ch}\frac{(b)}{\kappa}.$$

Это равенство по существу выражает теорему Пифагора в геометрии Лобачевского — косинус гиперболической гипотенузы прямоугольного треугольника равняется произведению косинусов гиперболических его катетов.

Возьмем теперь формулу

$$a=c\sin\alpha,$$

выражающую в евклидовой геометрии орисферы катет через гипотенузу и противоположный угол. Получим из нее соответствующую формулу для треугольника в плоскости Лобачевского. Исключая в ней a и c на основании формул (6)— (8), получим

$$th\frac{(a)}{\kappa}\Big/\mathrm{ch}\frac{(b)}{\kappa}=th\frac{(c)}{\kappa}\sin(\alpha)$$

или

$$\mathrm{sh}\frac{(a)}{\kappa}\Big/\mathrm{ch}\frac{(a)}{\kappa}\,\mathrm{ch}\frac{(b)}{\kappa}=\mathrm{sh}\frac{(c)}{\kappa}\Big/\mathrm{ch}\frac{(c)}{\kappa}\sin(\alpha).$$

По теореме Пифагора знаменатели в последнем равенстве можно отбросить и окончательно будем иметь:

$$\mathrm{sh}\frac{(a)}{\kappa}=\mathrm{sh}\frac{(c)}{\kappa}\sin(\alpha). \tag{11}$$

Аналогично из формулы

$$a=b\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

связывающей катеты и острый угол евклидова прямоугольного треугольника на предельной поверхности, мы получим следующую формулу

$$th\frac{(a)}{\kappa}=\mathrm{sh}\frac{(b)}{\kappa}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

для прямоугольного треугольника на плоскости Лобачевского. Из нее следует также, что

$$\mathrm{ctg}(\alpha)=\mathrm{sh}\frac{(b)}{\kappa}\,\mathrm{cth}\frac{(a)}{\kappa}.$$

Наряду с ней справедлива парная формула

$$\mathrm{ctg}(\beta)=\mathrm{sh}\frac{(a)}{\kappa}\,\mathrm{cth}\frac{(b)}{\kappa}.$$

Отсюда следует на основании полученной выше теоремы Пифагора, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha)\operatorname{ctg}(\beta)=\operatorname{ch}\frac{(c)}{\kappa} \qquad (13)$$

Заменяя в (11) элементы (a), (α) на (b) и (β), мы получим

$$\operatorname{sh}\frac{(b)}{\kappa}=\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}\sin(\beta). \qquad (11')$$

Разделим далее почленно равенства (11′) и (9):

$$\operatorname{ch}\frac{(b)}{\kappa}=\operatorname{ch}\frac{(c)}{\kappa}\frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}.$$

Отсюда выводим, что

$$\cos(\alpha)=\operatorname{ch}\frac{(a)}{\kappa}\sin(\beta). \qquad (14)$$

Формулы 9—14 могут быть выписаны с помощью так называемого мнемонического правила Непера. Прежде чем сформулировать его, мы уточним некоторые понятия. В указанных формулах связываются пять элементов, которые можно расположить в циклическом порядке (a), (b), (α), (c), (β) (рис. 88—89). Для каждого элемента предшествующий и последующий элементы усло-

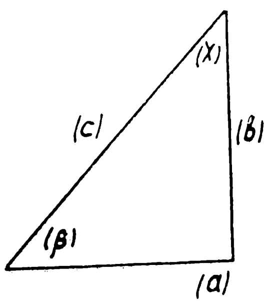

Рис. 88.

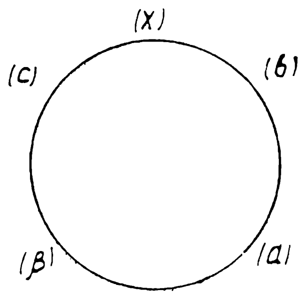

Рис. 89.

вимся называть **прилежащими**, а остальные два элемента — **противолежащими элементами.** Мнемоническое правило формулируется следующим образом: косинус элемента прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского равняется произведению синусов противолежащих элементов или произведению котангенсов прилежащих элементов. При этом необходимо иметь в виду следующие добавления к правилу: 1) если под знаком функции входит угол, то функция понимается в тригонометрическом смысле; 2) если же входит длина, то она делится на радиус кривизны κ и функция понимается в гиперболическом смысле; 3) наконец, в случае, когда под знаком функции стоит катет, то функция меняется на смежную — синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот.

Задача 1. Пользуясь приведенным правилом, выписать для каждого элемента соответствующие формулы, определяющие его через прилежащие и противолежащие элементы прямоугольного треугольника.

§ 4. ФОРМУЛЫ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Установленные формулы для прямоугольного треугольника позволяют выяснить связи между сторонами и углами в произвольном треугольнике. Получим, например, теорему косинусов. Возьмем произвольный треугольник ABC. Опустим из вершины B высоту BD и введем обычные обозначения длин сторон треугольника $AB=(c)$, $BC=(a)$, $AC=(b)$. Пусть также $BD=(h)$, $AD=(d)$ Применяя к прямоугольному треугольнику BDC теорему Пифагора, имеем (рис. 90).

$$\operatorname{ch}\frac{(a)}{\kappa}=\operatorname{ch}\frac{(h)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(b)-(d)}{\kappa}.$$

Так как

$$\operatorname{ch}\frac{(b)-(d)}{\kappa}=\operatorname{ch}\frac{(b)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(d)}{\kappa}-\operatorname{sh}\frac{(b)}{\kappa}\operatorname{sh}\frac{(d)}{\kappa},$$

то получим

$$\operatorname{ch}\frac{(a)}{\kappa}=\operatorname{ch}\frac{(b)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(d)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(h)}{\kappa}-\operatorname{sh}\frac{(b)}{\kappa}\operatorname{sh}\frac{(d)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(h)}{\kappa} \qquad (15)$$

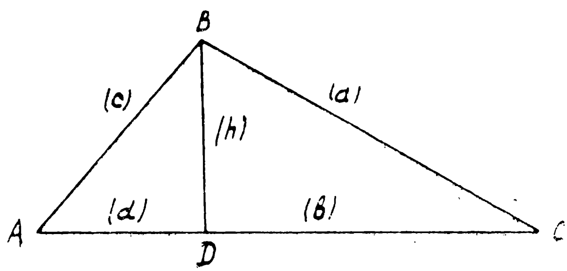

Рис. 90.

Рассмотрим подробнее оба члена в правой части. Последние два сомножителя в первом члене по теореме Пифагора для треугольника ABD можно заменить на $\operatorname{ch}\frac{(c)}{\kappa}$. Упростим теперь второй член в правой части. Для указанного прямоугольного треугольника ранее мы имели

$$\cos(A)=\operatorname{cth}\frac{(c)}{\kappa}\operatorname{th}\frac{(d)}{\kappa}$$

или

$$\cos(A)=\frac{\operatorname{ch}\frac{(h)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(d)}{\kappa}\operatorname{sh}\frac{(d)}{\kappa}}{\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}\cdot\operatorname{ch}\frac{(d)}{\kappa}}.$$

Следовательно, последние два множителя во втором члене правой части можно заменить на $\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}\cos(A)$. Окончательно равенство (15) перепишется в следующем виде

$$\operatorname{ch}\frac{(a)}{\kappa}=\operatorname{ch}\frac{(b)}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(c)}{\kappa}-\operatorname{sh}\frac{(b)}{\kappa}\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}\cos(A) \tag{16}$$

Эта формула и выражает теорему *косинусов* для треугольника.

Нетрудно получить также теорему синусов. В самом деле, из треугольников ABD и BDC мы имеем соответственно

$$\operatorname{sh}\frac{(h)}{\kappa}=\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}\sin(A),\quad \operatorname{sh}\frac{(h)}{\kappa}=\operatorname{sh}\frac{(a)}{\kappa}\sin(C).$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{(a)}{\kappa}}{\sin(A)}=\frac{\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}}{\sin(c)}.$$

Если опустить высоту из вершины A и повторить приведенные рассуждения, получим

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{(b)}{\kappa}}{\sin(B)}=\frac{\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}}{\sin(c)}.$$

Последние два равенства приводят нас к соотношениям

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{(a)}{\kappa}}{\sin(A)}=\frac{\operatorname{sh}\frac{(b)}{\kappa}}{\sin(B)}=\frac{\operatorname{sh}\frac{(c)}{\kappa}}{\sin(C)} \tag{17}$$

составляющим теорему синусов.

Перейдем теперь к геометрии Лобачевского в малом. Предположим, что линейные размеры (a), (b), (c) малы по сравнению с радиусом κ кривизны пространства. Это предположение заведомо выполняется для треугольников с малыми линейными размерами или в пространстве достаточно малой кривизны $1/\kappa^2$. Разлагая в степенные ряды гиперболические функции в формуле (16), выражающей теорему косинусов, получаем

$$1+\frac{(a)^2}{2\kappa^2}+\cdots=\left(1+\frac{(b)^2}{2\kappa^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{(c)^2}{2\kappa^2}+\cdots\right)-$$
$$-\left(\frac{(b)}{\kappa}+\cdots\right)\left(\frac{(c)}{\kappa}+\cdots\right)\cos(A).$$

Учитывая члены до второго порядка малости включительно, будем иметь

$$(a)^2=(b)^2+(c)^2-2(b)(c)\cos(A).$$

В случае прямоугольного треугольника $\cos(A)=0$

$$(a)^2=(b)^2+(c)^2.$$

При наших предположениях синусы гиперболические в формулах (17) в первом приближении пропорциональны аргументам, поэтому

$$\frac{(a)}{\sin(A)}=\frac{(b)}{\sin(B)}=\frac{(c)}{\sin(C)}.$$

Последние три равенства показывают, что формулы геометрии Лобачевского для фигур с малыми линейными размерами совпадают с соответствующими формулами евклидовой геометрии.

Подтвердим этот вывод еще на одном примере. Мы докажем, что формула длины окружности достаточно малого радиуса в геометрии Лобачевского совпадает с соответствующей формулой евклидовой геометрии.

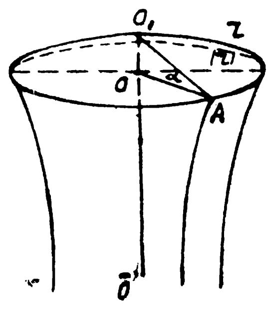

Рис. 91.

Чтобы определить длину окружности в геометрии Лобачевского, мы восстановим из ее центра O перпендикуляр $O\bar{O}$ к плоскости окружности. Построим далее связку прямых, параллельных $O\bar{O}$. Образуем на прямых этой связки предельную поверхность, соответствующую точке B данной окружности (рис. 91). В результате все точки окружности будут лежать на предельной поверхности. Но так как на предельной поверхности осуществляется евклидова геометрия и данная окружность, очевидно, является окружностью с радиусом r на этой поверхности, то

$$\smile AB=r\alpha;\quad \smile AB=\sigma\, sh\frac{(r)}{\kappa}(\alpha),\qquad (*)$$

где угол $\alpha=\angle AOB$.

Последнее равенство мы получили на основании формулы (5, § 6). Кроме того, в этой формуле постоянную σ можно заменить на κ, если допустить, что предел длины дуги предельной линии, отнесенной к соответствующей хорде, равняется единице, когда длина хорды стремится к нулю.

Действительно, по условию из равенства (см. стр. 83).

$$\frac{s}{2n}=\sigma\,\mathrm{sh}\frac{(x)}{2\kappa n}$$

следует при $1/n$, стремящимся к нулю, что $\sigma=\kappa$. Таким образом, из (*) заключаем, что длина окружности (c) определяется по формуле

$$(c)=2\kappa\pi\,\mathrm{sh}\frac{(r)}{\kappa}.\qquad (18)$$

Отсюда следует, при r достаточно малом, что

$$(c) = 2\pi(r),$$

т. е. длина окружности и ее радиус связаны по соответствующей формуле евклидовой геометрии.

§ 5. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ЛОБАЧЕВСКОГО

Пусть дана на плоскости Лобачевского прямая a и точка A, не инцидентная ей. Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a (рис. 92). Проведем также через точку A прямую AO, параллельную прямой a в каком-нибудь направлении. Угол $\angle BAO$, как указывали выше, называется **углом параллельности**, соответствующим отрезку AB. Для получения основной формулы Лобачевского, связывающей угол параллельности $BAO = \Pi(p)$ с отрезком $p = AB$, мы возьмем на луче BO какую-нибудь точку C. Для прямоугольного треугольника ABC, имеем

$$\operatorname{th}\frac{(p)}{k} = \operatorname{th}\frac{(AC)}{k}\cos(\alpha), \quad \alpha = \angle BAC.$$

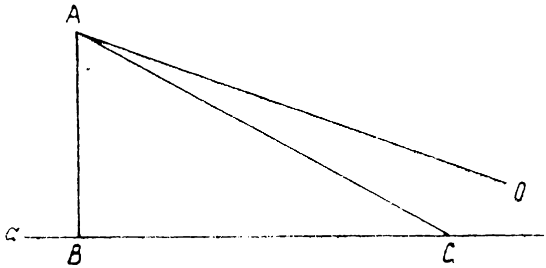

Рис. 92.

Будем удалять теперь точку C по лучу до бесконечности, $\operatorname{th}\frac{(AC)}{k}$ стремится при этом к 1 и в пределе, мы получим

$$\operatorname{th}\frac{(p)}{k} = \cos\Pi(p).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\Pi(p)}{1+\cos\Pi(p)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\operatorname{th}\frac{(p)}{k}}{1+\operatorname{th}\frac{(p)}{k}}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{(p)}{k}-\operatorname{sh}\frac{(p)}{k}}{\operatorname{ch}\frac{(p)}{k}+\operatorname{sh}\frac{(p)}{k}}}.$$

Вставляя в последнее равенство

$$\operatorname{ch}\frac{(p)}{\kappa}=\left(e^{\frac{(p)}{\kappa}}+e^{\frac{-(p)}{\kappa}}\right)/2,\quad \operatorname{sh}\frac{(p)}{\kappa}=\left(e^{\frac{(p)}{\kappa}}-e^{\frac{-(p)}{\kappa}}\right)/2,$$

мы окончательно получим

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2}=e^{-\frac{(p)}{\kappa}}.$$

Эта формула, связывающая угол параллельности $\Pi(p)$ с соответствующим отрезком p, называется **основной формулой Лобачевского**.

§ 6. ОТОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ЕВКЛИДОВУ ПЛОСКОСТЬ

Пусть в пространстве Лобачевского задана произвольная плоскость α. Разумеется, в этой плоскости выполняется гипотеза острого угла и она является плоскостью Лобачевского. Кривизна пространства совпадает с кривизной любой его плоскости. Возьмем на данной плоскости некоторую точку O и восстановим из нее перпендикуляр $O\bar{O}$. Построим далее связку прямых второго рода, параллельных в направлении OO, и рассмотрим предельную поверхность, как множество точек, соответствующих точке O. Так полученная предельная поверхность касается плоскости α в точке O.

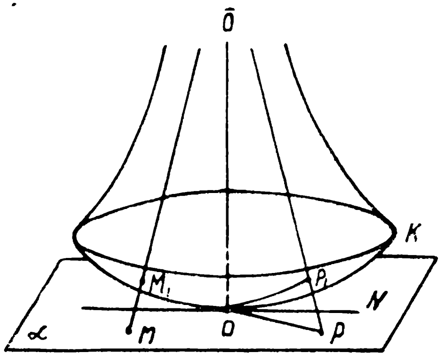

Рис. 93.

Возьмем произвольную точку M, принадлежащую плоскости α. Проведем через нее луч связки $M\bar{O}$. Он пересечет предельную поверхность в некоторой точке M_1, которую считаем по определению отображения образом точки M. Каждой точке плоскости отображение относит некоторую точку на предельной поверхности, обратное — не справедливо. Точки плоскости по указанному закону отображаются лишь на часть предельной поверхности (рис. 93). Очевидно, что оси при проектировании точек прямой лежат в одной плоскости — плоскости связки. Поэтому точки любой прямой плоскости Лобачевского отображаются в точки предельных линий. Нетрудно видеть, что точки луча ON отображаются в дугу предельной линии, ограниченной точкой O и точкой K пересечения заградительной прямой $N\bar{O}$ с предельной поверхностью.

Так как плоскость α и построенная предельная поверхность являются поверхностями вращения вокруг оси $O\overline{O}$ соответственно прямой ON и предельной линии OK, то все точки данной плоскости переходят при рассматриваемом отображении во внутренность круга, расположенного на предельной поверхности, с центром в точке O и радиусом $OK = \sigma = \kappa$. Совокупность граничных точек этого круга называется граничной окружностью или **абсолютом**. Перенося по отображению на внутренность этого круга основные понятия отображаемой плоскости, мы получим в результате модель Бельтрами этой плоскости Лобачевского.

Нетрудно убедиться, что пучок прямых первого рода при данном отображении переходит в совокупность хорд, пересекающихся в общей точке, принадлежащей внутренности абсолюта (рис. 94).

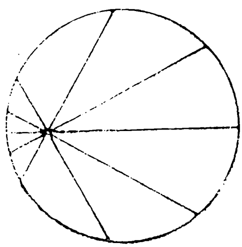
Рис. 94.

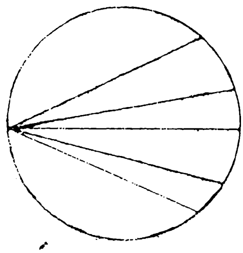
Рис. 95.

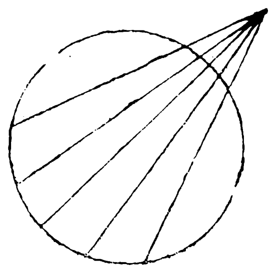
Рис. 96.

Пучок прямых второго рода, т. е. прямых, параллельных друг другу в данном направлении, переходит в совокупность хорд, пересекающихся в некоторой точке абсолюта (рис. 95). Наконец, пучок прямых третьего рода отображается в совокупность хорд,

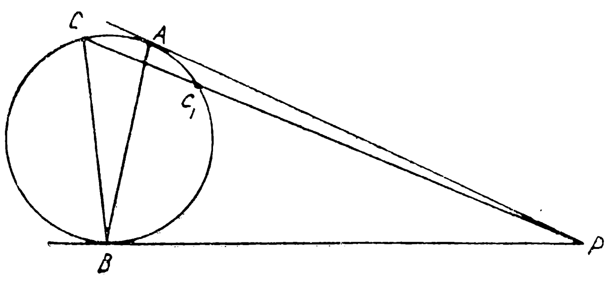

Рис. 97.

пересекающихся в некоторой точке вне абсолюта (рис. 96). Точки абсолюта называются бесконечно удаленными точками и точки вне абсолюта — идеальными точками плоскости Лобачевского. Поэтому пучки прямых второго и третьего родов называются иногда пучками с бесконечно удаленными или соответственно идеальными центрами.

Нетрудно убедиться, что ось пучка прямых третьего рода является полярой полюса — своего идеального центра. В самом деле, допустим, что ось пучка не является полярой идеального центра. Предположим, например, что она не проходит через точку (рис. 97) пересечения поляры точки P с абсолютом. Тогда на плоскости Лобачевского будет существовать прямая CC_1, одновременно перпендикулярная и параллельная к прямой CB, что невозможно.

§ 7. ФОРМУЛА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Возьмем на плоскости Лобачевского две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в некоторой точке O, и построим на каждой из них числовую ось. Возьмем далее произвольную точку M на этой плоскости и опустим из нее перпендикуляры MM_1 и MM_2 на указанные оси. Так как в полученном четырехугольнике три угла прямые, а угол с вершиной в точке M острый, то противоположные стороны его не равны. Поэтому можно отнести различные упорядоченные пары чисел и в результате будут порождаться различные системы координат. Отметим, что Лобачевский брал в качестве координат точки M координаты (ζ_1, η) (рис. 98). Построим далее предельную поверхность, касающуюся плоскости в точке O. Отображая точки плоскости Лобачевского осями связки второго рода в точки указанной предельной поверхности, мы получим на последней точки внутренности круга. Граничные точки этого круга лежат на окружности радиуса κ, которую выше мы называли **абсолютом**. Очевидно, отображение точек

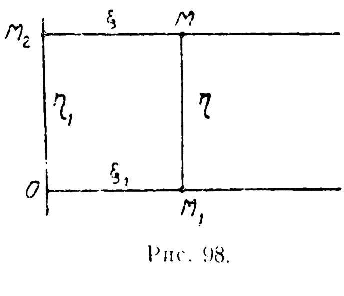

Рис. 98.

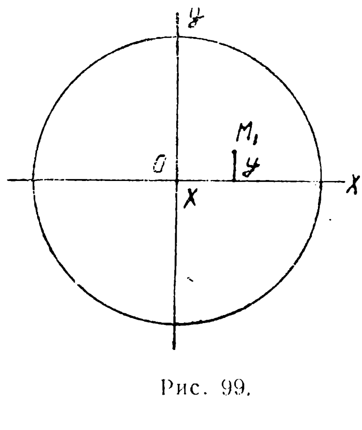

Рис. 99.

плоскости Лобачевского на точки внутренности абсолюта является взаимно однозначным.

Построенное отображение является *геодезическим*, т. е. прямые плоскости Лобачевского отображаются в прямые евклидовой плоскости. В точке O это отображение будет также конформным. Поэтому образы осей взаимно перпендикулярных прямых также перпендикулярны. Примем эти образы за оси Ox и Oy декартовой системы координат. Возьмем снова любую точку M на плоскости Лобачевского и предположим, что указанное проектирование переводит ее в некоторую точку M_1 (рис. 99) с **декартовыми координатами** (x, y). **Полученные координаты** (x, y) **точки** M_1 **по определению называются также координатами Бельтрами точки плоскости Лобачевского.** Другими словами, **координаты Бельтрами любой точки** M **плоскости** Лобачевского **являются декартовыми координатами ее изображения** M_1. **Нетрудно получить формулы, связывающие эти координаты** с координатами (ξ_1, η_1).

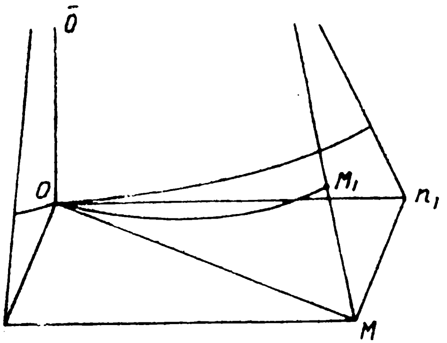

Рис. 100а.

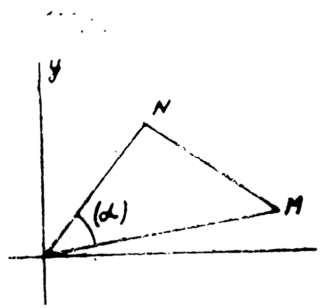

Рис. 100б.

Действительно, так как оси $O\xi_1$ и $O\eta_1$ переходят при отображении на предельную поверхность соответственно в оси Ox и Oy, по установленной формуле (4), имеем (рис. 100а)

$$x = k \operatorname{th} \frac{(\xi_1)}{k}, \tag{20}$$

$$y = k \operatorname{th} \frac{(\eta_1)}{k}, \tag{21}$$

$$r = k \operatorname{th} \frac{(r)}{k}. \tag{22}$$

Рассмотрим сначала задачу о расстоянии между двумя точками. Пусть в плоскости Лобачевского даны произвольные две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ с координатами соответственно x_1, y_1 и x_2, y_2. Обозначим расстояние между точками M, N через (δ). Применяя к треугольнику OMN (рис. 100б) теорему косинусов, получим

$$\operatorname{ch} \frac{(\delta)}{k} = \operatorname{ch} \frac{(\rho_1)}{k} \operatorname{ch} \frac{(\rho_2)}{k} - \operatorname{sh} \frac{(\rho_1)}{k} \operatorname{sh} \frac{(\rho_2)}{k} \cos(\alpha) \tag{23}$$

Постараемся выразить теперь правую часть этого равенства через координаты концов отрезка MN. Так как из (22) следует, что

$$\operatorname{th}\frac{(r)}{\kappa}=\frac{r}{\kappa}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\kappa},$$

то

$$\operatorname{ch}^2\frac{(r)}{\kappa}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2\frac{(r)}{\kappa}}=\frac{\kappa^2}{\kappa^2-x^2-y^2}.$$

Следовательно;

$$\operatorname{ch}\frac{(r)}{\kappa}=\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-x^2-y^2}}, \tag{24}$$

где в правой части подразумевается положительное значение радикала, в силу положительности левой части. Далее из основного тождества

$$\operatorname{ch}^2\frac{(r)}{\kappa}-\operatorname{sh}^2\frac{(r)}{\kappa}=1,$$

следует также, что

$$\operatorname{sh}\frac{(r)}{\kappa}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\kappa^2-x^2-y^2}}. \tag{25}$$

Мы обращали внимание читателя на конформность рассматриваемого отображения в начале координат $O(o, o)$. Таким образом,

$$\cos(\alpha)=\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{26}$$

Применяя (24) и (25, 26) к точкам M и N и вставляя их выражения в (23), получим

$$\operatorname{ch}\frac{(\delta)}{\kappa}=\frac{\kappa^2-x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{\kappa^2-x_1^2-y_1^2}\sqrt{\kappa^2-x_2^2-y_2^2}}, \tag{27}$$

Эта формула выражает расстояние между двумя точками в координатах Бельтрами. Напомним, что

$$x^2+y^2=\kappa^2 \tag{28}$$

является уравнением абсолюта. Координаты Бельтрами считаются закрепленными за точками абстрактной плоскости Лобачевского, но их также законно можно считать декартовыми координатами точек образов, заполняющих внутренность абсолюта, в евклидовой плоскости с добавленной к ней несобственной прямой. Разумеется, указанные точки зрения совершенно равноправны в исследованиях по неевклидовой геометрии. Описанная идея введения координат Бельтрами впоследствии нашла широкие приложения во многих разделах современной математики. Эта идея положена в основу построения систем координат на элементарных многообразиях и их обобщениях.

Пользуясь формулой (27) можно доказать, что расстояние (δ) между точками M и N в реализации Бельтрами определяется по формуле

$$(\delta) = \frac{\kappa}{2} \ln (XYMN),$$

где $(XYMN)$ обозначает двойное отношение четырех точек X, Y и M, N — точек пересечения прямой MN с абсолютом.

Наряду с координатами (x, y) мы введем однородные координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) по формулам

$$\xi_1/\xi_3 = x/\kappa, \quad \xi_2/\xi_3 = y/\kappa \qquad (*)$$

Исключая с помощью этих формул в (28) переменные x, y, мы получим уравнение абсолюта в однородных координатах:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0 \qquad (29)$$

Так как уравнения прямых линейны относительно координат x, y, то в однородных координатах они приводятся к виду:

$$v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 - v_3 \xi_3 = 0.$$

Коэффициенты v_1, v_2, v_3 называются тангенциальными координатами прямой. Последний член, содержащий координату ξ_3, мы берем в уравнении прямой со знаком минус. Очевидно, координаты внутренних точек абсолюта, а также координаты бесконечно удаленных и идеальных точек характеризуются соответственно следующим соотношением:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 < 0,$$

$$\xi_1^2 + \xi_1^2 - \xi_3^2 = 0,$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 > 0.$$

Существуют также аналогичные неравенства для тангенциальных координат v_1, v_2, v_3. Они выражают условие пересечения, касания и непересечения прямых с абсолютом. Прямые, касающиеся абсолюта, называются изотропными. Прямые, не пересекающиеся с абсолютом, состоят лишь из идеальных точек и называются идеальными прямыми. Координаты действительных, изотропных и идеальных прямых удовлетворяют соответственно следующим соотношениям:

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 > 0,$$

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0,$$

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 < 0.$$

Все прямые, перпендикулярные прямой $\nu(v_1, v_2, v_3)$, как мы установили выше, пересекаются в полюсе прямой ν. Нетрудно также доказать, что координаты (v_1, v_2, v_3) прямой ν совпадают с однородными координатами полюса. В самом деле, уравнение абсолюта

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0$$

в однородных координатах показывают, что уравнение поляры для полюса $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ приводит к виду

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 - \alpha_3\xi_3 = 0.$$

Отсюда следует, что координаты v_1, v_2, v_3 этой прямой совпадают с α_1, α_2, α_3.

Получим теперь формулу расстояния между двумя точками на плоскости Лобачевского в однородных координатах. Из (27) и формул (*), связывающих однородные координаты с бельтрамиевыми, следует, что расстояние (δ) между точками $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $N(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ определяется по следующей формуле:

$$\operatorname{ch}\frac{(\delta)}{k} = \pm\frac{\xi_3\eta_3 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2}{\sqrt{\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\sqrt{\eta_3^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}.$$

Знак в этой формуле выбирается таким образом, чтобы правая часть равенства была положительной.

Наряду с бельтрамиевыми и однородными координатами часто вводят так называемые нормированные координаты для точек и прямых.

Для каждой точки плоскости Лобачевского координаты определяются по формулам

$$x_1 = \pm\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}, \quad x_2 = \pm\frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}, \tag{31}$$

$$x_3 = \pm\frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}.$$

В правых частях этих формул знак выбирается так, чтобы третья координата x_3 была положительна. Нормированные координаты не являются однородными координатами. Действительно, из формул (31) следует, что эти координаты для любой точки удовлетворяют следующему основному тождеству:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1. \tag{32}$$

Из приведенных выше формул следует, что координаты x_1, x_2, x_3 для точек абсолюта обращаются в бесконечность; для идеальных точек они — мнимые.

Аналогичным образом вводятся координаты прямых u_1, u_2, u_3. Из формул, связывающих эти координаты с однородными координатами прямых

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_1^2+v_2^2-v_3^2}},\ i=1,\ 2,\ 3$$

следует, что

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 1 \tag{33}$$

В координатах x_1, x_2, x_3 основные формулы приобретают более простой вид. Формула расстояния (δ) между двумя точками $M(x_1,\ x_2\ x_3)$ и $N(y_1,\ y_2,\ y_3)$ в этих координатах приводится к виду

$$\operatorname{ch}\frac{(\delta)}{\kappa} = x_3y_3 - x_1y_1 - x_2y_2 \tag{34}$$

Формулы (32) и (34) позволяют получить очень важный вывод, считая переменные (x_1, x_2, x_3) за координаты радиуса вектора $\bar{x}$ пространства Минковского, то есть плоского пространства E_3, в котором квадрат расстояния между двумя точками $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ определяется по формуле

$$d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2.$$

В самом деле, на основании (32), мы заключаем, что точки плоскости Лобачевского лежат в пространстве Минковского на сфере S_3 чисто мнимого радиуса i, причем диаметрально противоположные точки ее отождествлены. Кроме того, нетрудно показать, что в **системе точек и больших кругов каждой полы сферы чисто мнимого радиуса пространства Минковского осуществляется двухмерная геометрия Лобачевского.**

Можно убедиться аналогично, что геометрия трехмерного пространства Лобачевского совпадает с геометрией пространства S_3 — трехмерной сферы чисто мнимого радиуса четырехмерного пространства Минковского, диаметрально противоположные точки которой считаются за одну точку.

Приведем теперь несколько простейших задач на применение координатного метода в геометрии Лобачевского.

Задача 2. Доказать, что две прямые с коэффициентами u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 пересекаются, параллельны или сверхпараллельны, если трехчлен

$$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$$

по абсолютной величине соответственно меньше, равняется или больше единицы.

Задача 3. Провести прямую через точку $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, перпендикулярную данной прямой $u(u_1,\ u_2,\ u_3)$, при условии, что точка и прямая инцидентны.

Задача 4. Найти расстояние от заданной точки (x_1, x_1, x_3) до прямой $u(u_1,\ u_2,\ u_3)$. Так как координаты точки и прямой вейерштрассовы, то для решения задачи можно воспользоваться понятием нормального уравнения.

Задача 5. Определить угол между двумя прямыми $u(u_1, u_2, u_3)$ и $v(v_1, v_2, v_3)$. Будем считать, что указанные координаты прямых вейерштрассовы.

Задача 6. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми $u(u_1, u_2, u_3)$ и $v(v_1, v_2, v_3)$.

ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В заключение получим линейный элемент плоскости Лобачевского в полярной системе координат и приведем еще две задачи для упражнений.

Пусть точки M и M' имеют полярные координаты r, Θ и $r+dr$, $\Theta+d\Theta$ соответственно. Рассмотрим бесконечно малый треугольник $M\tilde{M}M'$. Этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине $\tilde{M}$. Катет $M\tilde{M}$ равняется с точностью до бесконечно малых первого порядка $\kappa\,\mathrm{sh}\frac{(r)}{\kappa}\,d\Theta$, а катет $\tilde{M}M'=dr$, $MM'=ds$. Так как в прямоугольном треугольнике $M\tilde{M}M'$ справедлива обычная теорема Пифагора, то линейный элемент плоскости Лобачевского приводится к виду

$$(ds)^2=(dr)^2+\kappa^2\,\mathrm{sh}^2\frac{(r)}{\kappa}\,d\Theta^2 \qquad (35)$$

Задача 7. Доказать, что формула (35) в переменных (x_1, x_2, x_3) приводится к виду

$$ds^2=\kappa^2(dx^{1^2}+dx^{2^2}-dx^{3^2}) \qquad (36)$$

Задача 8. Полагая в формуле (36)

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{x}{\kappa},\quad \frac{x_2}{x_3}=\frac{y}{\kappa},$$

доказать, что

$$ds^2=\kappa^2\frac{(\kappa^2-y^2)\,dx^2+2xy\,dx\,dy+(\kappa^2-x^2)\,dy^2}{(\kappa^2-x^2-y^2)^2}.$$

§ 8. О МОДЕЛЯХ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотренное в § 6 отображение плоскости Лобачевского во внутренность евклидова круга позволило нам автоматически построить так называемую модель Бельтрами — Клейна. Точками и прямыми в этой модели являются внутренние точки абсолюта и его хорды без концов. «Инцидентность» точек и прямых, точек и плоскостей, а также «между» для трех точек, принадлежащих одной прямой, понимаются в обычном смысле. Два отрезка (угла) считаются конгруентными, если они окажутся соответствующими при некотором взаимно однозначном точечном отображении расширенной за счет добавления несобственной прямой евклидовой плоскости, при котором абсолют остается неизменным и прямые переходят в прямые. Расстояние d (A, B) между двумя точками A, B в модели Бельтрами—Клейна выражается при помощи проективных понятий. Если хорда AB пересекает абсолют в точках M, N (рис. 101,*а*), то

$$d(A, B) = \pm \frac{\kappa}{2} \ln (ABMN),$$

где $(ABMN)$ обозначает двойное отношение указанных четырех точек $AM/BM : AN/BN$.

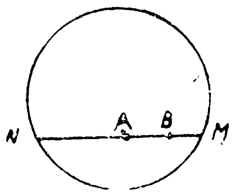

Рис. 101,*а*.

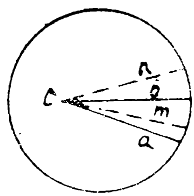

Рис. 101,*б*.

Угол φ между двумя лучами a, b, выходящими из точки C, также выражается через проективные понятия комплексной геометрии. Пусть m, n обозначают касательные к абсолюту, проходящие через точку C. Заметим, что прямые m, n необходимо комплексно сопряжены (рис. 101,*б*). Аналогично предыдущей формуле имеем

$$\varphi = \pm \frac{i}{2} \ln (abmn).$$

Модель Бельтрами — Клейна примечательна тем, что прямые плоскости Лобачевского в ней изображаются в виде открытых отрезков прямых евклидовой плоскости. Она осуществляет геодезическое отображение плоскости Лобачевского на внутренность круга евклидовой плоскости.

Прежде чем перейти к другим моделям плоскости Лобачевского мы должны сделать следующие два важных замечания. Во-первых, к модели Бельтрами — Клейна мы пришли на основе отображения плоскости Лобачевского на предельную поверхность, на которой осуществляется евклидова геометрия. Поэтому аксиомы геометрии Лобачевского здесь выполняются автоматически по отображению. Но приведенное здесь описание по отображению основных понятий позволяет в свою очередь прийти к этой модели самостоятельным образом, на основе доказательства выполнимости последовательно каждой аксиомы I — IV, V′.

Во-вторых, к этой же модели Бельтрами — Клейна можно прийти, очевидно, проектированием в пространстве Минковского сферы чисто мнимого радиуса из ее центра на касательную к ней плоскость, например, в северном полюсе.

Предположим теперь, что абсолют с центром O модели Бельтрами — Клейна является большим кругом сферы. Ортогональное проектирование внутренности абсолюта на одну из полученных полусфер позволяет получить (рис. 101, *в*) **новую модель** плоскости Лобачевского на полусфере. Затем стереографическое проектирование этой полусферы на исходную плоскость из полюса S, расположенного в другой полусфере, где отрезок OS перпендикулярен плоскости абсолюта, приводит к **модели Пуанкаре** (рис. 101, *г*) внутри круга. Следовательно, в прежнем абсолюте прямыми теперь являются **дуги окружностей**, ортогонально пересекающие абсолют и диаметры абсолюта. Отношения **инцидентности**, лежать **между** и **конгруентности углов** имеют обычный смысл. Понятие конгруентности отрезков также соответствующим образом переносится из модели Бельтрами — Клейна.

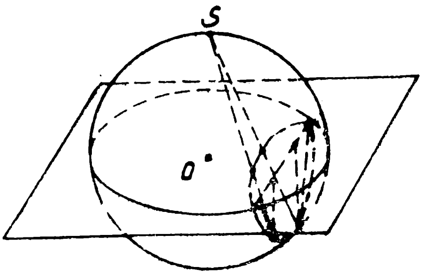

Рис. 101,*в*.

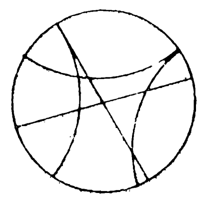

Рис. 101,*г*.

Применяя затем дробно-линейное отображение комплексного переменного к внутренней области абсолюта, мы получим известную модель Пуанкаре на **полуплоскости**. В этой модели «точками» являются точки верхней полуплоскости, «прямыми» — полуокружности с центром на граничной прямой — абсолюте. К «прямым» причисляются также полупрямые верхней полуплоскости, перпендикулярные к абсолютной прямой (рис. 101, *д*). Отношения инцидентности и лежать между понимаем в обычном смысле. Конгруентность углов в этой модели совпадает с евклидовой конгруентностью. Модель Пуанкаре представляет собою конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидову полуплоскость.

Что касается понятия конгруентности отрезков, то оно определяется через движения или расстояние между двумя точками A и B, причем понятие расстояния между точками в последнем случае не предполагает **измерения отрезков.** По определению оно **означает число.**

$$\rho(A, B) = k \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} \Big/ \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right), \qquad (*)$$

если точки A, B лежат на **полуокружности** или число

$$\rho(A, B) = \kappa \ln y_2/y_1; \qquad (**)$$

если точки лежат на полупрямой, перпендикулярной граничной прямой XX. В этих формулах углы φ_1, φ_2 и ординаты y_1, y_2 имеют обычный смысл, ясный из рисунка 101,*д*.

Очевидно, мы всегда можем предполагать, что обозначение углов символами φ_1, φ_2 и ординат y_1, y_2 для данных точек A, B осуществлено так, что правые части в (*), (**) положительны. Теперь нетрудно определяется конгруентность отрезков. Отрезки AB и CD **конгруентны**, если расстояние между концами A, B одного отрезка равно расстоянию между концами C, D другого отрезка.

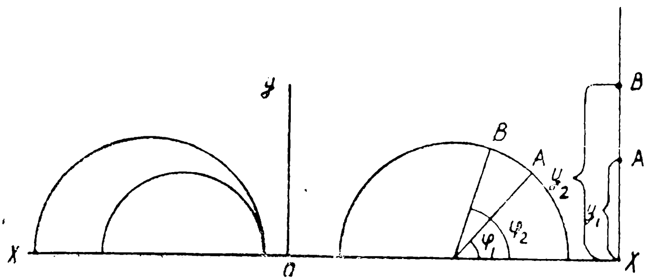

Рис. 101,*д*.

Подчеркнем еще раз, что к модели Пуанкаре на полуплоскости **мы пришли в результате отображения первой модели Пуанкаре во внутренности круга. Поэтому аксиомы Гильберта геометрии Лобачевского выполняются автоматически по отображению.**

Приводимые здесь описания основных образов и отношений инцидентности, лежать между, конгруентности отрезков и углов позволяют прийти к этой модели Пуанкаре на полуплоскости самостоятельным образом, путем доказательства выполнимости каждой аксиомы гильбертовской аксиоматики.

В заключение остановимся на вопросе независимости 5-го постулата **Евклида от остальных аксиом Гильберта.** Согласно общей **установке, изложенной в главе 1, достаточно построить** какую-нибудь **модель, на которой бы выполнялись** все аксиомы Гильберта **I — V за исключением аксиомы параллельности** V. Аксиома эта, эквивалентная относительно аксиом I — IV утверждению 5-го постулата, **состоит в следующем. Через** точку A, **не принадлежащую** прямой a, можно провести в плоскости, определяемой этой точкой A и прямой a, **не более одной** прямой, не пересекающейся с данной прямой a.

Очевидно, любая модель геометрии Лобачевского, например, Бельтрами — Клейна позволяет доказать независимость аксиомы параллельности от предыдущих аксиом I — IV. Действительно, на этой модели выполняются все 19 аксиом I — IV, а аксиома V не выполняется. Отсюда мы заключаем, что при помощи аксиом I — IV. Гильберта невозможно доказать аксиому параллельности V. Другими словами, 5-ый постулат Евклида нельзя вывести как теорему из предыдущих аксиом I — IV.

ГЛАВА V

О ДРУГИХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этом параграфе мы рассмотрим элементы так называемой сферической геометрии — геометрии сферы евклидова пространства. Кратчайшими (геодезическими) или прямыми линиями на сфере являются большие окружности, т. е. такие окружности, плоскости которых проходят через центр данной сферы.

Так как любые два больших круга пересекаются, то в сферической геометрии не осуществляется ни постулат Евклида, ни аксиома параллельности Лобачевского. В этой геометрии не выполняется также ряд других фактов абсолютной геометрии.

Например, прямые в сферической геометрии замкнуты и на них невозможно установить понятие точки, лежащей «между» для трех точек, инцидентных прямой, так как каждую из этих точек на окружности можно считать точкой, лежащей между двумя другими. Две точки на большом круге определяют два отрезка и прямые имеют конечную длину. Таким образом, аксиомы порядка в сферической геометрии должны описывать свойства циклического расположения точек на прямой. И все же несмотря на указанные различия в сферической геометрии имеется много свойств, аналогичных соответствующим свойствам в евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Эти геометрии, включая и геометрию достаточно малых кусков сферы, в основных вопросах не противопоставляются между собою, а копируют друг друга.

Возьмем на сфере три точки A, B, C, не лежащие в одной плоскости с центром O данной сферы. Совокупность этих точек и дуг AB, BC и AC больших окружностей, меньших полуоборота, называется **сферическим треугольником** ABC. Точки A, B, C называются **вершинами** сферического треугольника, а дуги AB, BC, AC—его сторонами. *Углом* A сферического треугольника ABC называется угол между касательными, проведенными к дугам AB и AC в точке их пересечения A. Очевидно, этот угол является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями больших окружностей AB и AC. Ясно, что сферический треугольник можно получить с помощью трехгранного угла, если пересечь его сферой, центр которой будет совпадать с вершиной данного угла. В самом деле, в пересечении сферы с гранями данного трехгранного угла мы получим сферический треугольник.

Из школьного курса геометрии известно, что в трехгранном угле любой его плоскости угол меньше суммы двух других плоских углов и больше их разности. В геометрии сферы этому предложению соответствует следующая теорема. Во всяком сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других его сторон и больше их разности.

На основании этой теоремы, как и в обычной планиметрии, доказывается, что в сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, обратно, против большего угла лежит большая сторона.

В этой геометрии имеются сферические двуугольники — фигуры более простые, чем сферические треугольники. Сферический двуугольник, по определению, представляет часть сферы, ограниченную двумя большими полуокружностями, пересекающимися в двух диаметрально противоположных точках.

Симметрия сферы относительно диаметральной плоскости и поворот ее вокруг диаметра на данный угол, очевидно, представляют собой примеры преобразований сферы, при которых расстояния между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами. Приведем общее определение.

Преобразования сферы, при которых сохраняются расстояния между любыми двумя ее точками, называются *движениями*. Сферическая геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при любых движениях сферы.

ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Перейдем к выводу некоторых формул сферической геометрии. Пусть в евклидовом пространстве нам дана сфера радиуса R. Возьмем на ней прямоугольный треугольник ABC со сторонами a, b, c, которые будут дугами больших кругов соответственно BC, AC и AB, причем мы условимся считать $\angle C = \frac{\pi}{2}$

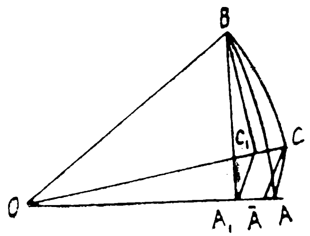

Рис. 102.

(рис. 102). Последнее означает, что касательные в точке C, проведенные к большим дугам CA, CB, перпендикулярны. Выясним связь между линейными и угловыми элементами данного прямоугольного треугольника.

Опустим из точки B перпендикуляры BC_1 и BA_1 на прямые OC и OA евклидова пространства. Из треугольника OBC_1, мы имеем

$$BC_1 = R\sin\frac{a}{R}. \qquad (*)$$

Аналогично из треугольников OBA_1 и BA_1C_1 следует, что

$$BA_1 = R\sin\frac{c}{R}, \qquad (**)$$

$$BC_1 = BA_1\sin A.$$

Исключая из этих трех соотношений BC_1 и BA_1, получим

$$\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{c}{R}\sin A. \qquad (1)$$

Линейные элементы треугольника здесь и в дальнейших формулах входят в виде отношений к радиусу сферы, поэтому целесообразно ввести следующее понятие приведенной длины. Расстояние между двумя точками на сфере, отнесенное к ее радиусу, будем называть **приведенным расстоянием.** Формула (1) показывает, что синус приведенного катета равняется синусу приведенной гипотенузы, умноженному на синус противолежащего угла треугольника.

В предыдущем рассуждении основание C_1 перпендикуляра BC_1 может совпадать с центром сферы или быть левее его на диаметре OC. Но можно убедиться, что получаемые ниже формулы, как и формула (1), будут всегда справедливы. Кстати отметим еще раз, что мы рассматриваем только такие сферические треугольники, которые определяются его вершинами и наименьшими дугами больших окружностей, попарно их соединяющими.

Выясним связь гипотенузы c с катетами a и b. Из треугольника OBC_1 имеем

$$OC_1 = R\cos\frac{a}{R}. \qquad (2)$$

Далее из треугольника OBA_1 и OC_1A_1 следует, что

$$OA_1 = R\cos\frac{c}{R}, \quad OA_1 = OC_1\cos\frac{b}{R}.$$

Исключая из полученных трех равенств OC_1 и OA_1, мы будем иметь

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}. \qquad (3)$$

Эта формула выражает теорему Пифагора: косинус приведенной гипотенузы прямоугольного треугольника равняется произведению косинусов приведенных катетов. Аналогичным образом выводятся другие формулы. Например, из прямоугольного треугольника A_1BC_1 следует, что

$$BC_1 = A_1C_1\,\mathrm{tg}\,A. \qquad (4)$$

Далее, так как

$$A_1C_1 = C\overline{A}\cdot OC_1/R,$$

то из (2) имеем

$$A_1C_1 = C\overline{A}\cos\frac{a}{R}. \qquad (5)$$

С другой стороны,

$$C\overline{A} = R\sin\frac{b}{R}. \qquad (6)$$

Из ($_*$, 4 — 6) вытекает, что

$$\operatorname{tg}\frac{a}{R} = \sin\frac{b}{R}\operatorname{tg}A. \qquad (7)$$

Наряду с этой формулой справедлива также парная формула

$$\operatorname{tg}\frac{b}{R} = \sin\frac{a}{R}\operatorname{tg}B. \qquad (7')$$

Перемножая почленно последние два соотношения, мы получим

$$\operatorname{tg}\frac{a}{R}\operatorname{tg}\frac{b}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

Отбрасывая ненулевые сомножители и применяя теорему Пифагора, окончательно будем иметь

$$\cos\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B. \qquad (8)$$

Возьмем теперь другое выражение A_1C_1 через $\cos A$. Так как

$$A_1C_1 = A_1B\cos A,$$

то из ($_{**}$) и (5—6), мы имеем

$$\sin\frac{c}{R}\cos A = \sin\frac{b}{R}\cos\frac{a}{R}.$$

Отсюда следует, что

$$\cos A = \operatorname{tg}\frac{b}{R}\operatorname{ctg}\frac{c}{R}. \qquad (9)$$

Из (1) вытекает также, что

$$\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{c}{R}\sin B.$$

Последние два равенства дают

$$\cos A = \sin\frac{c}{R}\operatorname{ctg}\frac{c}{R}\sin B/\cos\frac{b}{R}$$

или

$$\cos A = \cos\frac{a}{R}\sin B. \qquad (10)$$

Доказанные формулы прямоугольного треугольника можно выписать, пользуясь так называемым правилом Непера. Чтобы сформулировать это правило, мы условимся располагать элементы прямоугольного треугольника (рис. 103) a, B, c, A, b в указанном на рис. 104 циклическом порядке.

Для каждого из этих элементов предшествующий и последующий элементы называются **прилежащими**, а остальные два элемента — противолежащими. Для катета b, например, элементы a A будут прилежащими, а элементы c, B — противолежащими. Прилежащими элементами для гипотенузы являются углы A и B, а противолежащими — катеты a и b.

Сформулируем теперь правило Непера. Косинус любого элемента сферического прямоугольного треугольника равняется произведению синусов противолежащих элементов или произведению котангенсов прилежащих элементов. Если под знаком функции стоит катет, то тригонометрическая функция меняется на смежную — синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот. Заметим также, что во всех формулах длины катетов и гипотенузы делятся на радиус сферы R.

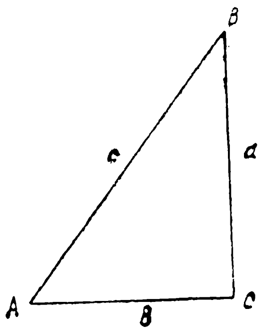

Рис. 103.

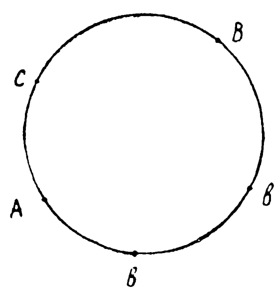

Рис. 104.

Пользуясь этим правилом, легко выписать выведенные выше формулы.

ФОРМУЛЫ КОСОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Получим сначала теорему косинусов. Пусть ABC произвольный сферический треугольник (рис. 105). Опустим из вершины B высоту BD. Применяя к треугольнику BDC теорему Пифагора, мы получим

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{BD}{R}\cos\frac{b-d}{R},$$

где $d = AD$, $a = BC$, $b = AC$, $AB = c$.

Перепишем предыдущее равенство, преобразуя второй множитель по формуле косинуса разности:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{BD}{R}\cos\frac{b}{R}\cos\frac{d}{R} + \cos\frac{BD}{R}\sin\frac{b}{R}\sin\frac{d}{R}. \qquad (11)$$

Первый и третий множители в первом члене правой части по теореме Пифагора дают $\cos\frac{c}{R}$. Упростим второй член в правой части. Так как

$$\cos\frac{BD}{R}\sin\frac{b}{R}\sin\frac{d}{R}=\cos\frac{d}{R}\cos\frac{BD}{R}\sin\frac{b}{R}\operatorname{tg}\frac{d}{R},$$

то заменяя $\operatorname{tg}\frac{d}{R}$ по формуле (9) на $\operatorname{tg}\frac{c}{R}\cos A$, мы получим

$$\cos\frac{BD}{R}\sin\frac{b}{R}\sin\frac{d}{R}=\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A.$$

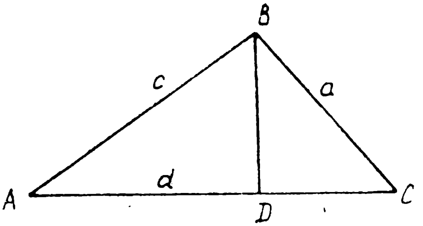

Рис. 105.

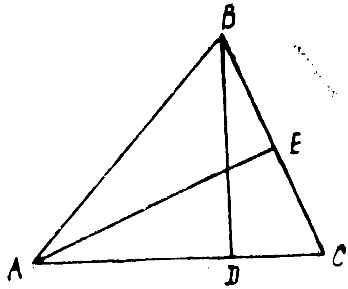

Рис. 106.

Таким образом, из (11) следует, что

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A. \tag{12}$$

Эта зависимость, выражающая сторону сферического треугольника **через две другие стороны и косинус противолежащего угла**, называется теоремой *косинусов.*

Докажем теперь теорему синусов. Из прямоугольного треугольника ABD и BDC (рис. 106) получаем

$$\sin\frac{h}{R}=\sin\frac{c}{R}\sin A,\quad \sin\frac{h}{R}=\sin\frac{a}{R}\sin C.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}.$$

Если опустить теперь высоту из вершины A, то будем иметь

$$\sin\frac{AE}{R}=\sin\frac{c}{R}\sin B=\sin\frac{b}{R}\sin C.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}. \tag{13}$$

Эти зависимости сторон и синусов противолежащих углов составляют теорему синусов сферического треугольника ABC.

О СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В МАЛОМ

Пусть линейные размеры a, b, c сферического треугольника малы по сравнению с радиусом сферы R. Очевидно, эти условия можно осуществить за счет малости указанных линейных размеров или за счет выбора достаточно большого значения R. Из формулы, выражающей теорему косинусов, следует

$$1-\frac{a^2}{2R^2}+\ldots=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}+\ldots\right)+\left(\frac{b}{R}-\ldots\right)\left(\frac{c}{R}-\ldots\right)\cos A.$$

Учитывая в этом равенстве члены до второго порядка малости включительно, мы получим теорему косинусов евклидовой геометрии:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \qquad (14)$$

В случае прямоугольного сферического треугольника с углом имеем $\cos A=0$ и формула (12) в пределе приводит к соотношению

$$a^2=b^2+c^2,$$

составляющему теорему Пифагора в геометрии Евклида. Это равенство следует также из (14) при $A=\pi/2$.

Так как при малых размерах приведенных сторон их синусы в первом приближении пропорциональны аргументам, то из (13) следуют две связи

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

выражающие теорему синусов в евклидовой геометрии.

Следовательно, формулы сферической геометрии для фигур с малыми линейными размерами по сравнению с радиусом сферы совпадают с соответствующими формулами евклидовой геометрии. Аналогичный результат мы получили выше при рассмотрении формул геометрии Лобачевского.

Наше знакомство со сферической геометрией подходит к концу. В заключение установим совпадение формул этой геометрии с соответствующими формулами сферической геометрии в пространстве Лобачевского.

ГЕОМЕТРИЯ СФЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Возьмем в трехмерном пространстве Лобачевского сферу радиуса R с центром в некоторой точке O. На этой сфере индуцируется некоторая сферическая геометрия. Получающаяся совокупность предложений называется геометрией сферы в пространстве Лобачевского. Рассмотрим в этой геометрии прямоугольный треугольник ABC, образованный из дуг $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ больших кругов. Дуги больших кругов здесь, как и в сферической геометрии обычного пространства являются кратчайшими для достаточно близких точек на сфере. Углы между большими кругами понимаются как линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями больших кругов. Предположим, что угол C данного треугольника прямой. Опустим далее из точки B перпендикуляры BA_1 и BC_1 на радиусы OA и OC соответственно. Применяя известные формулы к прямоугольному треугольнику OBC_1 (рис. 107), мы получим

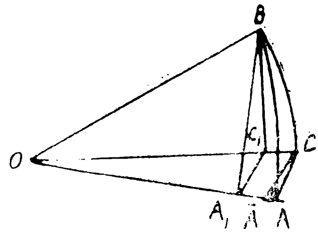

Рис. 107.

$$\operatorname{sh}\frac{BC_1}{\kappa} = \operatorname{sh}\frac{R}{\kappa}\sin\frac{a}{R}.$$

Аналогично из треугольников OBA_1 и A_1BC_1 следует, что

$$\operatorname{sh}\frac{BA_1}{\kappa} = \operatorname{sh}\frac{R}{\kappa}\sin\frac{c}{R},$$

$$\operatorname{sh}\frac{BC_1}{\kappa} = \operatorname{sh}\frac{BA_1}{\kappa}\sin A.$$

Исключая из этих трех соотношений BC_1 и BA_1, мы получим формулу

$$\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{c}{R}\sin A,$$

совпадающую с соответствующей формулой для прямоугольного сферического треугольника в евклидовом пространстве. Выведем теперь теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ABC в геометрии сферы в пространстве Лобачевского. Из треугольника OBC_1 имеем

$$\operatorname{th}\frac{OC_1}{\kappa} = \operatorname{th}\frac{R}{\kappa}\cos\frac{a}{R}.$$

Аналогично из треугольников OBA_1 и OA_1C_1 соответственно следует, что

$$\operatorname{th}\frac{OA_1}{\kappa} = \operatorname{th}\frac{R}{\kappa}\cos\frac{c}{R}, \quad \operatorname{th}\frac{OA_1}{\kappa} = \operatorname{th}\frac{OC_1}{\kappa}\cos\frac{b}{R}.$$

Исключая из полученных трех равенств отрезки OC_1 и OA_1, мы выводим

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}.$$

Эта формула совпадает с соответствующей формулой для прямоугольного треугольника обычной сферической геометрии.

Указанным способом можно убедиться, что в целом геометрия сферы пространства Лобачевского совпадает с геометрией сферы евклидова пространства.

§ 2. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Мы познакомились с простейшими фактами сферической геометрии, геометрии, в которой всякие две прямые пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. Для того, чтобы освободиться от указанного недостатка и прийти к новой геометрии, в которой прямые имели бы не более одной общей точки, условимся считать всякую пару диаметрально противоположных точек сферы за одну точку. Полученную новую поверхность после такого отождествления пар точек сферы будем называть *эллиптической плоскостью* и обозначать символом S_2. Прямые эллиптические плоскости получаются из больших кругов в результате указанного отождествления пар точек и будут по-прежнему замкнутыми линиями. Но построенная плоскость S_2 стала принципиально новым объектом математического исследования.

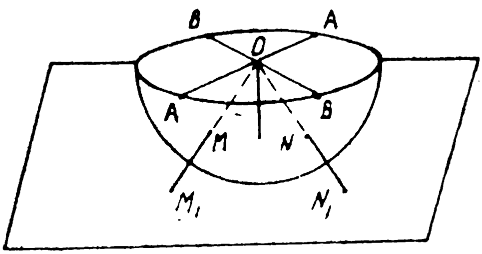

Рис. 108.

Оставаясь замкнутой поверхностью, она утратила свойство двухсторонности. Эллиптическая плоскость является односторонней поверхностью, то есть, раскрашивая какую-нибудь одну сторону этой поверхности, мы раскрасим ее с обеих сторон. В эллиптической геометрии отсутствует понятие точки, лежащей между двумя другими, если они инцидентны прямой, так как две точки на прямой определяют два взаимно дополнительных отрезка. В этой геометрии можно установить понятие разделения двух пар точек A, B и M, N, инцидентных прямой. Пара A, B разделяет пару M, N, если точки M, N лежат в разных отрезках, определенных на данной прямой точками A и B. Можно убедиться, что пара точек A, B разделяет пару M, N тогда и только тогда, когда двойное отношение

$$(ABMN) = AM/BM : AN/BN$$

и четырех точек A, B, C, D отрицательно.

Разумеется, эллиптическую плоскость можно представить себе также в виде полусферы, у которой диаметрально противоположные точки экватора считаются за одну точку (рис. 108). Объекты новой модели находятся в определенных сопоставлениях с объектами известной модели на сфере. Благодаря этому без обращения к аксиомам мы выводим, что эти две модели реализуют одну и ту же геометрию.

Проектирование из центра O евклидова пространства на плоскость, касательную к сфере в точке C, где $OC \perp \alpha$, переводит прямые эллиптической плоскости в прямые евклидовой плоскости α. Если к точкам касательной плоскости присоединить несобственные точки, то построенное центральное проектирование будет взаимно однозначным отображением всех точек эллиптической плоскости на все точки расширенной евклидовой (проективной) плоскости. Мы не будем выписывать систему аксиом эллиптической геометрии и заметим лишь, что ее можно получить из аксиом проективной геометрии и аксиом конгруентности.

Все понятия плоскости S_2 переводятся по отображению в некоторые понятия двухмерной проективной геометрии. Сопоставление соответствующих геометрических образов полученной проективной модели характеризуется следующей таблицей:

„точка"	точка проективной плоскости
„прямая"	прямая проективной плоскости
„равенство отрезков"	равенство прообразов отрезков

Большое достоинство проективной модели состоит в том, что точки и прямые в ней изображаются привычными для нас образами. Однако, при изучении свойств конгруентных фигур сферическая модель становится более удобной.

Заметим также, что прямые и плоскости связки O евклидова пространства определяют новую модель плоскости S_2, соответствующие геометрические образы которой представляются следующей таблицей:

S_2	Связка прямых и плоскостей в E_3
„точка"	Плоскость связки
„разделение двух пар точек"	Разделение двух пар прямых одного и того же пучка прямых
„расстояние между двумя точками"	Величина, пропорциональная углу, между двумя прямыми связки

Реализация эллиптической плоскости в виде сферы, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены, позволяет на этой плоскости ввести координаты (x, y, z), связанные соотношением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

где R называется радиусом кривизны, а обратная величина квадрата радиуса — кривизной. В этих координатах расстояние d между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$R^2 \cos\frac{d}{R} = \pm(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2). \tag{15}$$

Отношение расстояния между точками к радиусу кривизны называется приведенным расстоянием. Две точки плоскости S_2 называются полярными, если соответствующие этим точкам прямые трехмерного евклидова пространства ортогональны. Другими словами, полярные точки характеризуются тем, что приведенное расстояние между ними равняется $\pi/2$. Отрезок прямой, ограниченный полярно сопряженными точками, называется *полупрямой*. Прямая состоит из двух полупрямых и имеет длину, равную π. Очевидно, геометрическое место точек, полярных данной точке $A(x_1, y_1, z_1)$, образует прямую

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0. \tag{15'}$$

Эта прямая называется полярой точки A, а точка A *полюсом* прямой (15').

Прямые, перпендикулярные прямой, пересекаются в ее полюсе. Обратно, всякая прямая, проходящая через полюс данной прямой, будет перпендикулярной к этой прямой. Отсюда следует, что через каждую точку плоскости, отличную от полюса данной прямой, можно провести единственный перпендикуляр к этой прямой. Эти свойства непосредственно вытекают из определения полюсов и поляр.

В геометрии S_2 можно построить взаимно однозначное отображение между точками и прямыми, при котором каждой точке соответствует ее полярная прямая, а каждой прямой — ее полюс. Такое отображение называется **полярным** отображением. В эллиптической плоскости единичной кривизны полярное отображение переводит две прямые a, b в такие точки A, B, что расстояние между этими точками равняется углу между данными прямыми. Отсюда вытекает так называемый **принцип двойственности** в эллиптической планиметрии: если в какой-нибудь теореме эллиптической геометрии заменить слова **«точка», «прямая», «расстояние» и «угол»** соответственно на слова «прямая», «точка», «угол» и «расстояние», то в результате получим также справедливое предложение в этой геометрии. Примером двойственных предложений, т. е. предложений, получающихся одно из другого, указанного правила является следующее: любые две точки определяют прямую, им инцидентную; любые две прямые определяют точку, им инцидентную.

Найдем теперь расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M(x, y, z)$ и $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$. Из формулы (15) следует, что

$$R^2 \cos \frac{ds}{R} = x(x+dx) + y(y+dy) + z(z+dz). \tag{16}$$

Откуда с точностью до бесконечно малых второго порядка включительно имеем

$$ds = \quad 2(xdx + ydy + zdz)$$

Учитывая, что координаты точки $(x+dx, y+dy, z+dz)$ удовлетворяют равенству

$$(x+dx)^2 + (y+dy)^2 + (z+dz)^2 = R^2,$$

будем иметь

$$2(xdx + ydy + zdz) + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Таким образом,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{16'}$$

Полученная формула приводит к очевидному выводу о том, что в малом геометрия эллиптической плоскости совпадает со сферической геометрией. В частности, формулы (12) и (13), выражающие соответственно теорему косинусов и синусов, справедливы в эллиптической геометрии. Формула (16′) показывает также, что движения эллиптической плоскости S_2 представляются вращениями и отражениями евклидова пространства E_3 вокруг начала координат. Указанные движения определяются **ортогональными матрицами**. Так называются матрицы, у которых сумма квадратов элементов каждого столбца равняется единице, а сумма произведений соответствующих элементов разных столбцов равняется нулю. Так как матрицы, отличающиеся знаками, индуцируют одно и то же движение в эллиптической плоскости, то группа движений последней связана.

Читателю рекомендуется самостоятельно разобрать следующие задачи, аналогичные задачам на плоскости Лобачевского (стр. 106—107).

Задача 9. Через данную точку $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $v(v_1, v_2, v_3)$ при условии, что A и v инцидентны.

Задача 10. Найти расстояние от точки $A(a_1, a_2, a_3)$ до прямой $U(u_1, u_2, u_3)$.

Задача 11. Определить угол между прямыми, заданными тангенциальными координатами $U(u_1, u_2, u_3)$ и $V(v_1, v_2, v_3)$.

§ 3. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Пусть в эллиптической плоскости дан треугольник ABC, обозначенной на рис. 109 номером I. Как известно, на данной плоскости порождаются еще три треугольника с теми же вершинами. Эти треугольники обозначены на рисунке номерами II, III, IV. Так как вся эллиптическая плоскость конечна и имеет площадь, равную $2\pi R^2$, то площадь части плоскости, ограниченной вертикальными углами A треугольника I, равняется

$$\frac{2\pi R^2}{\pi} A = 2R^2 A.$$

Аналогично, площадь частей эллиптической плоскости, ограниченных вертикальными углами B и C треугольника ABC, равны $2R^2B$, $2R^2C$.

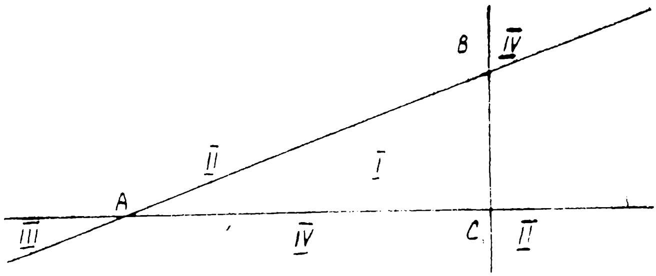

Рис. 109.

С другой стороны, сумма всех трех найденных площадей составляет площадь всей эллиптической плоскости с добавленной удвоенной площадью S_{ABC} данного треугольника ABC. В результате получаем

$$2R^2(A + B + C) = 2\pi R^2 + 2S_{ABC}.$$

Отсюда вытекает, что

$$S_{ABC} = R^2(A + B + C - \pi). \qquad (17)$$

Эта формула показывает, что площадь треугольника пропорциональна его дефекту. Можно доказать, что в геометрии Лобачевского площадь треугольника ABC определяется по формуле, аналогичной (17),

$$S_{ABC} = \kappa^2(\pi - A - B - C),$$

где κ — радиус кривизны.

§ 4. ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется геометрическое место точек $M(x, y, z)$, отстоящих от данной точки $A(x_1, y_1, z_1)$ на данное расстояние r. Точка A называется **центром** окружности, r — ее радиусом.

К понятию окружности можно прийти другим путем, отправляясь от пучков прямых и соответствующих точек на прямых данного пучка. Эти вспомогательные понятия здесь вводятся так же, как в геометрии Лобачевского. Совокупность прямых, пересекающихся в данной точке A, называется **пучком прямых первого** рода. Точка A называется **центром** пучка. **Пучком прямых второго рода** называются прямые плоскости, перпендикулярные данной прямой a. Нетрудно убедиться, что эти пучки двойственны друг другу. В самом деле, поляра центра пучка прямых первого рода ортогонально пересекает все прямые пучка и рассматриваемая совокупность прямых является пучком прямых второго рода. Обратно, прямые пучка второго рода проходят через полюс оси пучка и составляют пучок прямых первого рода. Таким образом, всякий пучок прямых одновременно является пучком первого и второго рода. Предположим, что точки M и N лежат соответственно на прямых m, и n данного пучка прямых. Эти точки M, N называются **соответствующими**, если отрезок MN образует равные односторонние углы с прямыми m и n. **Простейшая кривая** здесь определяется так же, как в планиметрии Лобачевского. Эта кривая по определению является множеством точек, соответствующих точке M на прямой m данного пучка. Полученная таким образом простейшая кривая одновременно является окружностью радиуса r с центром в точке A и эквидистантой с высотой $r' = \pi R/2 - r$. Можно установить, что окружность ортогонально рассекает прямые своего пучка.

Из (15) следует, что уравнение окружности с центром в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и радиусом $r < \frac{\pi R}{2}$ приводится к виду:

$$\pm (xx_1 + yy_1 + zz_1) = R^2 \cos \frac{r}{R}. \tag{18}$$

Наличие двойного знака объясняется тем, что правая часть положительна, а выражение в скобках может иметь значение разных знаков.

Заметим, что множество точек, равноудаленных от двух точек A, B, состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через полюс прямой, определенной данными точками. Одна из этих прямых делит пополам один отрезок AB, а другая — дополнительный. Отсюда вытекает существование одной и только одной окружности, описанной около заданного треугольника ABC. В частности, три точки, не принадлежащие прямой, определяют на эллиптической плоскости четыре треугольника. Таким образом, через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, можно провести четыре окружности, которые на сферической модели определяются следующими тройками точек: ABC, ABC', $AB'C$, $A'BC$, где A', B', C' обозначают точки, диаметрально противоположные соответственно к точкам A, B, C.

Рассмотрим вкратце свойства пар окружностей в эллиптической плоскости. В сферической геометрии две окружности, как и в евклидовой плоскости, могут не пересекаться друг с другом, касаться или пересекаться в двух точках. В эллиптической геометрии свойства пар окружностей более многообразны. Чтобы убедиться в этом, мы предположим, что эллиптическая плоскость интерпретирована в виде сферы, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены. В этом случае, окружность эллиптической плоскости представляется на такой сфере в виде двух окружностей, лежащих в параллельных и равноудаленных от центра сферы плоскостях. Обратно, две окружности, полученные от пересечения сферы симметрическими относительно ее центра плоскостями, изображают в эллиптической геометрии одну окружность. Сделанные замечания позволяют читателю составить представление о новых случаях взаимных положений двух окружностей по сравнению с сферической или евклидовой планиметрией. На рис. 110, понятном без дополнительных объяснений, изображены две окружности, пересекающиеся в четырех точках. На других двух рисунках изображены две окружности с тремя общими точками и касающиеся друг друга в одной из них (рис. 111), соответственно с двумя общими точками и касающиеся друг друга в этих точках (рис. 112).

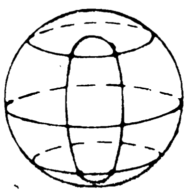
Рис. 110.

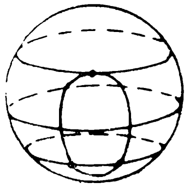
Рис. 111.

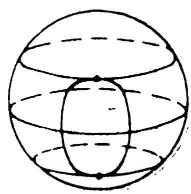
Рис. 112.

Задача 12. Перечислить возможные случаи взаимного расположения двух окружностей (C_1, r_1) и (C_2, r_2) с центрами в точках C_1, C_2 и радиусами соответственно r_1, r_2.

§ 5. О ГЕОМЕТРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

По аналогии с двухмерным случаем можно построить геометрию трехмерной сферы евклидова пространства четырех измерений при условии, что любая пара диаметрально противоположных ее точек считается за точку нового *(эллиптического)* пространства S_3.

Эллиптическое пространство можно получить также из проективного трехмерного пространства путем присоединения к его аксиомам дополнительных аксиом конгруентности.

Каждая из этих моделей имеет свои достоинства и недостатки. Например, с наглядной точки зрения большое преимущество проективной модели состоит в том, что прямые пространства изображаются в виде прямых проективного пространства. Однако при изучении метрических вопросов наиболее удобной становится сферическая модель или близкая к ней модель на связке прямых и плоскостей четырехмерного евклидова пространства. Эта последняя модель имеет многочисленные применения.

Приведем сравнительную таблицу геометрических образов связки прямых с центром в точке O и пространства S_3, соответствующих друг другу при указанной интерпретации:

Точка	прямая связки
прямая	плоский пучок прямых
плоскость	трехмерный пучок прямых
„разделение двух пар точек"	разделение двух пар прямых одного и того же плоского пучка
„расстояние между двумя точками"	величина угла между двумя прямыми связки

Предположим далее, что в объемлющем евклидовом пространстве задана некоторая прямоугольная декартова система координат $oxyzt$ с началом в данной точке O. Таким образом, координаты точек эллиптического пространства удовлетворяют соотношению

$$x^2+y^2+z^2+t^2=R^2,$$

где R называется радиусом кривизны, а обратная величина квадрата радиуса — кривизной неевклидова пространства.

Расстояние $d \leqslant \frac{\pi R}{2}$ между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$ определяется по формуле

$$R^2 \cos\frac{d}{R} = \pm (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2) \tag{25}$$

Геометрически расстояние между точками A и B выражает длину дуги большого круга, соответствующую центральному углу AOB.

Две точки эллиптического пространства называются **полярно сопряженными**, если соответствующие им плоскости евклидова пространства E_4 ортогональны друг другу. Отрезок прямой, ограниченный полярно сопряженными точками, называется полупрямой. Прямая состоит из двух полупрямых и имеет длину равную π. Геометрическое место точек, полярно сопряженных данной точке $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$, есть плоскость, определяемая уравнением

$$xx_1+yy_1+zz_1+tt_1=0. \tag{26}$$

Плоскость (26) называется **полярной** плоскостью точки A, а точка A — полюсом этой плоскости.

Если точка M пробегает плоскость α, то её полярные плоскости (в силу взаимности понятия полярно сопряженных точек) проходят через полюс A плоскости α (рис. 113).

Легко видеть, что все прямые, перпендикулярные данной плоскости, проходят через ее полюс (рис. 114). Таким образом, через любую точку пространства, отличную от полюса данной плоскости, можно провести к этой плоскости один и только один перпендикуляр. Две различные плоскости всегда пересекаются по прямой и имеют общий перпендикуляр — прямую, соединяющую их полюсы. Приведенная длина общего перпендикуляра, очевидно, равна углу между плоскостями (рис. 115). Здесь, как и в планиметрии, можно построить взаимно однозначное отображение между точками и плоскостями, при котором каждой точке соответствует ее полярная плоскость, а каждой плоскости — ее полюс. Такое отображение называется полярным отображением. В эллиптическом пространстве единичной кривизны полярное отображение переводит две плоскости α, β, в такие две точки A, B, что расстояние между этими точками равняется углу между данными плоскостями.

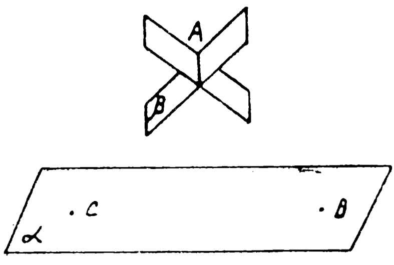

Рис. 113.

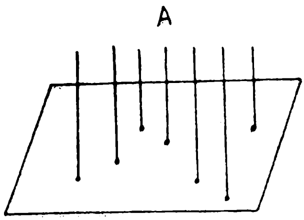

Рис. 114.

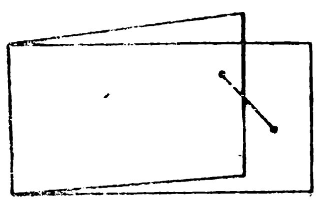
Рис. 115.

Отсюда вытекает так называемый принцип двойственности в эллиптическом пространстве: если в какой-нибудь теореме эллиптической геометрии заменить слова «точка», «плоскость», «расстояние», «угол» соответственно на слова «плоскость», «точка», «угол», «расстояние», то в результате получим предложение, которое будет также справедливым в данной геометрии. Примерами двойственных предложений являются следующие: 1) две точки определяют прямую, им инцидентную; две плоскости определяют прямую, им инцидентную; 2) три точки, не инцидентные прямой, определяют единственную плоскость, инцидентную этим точкам; три плоскости, не инцидентные одной прямой, определяют единственную точку, инцидентную этим плоскостям и т. д. Так как понятие параллельных прямых, принадлежащих одной плоскости в пространстве S_3, отсутствует, то в рассматриваемой геометрии существует лишь два рода связок — первого и второго рода. **Связка прямых** первого рода по определению представляет собой совокупность прямых эллиптического пространства, проходящих через данную точку O, называемую центром связки. **Связка прямых второго рода** представляет собой совокупность прямых, перпендикулярных к данной плоскости α — так называемой базисной плоскости связки.

Построенные связки прямых двойственны друг другу. Действительно, прямые связки первого рода перпендикулярны к полярной плоскости центра связки, т. е. образуют связку прямых второго рода. Обратно, прямые связки второго рода проходят через полюс базисной плоскости. Простейшие поверхности, как мы вводили их в геометрию Лобачевского, сводятся здесь к сферам, центр которых совпадает с центром связки. Эти же сферы по двойственности будут эквидистантными поверхностями с опорной плоскостью, совпадающей с базисной плоскостью связки.

Сферы, построенные на прямых одной и той же связки, называются концентрическими. С возрастанием радиуса сфера приближается к полярной плоскости центра сферы. В пределе сфера радиуса $\pi R/2$ вырождается в дважды взятую плоскость. Из формулы расстояния между двумя точками следует, что уравнение сферы с центром в точке $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и радиусом r приводится к виду:

$$\pm (xx_1 + yy_1 + zz_1 + tt_1) = R^2 \cos \frac{r}{R}. \qquad (27)$$

Два слова о движениях в рассматриваемой геометрии.

Вращения и отражения евклидова пространства E_4 вокруг начала координат индуцируют движения в эллиптическом пространстве. Ортогональные матрицы четвертого порядка, отличающиеся лишь знаком, определяют одно и то же движение в S_3. Так как отражение от начала координат в E_4 принадлежит компоненте группы вращений и отражений, содержащей единицу, то группа движений будет двухсвязной.

В заключение параграфа дадим общее определение неевклидовых геометрий. Мы установили, что геометрия Лобачевского на плоскости (в пространстве) совпадает с геометрией сферы $'S_2$ ($'S_3$) чисто мнимого радиуса пространства Минковского трех (четырех) измерений.

Аналогично геометрия сферы S_2 (S_3) евклидова пространства трех (четырех) измерений приводит к эллиптической геометрии двух (трех) измерений. Если исходить из аксиоматического построения эллиптической геометрии, то указанное предложение доказывается как теорема. Это доказательство незначительно отличается от того, которое мы привели выше для планиметрии Лобачевского. Но можно поступить другим образом. Разобранные конкретные примеры неевклидовых геометрий двух и трех измерений позволяют положить в основу следующее общее определение неевклидовых геометрий.

Неевклидовыми геометриями по определению называются **геометрии, которые индуцируются в $(n+1)$-мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространстве на n-мерных сферах вещественного и чисто мнимого радиуса.**

Эти сферы являются простейшими **римановыми** пространствами определенной и неопределенной метрики и образуют так называемый класс пространств постоянной ненулевой кривизны. Каждое из таких пространств допускает совокупность движений, зависящую от $n\ (n+1)/2$ параметров.

§ 6. РАВНООТСТОЯЩИЕ ПРЯМЫЕ

Остановимся лишь на некоторых наиболее ярких особенностях прямых эллиптического пространства. Прежде всего полярное отображение, как мы видели, есть определенное взаимно однозначное отображение между точками и плоскостями пространства S_3: каждой точке соответствует ее полярная плоскость, а каждой плоскости — ее полюс. Что будет соответствовать в указанном отображении точкам данной прямой a? Нетрудно убедиться, что соответствующие плоскости образуют пучок с осью a'. Это свойство взаимно, т. е. точки прямой a', в свою очередь, отображаются на плоскости, проходящие через прямую a. Прямые a и a' называются **взаимно полярными** и они обладают рядом интересных свойств. Отметим, в частности, что взаимно полярные прямые не лежат в одной плоскости.

Из определения взаимно полярных прямых следует также, что всякая плоскость, принадлежащая одной из них, перпендикулярна к другой, ей полярной прямой. Далее прямая, соединяющая любые две точки A, B взаимно полярных прямых соответственно a и a', перпендикулярна к каждой из них, и расстояние между ними равняется полупрямой.

Действительно, полярная плоскость любой точки A прямой a проходит через взаимную поляру a', т. е. расстояние от A до каждой точки B прямой a' равняется полупрямой. Перпендикулярность AB к взаимно полярным прямым вытекает из того, что AB есть общий перпендикуляр плоскостей, полярных точкам A и B. Отсюда следует, что если точка пространства не лежит на данной прямой и ее поляре, то из нее можно опустить к этой прямой единственный перпендикуляр.

В эллиптическом пространстве существуют другие случаи расположения двух прямых, которые не будут взаимно полярными и не лежат в одной плоскости. Эти последние в дальнейшем называются **скрещивающимися прямыми.** Таким образом, непересекающиеся прямые могут быть полярными или скрещивающимися.

Рассмотрим подробнее скрещивающиеся прямые. Из свойства пар полярных следует, что если скрещивающиеся прямые a и b имеют общий перпендикуляр MN, то полярная к нему прямая $M'N'$ (рис. 116) является также общим перпендикуляром тех же прямых. В самом деле, так как по предположению прямые MN, $M'N'$ взаимно полярны, то они перпендикулярны к любой прямой, их пересекающей. В частности, каждая из них будет перпендикулярна к MM' и NN', что и требовалось доказать.

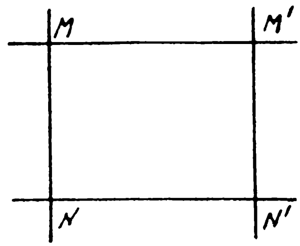

Рис. 116.

Предположим далее, что нам даны скрещивающиеся прямые a и b. Если перпендикуляры, опущенные из двух различных точек одной из этих прямых на другую, одинаковой длины, то данные прямые имеют общий перпендикуляр EF.

Действительно, пусть из точек A, B прямой a перпендикуляры AC, BD, опущенные на прямую b, равны $AC = BD$. Предположим также, что E, F обозначают середины кратчайших отрезков AB и CD соответственно. Докажем, что EF будет общим перпендикуляром данных прямых. В самом деле, прямоугольные треугольники AEC, BED равны, следовательно, $CE = DE$ (рис. 117, a). Аналогично $\triangle CEF = \triangle DEF$, таким образом, $\angle CFE = \angle DFE$, т. е. EF перпендикулярна к прямой CD. Так как $\angle FEC = \angle FED$ и $\angle CEA = \angle DEB$, то перпендикулярна также к прямой AB, что и требовалось доказать.

Другим общим перпендикуляром к данным скрещивающимся прямым будет прямая $E'F'$, полярная EF. Эти общие перпендикуляры реализуют экстремальные расстояния d_1, d_2 между данными прямыми a и b. Одно из расстояний является максимальным, а другое — минимальным. Скрещивающиеся прямые с двумя различными экстремальными расстояниями иногда называют расходящимися прямыми.

Если две скрещивающиеся прямые A_1B_1, A_2B_2 имеют **два общих перпендикуляра** A_1A_2 и B_1B_2 одной длины d, то перпендикуляр M_1M_2, опущенный из любой точки M_1 первой прямой на вторую будет общим перпендикуляром той же длины. Действительно, так как общие перпендикуляры имеют одинаковую длину, то по доказанному выше E_1E_2, где E_1E_2 середины соответствующих отрезков A_1B_1 и A_2B_2, будет общим перпендикуляром. Рассматривая равные треугольники $A_1A_2B_2$, $A_2B_1B_2$, получим далее, что $A_1B_2 = A_2B_1$. Затем $\angle A_2A_1B_1 = \angle A_2A_1B_2$, откуда $A_1B_1 = A_2B_2$, т. е. общий перпендикуляр E_1E_2 будет той же длины d. Возьмем теперь наименьший отрезок A_1E_1 или B_1E_1, содержащий точку M_1, и повторим предыдущие рассуждения. В

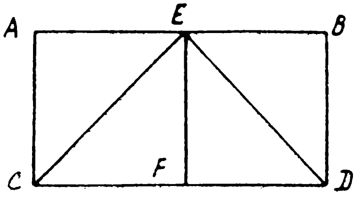

Рис. 117,*а*.

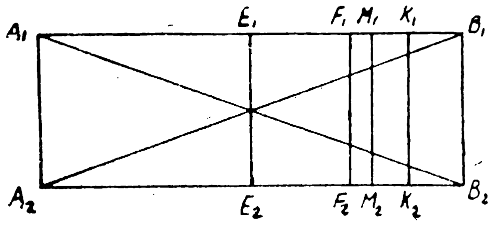

Рис. 117,*б*.

результате получим общий перпендикуляр F_1F_2, длина которого также равна d (рис. 117, *б*). Повторяя эти построения, мы придем к общему перпендикуляру K_1K_2 длины d, причем K_1 может совпасть с M_1 и тогда теорема доказана или она будет как угодно близка к M_1. В последнем случае в силу непрерывности

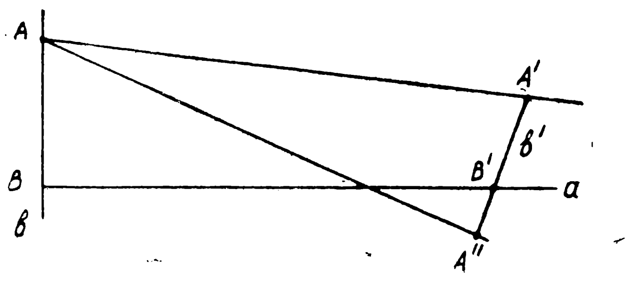

Рис. 118.

изменения длины перпендикуляра заключаем также, что $K_1K_2 = d$. Наконец, из четырехугольника $K_1M_1M_2K_2$ следует, что M_2M_1 составляет с прямой A_1B_1 прямые углы. Скрещивающиеся прямые, имеющие бесчисленное множество общих перпендикуляров одной длины, называются равноотстоящими или параллельными в смысле Клиффорда. Итак, в пространстве прямые могут пересекаться или не пересекаться. Последние же могут быть взаимно-полярными, расходящимися и параллельными в смысле Клиффорда прямыми.

Из приведенных рассуждений легко следует способ построения параллельных в смысле Клиффорда прямых. Действительно, пусть дана точка A, не лежащая на данной прямой a и ее поляре a'. Докажем, что через точку A можно провести две прямые, параллельные прямой a в смысле Клиффорда. Для доказательства этого утверждения опустим из точки A перпендикуляр b на прямую a. Подошву перпендикуляра обозначим буквой B (рис. 118). Далее строим прямую b', полярную прямой b. Пусть B' является точкой пересечения b' и прямой a. Отложим от точки B' на прямой b' отрезки $B'A'$ и $B'A''$, конгруентные отрезку BA. Очевидно, прямые AA', AA'' параллельны в смысле Клиффорда прямой a.

§ 7. ПОВЕРХНОСТИ РАВНЫХ РАССТОЯНИЙ

Большой интерес в изучении геометрии имеют поверхности, точки которых удалены от данной прямой на данное расстояние. Приведем определение этих поверхностей.

Геометрическое место точек эллиптического пространства S_3, равноотстоящих от прямой a на данное расстояние $r < \pi R/2$ называется **поверхностью равных расстояний** или поверхностью Клиффорда. Прямая a называется осью поверхности равных расстояний, а расстояние r — ее радиусом. Поверхность эта аналогична круговому цилиндру в евклидовом пространстве, однако, она имеет вторую ось a' — поляру прямой a, от которой точки поверхности удалены на расстояние $r' = \pi R/2 - r$.

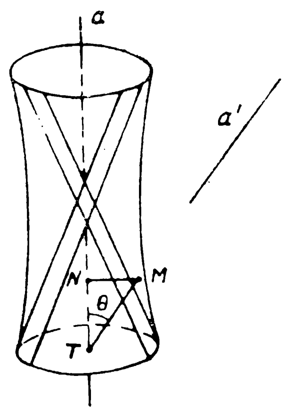

Рис. 119.

Поставим задачу — получить уравнение поверхности равных расстояний радиуса r с данной осью a. Для этого выберем систему декартовых прямоугольных координат (x, y, z, t) в евклидовом четырехмерном пространстве так, чтобы точки X, T координатного тетраэдра $XYZT$ пространства S_3 лежали на оси a поверхности равных расстояний. По условию текущая точка $M(x, y, z, t)$ искомого геометрического места удалена от оси a на расстояние r. Опустим из этой точки M перпендикуляр MN на ось поверхности a (рис. 119) и рассмотрим треугольник MNT, в котором угол при вершине N прямой, а угол $MTZ = \Theta$. Применяя формулу (1) к катету $MN = r$ указанного треугольника, будем иметь

$$\sin\frac{r}{R} = \sin\frac{\rho}{R}\sin\Theta. \qquad (28)$$

С другой стороны, так как радиус вектор $\overline{OM}$ образует с осью OT угол $\frac{\rho}{R}$, то

$$t = R\cos\frac{\rho}{R}, \quad z = R\sin\frac{\rho}{R}\cos\Theta. \tag{29}$$

Учитывая эти формулы и основную связь координат произвольной точки пространства:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2,$$

мы заключаем, что

$$x^2 + y^2 = R^2\sin^2\frac{r}{R}. \tag{30}$$

Исключая из соотношений (28) и (29) величины ρ и Θ, получим искомое уравнение поверхности равных расстояний:

$$x^2 + y^2 = R^2\sin^2\frac{r}{R}. \tag{31}$$

Следовательно, поверхность равных расстояний является поверхностью второго порядка относительно координат (x, y, z, t). Заменяя в уравнении (31) величину R^2 на сумму квадратов координат точки M, мы придем к однородному уравнению этой поверхности:

$$(x^2 + y^2)\cos^2\frac{r}{R} = (z^2 + t^2)\sin^2\frac{r}{R}. \tag{32}$$

Нетрудно доказать, что поверхность (32) содержит **два прямолинейных семейства образующих**. В самом деле, представим уравнение (32) в виде

$$x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2\frac{r}{R}(z^2 + t^2)$$

или

$$\left(x + z\operatorname{tg}\frac{r}{R}\right)\left(x - z\operatorname{tg}\frac{r}{R}\right) = \left(t\operatorname{tg}\frac{r}{R} + y\right)\left(t\operatorname{tg}\frac{r}{R} - y\right).$$

Рассмотрим далее два уравнения первой степени

$$\lambda\left(x + z\operatorname{tg}\frac{\lambda}{R}\right) = \mu\left(y + t\operatorname{tg}\frac{r}{R}\right), \tag{33}$$

$$\mu\left(x - z\operatorname{tg}\frac{r}{R}\right) = \lambda\left(t\operatorname{tg}\frac{r}{R} - y\right),$$

где λ, μ — некоторые числа, не равные одновременно нулю. При фиксированных λ и μ эти уравнения **определяют** прямую, при переменных λ, и μ — бесконечную систему прямых. Перемножая уравнения (33) почленно, мы получим первоначальное уравнение (32). Отсюда следует, что каждая из прямых семейства (33) целиком лежит на поверхности равных расстояний. Действительно, если координаты (x, y, z, t) некоторой точки эллиптического пространства удовлетворяют обоим уравнениям (33), то они удовлетворяют также уравнению (32). Следовательно, каждая точка прямой, определяемая уравнениями (33) при любых не равных одновременно нулю λ, μ, лежит на поверхности равных расстояний (32), т. е. на ней расположена вся эта прямая.

Нетрудно также показать, что через каждую точку поверхности равных расстояний проходит одна и только одна прямая системы (33). В самом деле пусть $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ произвольная точка данной поверхности и $y_0^2 + t_0^2 \neq 0$ (в случае $y_0^2 + t_0^2 = 0$ необходимо $x_0^2 + z_0^2 \neq 0$). Так как координаты ее удовлетворяют уравнению (32), то

$$\left(x_0 + z_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R}\right)\left(x_0 - z_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R}\right) = \left(t \operatorname{tg}\frac{r}{R} + y_0\right)\left(t \operatorname{tg}\frac{r}{R} - y_0\right).$$

Нам нужно найти такие числа λ и μ, чтобы соответствующая им прямая из множества (33) проходила через точку A. Следовательно, для определения λ и μ имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda\left(x_0 + z_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R}\right) &= \mu\left(y_0 + t_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R}\right), \\ \mu\left(x_0 - z_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R}\right) &= \lambda\left(t_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R} - y_0\right). \end{aligned} \qquad (*)$$

Если $y_0 + t_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R} \neq 0$, то из первого уравнения этой системы находим величину отношения μ/λ, которая удовлетворяет также и второму уравнению. Найденное отношение позволяет получить вполне определенную пару уравнений вида (33), т. е. относит определенную прямую системы (33). Искомая прямая проходит через точку A, так как λ и μ выбирались с соблюдением условий (*).

Если же $y_0 + t_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R} = 0$, то $y_0 - t_0 \operatorname{tg}\frac{r}{R} \neq 0$ и решение системы (*) относительно $\frac{\lambda}{\mu}$ можно найти, исходя из второго ее уравнения. Аналогично предыдущему, можно доказать, что через точку и в этом случае проходит единственная прямая системы (33). Если $y_0^2 + t_0^2 = 0$, то $x_0^2 + z_0^2 \neq 0$ и в приведенных рассуждениях y_0, t_0 необходимо заменить на x_0, z_0 соответственно.

Таким образом, уравнения (33) при различных значениях λ, μ порождают бесконечную систему прямых, которые лежат на поверхности равных расстояний и покрывают ее сплошь.

Таким образом, поверхность равных расстояний является линейчатой поверхностью, т. е. поверхностью, составленной из прямых системы (33). **Другой системой** прямолинейных образующих поверхности (32) будет система, определенная уравнениями

$$\lambda\left(x+z\operatorname{tg}\frac{r}{R}\right)=\mu\left(t\operatorname{tg}\frac{r}{R}-y\right),$$
$$\mu\left(x-z\operatorname{tg}\frac{r}{R}\right)=\lambda\left(t\operatorname{tg}\frac{r}{R}+y\right). \qquad (34)$$

Уравнения (34) определяют на поверхности равных расстояний вторую систему прямых, аналогичную системе (33). Следовательно, на поверхности (32) расположены **два** семейства прямолинейных образующих так, что через **каждую точку данной поверхности проходит по одной прямой из каждого семейства**. Это — равноотстоящие прямые (параллели Клифорда) по отношению к оси поверхности (32). Уравнение (32) показывает, что поверхность равных расстояний можно задать в параметрическом виде следующим образом:

$$x=R\sin\frac{r}{R}\cos u,\ z=R\cos\frac{r}{R}\cos v,$$
$$y=R\sin\frac{r}{R}\sin u,\ t=R\cos\frac{r}{R}\sin v, \qquad (35)$$

где u, v обозначают криволинейные координаты. Вычислим теперь расстояние между двумя бесконечно близкими точками (u, v), $(u+du, v+dv)$ поверхности равных расстояний. Дифференциалы координат текущей точки поверхности выражаются равенствами:

$$dx=-R\sin\frac{r}{R}\sin u\,du,\ dz=-R\cos\frac{r}{R}\sin v\,dv; \qquad (36)$$
$$dy=R\sin\frac{r}{R}\cos u\,du,\quad dt=R\cos\frac{r}{R}\cos v\,dv.$$

Подставляя эти дифференциалы в формулу

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+dt^2,$$

мы получим

$$ds^2=\left(R\sin\frac{r}{R}du\right)^2+\left(R\cos\frac{r}{R}dv\right)^2. \qquad (37)$$

Если ввести координаты (u^1, v^1) по формулам

$$u^1=R\sin\frac{r}{R}u;\ v^1=R\cos\frac{r}{R}v,$$

то из (37), получим

$$ds^2=du^{1 2}+dv^{1 2}. \qquad (38)$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности произвольной точки поверхности равных расстояний осуществляется евклидова геометрия, однако, в целом эта геометрия значительно отличается от евклидовой.

§ 8. КРАТКИЙ ОБЗОР ДАЛЬНЕЙШЕГО ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В заключение мы остановимся на понятиях риманова пространства и пространства аффинной связности, обобщающих рассмотренные выше неевклидовы пространства.

Чтобы определить римановы пространства, обратимся снова к евклидовой плоскости. Квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M(x, y)$ и $M'(x+dx, y+dy)$ этой плоскости в декартовой системе координат (x, y) равняется сумме квадратов приращений или дифференциалов координат точки, т. е.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Выписанная формула выражает теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника с катетами, равными абсолютным величинам dx, dy, и гипотенузой MM'. Правая часть равенства называется основной метрической формой или линейным элементом евклидовой плоскости.

Введем теперь полярную систему координат (ρ, φ) с полюсом в начале декартовой системы координат и полярной осью, совпадающей с осью Ox. Так как полярные и декартовы координаты произвольной точки плоскости связаны по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

то линейный элемент в полярных координатах приводится к виду

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

В правой части мы снова имеем лишь члены с квадратами дифференциалов координат точки. Эти квадраты дифференциалов входят с коэффициентами, равными соответственно 1 и ρ^2. Обратим внимание на то, что коэффициент при $d\varphi^2$ переменный и равняется квадрату координаты ρ.

Можно убедиться, что линейный элемент этой плоскости в криволинейной системе координат (x_1, x_2) представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов независимых переменных с коэффициентами, зависящими от координат точки:

$$ds^2 = A(x_1, x_2)\, dx_1^2 + 2B(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + C(x_1, x_2)\, dx_2^2.$$

Метрическая форма позволяет вычислить длины дуг линий, а также углы между линиями и площади фигур. В частности, длина дуги линии $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ограниченной точками $M_0(t_0)$ и $M_1(t_1)$, определяется по формуле

$$s = \int_{t_0} \sqrt{A\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2B\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + C\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Полученную метрическую форму, очевидно, можно снова привести заменой переменных к сумме квадратов дифференциалов. Произвольная квадратичная форма не обладает таким свойством и приводит нас к так называемой римановой геометрии. Более точно, **двухмерное риманово пространство** есть такое дифференцируемое пространство, в котором квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M(x_1, x_2)$ и $M'(x_1+dx_1, x_2+dx_2)$ задается при помощи невырожденной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2)\,dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + g_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2.$$

Мы считаем, что эта форма инвариантна при обратимых преобразованиях переменных. Она часто называется **метрической формой** или линейным элементом римановой геометрии.

Важным примером римановой геометрии является внутренняя геометрия поверхности. Действительно, пусть поверхность задается уравнением

$$z = f(x, y),$$

где x, y, z — декартовы координаты текущей точки поверхности. Вставляя $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ в выражение линейного элемента евклидова пространства

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

мы убедимся, что метрическая форма поверхности приводится к виду

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dy^2.$$

Так как эта форма невырождена, то она порождает некоторую риманову геометрию. Метрическая форма поверхности определяет так называемую внутреннюю геометрию поверхности. Свойства и величины фигур в ней рассматриваются с точностью до изгибаний поверхности, т. е. таких ее преобразований, при которых сохраняются длины кривых.

Прежде всего такие понятия, как длина дуги, линии, угол между линиями и площадь фигуры, являются понятиями внутренней геометрии. В этой геометрии изучаются кратчайшие линии (геодезические) на поверхности, соединяющие на ней любые две достаточно близкие точки.

Метрическая форма поверхности позволяет построить понятие **полной кривизны** — важнейшее понятие внутренней геометрии. К этому понятию обычно приходят путем рассмотрения кривизны нормальных сечений. Так называются линии пересечения поверхности с плоскостями, проходящими через нормаль к поверхности в некоторой ее точке. Среди кривизн этих плоских линий существуют экстремальные кривизны. Они называются *главными* кривизнами, а их произведение — *полной кривизной* поверхности в данной ее точке.

Необходимо отметить, что коэффициенты метрической формы изменяются при переходе к новой координатной системе, однако, полная кривизна поверхности в каждой точке остается инвариантной.

Обратим теперь внимание на поверхности постоянной кривизны. На них кривизна в каждой точке равняется одному и тому же числу. Поверхности, налагающиеся на плоскость, имеют нулевую кривизну. На этих поверхностях в малом осуществляется евклидова геометрия. Сфера есть поверхность постоянной положительной кривизны. На ней в малом осуществляется эллиптическая гео-

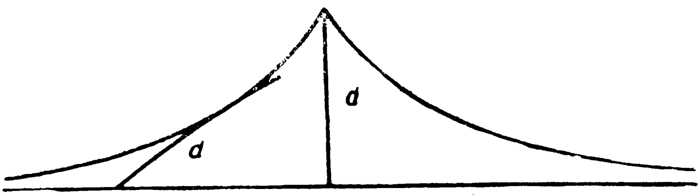

Рис. 120.

метрия. Роль прямых играют дуги больших кругов. Существуют также и поверхности постоянной отрицательной кривизны. Чтобы получить одну из таких поверхностей, возьмем в евклидовой плоскости кривую, обладающую следующим свойством. Отрезок касательной к этой кривой в любой ее точке, заключенный между точкой касания и точкой пересечения касательной с некоторой прямой, имеет одну и ту же длину, не зависящую от выбора точки касания. Эта кривая называется трактрисой, а данная прямая — осью (рис. 120). Если трактрису завращать вокруг ее оси, то она опишет поверхность, называемую псевдосферой (рис. 121).

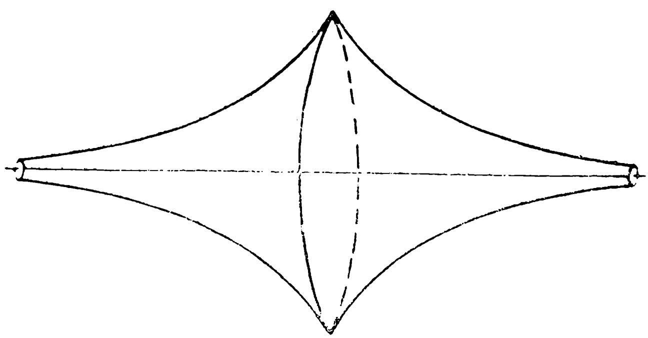

Рис. 121.

Псевдосфера обладает знаменательным свойством. Она является поверхностью постоянной отрицательной кривизны $K = -1/a^2$, где a означает длину касательного отрезка трактрисы. На псевдосфере локально осуществляется геометрия Лобачевского. Роль прямых здесь играют дуги кратчайших линий.

Итак, обе неевклидовы геометрии — геометрия Римана и геометрия Лобачевского являются в локальном смысле геометриями поверхностей соответственно постоянной положительной и отрицательной кривизны. Отсюда вытекает, что поверхности постоянной кривизны (в том числе и поверхности нулевой кривизны) обладают большой метрической однородностью. Они допускают по себе перемещения без растяжений и складок достаточно малых кусков с тремя степенями подвижности.

В случае сферы такие перемещения реализуются даже без изменения формы фигуры. Но вращение достаточно малого куска на цилиндре вокруг какой-нибудь его точки сопровождается уже изменением формы. Аналогичное положение имеет место при перемещении куска кругового конуса вдоль образующей.

Мы задержались на внутренней геометрии поверхностей потому, что она лежит в основе построения двухмерной римановой геометрии. Более точно все понятия внутренней геометрии поверхности формально переносятся в риманову геометрию. Так, например, длины дуг линий, углы между ними и площади фигур в римановой геометрии вводятся по формулам, выражающим одноименные понятия во внутренней геометрии поверхности через коэффициенты ее метрической формы.

Кривизна риманова пространства двух измерений определяется по формуле, выражающей полную кривизну поверхности через коэффициенты ее метрической формы. Геодезические линии определяются также формально уравнениями, выражающими кратчайшие линии на поверхности, и т. д.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Две метрические формы могут порождать одну и ту же риманову геометрию. В этом случае одна форма переходит в другую при помощи обратимого преобразования переменных. Обратное предложение также справедливо. В частности, риманово пространство будет евклидовым, если его метрическая форма приводится заменой переменных к форме с постоянными коэффициентами. Новые переменные определяют декартову систему координат. Эта система — прямоугольная, если форма приводится к виду, содержащему лишь квадраты дифференциалов, причем коэффициенты при квадратах равны единице. Таким образом, декартовы системы координат существуют лишь в пространствах, в которых в малом осуществляется евклидова геометрия.

До сих пор речь шла о римановых пространствах двух измерений. Если теперь формально ввести метрическую форму от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то придем к *риманову* пространству n-измерений. Его метрика определяется невырожденной метрической формой вида

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j,$$

причем предполагается, что функции $g_{ij}(x)$ симметричны относительно нижних индексов, т. е.

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x).$$

Многие факты римановой геометрии двух измерений легко переносятся на пространства n измерений. В n-мерных римановых пространствах вводится также понятие кривизны пространства. Оно позволяет выделить важный класс пространств постоянной кривизны, моделями которых могут служить определенные выше неевклидовы пространства.

Пространства постоянной кривизны допускают движения, зависящие от максимального числа параметров. Движениями называются отображения риманова пространства на себя, сохраняющие метрику пространства. Таким образом, при движениях сохраняются длины дуг линий и другие метрические свойства фигур. Совокупность движений составляет группу, так как произведение двух движений и преобразования, обратные к движениям, снова являются движениями.

Предположим теперь, что двухмерное риманово пространство допускает транзитивную группу движений. Группа преобразований транзитивна, если произвольную точку пространства можно перевести преобразованиями группы в любую точку пространства. (Нетранзитивная группа называется также интранзитивной). Так как по предположению группа движений транзитивна, то кривизна пространства постоянна и группа необходимо содержит три параметра. В этом случае риманово пространство в малом наложимо на одну из плоскостей — евклидову, плоскость Лобачевского или Римана.

Если группа интранзитивна, то метрическая форма пространства приводится к виду

$$ds^2 = g_{11}(x_2)\,dx_1^2 \pm dx_2^2.$$

Пространство в этом случае наложимо на поверхность вращения и группа содержит лишь один параметр. Итак, мы приходим к следующему выводу.

Фигуры в двухмерных римановых пространствах допускают или три степени подвижности, или одну. Пространства, допускающие три степени подвижности, имеют постоянную кривизну. Если же пространства допускают одну степень подвижности, то они наложимы в малом на поверхность вращения. Таким образом, случай пространств полной группы движений с двумя степенями недвижности твердых тел не имеет места. Этот вывод наглядно изображен в первом столбце таблицы 1. В его клетках отмечены возможные степени подвижности. Штриховка означает отсутствие римановых пространств с указанной в клетке степенью подвижности. Аналогичная картина наблюдается в римановых пространствах трех и четырех измерений. Эти пространства имеют лишь одну лакуну длины 1, что наглядно изображено штриховкой одной клетки во втором и третьем столбцах указанной таблицы. В случае римановых пространств пяти измерений лакуна имеет длину, равную 3. Здесь и в дальнейшем речь идет о порядках полных групп движений (синонимах — степени подвижности, степени свободы твердых тел).

Таблица 1

Степени подвижности твердых тел в римановых пространствах v_n

3	6	10	15	$n(n+1)/2$	Пространства первой лакунарности (постоянной кривизны)
2	5	9	14	$n(n+1)/2-1$	ПЕРВАЯ ЛАКУНА
1	4		13		
v_2	3		12		
	2			$n(n-1)/2+1$	Пространства второй подвижности
	1			$n(n-1)/2$	
	v_3	3 2			ВТОРАЯ ЛАКУНА
		1		$\frac{(n-1)(n-2)}{5}+5$	Пространства третьей лакунарности
		v_4			
В клетках столбцов 1—5 указаны степени подвижности в пространствах 2, 3, 4, 5 измерений			3		
			2	3	
			1	2	
			v_5	1	Типы пространств и лакун
				v_n	

С ростом числа измерений длина интервала запрещенных степеней свободы также растет. Длина первого интервала (лакуны) равняется $n-2$. Любопытно также отметить, что при достаточно большом n появляются другие запрещенные интервалы (другие лакуны). В предпоследнем столбце таблицы 1 второй интервал запрещенных степеней (вторая лакуна) изображен штриховкой горизонтальными отрезками. В последнем столбце таблицы указаны типы пространств, реализующих указанные в предыдущем столбце подвижности.

Первой строке отвечают n-мерные римановы пространства, в которых твердые тела допускают максимальное число степеней свободы, равное $\frac{n(n+1)}{2}$. Это пространство постоянной кривизны — евклидово пространство, пространства Лобачевского и эллиптические пространства.

Далее следуют пространства с непосредственно предшествующими степенями подвижности $\frac{n(n-1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}+1$. В таблице они именуются пространствами второй лакунарности.

Несколько слов о римановых пространствах, допускающих преобразования подобия, т. е. такие преобразования, при которых фигуры переходят в подобные. При преобразованиях подобия сохраняются углы, а длины соответствующих линий пропорциональны, причем коэффициент растяжения не зависит от точки пространства.

Совокупность всех преобразований подобия составляет группу. Движения образуют инвариантную подгруппу этой группы подобий, причем число параметров подгруппы на единицу меньше числа параметров всей группы.

Вопрос об определении возможных степеней подвижности твердых и подобно изменяемых тел частично решен для пространств знакоположительной метрики. В общем случае известны лишь те степени подвижности и реализующие их пространства, которые отмечены в таблице 1. Таким образом, основная проблема о распределении степеней подвижности и соответствующих им пространств различных лакунарностей остается еще открытой.

В евклидовом пространстве существуют поверхности, обладающие следующим замечательным свойством. Преобразование подобия в евклидовом трехмерном пространстве любой такой поверхности приводит к поверхности, которая лишь положением отличается от исходной. Интересующие нас поверхности являются моделями двухмерных римановых пространств, допускающих подобные преобразования. Среди указанных поверхностей имеются и наложимые на поверхности вращения. На этих последних степень подвижности равняется 2, в общем случае она равна 1. Напомним, что степень подвижности подобно изменяемых фигур в евклидовой плоскости равняется 4.

Перейдем теперь к пространствам аффинной связности. Читателю хорошо известно, что коэффициенты текущей точки любой прямой евклидовой плоскости в декартовой системе координат (x, y) выражаются линейно относительно некоторого аффинного параметра t. Таким образом, производные второго порядка от x, y по переменному t обращаются в нуль:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Эта система уравнений сохраняет свой вид при линейных невырожденных преобразованиях переменных (x, y). При более же общих преобразованиях координат вид указанной системы уравнений меняется. Например, совокупность прямых линий евклидовой плоскости в полярной системе координат характеризуется системой уравнений.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = x_1 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2x_1}{dt} = -\frac{2}{x_1}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt},$$

где через x_1, x_2 обозначены соответственно ρ и φ. Аналогичную систему дифференциальных уравнений получим в другой криволинейной системе координат

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = A_{11}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2A_{12}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + A_{22}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = B_{11}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2B_{12}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + B_{22}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2.$$

Обратим внимание на то, что правые части этой системы уравнений представляют собой однородные многочлены второй степени относительно производных первого порядка. Эта система уравнений задается шестью функциями A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{22} от двух переменных. Совокупность указанных функций составляет объект, называемый объектом аффинной связности.

Двухмерное пространство аффинной связности можно определить формальным образом. Это — дифференцируемое пространство, в котором задан объект аффинной связности. Последнее означает, что в достаточно малой окрестности любой точки пространства задается система дифференциальных уравнений линий (геодезических), обобщающих прямые евклидова пространства, причем на этих линиях определен аффинный параметр t.

Простейшим примером пространства аффинной связности будет обычная аффинная плоскость. В качестве другого примера можно привести двухмерное риманово пространство. Все геометрические свойства и величины, выражаемые в терминах геодезических линий и аффинного параметра на них, принадлежат геометрии аффинной связности.

Следует отметить, что два объекта аффинной связности могут порождать одну и ту же геометрию. В этом случае один объект переходит в другой при помощи некоторого обратимого преобразования. Обратное предложение очевидно. Объект аффинной связности обычной плоскости обладает тем свойством, что в некоторых системах координат все его координаты обращаются в нуль. Эти системы координат называются аффинными.

Пространства аффинной связности n измерений определяются заданием в n-мерном дифференцируемом пространстве семейства линий и аффинного параметра на них, обобщающих геодезические двухмерные пространства. Фактически в простых кусках многообразия задается совокупность $\frac{n^2(n+1)}{2}$ функций от n переменных, определяющих правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений геодезических указанного выше вида. Из этой системы уравнений следует, что через каждую точку пространства в заданном направлении проходит лишь одна геодезическая.

Рассмотрим вкратце движения в этих пространствах. Они определяются, естественно, как отображения пространства на себя, при которых сохраняется объект аффинной связности. Таким образом, при движениях фигуры переходят в равные фигуры в смысле данной геометрии. Совокупность всех движений здесь также составляет группу. Изучению движений посвящено в последние 20 лет около 500 работ. Исследования ведутся одновременно по нескольким направлениям.

Одно из этих направлений характеризуется изучением свойств твердых тел и их степеней подвижности в заданных пространствах. Оно — наиболее естественное и геометрическое.

Другое направление — теоретико-группового характера и составляет одну из интересных теорий современной математики Речь идет о построении в пространстве, в котором действует группа преобразований, инвариантной метрики или связности.

В настоящее время усиленно развивается третье направление, пограничное к первым двум, в котором пространства и группа подлежат определению. К нему приводят нас следующие соображения. Известно, что обычное аффинное пространство n измерений допускает группу движений, содержащую $r = n^2 + n$ параметров. Изучая движения в пространствах с числом параметров, непосредственно предшествующим $n^2 + n$, автор пришел к следующему [2] выводу. Максимальное число параметров в группах движений пространств аффинной связности ненулевой кривизны равняется точно n^2. Другими словами, не существует кривых пространств аффинной связности, в которых бы твердые тела имели r степеней подвижности, где $n^2 < r < n^2 + n$ (см. табл. II).

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим пространства двух измерений. Фигуры в двухмерных пространствах допускают не более шести степеней подвижности. Если степень подвижности равняется точно шести, то пространство является обычной аффинной плоскостью. Число степеней подвижности в кривых пространствах аффинной связности не более четырех. Таким образом, не существует пространств аффинной связности двух измерений, в которых бы фигуры имели пять степеней подвижности. Это следствие мы наглядно изобразили в первом столбце таблицы 2. Штриховка клетки здесь означает отсутствие пространства с указанным в ней числом степеней подвижности. Аналогичное положение наблюдается в трехмерных пространствах аффинной связности. Здесь также имеется лишь одна лакуна, но длина ее равняется двум. Случаи пространств с числом всех степеней подвижности 11 или 10 отсутствуют. Этот факт наглядно изображен наклонной штриховкой соответствующих клеток во втором столбце таблицы 2.

Таблица 2

Степени подвижности твердых тел в пространствах аффинной связности A_n

6	12	n^2+n	Пространства первой лакунарности (обычные аффинные пространства)
5	11	n^2+n-1	ПЕРВАЯ ЛАКУНА
4	10		
3	9		
2			
1		n^2 n^2-1	Пространства второй лакунарности
A_2			ВТОРАЯ ЛАКУНА
	3	n^2-n+1 n^2-n n^2-n-1 n^2-n-2	Пространства третьей лакунарности
	2		
	1		ТРЕТЬЯ ЛАКУНА
	A_3		
		n^2-2n+5	Пространства четвертой лакунарности
		3	Типы пространств и лакун
		2	
		1	
		A_n	

В клетках столбцов 1—3 указаны степени подвижности в пространствах 2, 3 и n—измерений

Любопытно отметить, что с ростом числа измерений пространства растет длина интервала запрещенных степеней. Длина первого запрещенного интервала (первой лакуны) равняется $n-1$. С другой стороны, при больших значениях n наряду с этой первой лакуной появляются другие запрещенные интервалы. С ростом числа измерений пространства n растет также и число таких интервалов. Так, в предпоследнем столбце таблицы 2 вторая лакуна отмечена штриховкой клеток горизонтальными отрезками. Этот интервал имеет длину $n-2$. Третья лакуна имеет длину $n-7$. На таблице она изображена штриховкой вертикальными отрезками.

В последнем столбце приведены типы пространств первой, второй и т. д. лакунарностей. Степени подвижности их указаны в предшествующем столбце.

Еще два слова по поводу таблицы 2. Первой строке таблицы соответствуют обычные аффинные пространства, степень подвижности которых равняется n^2+n. Далее следуют пространства с непосредственно предшествующей подвижностью.

На таблице 2 указаны интервалы возможных степеней подвижности, известные до настоящего времени. Необходимо отметить, что в целом проблема отыскания этих интервалов для пространств n — измерений остается еще открытой.

В настоящее время усиленно изучаются обобщения римановых пространств и пространства аффинной связности. Приведем некоторые из них. Метрика риманова пространства, как указывалось выше, задается дифференциальной квадратичной формой. Ослабляя последнее ограничение, мы придем к понятию **финслерова пространства.** Линейный элемент в этом пространстве задается однородной функцией первого измерения относительно дифференциалов координат. Метрика пространства

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x,\ \dot{x})\,dx_i dx_j, \qquad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt}\right)$$

по-прежнему предполагается невырожденной, т. е. определитель $|g_{ij}\ x,\ \dot{x}|\neq 0$. В последнее время эта метрика применяется при обобщениях теории тяготения Эйнштейна. Если правая часть будет полиномом второй степени, то финслерово пространство становится римановым.

Аналогичным образом можно прийти к **пространствам путей.** Они характеризуются набором функций $H_i(x,\dot{x})$ однородных второго измерения относительно производных первого порядка $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$. Пути определяются следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+H_i(x,\ \dot{x})=0.$$

Если функции $H_i(x,\ \dot{x})$ будут однородными полиномами второй степени относительно дифференциалов координат, то пространство путей сводится к обычному пространству аффинной связности.

Приведенные примеры позволили построить Б. Л. Лаптеву общую теорию пространств с объектами, зависящими от точки и некоторого геометрического образа.

Добавление 1.

ГЕОМЕТРИЯ И ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Большое значение в геометрии имеют аксиомы конгруентности. В самом деле, эти аксиомы позволяют определить так называемые движения, как отображения множества точек на себя, при которых фигуры переходят в конгруентные. Мы уже отмечали выше, что совокупность всех движений евклидовой плоскости составляет группу с тремя степенями подвижности — двумя параллельными переносами и вращениями вокруг точки. По существу аксиомы конгруентности описывают свойства группы движений.

Обратно, если вместо аксиом конгруентности положить в основу построения геометрии определяемую ими группу преобразований при сохранении других групп аксиом, то мы снова придем (см. II, гл. § 3) к евклидовой геометрии.

Полученный вывод допускает важные обобщения. Действительно, если в роль группы движений взять, например, более общую группу линейных невырожденных преобразований вида

$$\bar{x} = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$\bar{y} = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

то мы придем к понятию конгруентности, характеризующему аффинную геометрию. В этой геометрии отсутствуют расстояния между двумя точками. Основной инвариантной величиной здесь является простое отношение трех точек A, B, C, лежащих на прямой (AC/BC). При указанных преобразованиях прямые переходят в прямые, причем пересекающиеся прямые преобразуются в пересекающиеся, а параллельные — в параллельные. Любые два треугольника в аффинной геометрии конгруентны. В ней окружности и эллипсы неразличимы, т. е. любую линию из множества окружностей и эллипсов можно перевести в любую линию из того же множества при помощи некоторого невырожденного линейного преобразования.

Приведем еще один пример. Возьмем теперь вместо группы линейных преобразований группу невырожденных дробно линейных (проективных) преобразований вида

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad \bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Эта группа позволяет прийти к более общему понятию равенства фигур, характеризующему проективную геометрию. Основной инвариантной величиной здесь будет двойное отношение точек A, B, C, D, лежащих на прямой $AC/BC : AD/BD$. При преобразованиях проективной группы прямые переходят в прямые, но эллипсы, гиперболы и параболы неразличимы. Специализируя выбор параметров в проективной группе преобразований, можно получить группы движений евклидовой геометрии, геометрии Римана и Лобачевского.

Рассмотренные примеры позволяют подметить **общую идею** теоретико-группового подхода к геометрии. Действительно, возьмем какое-нибудь множество X элементов, называемых точками, и некоторую его основную группу преобразований G. Всякое подмножество данного множества условимся называть фигурой, а само множество X — пространством. В геометрии множества X и основной группы преобразований G вводится понятие равенства фигур. Одна фигура равна другой, если существует преобразование основной группы, переводящее первую фигуру во вторую. Понятие равенства обладает свойствами рефлексивности, взаимности и транзитивности. Геометрические свойства и величины фигур инвариантны относительно преобразований основной группы.

Задача геометрии пространства с данной основной группой преобразований G состоит в отыскании инвариантных при преобразованиях основной группы свойств и величин фигур. Другими словами, искомые свойства и величины принадлежат данной фигуре и всем тем, которые получаются из нее всевозможными преобразованиями основной группы.

В этом состоит основное содержание эрлангенской программы Клейна. Указанный подход приводит к бесчисленному множеству геометрий. Он позволяет очертить область исследований каждой из них и вскрыть глубокие связи между геометриями различных пространств. Теоретико-групповые идеи постепенно стали руководящими. Вступительная лекция Клейна приобрела программный характер по дальнейшему изучению ряда новых пространств и соответствующих им дифференциальных геометрий.

С точки зрения эрлагенской программы Клейна n-мерными неевклидовыми геометриями являются геометрии об инвариантных свойствах и величинах групп вращений $(n+1)$-мерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Исходя из этой теоретико-групповой установки, мы обратим внимание на существование двух евклидовых геометрий, с которыми постоянно приходится иметь дело при решении практических задач. Читатель хорошо помнит, что кроме обычно рассматриваемых прямых, плоскостей и пространств в геометрии иногда изучаются *ориентированные* соответственно прямые, плоскости и пространства. К ориентированной прямой математики пришли в результате перенесения в геометрию следующего физического свойства. Прямая линия может быть описана движущейся частицей двумя способами соответственно движением в одном или противоположном направлении.

Изучать такую ориентированную прямую можно при помощи декартовых систем координат таких, что координата x точки M

в данной системе координат (x) связана с координатами x' той же точки в любой другой системе координат (x') зависимостью $x = x' + a$, где a обозначает координату нового начала в старой системе координат (x). Очевидно, прямая линия определяет две различные ориентированные прямые.

Аналогично можно построить ориентированную плоскость. Процесс выделения той или другой ориентированной прямой (плоскости) называется ориентированием данной прямой (плоскости). Остановимся на некоторых понятиях и фактах геометрии ориентированной плоскости. Так, наряду с обычным определением угла как совокупности двух лучей с общим началом в новой плоскости можно ввести понятие ориентированного угла. Ориентированным углом называется совокупность двух упорядоченных лучей с общим началом, называемым вершиной ориентированного угла. Ориентированный угол с вершиной O, первой стороной OA и второй OB будет обозначать обычным символом $\angle AOB$. Нетрудно определить понятие равенства ориентированных углов. Два ориентированных угла равны, если они равны в обычном смысле и, кроме того, одинаково ориентированны. Теперь из условия, что стороны одного ориентированного острого угла параллельны соответствующим сторонам другого ориентированного острого угла, невозможно еще заключить о равенстве таких углов. Эта теорема станет справедливой, если углы будут одной и той же ориентации.

Ориентированный угол, в котором стороны OA и OB совпадают, называется нулевым ориентированным углом. Если же направления сторон принадлежат дополнительным лучам некоторой прямой, то угол называется ориентированным развернутым углом.

Аналогичное положение имеем с другими ориентированными фигурами на плоскости. Например, наряду с обычным определением треугольника как совокупности трех точек A, B, C, не инцидентных прямой, и трех сторон AB, AC, BC, вводится понятие ориентированного треугольника. За ориентированный треугольник принимается обычный треугольник, вершины которого упорядочены. Треугольники ABC, BCA, CAB считаются одной ориентации; треугольники ACB, CBA, BAC будут противоположной ориентации. Все эти треугольники в обычной геометрии равны друг другу. В геометрии же ориентированной плоскости мы имеем два различных типа треугольников, к одному из которых принадлежат три треугольника одной ориентации, а к другому остальные три треугольника противоположной ориентации.

Многие теоремы школьной геометрии о треугольниках несправедливы в геометрии ориентированной плоскости. Например, ясно, что теорема о равенстве треугольников по трем сторонам несправедлива в ориентированной геометрии. Но эта теорема о равенстве треугольников станет снова справедливой, если треугольники будут иметь одинаковую ориентацию.

Два слова о свойствах других фигур. Всякая фигура в ориентируемой геометрии порождает при движении фигуры одной и той же ориентации. Более того, две фигуры в ориентируемой геометрии равны, если они равны в обычном смысле и имеют одинаковую ориентацию.

В геометрии ориентированной плоскости можно ввести второе скалярное (знакопеременное) произведение двух векторов a и b, обычно обозначаемое символом $a \times b$. Предположим, что векторы a, b имеют соответственно координаты a_x, a_y и b_x, b_y.

Знакопеременным произведением двух векторов a, b по определению называется величина определителя второго порядка, строки которого составлены из координат этих векторов:

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что знакопеременное произведение двух векторов инвариантно при собственных преобразованиях декартовых координат x, y. Далее, абсолютная величина знакопеременного произведения выражает площадь параллелограмма, построенного на векторах a, b. Ясно также, что это произведение положительно, если ориентация данных векторов совпадает с ориентацией координатных векторов, и это произведение отрицательно, если a, b имеют противоположную ориентацию.

Таким образом, мы приходим к двум различным двухмерным евклидовым геометриям. Из приведенных выше рассмотрений следует, что в одной из этих геометрий симметрии входят в группу движений, а в другой они в группу движений не входят. Отсюда следует, что если движение в обычной плоскости принадлежит к одному из четырех типов: 1) симметрии относительно прямой; 2) параллельному переносу; 3) вращению; 4) скользящей симметрии, то движение в ориентированной плоскости представляет собой либо параллельный перенос либо вращение плоскости вокруг некоторой точки.

Задание ориентированной плоскости можно осуществить при помощи декартовых координатных систем с определителем преобразования, равным 1 в формулах перехода от одной системы координат к любой другой из нашей совокупности. Выбирая эти координатные системы в качестве основных, мы получаем из обычной евклидовой плоскости новую ориентированную евклидову плоскость. Ясно, что обычная плоскость определяет две различные ориентированные плоскости соответственно той или другой ориентации координатного треугольника.

Нетрудно обобщить сказанное выше на трехмерное евклидово пространство. Ориентированное евклидово пространство определяется группой собственных движений. Симметрии относительно плоскости в геометрии ориентированного пространства не являются движениями, и соответствующие фигуры при таких преобразованиях будут лишь симметрическими, но не равными.

Понятие ориентированности обобщается на аффинные пространства и дифференцируемые многообразия. В основе ориентированности аффинного пространства (дифференцируемого многообразия) лежит группа невырожденных линейных (дифференцируемых) подстановок с положительной величиной определителя (якобина) преобразования.

Добавление II.

О СИМВОЛИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЯХ И ФОРМАЛИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ

Большое значение в теории символических исчислений имеет так называемое исчисление предикатов. Оно является основой построения важных исчислений в математике. Прежде чем описать вкратце исчисление предикатов и показать его значение в геометрии, остановимся сначала на простейшем из логических исчислений — исчислении высказываний.

Всякое предложение, относительно которого имеет смысл ставить вопрос об истинности или ложности, называется высказыванием. Над высказываниями можно производить некоторые операции, позволяющие из одного или двух высказываний получать новое высказывание. Мы познакомимся, в частности, с операциями конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания. Конъюнкция $A \wedge B$ двух высказываний A, B определяется как такое высказывание, которое принимает значение истинности (*И*), если значения обоих исходных высказываний принимают значение *И*, во всех других случаях конъюнкция считается принимающей ложное (*Л*) значение. Таким образом, значения этого высказывания в зависимости от значений высказываний A и B представляются в виде таблицы 6. Дизъюнкция $A \vee B$ двух высказываний A, B означает высказывание, принимающее значение *Л*, если оба высказывания принимают значение *Л*, во всех других случаях дизъюнкция $A \vee B$ принимает значение *И*. Указанные значения дизъюнкции представлены в таблице 7.

Таблица 6

A	B	$A \wedge B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

Таблица 7

A	B	$A \vee B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

Операция $A \to B$ — импликация двух высказываний A, B определяется следующим образом. Высказывание $A \to B$ принимает значение *Л*, если высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Во всех случаях других $A \to B$ по определению принимает значение *И*. Операция отрицания позволяет по высказыванию A строить высказывание $\bar{A}$, значение истинности которого устанавливается по следующему правилу. Высказывание $\bar{A}$ принимает значение *И* или *Л*, если высказывание A принимает соответственно значение *Л* или *И*. Значения импликации и отрицания представляются таблицами 8, 9. Всякое простое или сложное высказывание, полученное из простых в результате применения указанных операций, называется формулой.

Таблица 8

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Таблица 9

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Обратим внимание на следующее свойство формул. Во множестве формул, соответствующим высказываниям, существуют формулы, принимающие всегда истинное значение при любых значениях *И* или *Л*, входящих в нее элементарных (атомарных) высказываний. Например, такими истинными будут формулы

$$A \to \bar{\bar{A}},\ A \to A \vee B,\ A \wedge B \to A.$$

Действительно, каждая из данных формул принимает всегда истинные значения, как показывают соответствующие таблицы истинности (табл. 10—12).

Таблица 10

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$	$A \to \bar{\bar{A}}$
И	Л	И	И
Л	И	Л	И

Таблица 11

A	B	$A \vee B$	$A \to B \vee B$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	И	И
Л	Л	Л	И

Таблица 12

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \to A$
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	Л	И

Тождественно истинные формулы, как мы убедимся, приобретают важное значение при построении исчисления высказываний. Прежде всего уточним понятие формулы: 1) всякое переменное высказывание $A, B, \ldots, x, y, \ldots$ по определению есть формула; 2) если T и L формулы, то

$$T \wedge L,\ T \vee L,\ T \to L,\ \bar{T}$$

есть также формулы; 3) других формул в исчислении высказываний нет. Легко убедиться, путем составления соответствующих таблиц истинности, что каждая из нижеследующих формул принимает всегда истинные значения

1. $A \to (B \to A)$.
2. $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
3. $(A \to B) \to (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$.
4. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \quad B \to C))$.
5. $(A \to B) \to (\overline{B} \to A)$.
6. $A \wedge B \to A$.
7. $A \wedge B \to B$.
8. $A \to A \vee B$.
9. $B \to A \vee B$.
10. $A \to \overline{\overline{A}}$.
11. $\overline{\overline{A}} \to A$.

Указанные формулы можно принять в качестве базисных формул исчисления высказываний. В этом исчислении наряду с буквами, скобками, знаками логических операций, правилами образования формул и аксиомами 1—11 вводятся также правила вывода истинных формул:

1) правило отделения. Если T, $T \to L$ истинные формулы, то L истинная формула;

2) правило подстановки. Предположим, что нам дана истинная формула T, содержащая, например, букву A. Тогда заменяя в данной формуле букву A всюду, где она входит, произвольной формулой L, мы также получим истинную формулу.

Теоремы являются утверждениями (формулами), выводимыми из аксиом. Чтобы дать точное определение понятия теоремы, мы остановимся сначала на понятиях доказательства и выводимости. Доказательством данной формулы (утверждения) T называется такая конечная последовательность формул

$$T_1,\ T_2, \ldots T_n = T,$$

которая заканчивается данной формулой T и каждый ее член T_1, $T_2, \ldots$, является аксиомой или получается по правилам вывода из одной или нескольких предыдущих формул этой последовательности. Формула T, полученная в результате доказательства, называется доказуемой.

Понятие доказуемости обобщается следующим образом. Возьмем некоторую совокупность формул (утверждений) Γ, называемых посылками. Говорят, что формула T **выводима** из посылок Γ, если существует конечная последовательность формул вида

$$T_1,\ T_2, \ldots, T_n = T,$$

которая также заканчивается формулой T, и каждый ее член является доказуемой формулой или одной из формул—посылок или выводится по правилу отделения из предыдущих членов этой последовательности. Доказуемые формулы часто называются **теоремами** данного исчисления.

В исчислении высказываний предложения нас интересовали лишь с точки зрения истинности или ложности без учета внутренней структуры самого предложения. Однако, мы часто пользуемся в математике такими предложениями, которые не являются высказываниями. Например, предложение «x меньше y» не является высказыванием и потому не рассматривается в исчислении высказываний. Данное предложение будет высказыванием при условии, если указать, какие конкретно числа x, y имеют в виду. Полагая $x = 2$, $y = 3$ или $x = 5$, $y = 4$, мы получим предложения соответственно «2 меньше 3», «5 меньше 4», которые будут уже высказываниями. Можно сказать, что предложение «x меньше y» является неопределенным высказыванием и зависит от двух предметных переменных. Это предложение не является высказыванием, но становится таковым при каждом конкретном наборе значений указанных переменных. В этом случае говорят, что «$x < y$» является предикатом от переменных y, x (двухместным предикатом). Аналогично, предложения «x — простое число», $x \leqslant y$, $z = x + y$ не являются высказываниями и представляют собою соответственно одноместный, двухместный и трехместный предикаты, определенные, скажем, на множестве натуральных чисел.

Рассмотрим еще предложение «x — четное число». Оно также не является высказыванием, однако при подстановке вместо конкретного натурального числа, будем получать каждый раз определенное высказывание. До подстановки конкретных значений данное предложение, можно сказать, выражало неопределенное высказывание (предикат). После этих примеров дадим определение понятия предиката.

Предикатами (неопределенными высказываниями, высказывательными формами) называются функции.

$$\varphi(x),\ f(y,z), \ldots,$$

принимающие лишь два значения *И*, *Л* при условии, что наборы значений аргументов принадлежат данной области определения.

Из приведенного определения следует, что нульместные предикаты совпадают с высказываниями.

Предикаты так же, как и высказывания, допускают операции конъюнкции или умножения ($\wedge$), дизъюнкции или сложения ($\vee$), отрицания (—) и импликации ($\rightarrow$).

Таким образом, с указанными выше переменными и операциями исчисления высказываний в исчислении предикатов вводятся дополнительно предметные и предикатные переменные x, y, z соответственно $P(x)$, $Q(x)$, $Q(x)$ и еще две следующие операции. Квантор общности (x) для предиката $P(x)$ означает высказывание $(x)P(x)$ «для каждого x предикат $P(x)$ принимает значение *И*. Квантор существования $(\exists x)$ для предиката $P(x)$ означает высказывание $(\exists x) P(x)$ „существует x такой, что предикат $P(x)$ принимает значение *И*“.

В теории предикатов формулы содержат не только высказывания, но и многоместные предикаты без кванторов, и с кванторами, связанные между собою названными выше операциями.

Основные истинные формулы исчисления предикатов составляются так, чтобы при содержательном чтении их получались всегда истинные или общезначимые формулы. Они состоят по форме из указанных выше аксиом 1 — 11 исчисления высказываний и следующих двух аксиом явно содержащих кванторы:

$$12.\ (x) P(x) \to P(y), \qquad 13.\ P(y) \to (\exists x) P(x).$$

Кроме того, правила вывода подбираются таким образом, чтобы они позволяли от указанных основных формул переходить к другим истинным формулам. Приведем формулировку этих правил — правило отделения и правило подстановки.

1. Правило отделения. Если T, $T \to L$ истинные формулы, то L — истинная формула.

2. Правило подстановки. Предположим, что дана истинная формула, содержащая, например, двухместный предикат. Тогда в эту формулу можно подставить на место предиката формулу с двумя свободными переменными, не допуская при этом коллизии букв, т. е. в подставленной формуле не должны встречаться буквы, которые в первоначальной формуле были под знаком квантора общности или существования. Полученная в результате подстановки формула также считается истинной.

Мы не даем здесь сводку всех правил подстановки и обращаем внимание лишь на идею их применения; правил введения кванторов совершенно не касаемся.

В общем случае символическое исчисление так же, как исчисления высказываний и предикатов, определяется заданием символов, правил образований формул, заданием конечного числа базисных формул — аксиом и правил вывода.

Наряду с содержательным рассмотрением совместности, независимости и полноты аксиоматических систем в теории символических исчислений вводятся также важные понятия внутренней совместности, независимости и полноты. Эти понятия вызвали к жизни методы исследования, составляющие так называемую теорию доказательств.

Если в исчислении нельзя доказать формулу A и формулу $\overline{A}$, являющуюся отрицанием первой, то оно называется **внутренне совместным** или непротиворечивым.

Внутренняя независимость данной аксиомы означает ее невыводимость из оставшихся аксиом по правилам вывода данного исчисления. Исчисление называется **внутренне полным**, если при присоединении к его основным формулам любой невыводимой формулы T возникает противоречие. В математической логике доказывается, что исчисление высказываний является внутренне непротиворечивым и полным; исчисление предикатов также является внутренне непротиворечивым, но оно не обладает внутренней полнотой.

В первой главе (стр. 10) мы ввели понятие полноты системы аксиом в смысле изоморфизма любых двух моделей. Эти понятия полноты не эквивалентны. Нетрудно убедиться, что система аксиом, полная в смысле изоморфизма моделей, будет внутренне полной: Обратное положение несправедливо.

Исчисление предикатов позволяет формализовать теорию множеств, если последняя определена некоторой системой аксиом. Мы приведем аксиоматику Цермело — Френкеля, в которой основными понятиями являются понятия «множества» и «содержит» (синонимы — принадлежит, есть член (элемент). Понятие «содержит» обозначается символом $\in$. Опираясь на эти основные понятия, можно определить понятие подмножества (включение) следующим образом. Предположим, что нам даны два множества y, z, и если любой член (элемент) первого множества является членом второго множества, т. е. $x \in y$, влечет $x \in z$, то y называется подмножеством множества z (y включается в z). Затем вводится понятие собственного подмножества (если y включается в z и множество z содержит некоторый элемент, а множество y его не содержит, то y называется собственным подмножеством множества z). Эти понятия обозначаются символами $y \subseteq z$ соответственно $y \subset z$.

Понятие равенства множеств определяется следующим образом. Два множества x и y **равны**, если каждое множество, включающее одно из них, включает также и другое. Законность такого определения следует из того, что фундаментальная группа множества в общей теории множеств — тривиальна.

АКСИОМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Два множества, содержащие одни и те же элементы, равны.

2. Если x и y являются множествами, то неупорядоченная пара $\{x, y\}$ является множеством.

3. Если x является множеством множеств, то совокупность элементов последних является множеством. (Полученное множество называется множеством — суммой).

4. Совокупность всех подмножеств данного множества является множеством.

5. Предположим, что x есть множество, а F любое свойство, имеющее смысл для каждого элемента данного множества. Тогда совокупность элементов множества x, обладающих указанным свойством, является множеством.

6. Если x есть множество непустых множеств, попарно не содержащих общих элементов, то его множество — сумма содержит по крайней мере одно подмножество, которое содержит в точности один общий элемент с каждым членом множества x.

7. Существует множество, которое содержит в качестве своего элемента пустое множество и которое вместе с любым своим элементом x включает множество $\{x\}$.

8. Область значений **любой однозначной функции,** определенной на множестве, является множеством.

9. Всякое непустое множество x содержит такой элемент y, что x и y не имеют общих элементов.

Аксиомами 1 — 9 исчерпывается аксиоматика Цермело — Френкеля теории множеств. Обратим внимание читателя на аксиомы 5 и 8. Они отличаются от других аксиом тем, что в формулировке указанных аксиом используются произвольные свойства и функции соответственно. Эти аксиомы в действительности выражают бесчисленное множество аксиом, соответствующих конкретным свойствам и функциям, и называются они **схемами аксиом**.

Мы ограничимся лишь этими замечаниями и не будем далее обсуждать приведенные девять аксиом или доказывать на их основе различные теоремы теории множеств. Аксиомы эти составляют наиболее распространенный вариант аксиоматического определения теории множеств. Мы привели его здесь потому, что на русском языке почти нет никаких пособий, из которых читатель мог бы получить простейшие представления по вопросу обоснования математики в целом.

Эти аксиомы теории множеств можно было записать в символической форме подобно тому, как мы делаем в следующем дополнении для аксиом Вейля евклидовой геометрии. Все это представляется сделать читателю в качестве полезного упражнения.

Присоединяя к аксиомам 1 — 13 исчисления предикатов (с равенством) выписанные аксиомы 1 — 9 теории множеств, мы получим систему аксиом формализованной теории множеств.

Более того, если к аксиомам 1 — 13 и 1 — 9 формализованной теории множеств мы присоединим аксиомы некоторой математической дисциплины, выраженные в терминах теории множеств, то получим аксиоматику соответствующей формализованной математической структуры.

Например, присоединяя к аксиомам 1 — 13 исчисления предикатов с равенством и аксиомам 1 — 9 теории множеств аксиомы Гильберта, мы получим аксиоматику формализованной геометрии. Она содержит всего 13 аксиом исчисления предикатов (без аксиом равенства), 9 аксиом теории множеств и, например, 20 аксиом гильбертовской аксиоматики. Ясно, что понятия алфавита, формулы и истинной формулы должны быть уточнены. Соответствующим образом уточняются и правила вывода. Излагать уточнения и приводить доказательства теорем формализованной геометрии здесь по-видимому нецелесообразно. Мы ограничимся лишь двумя примерами применения символических исчислений к формализованной геометрии.

Поставим вопрос — можно ли построить исчисление, выводимые формулы которого интерпретировались бы в виде символической записи теорем геометрии. Ясно, что базисные формулы искомого исчисления должны слагаться из базисных формул исчисления предикатов и формул, соответствующих аксиомам рассматриваемой геометрии. Правила вывода подбираются так, чтобы выполнялись следующие два условия. Во-первых, если существует реализация системы аксиом, в которой некоторое предложение не имеет места, то соответствующая ему формула не является выводимой в исчислении. Во-вторых, для заданной невыводимой формулы существует реализация системы, в которой соответствующее предложение не имеет места.

Существование такого исчисления следует из важной теоремы Геделя о полноте в смысле доказуемости тождественных формул исчисления предикатов.

Возникает также другой важный вопрос — можно ли построить такую систему аксиом евклидовой геометрии, которая была бы дедуктивно полной, т. е. всякое предложение, выраженное через основные понятия, можно доказать или опровергнуть при помощи формально логического вывода из аксиом. Отрицательный ответ на указанный вопрос вытекает из *другой* замечательной теоремы Геделя о *несуществовании исчисления,* выводимые формулы которого интерпретировались бы в виде всех истинных предложений арифметики целых чисел. Другими словами, он показал, что даже обычная арифметика не может быть полностью аксиоматизирована. Из этой теоремы и возможности отображения геометрических образов и отношений соответственно на упорядоченные пары вещественных чисел и соотношения между ними следует, что *евклидову геометрию,* как и обычную арифметику, *невозможно полностью аксиоматизировать.*

Указанная теорема Геделя окончательно опровергает установки формалистов. Из нее следует несостоятельность тезиса о тождественности всех истинных предложений с совокупностью доказуемых формул средствами символического исчисления. Программа Гильберта о формализации геометрии и вообще математики принципиально не осуществима.

Однако значение исследований Гильберта и его учеников трудно переоценить. Эти исследования несомненно являются важнейшими в обоснованиях математиков. Они позволили, в частности, поставить проблему о разрешимости исчислений. В последних можно эффективным образом решить вопрос о выводимости или невыводимости произвольной его формулы. Примером разрешимого исчисления является исчисление предикатов. Не существует единой программы, которая позволяла бы для каждой формулы исчисления предикатов решать вопрос о ее выводимости.

Добавление III.

ОБОСНОВАНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО ВЕЙЛЮ

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В последнее время все большее предпочтение получает вейлевская аксиоматика евклидовой геометрии. Как мы убедимся далее, она более тесно связана с различными разделами современной математики и является более простой, чем другие системы аксиом евклидовой геометрии.

Чтобы прийти к систематическому изложению евклидовой геометрии на базе вейлевской аксиоматики, мы должны в первую очередь перечислить исходные понятия и аксиомы, их описывающие, из которых бы строго логически следовали все другие понятия и свойства геометрии. Система аксиом Вейля описывает шесть основных понятий. Основные понятия — точки и векторы — называются основными образами. Понятия сложения векторов, умножения вектора на вещественные числа, скалярного умножения векторов и откладывания вектора от точки называются основными отношениями. Аксиомы Вейля распределяются на пять групп, причем аксиомы первых трех и четырех групп составляют соответственно аксиоматику векторного и евклидова векторного пространства.

В целях краткости изложения мы вынуждены фактически отказаться здесь от обсуждения наводящих соображений и сразу перейти к перечислению аксиом Вейля евклидова пространства. Поэтому построение по необходимости дается в готовой векторной форме, хотя возникновение и развитие неевклидовой геометрии шло по другому пути и история накопления фактов по этим геометриям была весьма драматичной и поучительной.

I. АКСИОМЫ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Эта группа аксиом описывает операцию сложения φ_1 векторов, которая позволяет любым двум векторам x, y отнести третий вектор — их сумму $\varphi_1(x, y) = x + y$ в предположении, что выполнены следующие четыре аксиомы:

1. Сложение векторов коммутативно, т. е. для любых двух векторов x и y справедливо равенство

$$x + y = y + x.$$

2. Сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых трех векторов x, y, z выполняется следующее равенство:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

3. Существует такой вектор Θ, что для любого вектора x

$$x + \Theta = x.$$

4. Для любого вектора x существует такой вектор x', что
$$x + x' = \Theta.$$

II. АКСИОМЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Вторая группа аксиом описывает операцию φ_2 умножения вектора на вещественное число. Эта операция позволяет каждому вектору x и числу λ однозначно отнести вектор $\varphi_2(\lambda, x) = \lambda x$, называемый произведением вектора x на число λ. Перечислим аксиомы этой группы.

1. Операция умножения дистрибутивна также по отношению к сложению векторов, т. е. для любых двух векторов x, y и любого числа λ
$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

2. Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению, т. е. для любого вектора x и любых чисел λ, μ
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

3. Операция умножения вектора на число ассоциативна, т. е. для любого вектора x и любых чисел λ, μ
$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x.$$

4. Операция умножения вектора на единицу не меняет вектора:
$$1 \cdot x = x.$$

Чтобы перечислить аксиомы размерности, остановимся сначала на определении понятия линейно-независимой (зависимой) системы векторов. Система векторов
$$x_1,\ x_2, \ldots, x_k$$
называется *линейно независимой* (*зависимой*), если из равенства
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + \ldots \lambda_k x_k = 0$$
следует, что все постоянные $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ равны нулю (не все λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$ равны нулю).

III. АКСИОМЫ РАЗМЕРНОСТИ

1. Существует n линейно-независимых векторов.
2. Любая совокупность $n + 1$ векторов линейно-зависима.

IV. АКСИОМЫ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Эта группа аксиом описывает операцию скалярного умножения векторов, которая позволяет любым двум векторам x, y однозначно отнести вещественное число $\varphi_3(x, y) = xy$ (скалярное произведение данных векторов) в предположении, что выполнены следующие аксиомы:

1. Скалярное произведение коммутативно, т. е. для любых двух векторов x, y выполняется равенство

$$xy = yx$$

2. Скалярное произведение векторов линейно, т. е. для любых трех векторов x, y, z и вещественных чисел λ, μ выполняется равенство

$$\varphi_3(x, \lambda y + \mu z) = \lambda xy + \mu xz .$$

3. $xx > 0$, если $x \neq 0$, $xx = 0$, если $x = 0$.

V. АКСИОМЫ ОТКЛАДЫВАНИЯ ВЕКТОРОВ

Аксиомы этой группы описывают отношения «откладывания вектора от точки». Отношение это позволяет каждой паре упорядоченных точек A, B однозначно сопоставить из векторного пространства некоторый вектор x, обозначаемый через $\overline{AB}$. Перечислим аксиомы откладывания векторов.

1. Для любой точки A и любого вектора x найдется такая точка B, что

$$\overline{AB} = x.$$

2. Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

3. Если $\overline{AB} = 0$, то точки A, B, совпадают.

Говорят также о точке B в первой аксиоме как о точке, полученной в результате откладывания вектора x от A. Точки A и B вектора $\overline{AB}$ называются соответственно начальной и конечной точками вектора x.

Аксиомами этих пяти групп исчерпывается вейлевская аксиоматика евклидовой геометрии.

Заметим, что приведенная аксиоматика опирается на понятие вещественного числа, которое считается уже известным (гильбертовская аксиоматика не опирается на это понятие).

Приведем теперь важнейшие определения. Совокупность точек называется **евклидовым пространством**, если эти точки вместе с векторами, определенными аксиомами I—III—IV, удовлетворяют аксиомам V. Совокупность векторов, для которых выполняются аксиомы I, III—IV, называется евклидовым **векторным** пространством.

Мы уже упоминали, что вейлевская аксиоматика более тесно связана с различными разделами современной математики, чем гильбертовская аксиоматика. Действительно, аксиомы I определяют понятие коммутативной группы, аксиомы I—III—понятие векторного пространства — важнейшее понятие в современной математике. Далее аксиомы I — III, V определяют аффинное пространство. Более точно совокупность точек называется аффинным пространством ,если эти точки вместе с векторами, определенными аксиомами I — III векторного пространства, удовлетворяют аксиомам V. Это точечное пространство называется 3-мерным, если соответствующее векторное пространство будет 3-мерным.

В этой аксиоматике понятия прямой, плоскости, лежать между и другие основные понятия гильбертовской системы аксиом определяются через понятия вектора и точки.

В самом деле, пусть нам даны точки A и B. Множество точек M таких, что вектор AM, пропорционален вектору $\overline{AB} = \overline{p}$, т. е.

$$\overline{AM} = t\overline{p} \tag{*}$$

определяет **прямую** AB. Множитель пропорциональности называется **параметром прямой**. Очевидно, между точками прямой и вещественными числами t устанавливается взаимно однозначное соответствие. Нетрудно установить, что прямая AB однозначно определяется двумя различными ее точками.

Допустим теперь, что нам даны три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой. Множество точек M, для которых вектор

$$\overline{AM} = u\overline{AB} + v\overline{AC}$$

определяет **плоскость**. Можно доказать, что плоскость однозначно определяется любыми тремя ее точками, не принадлежащими прямой.

Параметр t в уравнении прямой позволяет ввести понятие точки, лежащей между двумя другими, и понятие предшествования точек на прямой. Действительно, предположим, что точкам M_1 и M_2 прямой (*) отвечают значения t_1 и t_2 параметра t. Говорят, что точка M_1 предшествует точке M_2, если $t_1 < t_2$ и обратно. Очевидно, это отношение предшествования транзитивно, но не рефлексивно и не симметрично.

Возьмем еще одну точку M_3, лежащую на данной прямой, и предположим, что ей отвечает значение t_3 параметра t. Из трех различных точек M_1, M_2, M_3, инцидентных прямой, та точка, например M_3, по определению **лежит между** двумя другими точками M_1, M_2, значение параметра t_3, которой принадлежит интервалу (t_1, t_2), т. е.

$$t_1 < t_3 < t_2.$$

Отрезком M_1M_2 называется множество точек M прямой M_1M_2, параметры t которых удовлетворяют неравенству

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Точки M_1, M_2 называются **концами отрезка**, а точки M, параметры t которых принадлежат интервалу (t_1, t_2), называются **точками отрезка**.

Совокупность точек M прямой (*), соответствующих значениям параметра $t > 0$, называется **лучом**. Точка A, отвечающая значению параметра $t = 0$, называется **началом луча**.

Понятие движения вводится следующим образом. Взаимно однозначное отображение точек пространства на себя называется **движением**, если для любых двух точек A, B скалярный квадрат вектора AB равен скалярному квадрату вектора $A'B'$, определенному соответствующими по отображению точками A', B'.

В заключение несколько слов об эквивалентности системы аксиом Вейля и Гильберта. Исходя из гильбертовской аксиоматики можно ввести векторы как свободные направленные отрезки и определить обычным образом операции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения двух векторов и операцию откладывания вектора от точки. Так мы определим все основные понятия вейлевской аксиоматики. Далее непосредственной проверкой убедимся, что каждая аксиома вейлевской аксиоматики будет в геометрии пространства Г выражать «истинное» утверждение. Последнее означает, что каждую вейлевскую аксиому можно доказать как теорему на основании аксиом гильбертовской аксиоматики.

Обратно, опираясь на аксиомы Вейля, можно ввести, как делали это мы во второй главе, понятия прямой, плоскости, инцидентности точки и прямой, точки и плоскости, лежать между, движения — все основные понятия гильбертовской аксиоматики. Нетрудно проверкой убедиться, что каждая аксиома гильбертовской аксиоматики будет в геометрии W выражать «истинное» утверждение, т. е. каждое такое утверждение можно доказать как теорему на основании аксиом вейлевской аксиоматики.

Из этих рассуждений следует, что аксиоматика Гильберта эквивалентна аксиоматике Вейля евклидовой геометрии.

Ответы и указания к решению задач

Задача 1 (стр. 95).

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta = \operatorname{ctg}\frac{a}{k}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta = \operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{c}{k},$$

$$\cos\beta = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\sin\alpha = \operatorname{th}\frac{a}{k}\operatorname{cth}\frac{c}{k}.$$

Задача 2 (стр. 106). Предположим, что $u_1x_1 + u_2x_2 - u_3x_3 = 0$, $v_1x_1 + v_2x_2 - v_3x_3 = 0$ уравнения данных прямых и

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

— координаты точки пересечения. Эта точка будет действительной, бесконечно удаленной или идеальной, если величина трехчлена

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2$$

соответственно меньше, равна или больше нуля. Учитывая тождество $\left(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right) - (u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3)^2 = -A$, где $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 1$, можно убедиться, что предыдущее условие эквивалентно условию

$$|u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3| \gtreqless 1.$$

Задача 3 (стр. 106). Координаты текущей точки $M(x_1, x_2, x_3)$ искомой прямой являются линейными комбинациями соответствующих координат точки $A(a_1, a_2\ a_3)$ и прямой $U(u_1, u_2, u_3)$ т. е.

$$x_r = \lambda a_r + \mu u_r \quad (r = 1, 2, 3).$$

Находя расстояние S между точками A и M, мы получим $\lambda = \operatorname{ch}\frac{s}{\kappa}$. Параметр $\mu = \pm \operatorname{sh}\frac{s}{\kappa}$ определяется из условия, что точка M лежит на сфере чисто мнимого радиуса $i\kappa$. Следовательно,

$$x_r = \operatorname{ch}\frac{s}{\kappa}\ a_r \pm \operatorname{sh}\frac{s}{\kappa}\ u_r.$$

Задача 4 (стр. 106). Координаты данной точки $M(x_1, x_2, x_3)$ и данной прямой связаны предыдущим уравнением

$$x_r = \operatorname{ch}\frac{s}{\kappa}\ a_r \pm \operatorname{sh}\frac{s}{\kappa}\ u_r.$$

Умножая каждое из этих уравнений на u_1, u_2, u_3 соответственно и почленно суммируя, мы получим

$$\operatorname{sh}\frac{s}{\kappa} = \pm (u_1x_1 + u_2x_2 - u_3x_3).$$

Задача 5. (стр. 107). Из точки $A(a_r)$ пересечения прямых $U(u_1, u_2, u_3)$, $V(v_1, v_2, v_3)$ восстановим перпендикуляры AX, AY причем координаты (x_r) и (y_r) точек X, Y определяются соответственно равенствами

$$x_r = \operatorname{ch}\frac{(s)}{\kappa}\ a_r \pm \operatorname{sh}\frac{(s)}{\kappa}\ u_r, \quad s = AX,$$

$$y_r = \operatorname{ch}\frac{(t)}{\kappa}\, a_r \pm \operatorname{sh}\frac{(t)}{\kappa}\, v_r, \quad t = AY.$$

Вставляя эти двучлены в правую часть формулы

$$\operatorname{ch}\frac{(\delta)}{\kappa} = x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad (\delta) = XY$$

и сравнивая почленно с формулой

$$\operatorname{ch}\frac{(s)}{\kappa} = \operatorname{ch}\frac{s}{\kappa}\operatorname{ch}\frac{(t)}{\kappa} - \operatorname{sh}\frac{(s)}{\kappa}\operatorname{sh}\frac{(t)}{\kappa}\cos\alpha,$$

мы получим

$$\cos\alpha = \pm\,(u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3).$$

Задача 6 (стр. 107). Так как непересекающиеся прямые имеют общий перпендикуляр и он является кратчайшим расстоянием между данными прямыми, то задачу можно решить следующим образом. Предположим, что A, B являются точками пересечения общего перпендикуляра с прямыми $U(u_r)$ $V(v_r)$ соответственно. Тогда

$$x_r = \operatorname{ch}\frac{s}{\kappa}\, a_r \pm \operatorname{sh}\frac{s}{\kappa}\, u_r.$$

Подставим вместо координат текущей точки $X(x_r)$ координаты точки $B(b_r)$. Параметр S тогда будет выражать длину общего перпендикуляра между данными прямыми и мы получим

$$\operatorname{ch}\frac{(\delta)}{\kappa} = \pm\,(u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3).$$

Полученная формула совпадает с формулой, которую мы вывели в предыдущей задаче. Следовательно, трехчлен

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

определяет косинус угла или гиперболический косинус кратчайшего расстояния, смотря по тому, будут ли данные прямые соответственно пересекаться или сверхпараллельны. Абсолютная величина этого трехчлена меньше единицы в первом случае и больше единицы во втором. В случае параллельных прямых абсолютная величина $u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$ равняется единице.

Задача 7 (стр. 107). Искомая формула получается из (35) и формул $x_1 = \operatorname{sh}\frac{(r)}{\kappa}\cos\varphi$, $x_2 = \operatorname{sh}\frac{(r)}{\kappa}\sin\varphi$, $x_3 = \operatorname{ch}\frac{(r)}{\kappa}$, связывающих полярные и нормированные координаты.

Задача 8 (стр. 107). Искомая формула получается из (36) и формул $x/\kappa = x_1/x_3$, $y/\kappa = x_2/x_3$, связывающих нормированные координаты и координаты Бельтрами.

Задача 9 (стр. 123).

$$x_r = \cos\frac{(s)}{\kappa}\, a_r \pm \sin\frac{(s)}{\kappa}\, u_r \; (r = 1, 2, 3).$$

Задача 10 (стр. 123). Для отыскания указанного расстояния достаточно повторить рассуждения, приведенные при решении аналогичной задачи на плоскости Лобачевского. В результате будем иметь

$$\sin \frac{d}{\kappa} = \pm (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3).$$

К этому результату можно прийти сразу, определяя дополнительное расстояние от точки $A(a_r)$ до полюса $\mathscr{P}(u_r)$ прямой u.

Задача 11 (стр. 123). Здесь также можно повторить соответствующие рассуждения при решении аналогичной задачи на плоскости Лобачевского. В результате получим

$$\cos \alpha = \pm (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3).$$

К этому выводу можно прийти сразу, вычисляя расстояние между точками на этих прямых, полярных вершине угла.

Задача 12 (стр. 126). Всего имеется 8 случаев взаимного расположения двух окружностей (одна лежит внутри или вне другой, имеют внутреннее или внешнее касание, касаются или пересекаются в двух точках, пересекаются в двух точках, пересекаются в двух точках и касаются в третьей точке, пересекаются в четырех точках).

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций, М. — Л., 1948.

Богомолов А. С. Введение в неевклидову геометрию Римана, М. — Л., 1934.

Болтянский Б. Г., Яглом И. М., Выпуклые фигуры, М. — Л., 1951.

Гильберт Д. Основания геометрии, М. — Л., 1948.

Глушков В. М. Цикл лекций «Основы математической логики», Киев, 1961, ротапринт.

Гуревич Г. Б. Проективная геометрия, М., 1960.

Егоров И. П. Об обобщенных пространствах, М., «Знание», 1970.

Ефимов Н. В. Высшая геометрия, М., 1961.

Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. II, М., 1956.

Лаптев Б. Л. Жизнь и деятельность Н. И. Лобачевского, журнал «Усп. Мат. Наук», 6,3(43), 1951.

Новиков П. С. Элементы математической логики, М., 1959.

Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1966.

Погорелов А. В. Лекции по основаниям геометрии, 1964, Харьков, Универ. Изд. 2-е.

Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1953.

Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии, М., 1955.

Успенский Я. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского — Больяи, 1922.

Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М., 1955.

Яглом И. М. Геометрические преобразования, М., 1956.

Предметный и именной указатели

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Введение

Глава II. Аксиоматика евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского

Глава III. Н. И. Лобачевский и его геометрия

Глава IV. Элементы стереометрии. Аналитическая геометрия на плоскости Лобачевского

Глава V. О других неевклидовых геометриях

Иван Петрович Егоров
ВВЕДЕНИЕ В НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Л. Н. Толмириди*
Технический редактор *Е. Д. Воронкова*
Корректор Шагапова О. М.

ФЛ 09066. Сдано в набор 28.II.1972 г. Подписано к печати 21.12.72.
формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага типограф. № 2. Усл. п. л, 10,75. Уч.-изд. л. 11,55.
Тираж 1000 экз. Заказ № 79. Цена 1 р. 39 коп.
Приволжское книжное издательство. Пензенское отделение. К. Маркса 16.
Типография ПВАИУ

Замеченные опечатки

Cтраница	Строка	Напечатано	Следует читать
9	17 снизу	A	$\overline{A}$
13	21 снизу	y	G
15	Таблица 3	В свободных клетках ниже главной диагонали должно быть β, а в свободной клетке выше главной диагонали α	
20	9 сверху	γ	$\overline{\gamma}$
43	3 сверху	$(x_1, \overline{y}_1)$	$(\overline{x}_1, y_1)$
51	5 снизу	nBC	$n\,BB_1$
66	1 снизу	BD	BO
92	1 снизу	$\mathrm{Ch}_2 \frac{(b)}{\kappa}$	$\mathrm{Ch}^2 \frac{(b)}{\kappa}$
96	10, 13 сверху	$\sin(c)$	$\sin(C)$
120	14 сверху	эллиптические	эллиптической
146	2 сверху	наклонной	вертикальной
160	2 снизу	$\overline{z}$	z

Цена 1 руб. 39 коп.