

Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов вузов

И.Г. АРАМАНОВИЧ, Г.А. ЛУНИЦ, А.Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ

ФУНКЦИИ
КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО
•
ОПЕРАЦИОННОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ
•
ТЕОРИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ



ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

И. Г. АРАМАНОВИЧ, Г. Л. ЛУНЦ,
Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ

ФУНКЦИИ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1968 г., стр. 416.

Книга посвящена трем разделам математики, знание которых необходимо многим специалистам, работающим в области автоматики. Изложение материала построено так, что вторая и третья части могут изучаться независимо друг от друга.

В тексте подробно решено большое количество задач и примеров. В конце каждой главы помещены задачи для самостоятельного решения.

Библиография — 13 назв., илл. 159, табл. 4.

Исаак Генрихович Араманович, Григорий Львович Луцк, Лев Эрнстович Эльсгольц

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

(Серия «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов») М., 1968 г., 416 стр. с илл.

Редактор М. М. Горячая.

Техн. редактор С. Я. Шкляр.

Корректор М. Л. Липелис.

Сдано в набор 23/IV 1968 г. Подписано к печати 31/VII 1968 г. Бумага 84 × 103 1/32. Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 19,56. Тираж 45 000 экз. Т-09360. Цена 78 к. Заказ № 1806.

Издательство «Наука».

Главная редакция физико-математической литературы, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
Из предисловия к первому изданию	6

ЧАСТЬ I

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава I. Комплексные числа и функции комплексного переменного	7
§ 1. Комплексные числа и действия над ними (7). § 2. Последовательности комплексных чисел и функции комплексного переменного (16). § 3. Основные трансцендентные функции (26). Задачи к главе I (36).	
Глава II. Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного	38
§ 1. Производная (38). § 2. Геометрический смысл аргумента и модуля производной (45). § 3. Интеграл от функции комплексного переменного (49). § 4. Теорема Коши (54). § 5. Интегральная формула Коши (62). Задачи к главе II (68).	
Глава III. Конформные отображения	70
§ 1. Линейная и дробно-линейная функции (70). § 2. Некоторые общие теоремы (83). § 3. Степенная функция. Функция Жуковского (85). § 4. Основные трансцендентные функции (98). § 5. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник (107). Задачи к главе III (112).	
Глава IV. Ряды и особые точки	114
§ 1. Функциональные ряды (114). § 2. Степенные ряды (119). § 3. Ряд Тейлора (121). § 4. Ряд Лорана (128). § 5. Изолированные особые точки (136). § 6. Некоторые приемы разложения функций в ряд Лорана (143). Задачи к главе IV (144).	
Глава V. Теория вычетов	146
§ 1. Основная теорема о вычетах (146). § 2. Вычет относительно полюса (149). § 3. Логарифмические вычеты (152). § 4. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов (159). Задачи к главе V (163).	
Глава VI. Комплексный потенциал	165
§ 1. Плоскопараллельные векторные поля (165). § 2. Комп-	

лексный потенциал (166). § 3. Комплексный потенциал в гидродинамике (172). § 4. Задачи на обтекание (178). § 5. Комплексный потенциал в электростатике и термодинамике (185). Задачи к главе VI (189).

Ч А С Т Ь 2

О П Е Р А Ц И О Н Н О Е И С Ч И С Л Е Н И Е

Глава VII. Преобразование Лапласа	190
§ 1. Определение преобразования Лапласа (190). § 2. Свойства преобразования Лапласа (199). § 3. Теорема обращения (230). § 4. Преобразование Фурье (246). Задачи к главе VII (262).	
Глава VIII. Применения преобразования Лапласа	263
§ 1. Решение дифференциальных уравнений (263). § 2. Приложения операционного исчисления к задачам электротехники (277). § 3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными (285). Задачи к главе VIII (297).	
Глава IX. Дискретное преобразование Лапласа	298
§ 1. Определение дискретного преобразования (298). § 2. Свойства дискретного преобразования (304). § 3. Формулы разложения (317). § 4. Связь между преобразованием Лапласа, D -преобразованием и преобразованием Лапласа—Стилтьеса (321). § 5. Решение разностных уравнений (329). Задачи к главе IX (333).	

Ч А С Т Ь 3

Т Е О Р И Я У С Т О Й Ч И В О С Т И

Введение	334
Глава X. Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений	337
§ 1. Линейные системы с постоянными коэффициентами (337). § 2. Основные понятия теории устойчивости (346). § 3. Условия устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами (352). § 4. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена (362). § 5. Устойчивость решений разностных уравнений (377). Задачи к главе X (382).	
Глава XI. Второй метод Ляпунова	384
§ 1. Основные теоремы второго метода Ляпунова (384). § 2. Устойчивость по первому приближению (397). § 3. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях (400). Задачи к главе XI (404).	
Ответы к задачам	406
Литература	416

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания книга была подвергнута довольно значительной переработке.

Вторая часть (операционное исчисление) пополнена новой главой, посвященной дискретному преобразованию Лапласа, широко применяющемуся в задачах автоматического регулирования.

Существенно переработана третья часть (теория устойчивости); в частности, упрощены доказательства теорем, связанных со вторым методом Ляпунова, за счет того, что рассматривается в основном лишь случай автономных систем. В третью часть включен также параграф об исследовании устойчивости решений линейных разностных уравнений.

Внесены некоторые изменения и в первую часть (функции комплексного переменного) — добавлен пункт о теореме единственности аналитической функции.

В октябре 1967 г. трагически погиб в автомобильной катастрофе Лев Эрнестович Эльсгольц, талантливый ученый и автор многих книг, пользующихся широкой известностью. План переработки настоящей книги был обсужден всеми авторами еще при жизни Л. Э. Эльсгольца.

И. Г. Араманович

Г. Л. Луц

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга, предлагаемая вниманию читателя, рассчитана на студентов тех специальностей, в программу которых входят соответствующие разделы математики; мы полагаем также, что она будет полезна широкому кругу инженеров. Для ее чтения достаточно знания лишь общего курса математики в объеме программы технических вузов. Книга состоит из трех частей: 1. Функции комплексного переменного. 2. Операционное исчисление. 3. Теория устойчивости.

Знание всех трех разделов математики, которым посвящена книга, необходимо многим специалистам, в частности, инженерам, работающим в области автоматизации производственных процессов, и студентам факультетов автоматики. Однако, имея в виду интересы и других категорий читателей, авторы построили изложение так, что вторая и третья части книги могут изучаться независимо друг от друга.

Содержание книги несколько выходит за рамки программы, по которой в большинстве технических вузов изучаются соответствующие разделы математики. Поэтому для удобства пользования книгой весь ее текст разбит на пункты, причем нумерация пунктов — сплошная для всей книги. В соответствии с программой вуза всегда можно указать номера пунктов, изучение которых обязательно.

ГЛАВА I КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

1. Число

$$z = x + iy,$$

где x и y — любые действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, называется *комплексным* числом. Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Два комплексных числа считаются равными, если равны порознь их действительные и мнимые части, другими словами, равенство

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

равносильно двум равенствам:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Так как две точки, определенные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат, совпадают тогда и только тогда, когда они имеют равные абсциссы и равные ординаты, то можно установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости, с одной стороны, и всевозможными комплексными числами, — с другой. Иначе говоря, будем изображать комплексное число $z = x + iy$

с помощью точки, абсцисса которой равна x , а ордината y ; тогда всякое комплексное число изобразится с помощью определенной точки плоскости («комплексной плоскости») и, наоборот, всякой точке (x, y) плоскости будет соответствовать определенное комплексное число $z = x + iy$ (рис. 1). В дальнейшем мы часто не будем делать различия между комплексным числом и точкой, его изображающей.

Действительной и мнимой частям комплексного числа можно также поставить в соответствие координаты вектора, т. е. проекции на координатные оси вектора, начало которого

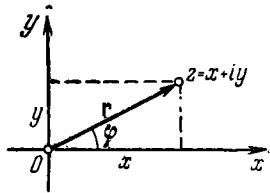


Рис. 1.

совмещено, например, с началом координат, а конец — с данной точкой, и, следовательно, изображать комплексные числа с помощью векторов (см. рис. 1).

Комплексное число с мнимой частью, равной нулю, т. е. $x + i0$, будем отождествлять с его действительной частью, $x + i0 = x$, и считать действительное число частным случаем комплексного.

Действительные числа изображаются точками, лежащими на оси Ox ; эту ось будем называть *действительной* осью. Аналогично будем писать $0 + iy = iy$. Комплексные числа, действительные части которых равны нулю (*чисто мнимые числа*), изображаются с помощью точек, лежащих на оси Oy ; эту ось будем называть *мнимой* осью.

Положение точки, изображающей комплексное число z , можно определять также с помощью полярных координат r и φ (см. рис. 1) или, что то же самое, с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величины угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси. Числа r и φ будем называть соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа z и пользоваться обозначениями

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Для действительного числа введенное здесь определение модуля совпадает с определением абсолютной величины этого числа. Модулем чисто мнимого числа является абсолютная величина его мнимой части.

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + iy$, то

$$x = r \cos \varphi = |z| \cos \operatorname{Arg} z, \quad y = r \sin \varphi = |z| \sin \operatorname{Arg} z \quad (1)$$

и

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} z = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена лишь с точностью до целого кратного числа 2π . В качестве *главного значения* величины $\operatorname{Arg} z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Главное значение аргумента z обозначают $\arg z$. Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$; если z — действительное отрицательное число, то $\arg z = \pi$; если z — чисто мнимое число с положительной мнимой частью, то $\arg z = \pi/2$; если z — чисто мнимое с отрицательной мнимой частью, то $\arg z = -\pi/2$. При $z = 0$ величина $\operatorname{Arg} z$ не имеет смысла.

Пользуясь формулами (1), можно всякое комплексное число, отличное от нуля, представить в так называемой *тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

Например,

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1 = 1 (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad -2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$-3i = 3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

С помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (см. [1], гл. IV, § 6 или здесь, стр. 28) можно перейти от тригонометрической формы (2) к *показательной*: $z = re^{i\varphi}$. Например,

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}, \quad i = e^{i \frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i \pi}.$$

Два комплексных числа, имеющих одну и ту же действительную часть, а мнимые части равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, называются *взаимно сопряженными*. Число, сопряженное числу z , обозначается \bar{z} . Если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Из этого определения следует, что если $w = \bar{z}$, то $z = \bar{w}$ и, следовательно, $\bar{\bar{z}} = z$.

Модули взаимно сопряженных чисел одинаковы, а аргументы отличаются только знаком:

$$|\bar{z}| = |z|; \quad \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z^1).$$

Всякое действительное число совпадает с числом, ему сопряженным.

Сопряженные числа изображаются точками, симметричными относительно действительной оси.

2. Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов; последнее из этих правил дополняется требованием замены i^2 числом -1 (и, следовательно, i^3 числом $-i$, i^4 числом 1 , i^5 числом i и т. д.). При записи результата действий, произведенных над комплексными числами, следует отделить действительную часть от мнимой, т. е. собрать отдельно члены, не содержащие множителя i , и члены, содержащие этот множитель:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (3)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Из (3), в частности, следует, что произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

иначе

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

¹⁾ Так как функция $\text{Arg } z$ неоднозначна, то равенство $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z$ надо понимать в том смысле, что множество значений, определяемых левой частью этого равенства, совпадает с множеством значений, определяемых правой частью.

Сумма двух взаимно сопряженных комплексных чисел также является действительным числом:

$$(x + iy) + (x - iy) = 2x,$$

т. е.

$$z + \bar{z} = 2 \text{Re } z.$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, откуда следует, что

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Итак, при сложении и вычитании комплексных чисел отдельно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части. Если изобра-

зить комплексное число с помощью вектора, то, как мы уже знаем, действительная и мнимая части этого числа будут являться координатами вектора, а так как при сложении и вычитании векторов их координаты соответственно складываются или вычитаются, то сложение или вычитание комплексных чисел сводится к сложению или вычитанию векторов, изображающих эти числа (рис. 2). Модуль комплексного числа равен длине соответствующего вектора, поэтому модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Применяя это неравенство несколько раз, получим

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда векторы, изображающие числа z_1, z_2, \dots, z_n , лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону, т. е. когда

$$\arg z_1 = \arg z_2 = \dots = \arg z_n.$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа (рис. 2). Если

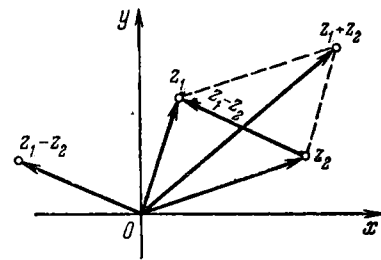


Рис. 2.

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пусть z_1 — данное комплексное число (данная точка), ρ — данное действительное положительное число. Совокупность точек z , удовлетворяющих уравнению

$$|z - z_1| = \rho,$$

образует окружность с центром в точке z_1 радиуса ρ . Неравенство $|z - z_1| < \rho$ определяет множество точек, лежащих внутри этой окружности (*внутренность* круга), а неравенство $|z - z_1| > \rho$ — множество точек, лежащих вне окружности (*внешность* круга).

Деление определяется как действие, обратное умножению. Пользуясь свойствами сопряженных чисел, удобнее всего деление комплексных чисел производить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, после чего делитель станет действительным положительным числом, а затем произвести деление действительной и мнимой частей отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

3. Если воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (4)$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2^1).$$

¹⁾ Обе части этого равенства многозначны. Множество значений левой части этого равенства совпадает с множеством значений его правой части; можно также записать, что $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Вектор, изображающий произведение $z_1 z_2$, может быть получен из вектора, изображающего число z_1 , поворотом на угол φ_2 , образуемый вектором z_2 с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину вектора z_2 (рис. 3). Например, число i имеет модуль, равный единице, а аргумент $\pi/2$, поэтому умножение на i сводится к повороту вектора на угол $\pi/2$ в положительном направлении без изменения его длины.

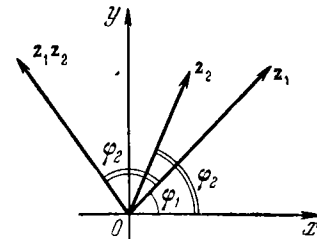


Рис. 3.

Число, модуль которого равен единице, имеет вид $\cos \varphi + i \sin \varphi$, или, в показательной форме, $e^{i\varphi}$. Следовательно, вектор $ze^{i\varphi}$ может быть получен поворотом вектора z около начала координат на угол φ .

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

приводит к формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т. е.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

4. Из правила умножения (4) следует правило возведения в целую положительную степень: если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, т. е.

$$|z^n| = |z|^n, \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z + 2k\pi,$$

где k — любое целое число ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Пользуясь правилом деления, негрудно проверить, что эти формулы остаются справедливыми и при целом отрицательном n .

Извлечь корень целой положительной степени n из числа z — значит найти такое число $w = \sqrt[n]{z}$, n -я степень которого

равна z . В соответствии с правилом возведения в степень имеем (при $z \neq 0$):

$$|w|^n = |z|, \quad n \operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Если обозначить $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, то получим

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Так как r и ρ — положительные числа, то первое из этих равенств однозначно определяет ρ , а именно:

$$\rho = (\sqrt[n]{r}),$$

где скобки в правой части обозначают, что берется арифметическое (действительное и положительное) значение корня. Из второго равенства находим

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

и формула, с помощью которой можно извлекать корень из любого комплексного числа, принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\ &= (\sqrt[n]{r}) \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Хотя k — любое целое число, однако из этой формулы следует, что имеется лишь n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$, которые можно получить, полагая $k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Действительно, два значения k , отличающиеся друг от друга на n , а значит, и на любое кратное числа n , дают при подстановке в формулу (5) одно и то же значение для $\sqrt[n]{z}$, так как если $k' - k = n$, то

$$\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2(k' - k)\pi}{n} = 2\pi,$$

и, следовательно,

$$\cos \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \sin \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Как видно из формулы (5), все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, равный $(\sqrt[n]{|z|})$.

А так как

$$\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

(аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующих значениям k и $k+1$, отличаются один от другого на $2\pi/n$), то точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $(\sqrt[n]{|z|})$ с центром в начале координат.

Поэтому способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$, таков (рис. 4): из начала координат, как из центра, описываем окружность, радиус которой равен $(\sqrt[n]{|z|})$; если $\arg z = \varphi$, то из начала координат проведем луч под углом φ/n к положительному направлению действительной оси; на пересечении этого луча с окружностью мы найдем точку, соответствующую одному из значений $\sqrt[n]{z}$ (для этой точки в формуле (5) $k=0$); вписав в окружность правильный n -угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, мы построим точки, соответствующие остальным значениям корня.

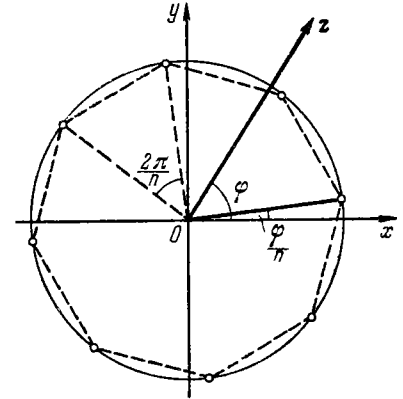


Рис. 4.

Пример. Вычислить все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Имеем $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$, откуда

$$\sqrt[3]{-8} = (\sqrt[3]{8}) \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right).$$

При $k=0, 1, 2$ получим

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + i\sqrt{3}, \\ -2, \\ 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Если обозначить, как это принято для действительных чисел,

$$\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}},$$

то действие возведения комплексного числа в степень окажется определенным для любого действительного рационального показателя степени. Заметим, однако, что такие обозначения можно применять лишь в случае, когда $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, так как, например, $\sqrt[4]{z^2}$ имеет четыре значения, тогда как \sqrt{z} — лишь два.

§ 2. Последовательности комплексных чисел и функции комплексного переменного

5. Внутренность круга радиуса ρ с центром в данной точке z_0 , т. е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \rho$, называется ρ -окрестностью точки z_0 . Вообще, под окрестностью точки понимают не обязательно круговую область, а любую область, внутри которой лежит точка z_0 . В дальнейшем мы будем пользоваться, однако, только круговыми окрестностями.

Число z_0 называют *пределом последовательности комплексных чисел* $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое число N (N зависит от ε), что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Иначе говоря, равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ означает, что как бы мала ни была ε -окрестность точки z_0 , вне этой окрестности может остаться лишь конечное число точек последовательности, так как все точки z_n последовательности, начиная с номера $n = N$, попадут внутрь этой ε -окрестности.

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, то, учитывая равенство

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2},$$

нетрудно заключить (непосредственно из определения), что существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Пусть последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ такова, что модули всех ее членов, начиная с некоторого, становятся больше любого, сколь угодно большого, положительного числа (т. е. как бы велико ни было положительное число M , к нему можно подобрать такое N , что $|z_n| > M$ при $n \geq N$). Тогда последовательность, очевидно, предела не имеет; однако в этом случае удобно писать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

и говорить, что предел последовательности бесконечен, а для его изображения дополнить плоскость точкой, которую будем называть *бесконечно удаленной*. Окрестностью бесконечно удаленной точки будем называть внешность круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R , а центр находится в точке $z = 0$, то множество точек, образующих окрестность бесконечно удаленной точки, определяется неравенством $|z| > R$. Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющаяся внешностью этого круга.

Сопоставляя определение равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ с определением окрестности бесконечно удаленной точки, мы видим, что если предел последовательности бесконечен, то как бы «мала» ни была окрестность бесконечно удаленной точки, т. е. как бы велик ни был радиус R круга, внешностью которого эта окрестность является, все точки последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ за исключением конечного их числа (все точки z_n , начиная с $n = N$), попадут внутрь этой окрестности.

В таких терминах определение предела, по существу, одно и то же как для случая, когда предел конечен, так и для случая, когда он бесконечен. В этом смысле бесконечно удаленная точка вполне равноправна с остальными точками плоскости.

Однако во многих случаях нас будет интересовать вопрос о том, существует ли именно конечный предел последовательности. Последовательность, имеющую конечный предел, называют *сходящейся*.

В дальнейшем комплексную плоскость, дополненную бесконечно удаленной точкой, будем называть *расширенной* плоскостью.

Заметим, что в соответствии с введенным нами определением на комплексной плоскости имеется лишь одна бесконечно удаленная точка, тогда как, например, во многих разделах геометрии удобно считать, что имеется бесконечное множество таких точек: каждому направлению соответствует своя бесконечно удаленная точка.

6. Определение *функции комплексного переменного* аналогично определению функции действительного переменного.

Говорят, что на некотором множестве точек, изображающих значения комплексной переменной z , задана (определена) функция $w = f(z)$, если каждой точке z этого множества поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции)

или большее число (в случае многозначной функции) значений w .

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться функции, заданные либо на всей плоскости, либо на всей плоскости, за исключением отдель-

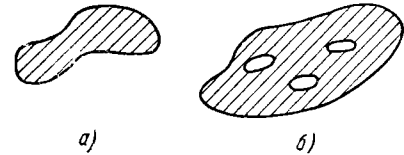


Рис. 5.

ных ее точек, либо на части плоскости, ограниченной одной (односвязная область, рис. 5, а) или несколькими (многосвязная область, рис. 5, б) гладкими или кусочно-гладкими¹⁾ кривыми. Из области могут быть удалены отдельные точки.

Так, например, функция $w = z^2$ однозначна и определена во всей плоскости, так как с помощью формулы, по которой производится возведение комплексного числа в степень (стр. 13), всякому комплексному числу z соответствует, и притом только одно, значение z^2 . Функция $w = \operatorname{Arg} z$ многозначна и определена на всей плоскости, за исключением точек $z = 0$ (см. стр. 9).

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y , являющихся соответственно его действительной и мнимой частями ($z = x + iy$), а числу w точно так же однозначно соответствует пара дей-

¹⁾ Дуга называется *гладкой*, если в каждой ее точке можно провести касательную, причем направление касательной изменяется непрерывно при движении точки по кривой; дуга непрерывной кривой, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется *кусочно-гладкой*.

ствительных чисел u и v ($w = u + iv$), то зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z равносильна двум зависимостям:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (6)$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных переменных x и y .

Например, если $w = z^2$, то, полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим $u + iv = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, и, следовательно, равенство $w = z^2$ равносильно равенствам

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Если значения переменной z изображать с помощью точек некоторой плоскости (плоскости z), а значения функции w с помощью точек другой плоскости (плоскости w), то функция $w = f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости z , в которых эта функция определена, и точками плоскости w . Другими словами, функция $w = f(z)$ осуществляет *отображение* точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w .

Обозначим через g множество точек плоскости z , на котором определена функция $w = f(z)$, а через G — множество, состоящее из тех точек плоскости w , на которые с помощью функции $w = f(z)$ отображаются точки множества g . Точки множества G называют *образами* соответствующих точек множества g при отображении $w = f(z)$, а точки множества g — *прообразами* соответствующих точек множества G . Выбрав какую-либо определенную точку множества G , найдем те точки множества g , которые отобразились в выбранную точку, т. е. все прообразы выбранной точки. Таким образом, каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества g . В соответствии с определением функции это будет означать, что на множестве G определена некоторая функция $z = \varphi(w)$, которую называют *обратной* по отношению к функции $w = f(z)$.

Если функция $w = f(z)$ однозначна, то каждой точке плоскости z , в которой функция определена, соответствует одна точка плоскости w . Пусть при этом некоторое множество точек g плоскости z отображается взаимно однозначно на некоторое множество G плоскости w , т. е. функция $w = f(z)$ такова, что не только каждой точке множества g соответствует

одна и только одна точка множества G , но и обратно, каждой точке множества G соответствует в точности одна точка множества g . Тогда функция $z = \varphi(w)$, определенная на множестве G и отображающая его на множество g , обратная по отношению к функции $w = f(z)$, также является однозначной. В этом случае говорят, что функция $w = f(z)$ *однолистка* на множестве g .

Пример 1. Функция $w = z^2$ осуществляет однозначное отображение внутренности круга g плоскости z с центром в начале координат и радиусом, равным 2, на внутренность круга G плоскости w с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

Действительно, точки круга g определены неравенством $|z| < 2$, но если $w = z^2$, то неравенство $|z| < 2$ равносильно неравенству $|w| < 4$, которое определяет совокупность точек, лежащих внутри круга G . Нетрудно увидеть, что это отображение области g на область G однозначно, но не взаимно однозначно. Действительно, функция $w = z^2$ однозначна и каждой точке z соответствует единственная точка w , но каждой точке w , лежащей внутри круга G , за исключением точки $w = 0$, соответствуют две точки круга g , симметричные относительно начала координат, так как если $z_1 = -z_2$ и $z_1^2 = w$, то $z_2^2 = z_1^2 = w$. Следовательно, функция $z = \sqrt{w}$, осуществляющая отображение области G на область g , обратная по отношению к функции $w = z^2$, многозначна (двузначна).

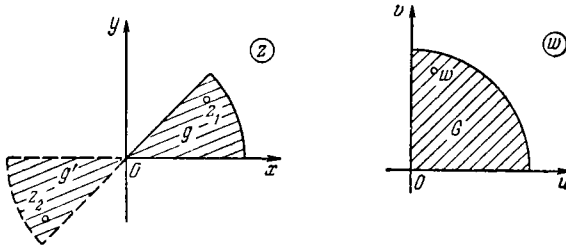


Рис. 6.

Пример 2. Функция $w = z^2$ примера 1 отображает сектор g , точки которого определены неравенствами

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \quad |z| < 1,$$

на сектор G (рис. 6):

$$0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, \quad |w| < 1.$$

Это следует из того, что $\arg(z^2) = 2 \arg z$ и $|z^2| = |z|^2$.

Нетрудно увидеть, что это отображение взаимно однозначно. Действительно, хотя функция $z = \sqrt{w}$, обратная по отношению к данной, двузначна, все же из двух точек z_1 и z_2 ($z_2 = -z_1$), соответствующих точке w области G , лишь одна принадлежит области g . Иными словами, отображение области G на область g осуществляется с помощью однозначной ветви ¹⁾ функции $z = \sqrt{w}$ (другая ветвь функции $z = \sqrt{w}$ отображает область G на область g' , граница которой на рис. 6 отмечена пунктиром).

7. Пусть в плоскости z кривая c задана уравнением

$$F(x, y) = 0. \quad (7)$$

Чтобы найти уравнение кривой C в плоскости w , на которую отображается кривая c с помощью функции $w = f(z)$, нужно исключить x и y из уравнений (6) и (7).

Если кривая c задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то, подставляя $x(t)$ и $y(t)$ вместо x и y в (6), получим уравнения кривой C также в параметрической форме:

$$u = u[x(t), y(t)] = U(t),$$

$$v = v[x(t), y(t)] = V(t).$$

Пример 3. Найти уравнения линий плоскости w , на которые с помощью функции $w = z^2$ отображаются прямые, параллельные координатным осям плоскости z .

Как было показано выше (стр. 19), равенство $w = z^2$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$, равносильно равенствам

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (8)$$

Образ прямых $x = c$, параллельных мнимой оси плоскости z , получим, исключая x и y из уравнения $x = c$ и уравнений (8):

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy,$$

откуда

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

Мы получили уравнение семейства парабол, симметричных относительно оси Ou , с вершинами, расположенными на положительной части этой оси, обращенных вогнутостью в сторону отрицательной части оси Ou (рис. 7).

¹⁾ См. подробнее на стр. 88.

Мнимая ось $x=0$ плоскости z отобразится на линию

$$u = -y^2, \quad v = 0. \quad (9)$$

Второе из этих равенств показывает, что линия (9) расположена на оси Ou , а из первого следует, что u может принимать любые неположительные значения, следовательно, мнимая ось $x=0$ плоскости z отображается на отрицательную часть действительной оси плоскости w :

$$u \leq 0, \quad v = 0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что семейство прямых $y=c$, параллельных действительной оси плоскости z , отобразится в семейство парабол

$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$$

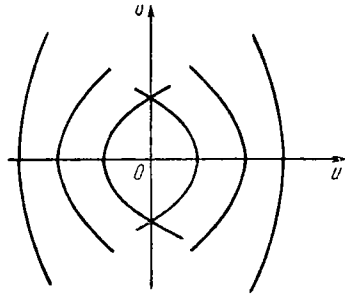


Рис. 7.

плоскости w , причем действительная ось $y=0$ плоскости z отобразится в положительную часть действительной оси плоскости w :

$$u \geq 0, \quad v = 0$$

(рис. 7).

Следует заметить, что параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ линии в плоскости z могут быть заменены одним уравнением $z = z(t)$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Например, уравнение

$$z = \cos t + i \sin t$$

является уравнением окружности радиуса 1 с центром в начале координат, так как оно равносильно уравнениям

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Уравнение кривой в плоскости w , на которую с помощью функции $w = f(z)$ отображается кривая $z = z(t)$, имеет вид $w = f[z(t)]$.

Пример 4. Найти образ прямой $z = (1+i)t$ при отображении $w = z^3$.

Уравнение $z = (1+i)t$ равносильно системе уравнений

$$x = t, \quad y = t$$

и определяет в плоскости z биссектрису первого координатного угла $y=x$. С помощью функции $w = z^3$ эта биссектриса

отображается на линию $w = (1+i)^3 t^3$ или

$$w = (-2 + 2i) t^3,$$

откуда

$$u = -2t^3, \quad v = 2t^3.$$

Исключая параметр t , получим

$$v = -u$$

— уравнение биссектрисы второго координатного угла плоскости w .

8. Число w_0 называют *пределом функции $f(z)$* при z , стремящемся к z_0 , и пишут

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

если для любой сколь угодно малой ε -окрестности точки w_0 можно найти такую δ -окрестность точки z_0 , что для всех точек z этой δ -окрестности (кроме, быть может, самой точки z_0) соответствующие значения функции $f(z)$ будут изображаться точками ε -окрестности точки w_0 .

В случае, если z_0 и w_0 — конечные числа, это определение равносильно следующему. Равенство

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

означает, что как бы мало ни было положительное число ε , к нему можно подобрать такое положительное число δ , что для всех значений $z (z \neq z_0)$, удовлетворяющих условию

$$|z - z_0| < \delta, \quad (10)$$

выполнено неравенство

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \quad (11)$$

Если z_0 или w_0 или оба вместе бесконечны, то в соответствии с определением окрестности бесконечно удаленной точки неравенства (10) или (11), или оба вместе должны быть заменены другими. Так, например, равенство

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$$

(w_0 конечно) означает, что, как бы мало ни было положительное число ε , к нему можно подобрать столь большое

положительное число A , что для всех значений z , для которых $|z| > A$, функция $f(z)$ будет удовлетворять неравенству

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Введенное нами определение предела функции ничем не отличается от определения предела функции действительного переменного, следовательно, все доказываемые в курсе математического анализа теоремы о пределах и бесконечно малых¹⁾ остаются в силе для функций комплексного переменного.

9. Если функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не только существует, но равен значению функции $f(z)$ в точке z_0 , т. е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0 . В соответствии с определением предела это значит, что функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если как бы мало ни было положительное число ε , к нему можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta \quad (12)$$

следует, что

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (13)$$

Если обозначить $z - z_0 = \Delta z$, $w - w_0 = \Delta w$ (Δz — приращение независимой переменной, Δw — приращение функции), то неравенства (12) и (13) заменяются соответственно неравенствами

$$|\Delta z| < \delta, \quad (12')$$

$$|\Delta w| < \varepsilon, \quad (13')$$

и определение непрерывности в точке z_0 функции $w = f(z)$, определенной в некоторой окрестности этой точки, сводится к тому, что в точке z_0 выполняется равенство

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

¹⁾ Функция $f(z)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

Так как сформулированное выше определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функций действительного переменного, то доказываемые в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения, частного¹⁾ непрерывных функций, а также непрерывной функции от непрерывной функции остаются в силе для функций комплексного переменного.

Как уже указывалось выше (стр. 19), равенство $w = f(z)$, где $w = u + iv$, $z = x + iy$, равносильно системе равенств

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, то

$$f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]$$

и

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2}. \quad (14)$$

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке z следует, что если точка (x, y) находится в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) , то выполняется неравенство (13), и следовательно, в соответствии с (14), выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &< \varepsilon, \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| &< \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

которые означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) . Таким образом, из непрерывности функции комплексного переменного следует непрерывность ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных x и y . Справедливо и обратное утверждение: из неравенств (15) и равенства (14) непосредственно следует, что непрерывность функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ влечет за собой непрерывность функции $f(z)$.

Заметим, что если вспомнить способ (см. стр. 21), с помощью которого, зная уравнение некоторой линии в плоскости z , можно найти уравнение ее образа на плоскости w при

¹⁾ Если делитель не обращается в нуль.

отображении $w=f(z)$, то легко убедиться в справедливости утверждения: *непрерывная кривая отображается с помощью непрерывной функции на непрерывную кривую (или, если $f(z)$ постоянна вдоль заданной кривой, — в одну точку).*

§ 3. Основные трансцендентные функции

10. Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (16)$$

так же как и ряд с действительными членами, называется *сходящимся*, если существует конечный предел его частичной суммы

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

при $n \rightarrow \infty$. Этот предел называется *суммой ряда*:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Ряд (16) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad (17)$$

членами которого являются действительные части членов ряда (16), так и ряд

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots \quad (18)$$

составленный из мнимых частей членов ряда (16).

Это утверждение немедленно следует из того, что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости двух последовательностей, одна из которых составлена из действительных, а другая из мнимых частей членов данной последовательности. Отсюда, в частности, получаем, что в случае сходимости ряда (16)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0,$$

в силу того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ввиду сходимости рядов (17) и (18).

Если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$$

составленный из модулей членов ряда (16), то ряд (16) также сходится и называется *абсолютно сходящимся*.

Действительно, из очевидных неравенств

$$|x_n| \leq |z_n|, \quad |y_n| \leq |z_n|$$

вытекает сходимость рядов (17) и (18), а следовательно, и ряда (16).

Определения суммы, разности, произведения двух рядов и теоремы о сходимости суммы, разности, произведения рядов не отличаются от соответствующих определений и теорем для рядов с действительными членами ([1], гл. XI, § 1).

11. Введем определения основных трансцендентных функций для комплексных значений независимого переменного. Если показатель степени является комплексным числом, то определение степени a^z , вводимое в алгебре, теряет смысл. Точно так же известные из тригонометрии определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ неприменимы при комплексных значениях z . Принимая во внимание известные для действительных значений x разложения функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в степенной ряд, положим по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (19)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (20)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (21)$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении z . Действительно, рассмотрим, например, ряд (19). Если $z=r$, где r — любое действительное положительное число, то ряд (19), как известно из курса анализа, сходится, но это и значит, что ряд (19) сходится абсолютно при $|z|=r$, а так как r произвольно, то ряд (19) сходится абсолютно в любой точке плоскости z . Аналогичные рассуждения применимы к рядам (20) и (21).

Следовательно, равенства (19) — (21) определяют во всей плоскости комплексного переменного z функции e^z , $\sin z$,

$\cos z$, совпадающие при действительных значениях z с соответствующими функциями действительного переменного.

Функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ связаны между собой формулой Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (22)$$

Действительно, подставив в равенство (19) iz вместо z , получим

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \dots$$

Умножив, далее, обе части равенства (20) на i и почленно сложив полученное равенство с равенством (21), убедимся в справедливости формулы Эйлера.

Если в формуле Эйлера заменить z на $-z$, будем иметь

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (23)$$

Из (22) и (23) получим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (24)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (25)$$

Как уже указывалось на стр. 9, формула Эйлера позволяет перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Если x_1 и x_2 — действительные числа, то, как известно,

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Принимая во внимание, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} & \left(1 + x_1 + \frac{x_1^2}{2!} + \dots + \frac{x_1^n}{n!} + \dots\right) \left(1 + x_2 + \frac{x_2^2}{2!} + \dots + \frac{x_2^n}{n!} + \dots\right) = \\ & = 1 + (x_1 + x_2) + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x_1 + x_2)^n}{n!} + \dots \quad (26) \end{aligned}$$

Заметим, что сходимость (и притом абсолютная) рядов, участвующих в равенстве (26), не нарушается при замене действительных чисел x_1 и x_2 любыми комплексными числами z_1 и z_2 и что перемножение рядов с комплексными членами производится по правилам перемножения рядов с действительными членами. Отсюда можно утверждать, что равенство

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (27)$$

справедливо при любых комплексных z_1 и z_2 . В частности, если $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Но в силу (22) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, следовательно,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (28)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|e^z| = e^x$ и одно из значений $\text{Arg } e^z$ равно y .

Равенство (28) позволяет вычислять значения показательной функции при любых комплексных значениях показателя. Например,

$$e^{2-3i} = e^2 (\cos 3 - i \sin 3); \quad e^{\pi i} = -1; \quad e^{\frac{\pi}{2} i} = i.$$

Из равенства (28) следует, что функция e^z периодична и имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Действительно, если $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x [\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)] = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

В частности, $e^{2k\pi i} = e^0 = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i} = -1$ (k — целое число).

Если m — целое число, то из (28) получим

$$\begin{aligned} (e^z)^m &= [e^x (\cos y + i \sin y)]^m = e^{mx} (\cos y + i \sin y)^m = \\ &= e^{mx} (\cos my + i \sin my) = e^{m(x+iy)} = e^{mz}. \end{aligned}$$

Так как формула (28) позволяет вычислять значения показательной функции, то формулы (24) и (25) могут служить для вычисления $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном z .

Поскольку показательная функция имеет период $2\pi i$, правые части равенств (24) и (25) не изменятся при замене z на $z + 2\pi$:

$$e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz}, \quad e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz-2\pi i} = e^{-iz},$$

следовательно,

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z,$$

т. е. определенные с помощью (24) и (25) функции $\cos z$ и $\sin z$ периодичны и имеют, как и в случае действительного аргумента, период 2π .

Нетрудно убедиться в том, что для функций $\sin z$ и $\cos z$ при любых комплексных значениях z сохраняется основное связывающее их тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \\ &= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Сохраняются также и другие основные тригонометрические тождества. Например, на основании (24) и (25)

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \\ &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются с помощью равенств

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \quad (29)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \quad (30)$$

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Принимая во внимание (24), (25), (29) и (30), заметим, что гиперболические функции легко могут быть выражены через тригонометрические:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} z.$$

Из этих тождеств следует, в частности, периодичность гиперболических функций, причем периоды $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ равны $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ равны πi .

Пример 1. Найти $\cos i$.

Принимая во внимание, что $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, получим

$$\cos i = \frac{e^{-1} + e}{2} = \operatorname{ch} 1 \approx 1,543$$

(таким образом, $\cos i$ — действительное число, большее единицы, тогда как при x действительном всегда $|\cos x| \leq 1$).

Пример 2. Найти $\sin(1 + 2i)$.

Имеем: $\sin(1 + 2i) = \sin 1 \cos 2i + \cos 1 \sin 2i$, но $\cos 2i = \operatorname{ch} 2$, $\sin 2i = i \operatorname{sh} 2$ и потому

$$\sin(1 + 2i) = \operatorname{ch} 2 \sin 1 + i \operatorname{sh} 2 \cos 1$$

(аргумент под знаком синуса и косинуса измеряется, конечно, в радианах).

12. Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной. Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, то w называется *логарифмом* числа z и обозначается

$$w = \operatorname{Ln} z.$$

Если $w = u + iv$, то из формулы (28) следует, что $|e^w| = e^u$ и $\operatorname{Arg} e^w = v + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как в рассматриваемом случае $e^w = z$, то $e^u = |z|$, или $u = \ln |z|$ ($|z|$ — число действительное и положительное, и здесь имеется в виду обычное определение логарифма), и $v = \operatorname{Arg} z$.

Итак,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (31)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ввиду многозначности величины $\operatorname{Arg} z$ логарифм является многозначной функцией (действительная часть логарифма, равная $\ln |z|$, определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π).

Главным значением логарифма числа z будем называть то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа z . Следовательно, в формуле (31) главное значение логарифма получим при $k=0$.

Если $z=x$ — действительное положительное число, то $|z|=x$ и $\arg z=0$, поэтому, согласно (31), главное значение логарифма действительного положительного числа является числом действительным и совпадает со значением, обозначаемым символом $\ln x$, которое и приводится в таблицах логарифмов. Естественно поэтому символом $\ln z$ обозначать главное значение логарифма любого комплексного числа z . Тогда в соответствии с формулой (31) получим

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Пример 3. Найти $\ln(-1)$ и $\operatorname{Ln}(-1)$.

Модуль числа -1 равен 1, а главное значение аргумента равно π , следовательно,

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i,$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 4. Вычислить $\ln i$ и $\operatorname{Ln} i$.

Модуль числа i равен 1, а главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i,$$

$$\operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 5. Найти $\ln(3+4i)$ и $\operatorname{Ln}(3+4i)$.

Модуль числа $3+4i$ равен $\sqrt{3^2+4^2}=5$, а главное значение аргумента равно $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, следовательно,

$$\ln(3+4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{Ln}(3+4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Так как

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z$$

(n — целое число, положительное или отрицательное), то из формулы (31) следует, что логарифмическая функция, обобщенная нами на случай комплексных значений независимой переменной, обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Формула (28) служит для возведения в комплексную степень числа e . Переходя к определению действия возведения в степень любого комплексного числа, заметим сначала, что в силу определения логарифмической функции $e^{\operatorname{Ln} a} = a$ для любого комплексного a .

Для действительных a и z при $a > 0$, очевидно, справедливо тождество $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$. Определим теперь выражение a^z для любых комплексных a и z формулой

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \quad (32)$$

В силу многозначности логарифма выражение a^z , определенное равенством (32), многозначно. Его главным значением будем называть то, которое получим, подставив в правую часть (32) $\ln a$ вместо $\operatorname{Ln} a$. Только при целых действительных (положительных, отрицательных или равных нулю) значениях z формула (32) определяет единственное значение величины a^z , так как в этом случае неопределенное слагаемое вида $2k\pi i$, входящее в $\operatorname{Ln} a$, будучи умножено на целое число z , дает в показателе правой части равенства (32) слагаемое вида $2k'\pi i$, где k' — также целое действительное число, и значения правой части (32), соответствующие различным значениям k' , совпадают.

Пример 6. Найти i^i .

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \left(\frac{\pi}{2} i + 2k\pi i \right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Главное значение величины i^i равно $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Пример 7. Найти 2^{1+i} .

$$\begin{aligned} 2^{1+i} &= e^{(1+i) \operatorname{Ln} 2} = e^{(1+i)(\ln 2 + 2k\pi i)} = \\ &= e^{i(\ln 2 + 2k\pi) + (\ln 2 - 2k\pi)} = e^{\ln 2 - 2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2) \\ &\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

13. Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим (см. определение обратной функции на стр. 19).

2 И. Г. Араманович и др.

Если $z = \sin w$, то w называется *арксинусом* числа z и обозначается

$$w = \operatorname{Arcsin} z.$$

Аналогично, если $z = \cos w$, то w называется *арккосинусом* z и обозначается

$$w = \operatorname{Arccos} z;$$

если $z = \operatorname{tg} w$, то w называется *арктангенсом* z и обозначается

$$w = \operatorname{Arctg} z$$

и т. д.

Если $z = \sin w$, то на основании (25) $z = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$, откуда

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

или

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2 + 1^1},$$

т. е.

$$iw = \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

и

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}). \quad (33)$$

В силу многозначности логарифма и двузначности корня в правой части (33), $\operatorname{Arcsin} z$ является функцией многозначной. Если z — число действительное и $|z| \leq 1$, то величина $\sqrt{1 - z^2}$ также является действительной и

$$|iz + \sqrt{1 - z^2}| = 1.$$

Но в силу формулы (31) все значения логарифма числа, модуль которого равен 1, являются числами чисто мнимыми, а так как перед знаком логарифма в правой части (33) стоит множитель $-i$, то все значения $\operatorname{Arcsin} z$ будут в рассматри-

¹⁾ Мы не пишем перед радикалом знака \pm , так как символом $\sqrt[n]{z}$ обозначаем все значения корня.

ваемом случае, как и следовало ожидать, числами действительными; во всех прочих случаях значения $\operatorname{Arcsin} z$ действительными быть не могут.

На основании (29), если $z = \operatorname{tg} z$, имеем

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})},$$

откуда $e^{iw}(1 - iz) = e^{-iw}(1 + iz)$, или

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Следовательно,

$$2iw = \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

и

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}. \quad (34)$$

Если z является любым действительным числом, то числа $1 + iz$ и $1 - iz$ будут сопряженными, поэтому их модули одинаковы, следовательно, модуль выражения, стоящего под знаком логарифма в правой части (34), равен 1 и в силу (31) все значения этого логарифма чисто мнимые. В этом случае ввиду наличия в правой части (34) множителя $-\frac{i}{2}$ величина $\operatorname{Arctg} z$, как и следовало ожидать, действительна, в остальных случаях эта величина действительной быть не может.

Аналогично можно получить

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

Пример 8. Найти $\operatorname{Arcsin} 2$.

С помощью (33) и (31) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} 2 &= -i \operatorname{Ln}(2 \pm i\sqrt{3}) = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \\ &= -i \left[\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 9. Найти $\operatorname{Arctg} 2i$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctg} 2i &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{i}{2} \left(\ln \frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + i \frac{\ln 3}{2} + k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}$$

Функции, обратные $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, называются *обратными гиперболическими функциями* и обозначаются соответственно $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$. Обратные гиперболические функции многозначны. Действительно, если $w = \operatorname{Arsh} z$, то $z = \operatorname{sh} w$, или $z = (e^w - e^{-w})/2$, откуда

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим $e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$, откуда $w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$ или

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Многозначность функции $\operatorname{Arsh} z$ является следствием многозначности логарифма и квадратного корня, стоящих в правой части последнего равенства.

Совершенно так же можно доказать, что

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Записать в тригонометрической форме числа:

- а) $3i$; б) $-i$; в) 2 ; г) -2 ; д) $1+i$; е) $-1-i$;
ж) $\sqrt{3}-i$; з) $1-i\sqrt{3}$; и) $2+5i$; к) $-2+5i$; л) $2-5i$;
м) $-2-5i$.

2. Где расположены точки z , для которых:

- а) $|z| > 5$; б) $|z-i| < 3$; в) $|z+2i| \geq 2$; г) $|z-3-4i| = 5$;
д) $\operatorname{Re} z > 3$; е) $\operatorname{Im} z \leq 2$; ж) $|z-2| + |z+2| = 5$; з) $|z-2| - |z+2| > 3$; и) $|z^2-1| = a^2$ ($a > 0$); к) $\operatorname{Re} z^2 = a^2$; л) $|z-i| = |z+2|$; м) $\left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1$; н) $\alpha < \arg z < \beta$; о) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$;
п) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+2i) < \frac{\pi}{2}$?

3. Доказать, что если $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в круг радиуса 1 с центром в начале координат.

4. Найти:

- а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1-i}{1+i}$; в) $\frac{2}{1-3i}$; г) $(\sqrt{3}-i)^5$; д) $(1+i\sqrt{3})^3$.

5. Найти:

- а) $\sqrt[4]{i}$; б) $\sqrt[4]{-8}$; в) $\sqrt[4]{i}$; г) $\sqrt{1-i}$; д) $\sqrt{3+4i}$; е) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

6. На какие линии плоскости w отображаются с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ ($z = x+iy$, $w = u+iv$) следующие линии плоскости z :

- а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 = 1$; в) $y = x$; г) $y = 0$; д) $x = 1$;
е) $(x-1)^2 + y^2 = 1$?

7. Какие линии заданы уравнениями:

- а) $z = (1+i)t$; б) $z = a \cos t + ib \sin t$ ($a > 0$, $b > 0$);
в) $z = t + \frac{i}{t}$; г) $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$?

8. Найти:

- а) $\operatorname{Ln}(1+i)$; б) $\operatorname{Ln}(-i)$; в) $\operatorname{Ln}(-3+4i)$.

9. Найти:

- а) $e^{\frac{\pi}{2}}$; б) $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$; в) e^{3+i} ; г) i^{1+i} ; д) $(1+i)^i$; е) 3^i .

10. Доказать тождества:

- а) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$; б) $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$; в) $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$.

11. Найти:

- а) $\sin i$; б) $\cos(1+i)$; в) $\operatorname{tg}(2-i)$; г) $\operatorname{ch} i$; д) $\operatorname{sh}(-2+i)$;
е) $\sin(x+iy)$; ж) $\cos(x+iy)$.

12. Доказать тождества:

- а) $\sin x = -i \operatorname{sh} ix$; г) $\sin ix = i \operatorname{sh} x$;
б) $\cos x = \operatorname{ch} ix$; д) $\cos ix = \operatorname{ch} x$;
в) $\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix$; е) $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$.

13. Найти:

- а) $\operatorname{Arcsin} 3$; б) $\operatorname{Arcsin} i$; в) $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}-i)$; г) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$;
д) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$; е) $\operatorname{Arth} i$; ж) $\operatorname{Arch}(-1)$.

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Производная

14. Определения производной и дифференциала функции комплексного переменного дословно совпадают с соответствующими определениями для функций действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются и на функции комплексного переменного.

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного обладают по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного многими дополнительными свойствами, причина появления которых заключается в том, что условие для существования производной функции комплексного переменного, как будет видно из дальнейшего, является несравненно более ограничительным, чем условие для существования производной функции действительного переменного.

Дадим независимому переменному $z = x + iy$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и вычислим вызванное этим приращением приращение Δw однозначной функции $w = f(z)$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Если существует предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, w' , $\frac{dw}{dz}$ или $\frac{df}{dz}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Требование существования предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления Δz к нулю накладывает на функцию $f(z)$ значительно более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y = \varphi(x)$ действительного переменного x . Так, если функция $y = \varphi(x)$ имеет производную, то это значит, что существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x + \Delta x$ к точке x по двум направлениям: слева (при $\Delta x < 0$) и справа (при $\Delta x > 0$), и что эти пределы совпадают. Требование же существования производной для функции $f(z)$ комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по любому пути, в частности, по любому из бесконечного множества различных лучей, и совпадение всех этих пределов.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$; тогда

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$$

и

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

В этих обозначениях

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (1)$$

15. Пусть функция $f(z)$ имеет производную в точке z ; тогда предел (1) существует и не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю; в частности, при $\Delta z = \Delta x$, т. е. при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси Ox (рис. 8), получим:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Выбрав $\Delta z = i\Delta y$, т. е. устремляя точку $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси Oy (рис. 9), получим:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, то из (2) и (3) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Эти условия, называемые *условиями Коши — Римана* или *условиями Даламбера — Эйлера*, должны быть выполнены

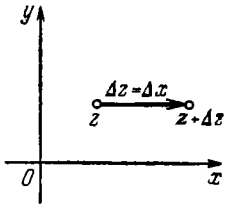


Рис. 8.

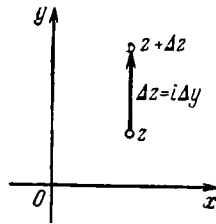


Рис. 9.

в каждой точке, в которой функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема (имеет производную).

При некоторых добавочных ограничениях, например, если потребовать существования полных дифференциалов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, можно доказать, что условия Коши — Римана не только необходимы, но и достаточны для дифференцируемости функции $f(z)$.

Действительно, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют полный дифференциал (см., например, [1], п. 110), то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \rho,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2 \rho,$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$. Каково бы ни было $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \rho}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Заменив на основании условий Коши — Римана в числителе правой части $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, а $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \rho}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \rho}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $|\Delta z| = |\Delta x + i\Delta y| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho$, то

$$\left| \frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \rho}{\Delta x + i\Delta y} \right| = |\varepsilon_1 + i\varepsilon_2|.$$

Но величина $|\varepsilon_1 + i\varepsilon_2|$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$, т. е. при $\Delta z \rightarrow 0$.

Следовательно, по какому бы закону приращение Δz ни стремилось к нулю, из (5) получим

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

и достаточность условий Коши — Римана для существования $f'(z)$ доказана. Мы снова пришли к формуле (2), которая показывает, что дифференцирование функции по комплексному переменному (если оно возможно) равносильно вычислению частной производной по x .

Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической* в данной точке.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области, называется *аналитической* или *голоморфной* в этой области.

Точки плоскости z , в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют *правильными* точками этой

функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена), — *особыми* точками.

Пример 1. Выяснить, является ли функция $w = z^2$ аналитической?

Если $w = z^2$, то $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ и $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, откуда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия (4) выполнены во всех точках плоскости, следовательно, функция z^2 является аналитической во всей плоскости.

Пример 2. Выяснить, является ли функция e^z аналитической?

Если $w = e^z$, то $u + iv = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ и $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, условия Коши — Римана выполнены в каждой точке. Функция e^z является аналитической во всей плоскости.

Пример 3. Выяснить, является ли аналитической функция $w = \bar{z}$.

Если $w = \bar{z}$, то $u + iv = x - iy$ и $u = x$, $v = -y$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Следовательно, первое из условий (4) не выполнено. Функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

Пример 4. Выяснить, является ли функция $w = z \operatorname{Re} z$ аналитической.

Если $w = z \operatorname{Re} z$, то $u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy$ и $u = x^2$, $v = xy$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Условия (4) выполнены только при $x = 0$ и $y = 0$. Следовательно, функция $z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$ и ни в какой точке не является аналитической.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функций комплексного переменного, а определение производной функции комплексного переменного также не отличается от соответствующего определения для функции действительного переменного, то нетрудно проверить, что известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, функции от функции, обратной

функции остаются справедливыми и в случае функций комплексного переменного.

Легко проверить, что сохраняются и правила дифференцирования элементарных трансцендентных функций. Например, если $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, то, пользуясь формулой (2), получим

$$\frac{dw}{dz} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

С помощью формул (24) и (25) гл. I нетрудно проверить справедливость известных формул дифференцирования тригонометрических функций. Правило дифференцирования обратной функции приведет нас к известным формулам дифференцирования логарифма и обратных тригонометрических функций. Предоставляем читателю самостоятельно проверить все сделанные утверждения.

16. Действительная и мнимая части функции $f(z) = u + iv$, аналитической в некоторой области D , являются в этой области решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

называемого *уравнением Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Действительно, функции u и v связаны в области D условиями Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое из этих тождеств по x , а второе по y и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0^1).$$

¹⁾ Существование и непрерывность частных производных второго порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следует из того, что аналитическую функцию можно дифференцировать любое число раз (см. п. 27).

Дифференцируя первое из тех же тождеств по y , а второе по x и вычитая, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

называются *гармоническими функциями*. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Однако, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, функция $u(x, y) + iv(x, y)$, вообще говоря, не будет аналитической функцией, так как условия (4), как правило, не будут выполнены.

Аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мы получим, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, подберем другую так, чтобы удовлетворялись условия Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, т. е. определим другую из этих функций по ее двум частным производным или, что то же самое, по ее полному дифференциалу. Как известно (см., например, [1], п. 115), по полному дифференциалу функция определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого определяется своей действительной или мнимой частью.

Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши — Римана, следовательно, являющиеся действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, называются *сопряженными*.

Пример 5. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то из условий Коши — Римана (4) находим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1. \quad (7)$$

Из (6) получим

$$u = - \int 4y dx = -4xy + \varphi(y), \quad (8)$$

где функция $\varphi(y)$ пока произвольна. Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем (8) по y и подставляем в (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1,$$

откуда $\varphi'(y) = -1$, $\varphi(y) = -y + C$. Следовательно,

$$u = -4xy - y + C.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} w = u + iv &= -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) = \\ &= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C, \end{aligned}$$

где $z = x + iy$.

§ 2. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

17. Пусть в плоскости z задана точка z_0 и проходящая через эту точку кривая γ с уравнением $z = z(t)$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$, причем точке z_0 соответствует значение

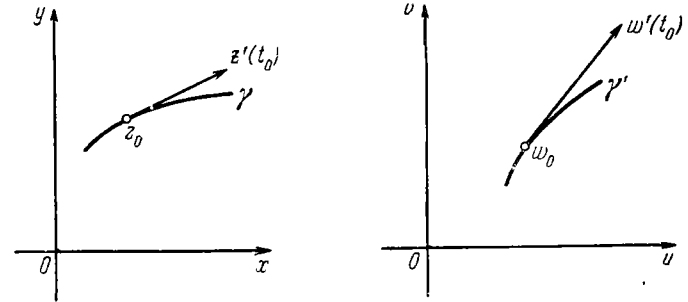


Рис. 10.

параметра t_0 , т. е. $z_0 = z(t_0)$. Предположим, далее, что при $t = t_0$ существует не равная нулю производная функции $z(t)$, т. е.

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \neq 0.$$

Отсюда следует, что величины $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ не могут быть равны нулю одновременно и, следовательно, в точке z_0 существует касательная к кривой γ (рис. 10), причем вектор

с координатами $\{x'(t_0), y'(t_0)\}$ направлен по касательной к этой кривой¹⁾ (этот вектор изображает комплексное число $x'(t_0) + iy'(t_0) = z'(t_0)$). Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.

Уравнение кривой γ' , являющейся образом кривой γ при отображении $w = f(z)$, имеет вид $w = f[z(t)]$. Обозначим $f[z(t)] = w(t)$. Пусть

$$w_0 = f[z(t_0)] = w(t_0)$$

— образ точки z_0 при отображении $w = f(z)$. Так как, в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции,

$$w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0), \quad (9)$$

то в силу сделанных предположений $w'(t_0) \neq 0$ и, следовательно, в точке w_0 существует касательная к кривой γ' . Из равенства (9) имеем

$$\text{Arg } w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \text{Arg } z'(t_0)$$

(неопределенное слагаемое вида $2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), входящее в правую часть, можно отнести ко второму слагаемому, а в первом слагаемом взять, например, главное значение аргумента). Величина $f'(z_0)$, а следовательно и величина $\arg f'(z_0)$, зависит только от вида функции $f(z)$ и точки z_0 , поэтому если функция $f(z)$ фиксирована, то

$$\text{Arg } w'(t_0) = \alpha + \text{Arg } z'(t_0),$$

где величина $\alpha = \arg f'(z_0)$ не зависит от выбора кривой γ , проходящей через точку z_0 .

Комплексные числа $z'(t_0)$ и $w'(t_0)$ изображаются векторами, направленными по касательным к кривым γ и γ' , проведенным соответственно через точки z_0 и w_0 ; поэтому если производная аналитической функции $f(z)$ отлична от нуля в точке z_0 , то аргумент этой производной имеет следующий геометрический смысл: он равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой кривой, проходящей через эту точку, чтобы получить направление касательной в соответствующей точке w_0 к образу данной кривой при отображении $w = f(z)$ (если $\alpha = \arg f'(z_0) > 0$,

то поворот происходит против часовой стрелки, если $\alpha < 0$, то по часовой стрелке).

Если через точку z_0 провести какие-либо две кривые γ_1 и γ_2 , имеющие касательные в этой точке, то направления касательных к образам γ'_1 и γ'_2 этих кривых мы получим путем поворота касательных к самим кривым γ_1 и γ_2 на один и тот же угол α , поэтому угол θ между кривыми γ'_1 и γ'_2 тот же (как по величине, так и по направлению отсчета), что и угол между кривыми γ_1 и γ_2 (рис. 11).

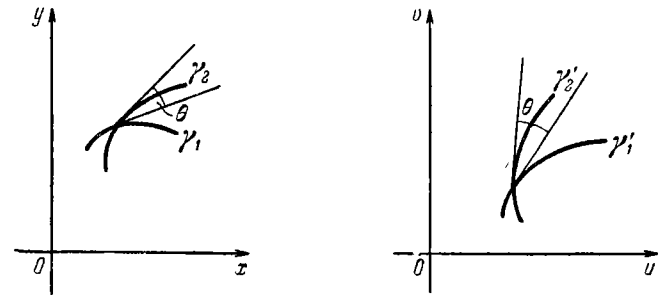


Рис. 11.

Отображение, сохраняющее углы между линиями, называют *конформным*; если при этом сохраняется и направление отсчета углов, то такое отображение называют *конформным отображением 1-го рода*. Мы, таким образом, доказали, что отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным отображением 1-го рода во всех точках, в которых производная этой функции отлична от нуля.

18. Для выяснения геометрического смысла модуля производной заметим, что $|\Delta z|$ есть расстояние от точки z_0 до точки $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ — расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Следовательно, величина $\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ указывает, в каком отношении в результате отображения изменяется расстояние между этими точками.

Так как

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|,$$

¹⁾ См. [1], п. 73.

то величину $|f'(z_0)|$ естественно назвать *коэффициентом растяжения* в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояния между точками при отображении увеличиваются и происходит растяжение: если $|f'(z_0)| < 1$, то отображение в окрестности точки z_0 приводит к сжатию.

Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от того, по какому закону точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0 , то коэффициент растяжения в данной точке постоянен, т. е. одинаков во всех направлениях; таково второе свойство отображения, осуществляемого с помощью аналитической функции.

Пример 1. Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией $w = 3z$.

Так как $\frac{dw}{dz} = 3 \neq 0$, то отображение конформно во всей плоскости и коэффициент растяжения в любой точке равен 3.

Так как $\arg \frac{dw}{dz} = 0$, то направления при отображении не изменяются.

Если учесть, наконец, что $w = 0$ при $z = 0$ и, следовательно, начало координат остается при рассматриваемом отображении неподвижным, то можно утверждать, что отображение с помощью функции $w = 3z$ сводится к преобразованию подобия с центром подобия в нулевой точке и коэффициентом подобия, равным 3.

Пример 2. Отображение $w = z^2$ конформно во всех точках плоскости z , за исключением точки $z = 0$.

Действительно, $\frac{dw}{dz} = 2z$, и лишь при $z = 0$ производная $\frac{dw}{dz} = 0$.

Так как

$$\operatorname{Arg} w = 2\operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

то лучи

$$\operatorname{Arg} z = \alpha \text{ и } \operatorname{Arg} z = \beta,$$

выходящие из точки $z = 0$ и образующие между собой угол, равный $\beta - \alpha$, отображаются соответственно в лучи $\operatorname{Arg} w = 2\alpha$ и $\operatorname{Arg} w = 2\beta$, образующие между собой угол $2(\beta - \alpha)$.

Следовательно, в точке $z = 0$ конформность отображения нарушается: углы в этой точке не сохраняются, а удваиваются.

Конформное отображение, при котором углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное, называют *конформным отображением 2-го рода*. Таково, например, отображение, осу-

ществляемое функцией $w = \bar{z}$. Действительно, если значения z и \bar{z} изображать точками одной и той же плоскости, то ввиду того, что точки z и \bar{z} симметричны относительно действительной оси (рис. 12), это отображение сводится к преобразованию симметрии относительно действительной оси. При этом не происходит никакого искажения масштаба (коэффициент растяжения в каждой точке равен 1), а все углы сохраняются по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное.

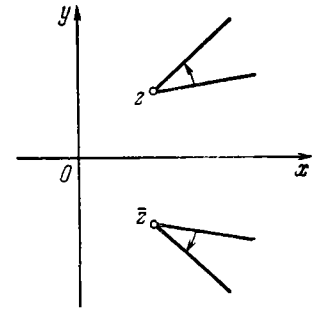


Рис. 12.

В дальнейшем, говоря о конформном отображении, мы всегда будем иметь в виду лишь конформное отображение 1-го рода.

§ 3. Интеграл от функции комплексного переменного

19. Предположим, что в плоскости z дана замкнутая или незамкнутая дуга C , которую мы будем в дальнейшем считать гладкой или кусочно-гладкой¹⁾. Граничные точки кривой C обозначим z_0 и Z ; если кривая замкнута, то $z_0 = Z$. Одну из

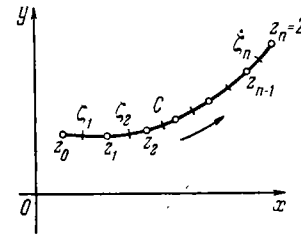


Рис. 13.

этих точек, например z_0 , будем считать начальной, а другую — конечной; тем самым мы установим положительное направление на кривой C , которое на чертеже будем отмечать стрелкой (рис. 13). Предположим, кроме того, что функция $f(z)$ непрерывна во всех точках дуги C .

Разобьем дугу C произвольным способом на n «элементарных» дуг и занумеруем точки деления z_k в направлении от начальной точки к конечной, причем $z_n = Z$ (рис. 13). Введем обозначения

$$z_1 - z_0 = \Delta z_1, \quad z_2 - z_1 = \Delta z_2, \quad \dots, \quad z_n - z_{n-1} = \Delta z_n.$$

¹⁾ См. сноску на стр. 18.

Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k , а $|\Delta z_k|$ — длина этого вектора, т. е. длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу. Внутри или на одном из концов каждой элементарной дуги выберем по одной точке и обозначим эти точки $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ (точка ζ_k находится на элементарной дуге с концами в точках z_{k-1} и z_k). Составим сумму

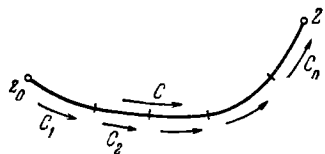


Рис. 14.

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $n \rightarrow \infty$,

а длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю (т. е. стремится к нулю максимальная из величин $|\Delta z_k|$), называется *интегралом от функции $f(z)$ по дуге C* и обозначается

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k. \quad (10)$$

Из этого определения интеграла непосредственно получим следующие его свойства²⁾:

$$1) \int_C [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz \pm \int_C f_2(z) dz;$$

$$2) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz,$$

где k — действительная или комплексная постоянная;

3) если дуга \bar{C} геометрически совпадает с дугой C , но имеет противоположное направление, то

$$\int_{\bar{C}} f(z) dz = - \int_C f(z) dz,$$

так как при замене дуги C дугой \bar{C} все множители Δz_k в правой части (10) изменят знаки на противоположные;

¹⁾ Существование этого предела при ограничениях, наложенных выше на функцию $f(z)$ и дугу C , будет доказано на стр. 52.

²⁾ Свойства 1) — 5) могут быть также легко получены из формулы (11) или из формулы (14) (см. далее).

4) если дуга C состоит из дуг C_1, C_2, \dots, C_n (рис. 14), то

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz;$$

5) $\int_C dz = Z - z_0$, так как при $f(z) \equiv 1$ сумма в правой части (10) принимает вид

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_n = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = Z - z_0;$$

6) если $|f(z)| \leq M$ во всех точках дуги C и длина дуги C равна l , то

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq Ml.$$

Действительно,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq Ml,$$

так как сумма $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ равна длине ломаной, вписанной в дугу C , и поэтому не больше, чем длина l дуги C .

20. Вычисление интеграла (10) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных. Пусть

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv,$$

где u и v — функции переменных x и y :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + \\ &+ i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (11) показывает, что для того, чтобы свести вычисление интеграла от функции комплексного переменного к вычислению обычных криволинейных интегралов, следует

представить подынтегральную функцию в виде $f(z) = u + iv$ и умножить ее на $dz = dx + i dy$. При этом подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

Докажем формулу (11).

Обозначим $z_k = x_k + iy_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$); тогда

$$\Delta z_k = (x_{k+1} + iy_{k+1}) - (x_k + iy_k) = (x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k) = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, а так как

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k),$$

то

$$f(\zeta_k) \Delta z_k = [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k) = [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i[v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k],$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \lim_{\max \Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &+ i \lim_{\max \Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k], \end{aligned}$$

и в соответствии с определением криволинейного интеграла (см., например, [1], гл. IX, § 1) мы приходим к формуле (11). Существование криволинейных интегралов в правой части формулы (11), а следовательно и существование интеграла

$$\int_C f(z) dz,$$

следует из кусочной гладкости кривой C и из непрерывности вдоль дуги C функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, являющихся действительной и мнимой частями непрерывной вдоль кривой C функции $f(z)$.

Если дуга C задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (12)$$

а начальная и конечная точки дуги соответствуют при этом значениям параметра $t = t_0$ и $t = T$:

$$z_0 = x(t_0) + iy(t_0), \quad Z = x(T) + iy(T),$$

то, как известно из правила вычисления криволинейного интеграла, подставив под знак интеграла вместо x и y функ-

ции, стоящие в правых частях уравнений (12), а вместо dx и dy — дифференциалы этих функций, можно свести вычисление криволинейных интегралов в правой части (11) к вычислению определенных интегралов с нижним пределом t_0 и верхним пределом T . С другой стороны, уравнения (12) равносильны (см. стр. 22) одному уравнению в комплексной форме

$$z = z(t), \quad (13)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$. Поэтому для вычисления интеграла (11) достаточно подставить вместо z в подынтегральную функцию $z(t)$ из (13), а вместо dz — дифференциал этой функции.

Следовательно, интеграл по комплексному переменному можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^T f[z(t)] z'(t) dt. \quad (14)$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_C \operatorname{Re} z dz,$$

где дуга C есть: 1) прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $1 + i$; 2) ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $1 + i$.

Решение.

1) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $1 + i$ в параметрической форме, имеет вид $x = t$, $y = t$, а в комплексной форме $z = (1 + i)t$, где действительное переменное t изменяется от 0 до 1. Находим, далее, $dz = (1 + i) dt$ и

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re} z dz &= \int_0^1 \operatorname{Re} [(1 + i)t] (1 + i) dt = (1 + i) \int_0^1 t dt = \\ &= \frac{1 + i}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1 + i}{2}. \end{aligned}$$

2) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и 1, в комплексной форме имеет вид $z = t$, где t изменяется от 0 до 1; уравнение в комплексной форме отрезка, соединяющего точки 1 и $1 + i$, имеет вид $z = 1 + it$, где t изменяется от 0 до 1. Итак,

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re} z dz &= \int_0^1 \operatorname{Re} t dt + \int_0^1 \operatorname{Re} (1 + it) \cdot i dt = \int_0^1 t dt + i \int_0^1 dt = \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + it \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i. \end{aligned}$$

§ 4. Теорема Коши

21. Теорема Коши. Если функция $f(z)$ — аналитическая в односвязной области G , ограниченной замкнутым контуром C , а также в точках этого контура, то

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Предположим, что производная $f'(z)$ данной функции непрерывна на контуре C и в ограниченной им односвязной области.

Напомним, что для того чтобы криволинейный интеграл вида

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

не зависел от контура интегрирования (т. е. чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае, как известно, подынтегральное выражение является полным дифференциалом (см. [1], п. 141). При этом предполагается, что функции P и Q вместе со своими частными производными непрерывны в некоторой односвязной области, а контур C целиком лежит в этой области.

Согласно формуле (11)

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (15)$$

Так как функция $f(z)$ аналитическая, то для нее выполняются условия Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, которые как раз и являются условиями равенства нулю интегралов $\int_C u dx - v dy$ и $\int_C v dx + u dy$, взятых по замкнутому контуру C . Непрерывность частных производных функций u и v соблюдается, так как с самого начала предполагалось, что производная $f'(z)$ непрерывна.

Таким образом, каждый из двух интегралов в правой части (15) равен нулю, и теорема Коши тем самым доказана.

Можно доказать теорему Коши и без предположения о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в области, ограниченной этим контуром, однако при этом доказательство значительно усложнится.

22. Рассмотрим теперь многосвязную область G , ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами C_1, C_2, \dots, C_n (рис. 15), и предположим, что функция $f(z)$ является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$. Пусть

$$\int_{C_k} f(z) dz$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

обозначает интеграл по контуру C_k , обходимому против часовой стрелки.

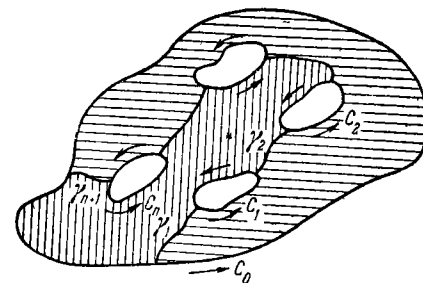


Рис. 15.

Соединим контуры $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ дугами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$, как показано на рис. 15; при этом область G окажется разбитой на две односвязные области. Контуры, ограничивающие эти односвязные области, обозначим соответственно Γ' и Γ'' . Так как функция $f(z)$ является аналитической как на контурах Γ' и Γ'' , так и в областях, ограниченных каждым из этих контуров, то по теореме Коши

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0,$$

а следовательно, и

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0. \quad (16)$$

Если на каждом из контуров Γ', Γ'' считать положительным то направление, при котором область, ограниченная этим контуром, остается слева, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = \\ = \int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz \end{aligned} \quad (17)$$

(при сложении интегралов в левой части (17) интегралы по дугам $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ уничтожаются ввиду того, что интегрирование по каждой из этих дуг будет производиться при вычитании суммы в левой части (17) два раза в противоположных направлениях).

Из (16) и (17) следует

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (18)$$

В частности, если функция $f(z)$ является аналитической на контурах C_0 и C_1 (рис. 16) и в двусвязной области, ограниченной этими контурами, то из (18) при $n=1$ получим

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz. \quad (19)$$

Равенство (18) будем называть *теоремой Коши для составного контура*.

23. Если интеграл от функции $f(z)$ по всякому замкнутому контуру, расположенному в некоторой области G , равен нулю, то интеграл по всякой дуге, находящейся внутри области G , зависит только от положения начальной и конечной точек этой дуги и, следовательно, одинаков для всех дуг, имеющих общую начальную и общую конечную точки. Другими словами, в этом случае интеграл не зависит от пути интегрирования.

Действительно, если дуги C_1 и C_2 имеют общую начальную точку z_0 и общую конечную точку Z (рис. 17), то величина

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz \quad (20)$$

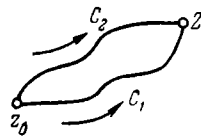


Рис. 17.

представляет собой интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру C , состоящему из дуги C_1 и дуги C_2 , геометрически совпадающей с дугой C_2 , но противоположной ей по направлению. Если этот интеграл равен нулю, то равна нулю и

разность (20), откуда

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz^1).$$

Таким образом, из теоремы Коши следует, что если функция аналитична в некоторой односвязной области G , то, какова бы ни была дуга C внутри этой области, величина $\int_C f(z) dz$ зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки Z дуги C и, следовательно, для этого интеграла можно пользоваться обозначением

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz.$$

Докажем, что если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области G , содержащей точки z_0 и Z , причем величина z_0 постоянна, а Z изменяется, то в этой области функция

$$F(Z) = \int_{z_0}^Z f(z) dz \quad (21)$$

является аналитической и

$$\frac{dF(Z)}{dZ} = f(Z).$$

Положив, как и раньше, $f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, и обозначив $z_0 = x_0 + iy_0$, $Z = X + iY$, получим с помощью формулы (11)

$$F(Z) = \int_{z_0}^Z f(z) dz = U(X, Y) + iV(X, Y),$$

где

$$U(X, Y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} u dx - v dy, \quad (22)$$

$$V(X, Y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} v dx + u dy. \quad (23)$$

¹⁾ Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если в некоторой области интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, то интеграл по всякому замкнутому контуру, расположенному в этой области, равен нулю.

Основываясь на свойствах криволинейных интегралов от полных дифференциалов (см. [1], п. 142), можно утверждать, что полные дифференциалы функций $U(X, Y)$ и $V(X, Y)$ равны подынтегральным выражениям в правых частях равенств (22) и (23). Поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial X} = u(X, Y), \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -v(X, Y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = v(X, Y), \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = u(X, Y),$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial V}{\partial X}.$$

Но это означает, что для функции $F(Z)$ выполнены условия Коши—Римана, следовательно, эта функция является аналитической в области G . В соответствии с формулой (2) имеем

$$F'(Z) = \frac{\partial U}{\partial X} + i \frac{\partial V}{\partial X} = u(X, Y) + iv(X, Y) = f(Z),$$

что и требовалось доказать.

Если две функции имеют в некоторой области одинаковые производные, то в этой области разность между функциями постоянна.

Действительно, если $\varphi(z) = F_1(z) - F_2(z)$ и $F_1'(z) = F_2'(z)$, то $\varphi'(z) = 0$. Но если $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\varphi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

и из равенства $\varphi'(z) = 0$ получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Отсюда в силу условий Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, а значит, и функция $\varphi(z)$, постоянны.

Пусть теперь $\Phi(Z)$ — какая-нибудь функция, для которой

$$\Phi'(Z) = f(Z),$$

где $f(Z)$ — аналитическая функция. Так как производная от интеграла $\int_{z_0}^Z f(z) dz$ тоже равна $f(Z)$, то по доказанному

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz = \Phi(Z) + C,$$

где C — постоянная. Положив в этом равенстве $Z = z_0$, получим $0 = \Phi(z_0) + C$, откуда $C = -\Phi(z_0)$ и

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz = \Phi(Z) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \Big|_{z_0}^Z.$$

Эта формула совпадает с известной из интегрального исчисления формулой Ньютона—Лейбница.

24. Вычислим интеграл

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} \quad (24)$$

по замкнутому контуру C , если n является целым положительным числом (если целое число $n \leq 0$, то по теореме Коши $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_C (z-a)^m dz = 0$, так как $m = -n \geq 0$ и

подынтегральная функция аналитическая во всей плоскости).

Если точка $z = a$ находится вне области, ограниченной контуром C , то подынтегральная функция — аналитическая внутри и на контуре C и по теореме Коши

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0.$$

Предположим теперь, что контур C один раз обходит точку a , и будем считать, что направление обхода выбрано так, что точка a остается слева. Тогда в силу теоремы Коши (см. (19)) величина интеграла (24) не зависит от вида контура C , хотя, быть может, и отлична от нуля. Поэтому в качестве контура C можно взять, например, окружность радиуса R с центром в точке a . Уравнение такой окружности в комплексной форме имеет вид

$$z - a = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Отсюда $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$ и на основании (14)

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi. \quad (25)$$

При $n \neq 1$ ($n=2, 3, \dots$) получим

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z-a)^n} &= \frac{i}{R^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{(1-n)R^{n-1}} e^{i(1-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

так как $e^{2\pi(1-n)i} = e^0 = 1$.

Если же $n=1$, то из (25) следует, что

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad (26)$$

Итак, даже если точка a находится внутри контура C , то интеграл (24) отличен от нуля только при $n=1$.

Из (26) следует, что если контур C обходит k раз точку a в положительном направлении (на рис. 18 $k=2$), то

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i; \quad (27)$$

если же контур C обходит k раз точку a в отрицательном направлении, то

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = -2k\pi i. \quad (28)$$

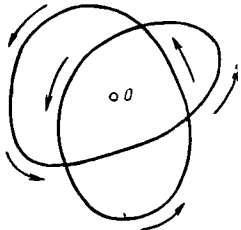


Рис. 18.

25. Равенства (26) — (28) находятся в тесной связи с определением логарифмической функции. Действительно, для неопределенного интеграла имеем:

$$\int \frac{dz}{z-a} = \ln(z-a) + C.$$

Подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки $z=a$, и поэтому в любой односвязной области, не содержащей точки $z=a$, интеграл по γ — дуге, принадлежащей этой области,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной точки z_1 и конечной точки z_2 дуги γ .

Допустим, для простоты, что $a=0$, и рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Пусть $z_1=1$ и $z_2=z$ являются соответственно начальной и конечной точками дуги γ и пусть дуга γ не пересекает отрицательной части действительной оси и не проходит через точку $z=0$. Тогда можно дугу γ включить в односвязную область, не содержащую точки $z=0$ и точек отрицательной части действительной оси;

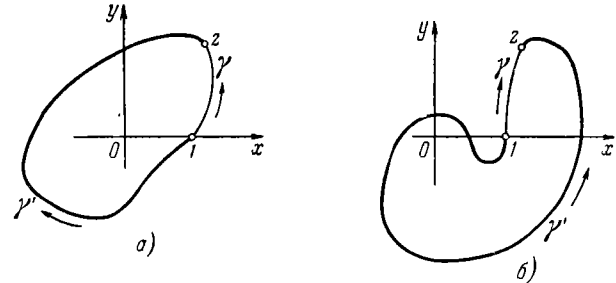


Рис. 19.

в такой области функция $\ln z$ будет непрерывной и аналитической (отрицательная часть действительной оси является для функции $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ линией разрыва, так как в силу определения главного значения аргумента величина $\arg z$ терпит разрыв при действительных отрицательных значениях z). При этих условиях независимо от формы дуги γ будем иметь

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z.$$

Если теперь соединить точку 1 с точкой z дугой γ' так, чтобы дуги γ и γ' образовывали замкнутый контур l , один раз окружающий точку $z=0$, то в силу равенства (26) получим

$$\int_l \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

если направление на контуре l выбрано против часовой стрелки. Но так как (рис. 19)

$$\int_l \frac{dz}{z} = \pm \left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma'} \frac{dz}{z} \right)$$

(знак зависит от того, какое из расположений, указанных на рис. 19, имеет место, а именно: верхний знак относится к рис. 19, а, нижний — к рис. 19, б), то

$$\int_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2\pi i.$$

Если дуга γ' такова, что замкнутый контур, образованный ею и дугой γ , k раз обходит точку $z=0$, то на основании формулы (27) или (28) получим

$$\int_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2k\pi i.$$

Поэтому, если Γ — любая не проходящая через точку $z=0$ дуга с начальной точкой 1 и конечной точкой z , то

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z,$$

причем выбор значения многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в правой части этого равенства зависит от выбора дуги Γ .

§ 5. Интегральная формула Коши

26. Предположим, что функция $f(\zeta)$ является аналитической в односвязной области G плоскости ζ , а также на контуре Γ , ограничивающем эту область. Пусть, далее, z — любая точка внутри области G (рис. 20). Описав из точки z , как из центра, окружность γ радиуса ρ так, чтобы она целиком лежала внутри области G , в силу (19) получим

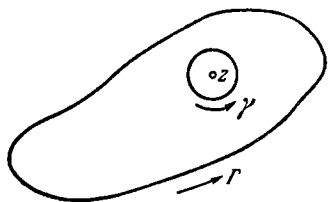


Рис. 20.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (29)$$

Теорема Коши для составного контура применима, так как единственной особой точкой в области G для подынтегральной функции $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ является точка $\zeta = z$ и, следовательно, в двусвязной области между контурами Γ и γ эта функция является аналитической. Заметим, что в равенстве (29) ра-

диус ρ окружности γ может быть выбран произвольно, лишь бы эта окружность лежала внутри области G .

Так как функция $f(\zeta)$ является аналитической, а следовательно, и непрерывной в области G , то, как бы ни было мало $\epsilon > 0$, для любой точки ζ на окружности γ справедливо неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon,$$

если только радиус ρ окружности γ достаточно мал (напомним, что точка z — центр этой окружности и, следовательно, $|\zeta - z| = \rho$). Поэтому

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon. \quad (30)$$

Здесь мы воспользовались свойством б) интеграла (стр. 51) и тем, что $|\zeta - z| = \rho$ на дуге γ .

Так как ϵ можно взять сколь угодно малым, то неравенство (30) означает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (31)$$

Но, как уже было отмечено, величина $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ при уменьшении ρ не изменяется, поэтому знак предела в левой части (31) можно опустить. Если учесть также, что в силу (26)

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z),$$

то из (31) будем иметь

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

Сопоставляя последнее равенство с равенством (29), получим так называемую *интегральную формулу Коши*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (32)$$

Величина, стоящая в правой части интегральной формулы Коши, называется *интегралом Коши*. Для вычисления интеграла Коши нужно знать значения функции $f(z)$ только на контуре Γ , следовательно, интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области G , если известны значения этой функции на контуре Γ , ограничивающем область G .

Если точка z лежит вне области G , то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши, так как в этом случае подынтегральная функция в (32) является аналитической в области G .

27. Применяя интегральную формулу Коши, докажем, что *производная аналитической функции также является аналитической функцией*.

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в ограниченной этим контуром области; тогда, в соответствии с интегральной формулой Коши,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где z — любая точка внутри рассматриваемой области.

Какова бы ни была внутренняя точка z данной области, величину $|h|$ можно выбрать столь малой, что точка $z+h$ будет также лежать внутри этой области. Будем, например, считать, что $|h|$ меньше кратчайшего расстояния точки z до контура C . На основании интегральной формулы Коши

$$f(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z - h}$$

и

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta,$$

или, после несложных преобразований,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \quad (33)$$

При $h \rightarrow 0$ левая часть этого равенства стремится к $f'(z)$, а подынтегральная функция в правой части — к $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$. Пре-

дельный переход под знаком интеграла в правой части (33) приводит, таким образом, к формуле

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (34)$$

Справедливость этой формулы будет доказана, если будет доказано, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} = \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Для этого достаточно установить, что разность

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} &= \\ = \int_C f(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta &= \\ = h \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \end{aligned} \quad (35)$$

стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

Обозначим через δ кратчайшее расстояние от точки z до контура C (рис. 21); тогда для любой точки ζ этого контура $|\zeta - z| \geq \delta$. Так как сторона треугольника не меньше разности двух других его сторон, то для расстояния от точки ζ контура до точки $z+h$ справедливо неравенство

$$|\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - |h| \geq \delta - |h|$$

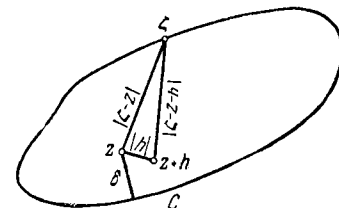


Рис. 21.

($|h|$ взят столь малым, что $|h| < \delta$). Пусть M — наибольшее значение модуля функции $f(z)$ на контуре C , тогда для любой точки ζ этого контура

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{M}{(\delta - |h|)\delta^2},$$

и на основании свойства 6) интеграла (стр. 51)

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{Ml}{(\delta - |h|)\delta^2},$$

где l — длина дуги C . Но тогда на основании (35)

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq |h| \frac{Ml}{(\delta - |h|)^2} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, и формула (34) доказана.

Теперь, составив с помощью формулы (34) отношение $[f'(z+h) - f'(z)]/h$ и перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, можно путем аналогичных выкладок доказать, что

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^3}.$$

Так же доказывается, что при любом целом $n > 0$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (36)$$

Равенство (36) получено при условии, что функция $f(z)$ является аналитической как на контуре C , так и в области, ограниченной этим контуром. Но если функция $f(z)$ является аналитической в точке z , то всегда можно провести из этой точки, как из центра, окружность C столь малого радиуса, что функция $f(z)$ остается аналитической на этой окружности и в круге, ею ограниченном, и следовательно, на основании формулы (36) можно заключить, что в точке z и в любой другой точке достаточно малой окрестности точки z существует производная любого порядка n этой функции.

Итак, из аналитичности функции в некоторой точке, т. е. из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а следовательно, и аналитичность этих производных.

28. Интегральная формула Коши и формула (36) могут служить для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

¹⁾ Для удобства запоминания заметим, что формально формулы (34), (36) можно получить из интегральной формулы Коши, дифференцируя обе ее части по z (в правой части дифференцирование производится по параметру z под знаком интеграла).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)},$$

где C — окружность радиуса 2 с центром в точке $3i$.

Функция $f(z) = \frac{e^z}{z}$ внутри круга, ограниченного окружностью C , аналитична, поэтому, применяя интегральную формулу Коши, получим (роль ζ играет z , а роль z — число $2i$)

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int_C \frac{f(z) dz}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi (\cos 2 + i \sin 2).$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3},$$

где C — замкнутый контур, обходящий точку i один раз. Применяя формулу (36) к функции $f(z) = \cos z$, получим:

$$\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{d^2(\cos z)}{dz^2} \Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \operatorname{ch} 1.$$

Подробнее о вычислении интегралов по замкнутым контурам см. в гл. V.

29. Мы условились называть интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (37)$$

интегралом Коши в предположении, что C — замкнутый контур, а функция $f(z)$ — аналитическая на контуре C и в области G , ограниченной этим контуром. При этом оказалось, что функция, определяемая интегралом (37), совпадает с $f(z)$ внутри области G и равна тождественно нулю вне контура C . Если считать, что C — произвольная кусочно-гладкая дуга (или даже совокупность нескольких таких дуг), а функция $f(\zeta)$ задана только на контуре C и непрерывна на нем, то величину (37) принято называть *интегралом типа Коши*. Интеграл Коши является, очевидно, частным случаем интеграла типа Коши.

Функция, определяемая интегралом типа Коши,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

определена всюду, кроме точек дуги C , так как в любой точке z , не принадлежащей C , интеграл типа Коши существует (подынтегральная функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ остается непрерывной на контуре C).

Дословно повторяя выкладки и рассуждения, с помощью которых была обоснована формула (34), можно найти производную интеграла типа Коши в любой точке z , не принадлежащей дуге C :

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

и тем самым доказать, что *интеграл типа Коши является функцией аналитической в любой точке, не лежащей на дуге C* . Для производной любого порядка n интеграла типа Коши справедлива формула, аналогичная формуле (36):

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

1. Проверить условия Коши — Римана для следующих функций:
а) $w = \sin z$; б) $w = \cos z$; в) $w = \operatorname{Ln} z$; г) $w = \operatorname{Arcsin} z$;
д) $w = z^n$ (n — целое число).

2. Найти аналитическую функцию переменной z ($z = x + iy$), действительная часть которой равна:

а) $x^2 - 3xy^2$; б) $x^2 - y^2 + 2x$; в) $\frac{x}{x^2 + y^2}$; г) $\frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$;
д) $2e^x \sin y$.

3. Найти аналитическую функцию переменной z , мнимая часть которой равна

а) $-\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$; б) $2xy + 3x$; в) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x > 0$;
г) $e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y$.

4. Найти угол поворота и коэффициент растяжения при отображении с помощью функций $w = z^2$ и $w = z^3$ в каждой из следующих точек:

а) $z = 1$; б) $z = \frac{1}{2}$; в) $z = -\frac{1}{4}$; г) $z = 1 + i$; д) $z = \sqrt{3} - i$.

5. Выяснить, какая часть плоскости z сжимается и какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:

а) $w = z^2$; б) $w = \frac{1}{z}$; в) $w = z^2 + 2z$; г) $w = e^z$; д) $w = \ln(z - 1)$.

6. Вычислить $\int_C \operatorname{Im} z dz$, если путь интегрирования C :

а) является прямолинейным отрезком, соединяющим точку 0 с точкой $2 + i$;

б) состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой i , и прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $2 + i$.

7. Вычислить $\int_C |z| dz$, если путь интегрирования C является:

а) прямолинейным отрезком, соединяющим точку -1 с точкой 1 ;

б) полуокружностью радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости, причем точка -1 является начальной, а точка 1 — конечной.

В задачах 8—13 следует пользоваться теоремой Коши, интегральной формулой Коши и формулами, получаемыми из интегральной формулы Коши дифференцированием. Направление вдоль контура C в этих задачах — против часовой стрелки.

8. Вычислить $\int_C \frac{z^2 dz}{z - 2i}$, если:

а) C — окружность радиуса 3 с центром в начале координат;
б) C — окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

9. Вычислить $\int_C \frac{\sin z dz}{z + i}$, если C — окружность с центром

в точке $-i$.

10. Вычислить $\int_C \frac{dz}{z^2 + 9}$, если:

а) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $2i$;
б) C — окружность радиуса 1 с центром в точке $-2i$.

11. Вычислить $\int_C \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}$, если:

а) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $2i$;
б) C — окружность радиуса 2 с центром в точке $-2i$.

12. Вычислить $\int_C \frac{e^z dz}{(z + 2)^4}$, если точка $z = -2$ находится внутри

замкнутого контура C .

13. Вычислить $\int_C \frac{dz}{(z - 1)^3 (z + 1)^3}$, если:

а) C — окружность радиуса $R < 2$ с центром в точке $z = 1$;
б) C — окружность радиуса $R < 2$ с центром в точке $z = -1$;
в) C — окружность радиуса $R > 1$ с центром в точке $z = 0$.

ГЛАВА III

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Линейная и дробно-линейная функции

30. Отображение, осуществляемое *линейной функцией*

$$w = az + b, \quad (1)$$

где a и b — комплексные постоянные, $a \neq 0$, является конформным во всей плоскости, так как производная этой функции во всех точках плоскости существует и отлична от нуля.

Рассмотрим некоторые частные случаи линейных преобразований, причем для большей наглядности будем считать

плоскость w совмещенной с плоскостью z .

$$1^\circ. w = z + b.$$

Так как сложение комплексных чисел сводится к сложению векторов, то при отображении $w = z + b$ всякая точка z смещается в соответствующую точку w с помощью вектора сдвига, изображающего данное комплексное число b .

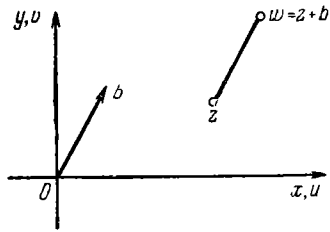


Рис. 22.

(рис. 22). Ввиду того, что b постоянно, т. е. вектор сдвига одинаков для всех точек, мы имеем *преобразование параллельного переноса*.

$$2^\circ. w = e^{i\alpha} z, \quad \alpha — \text{действительное число.}$$

Так как $e^{i\alpha}$ — комплексное число с модулем, равным единице, и аргументом α , то в соответствии с правилом умножения комплексных чисел (стр. 13) переход от точки z к точке w осуществляется с помощью поворота точки z на угол α около начала координат. Величина α постоянна, следовательно,

рассматриваемое преобразование является *преобразованием поворота* вокруг начала координат (рис. 23).

$$3^\circ. w = rz, \quad r — \text{действительное положительное число.}$$

Так как $\arg r = 0$, то в соответствии с правилом умножения комплексных чисел $\text{Arg } w = \text{Arg } z$, $|w| = r|z|$. Первое из этих равенств показывает, что точка z и соответствующая ей точка w находятся на одном и том же луче (рис. 24), выходящем из начала координат, а из второго равенства следует, что отношение расстояния точки w от начала координат к расстоянию соответствующей точки z от начала

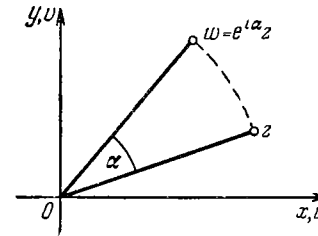


Рис. 23.

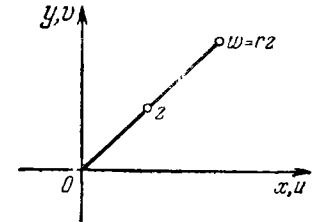


Рис. 24.

координат постоянно и равно r . Следовательно, рассматриваемое преобразование является *преобразованием подобия* с центром подобия в начале координат; r — коэффициент подобия.

4°. Общий случай линейного преобразования

$$w = az + b$$

сводится к рассмотренным выше простейшим преобразованиям. Действительно, если r и α — модуль и аргумент числа a , то $w = re^{i\alpha} z + b$, и переход от точки z к точке w осуществляется путем последовательного применения следующих операций: 1) поворота около начала координат на угол α , 2) преобразования подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным r , 3) параллельного переноса с помощью вектора сдвига, соответствующего комплексному числу b .

Пример 1. Найти функцию, отображающую равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках A, B, C , соответствующих числам $3 + 2i, 7 + 2i, 5 + 4i$, лежащий в плоскости z ,

на равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках O, B', C' плоскости w , соответствующих числам $0, -2i, 1-i$ (рис. 25).

Так как треугольники ABC и $OB'C'$ подобны, то отображение может быть осуществлено с помощью линейной функции.

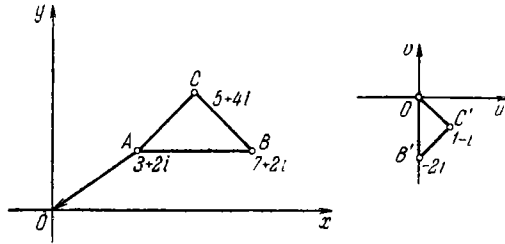


Рис. 25.

Отображение можно разложить на следующие операции:

1) параллельный сдвиг, смещающий точку A в начало координат; этот сдвиг производится вектором \overrightarrow{AO} , соответствующим числу $-(3+2i)$, и, следовательно, осуществляется функцией $t = z - (3+2i)$;

2) поворот около начала координат на угол $-\frac{\pi}{2}$, соответствующий преобразованию

$$T = te^{-i\frac{\pi}{2}}, \text{ или } T = -it;$$

3) преобразование подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным $1/2$; это преобразование осуществляется функцией $w = \frac{1}{2}T$. Таким образом, окончательно $w = -\frac{1}{2}i[z - (3+2i)]$, или $w = -\frac{iz}{2} + \frac{3}{2}i - 1$.

31. Точки A и B называются *симметричными относительно окружности* (рис. 26), если

1) они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности;

2) произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса окружности:

$$OA \cdot OB = R^2,$$

или

$$OB = \frac{R^2}{OA}. \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что если точка A приближается к окружности, то точка B также приближается к окружности и всякая точка, лежащая на окружности, симметрична самой себе относительно этой окружности. Из (2) следует также, что точкой, симметричной центру окружности, является бесконечно удаленная точка.

Если центр O окружности совпадает с началом координат и одна из двух симметричных относительно окружности точек изображает комплексное число z , то другая соответствует числу R^2/\bar{z} . Действительно, модули чисел z и R^2/\bar{z} удовлетворяют условию (2), так как

$$\left| \frac{R^2}{\bar{z}} \right| = \frac{R^2}{|z|}$$

и, кроме того, числа z и R^2/\bar{z} изображаются точками, лежащими на одном луче, выходящем из начала координат, так как

$$\text{Arg } \frac{R^2}{\bar{z}} = -\text{Arg } \bar{z} = \text{Arg } z.$$

В частности, точки z и $1/\bar{z}$ симметричны относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат (*единичной окружности*), а так как точки $1/\bar{z}$ и $1/z$ симметричны относительно действительной оси, то преобразование

$w = 1/z$ состоит из двух симметричных отражений: относительно единичной окружности и относительно действительной оси (рис. 27).

Функция $w = 1/z$ осуществляет взаимно однозначное отображение расширенной плоскости z на расширенную плоскость w ; при этом точке $z = 0$ соответствует точка $w = \infty$,

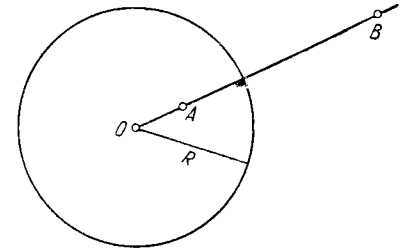


Рис. 26.

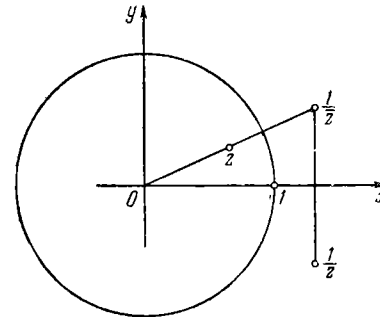


Рис. 27.

а точке $w=0$ соответствует точка $z=\infty$. Условимся считать, что угол между линиями в бесконечно удаленной точке одной из плоскостей (z или w) равен углу между образами этих линий в начале координат другой плоскости. Так как во всех остальных точках производная $w' = -1/z^2$ не равна нулю, то при указанном условии отображение будет конформным во всей расширенной плоскости.

32. Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3)$$

где a, b, c, d — комплексные постоянные и $ad - bc \neq 0$ ¹⁾, осуществляет взаимно однозначное отображение всей расширенной плоскости z на всю расширенную плоскость w . Действительно, разрешив (3) относительно z , получим

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

и следовательно, не только всякому z соответствует единственное значение w , но и каждому w соответствует единственное значение z . Точке $z = -d/c$ соответствует точка $w = \infty$, а точке $w = a/c$ — точка $z = \infty$.

Произвольное дробно-линейное преобразование (3) может быть получено с помощью последовательного применения линейных преобразований и преобразования $w = 1/z$. Действительно, преобразование (3) легко приводится к виду

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Следовательно, к преобразованию (3) можно прийти путем последовательных преобразований:

$$t = cz + d, \quad T = \frac{1}{t}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} T.$$

Отсюда следует, что если какое-нибудь свойство справедливо при линейном преобразовании и при преобразовании $w = 1/z$, то оно справедливо и при дробно-линейном преобразовании (3). Например, можно утверждать, что отображение, осуще-

ствляемое дробно-линейной функцией, конформно во всей плоскости, так как этим свойством обладают отображения, осуществляемые линейной функцией и функцией $w = 1/z$.

33. Дробно-линейное преобразование обладает *круговым свойством*, состоящим в том, что с помощью этого преобразования окружность всегда отображается также на окружность, если прямую считать частным случаем окружности — окружностью бесконечного радиуса.

Для доказательства этого свойства достаточно проверить, что круговое свойство выполнено при преобразовании $w = 1/z$, так как для всех простейших преобразований, из которых состоит линейное преобразование (стр. 70—71), круговое свойство очевидно.

Считая $z = x + iy$, $w = u + iv$, перепишем равенство $w = 1/z$ в виде $u + iv = \frac{1}{x + iy}$, или

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$

откуда

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \quad (4)$$

Уравнение произвольной окружности в плоскости z имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (5)$$

(при $A=0$ имеем прямую — окружность бесконечного радиуса). Подставив в (5) x и y из (4), получим уравнение отображенной линии

$$\frac{A}{u^2 + v^2} + \frac{Bu}{u^2 + v^2} - \frac{Cv}{u^2 + v^2} + D = 0,$$

или

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0,$$

являющееся также уравнением окружности (при $D=0$ получим уравнение прямой), и круговое свойство доказано.

Всякая окружность делит всю плоскость на две области: внутренность круга и внешность круга, если радиус окружности конечен, и две полуплоскости, если радиус окружности бесконечен. При отображении с помощью дробно-линейной функции каждая из двух областей, ограниченных окружностью

¹⁾ Если $ad - bc = 0$, то $a : c = b : d$ и $w = k$, где k — постоянная,

в плоскости z , отображается на одну из двух областей, ограниченных соответствующей окружностью в плоскости w .

Так, например, из сказанного выше относительно отображения, осуществляемого функцией $w = 1/z$, следует, что с помощью этой функции единичная окружность $|z| = 1$ отображается сама на себя (т. е. на такую же окружность плоскости w), причем внутренность единичного круга плоскости z отображается на внешность единичного круга плоскости w , а внешность единичного круга плоскости z — на внутренность единичного круга плоскости w . Вообще, для того чтобы определить, на какую область плоскости w отображается каждая из двух областей, ограниченных окружностью в плоскости z , следует проследить за тем, в каком направлении движется точка w , когда соответствующая ей точка z непрерывно перемещается по окружности. При этом та из областей, ограниченных окружностью в плоскости z , которая находится, например, слева от движущейся по окружности точки, перейдет в область плоскости w , расположенную также слева, если смотреть в сторону движения точки w . Это следует из того, что при конформном отображении углы сохраняются не только по величине, но и по направлению.

Если a, b, c, d — действительные числа, то дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

принимает при действительных значениях z действительные значения, и следовательно, действительная ось плоскости z отображается на действительную ось плоскости w . При этом, так как действительная ось делит плоскость на две полуплоскости («верхнюю» и «нижнюю»), то верхняя полуплоскость плоскости z отображается или сама на себя (т. е. на верхнюю полуплоскость плоскости w), или на нижнюю полуплоскость, в зависимости от того, в каком направлении при заданных a, b, c, d движется по действительной оси точка w , если соответствующая точка z перемещается по действительной оси, например, слева направо.

34. Область, ограниченная дугами двух окружностей, в силу кругового свойства дробно-линейной функции, отображается этой функцией или на область такого же вида, или на область, ограниченную дугой окружности и прямолинейным

отрезком (внутренность или внешность кругового сегмента), или на угол между двумя лучами. Для выяснения того, какой из указанных случаев осуществляется в некотором конкретном примере, следует иметь в виду, что если на данной окружности (или прямой) расположена точка, отображающаяся в бесконечно удаленную точку плоскости w , то эта окружность (или прямая) отображается в прямую, в противном случае она отобразится в окружность конечного радиуса. Поэтому если, например, общая точка двух окружностей отображается в бесконечно удаленную точку, область, ограниченная дугами этих окружностей, должна отобразиться в угол.

Пример 2. Найти область плоскости w , на которую отображается с помощью функции

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

заштрихованная на рис. 28, а область плоскости z , ограниченная дугами окружностей радиуса $\sqrt{2}$ с центрами в точках -1 и 1 .

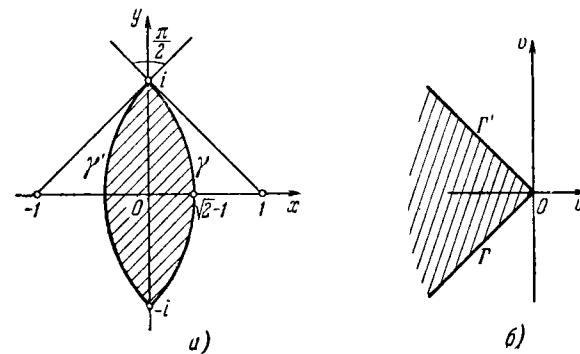


Рис. 28.

Окружности пересекаются в точках i и $-i$ под прямым углом, так как радиусы, идущие в точку пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны. Так как $w = \infty$ при $z = -i$, то одна из общих точек окружностей отображается в бесконечно удаленную точку плоскости w . Следовательно, заштрихованная область отображается на угол.

Другая общая точка отображается в начало координат ($w = 0$ при $z = i$) и, таким образом, вершина угла, на который отображается данная область, находится в начале координат. Величина угла равна $\pi/2$, так как отображение конформно, а для того чтобы определить положение угла, достаточно найти хотя бы одну точку на

проходящие через точки A и B , как было доказано выше, ортогональны к окружности C , следовательно, ввиду конформности дробно-линейного отображения, окружности, проходящие через точки A' и B' , ортогональны к окружности C' ;

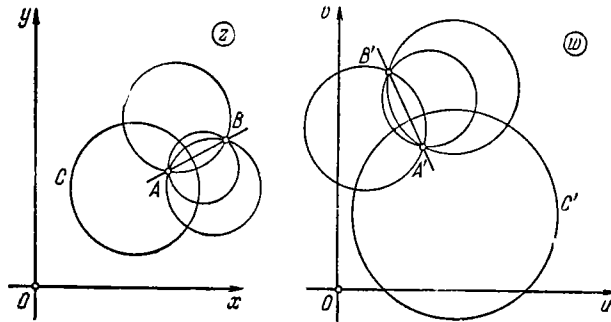


Рис. 32.

отсюда следует, что точки A' и B' симметричны относительно окружности C' , и доказательство свойства симметрии завершено. Применим свойство симметрии для решения двух важных задач.

1. Найти дробно-линейную функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга (рис. 33).

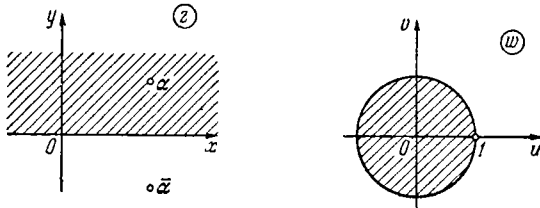


Рис. 33.

При этом отображении некоторая точка α верхней полуплоскости z должна отобразиться в центр единичного круга (т. е. в начало координат плоскости w). В силу свойства симметрии точка $\bar{\alpha}$, симметричная точке α относительно действительной оси, должна отобразиться в точку ∞ , симметричную точке 0 относительно единичной окружности плоскости w .

кости w , так как действительная ось плоскости z , по условию, должна быть отображена на единичную окружность плоскости w . Дробно-линейная функция, удовлетворяющая перечисленным условиям (т. е. такая, что $w=0$ при $z=\alpha$ и $w=\infty$ при $z=\bar{\alpha}$), имеет вид

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

где k — комплексная постоянная.

Величина k не вполне произвольна, так как при действительном значении z точка w должна находиться на единичной окружности и, следовательно, $|w|=1$. С другой стороны, при действительном z должно быть $|z - \alpha| = |z - \bar{\alpha}|$, поэтому $|k|=1$, т. е. $k = e^{i\varphi}$, где φ — любое действительное число. Следовательно, отображающая функция имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

Как и следовало ожидать, существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих требуемое отображение. Каждая из этих функций определяется значениями трех действительных параметров (параметра φ и двух действительных параметров, определяющих комплексное число α).

2. Найти дробно-линейную функцию, отображающую внутренность единичного круга на себя (рис. 34)

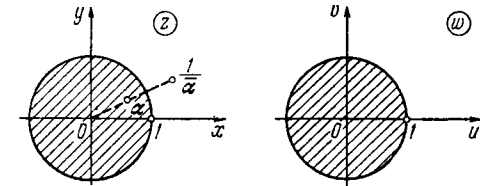


Рис. 34.

Пусть α — точка внутри единичного круга плоскости z , отображающаяся в центр круга (в начало координат) плоскости w . Тогда точка $1/\bar{\alpha}$, симметричная точке α относительно единичной окружности, должна отобразиться в точку, симметричную центру круга, т. е. в бесконечно удаленную

точку плоскости w . Таким образом, $w=0$ при $z=\alpha$ и $w=\infty$ при $z=1/\bar{\alpha}$. Дробно-линейная функция, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k\bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1} = k' \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z},$$

где $k' = -k\bar{\alpha}$.

Постоянная k' не произвольна, так как точки единичной окружности плоскости z отображаются в точки единичной окружности плоскости w , и, в частности, при $z=1$ имеем $|w|=1$. Но при $z=1$ имеем $w = k' \frac{1-\alpha}{1-\alpha}$, а так как $\left| \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \right| = 1$, то $|k'| = 1$, т. е. $k' = e^{i\varphi}$ (φ — действительное число). Таким образом, общий вид функции, отображающей единичный круг на себя, таков:

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}.$$

В этом равенстве также участвуют три действительных параметра. Произвольность параметра φ связана с тем, что при повороте на любой угол вокруг центра круг отображается сам на себя (умножение на $e^{i\varphi}$ соответствует повороту на угол φ вокруг начала координат). Произвольность комплексного числа α ($|\alpha| < 1$), которое определяется, как и всякое комплексное число, двумя действительными числами, означает, что можно, отображая единичный круг сам на себя, потребовать еще, чтобы любая заданная точка, лежащая внутри круга, отобразилась в центр круга.

Пример 3. Найти центр и радиус окружности, на которую функция

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (\operatorname{Im} z_2 \neq 0, z_1 \neq z_2)$$

отображает действительную ось.

При заданном отображении точка $z = z_2$ переходит в точку $w = \infty$. Так как действительная ось отображается на окружность, то точка \bar{z}_2 , симметричная точке z_2 относительно действительной оси, отобразится в точку, симметричную бесконечно удаленной точке относительно окружности, т. е. в центр окружности. Таким образом, центр окружности находится в точке

$$w_0 = \frac{\bar{z}_2 - z_1}{\bar{z}_2 - z_2} = \frac{\bar{z}_2 - z_1}{-2i \operatorname{Im} z_2} = \frac{z_1 - \bar{z}_2}{2i \operatorname{Im} z_2}.$$

Чтобы найти радиус окружности, достаточно найти какую-нибудь одну точку окружности и определить ее расстояние от центра. Имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 1.$$

Следовательно, точка $z = \infty$ на действительной оси переходит в точку $w = 1$ на окружности, и радиус окружности равен расстоянию этой точки от центра, т. е.

$$R = |w_0 - 1| = \left| \frac{\bar{z}_2 - z_1}{\bar{z}_2 - z_2} - 1 \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - z_2} \right| = \frac{|z_2 - z_1|}{2 |\operatorname{Im} z_2|}.$$

Можно было бы вместо образа точки $z = \infty$ взять, например, образ $w = \frac{z_1}{z_2}$ точки $z = 0$. Тогда $R = \left| w_0 - \frac{z_1}{z_2} \right|$. Читателю рекомендуется проверить, что этим равенством определяется уже найденное значение R .

§ 2. Некоторые общие теоремы

36. Приведем без доказательства некоторые теоремы теории конформных отображений.

а) Теорема Римана о возможности конформного и взаимно однозначного отображения одной односвязной области на другую.

Теорема Римана утверждает, что *существует аналитическая функция $w = f(z)$, отображающая взаимно однозначно и конформно одну односвязную плоскую область G_1 на другую G_2 , если только ни одна из областей G_1, G_2 не принадлежит к числу двух исключительных. Одним из таких исключений является вся расширенная плоскость, другим — вся плоскость с одной выключенной точкой* (например, вся плоскость с выключенной бесконечно удаленной точкой, т. е. вся конечная плоскость).

Можно, далее, доказать, что аналитических функций, осуществляющих отображение односвязной области G_1 на односвязную область G_2 (если, конечно, ни одна из них не принадлежит к числу исключительных), бесконечное множество, и для того чтобы обеспечить единственность отображающей функции $w = f(z)$, достаточно в какой-нибудь точке z_0 области G_1 задать значения

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta_0.$$

Геометрически это означает, что единственность отображения будет обеспечена, если для некоторой точки z_0 области G_1 будет указан ее образ w_0 и задан угол, на который при этом отображении поворачивается бесконечно малая окрестность точки z_0 .

б) Принцип взаимно однозначного соответствия границ. Пусть область G ограничена гладким или кусочно-гладким контуром Γ и пусть, далее, функция $w=f(z)$, аналитическая в G и на Γ , отображает контур Γ взаимно однозначно на некоторый контур Γ' , ограничивающий область G' , причем, когда точка z обходит контур Γ так, что область G остается слева, соответствующая точка w обходит контур Γ' так, что область G' также остается слева. В этом случае, утверждает принцип взаимно однозначного соответствия, область G отобразится с помощью функции $f(z)$ взаимно однозначно и конформно на область G' .

Следовательно, в тех случаях, когда этот принцип применим, для отыскания области, на которую функция $w=f(z)$ отображает заданную область G , достаточно обойти границу области G и найти контур, на который эта граница отображается функцией $f(z)$. В дальнейшем принцип взаимно однозначного соответствия будет неоднократно использован.

в) Принцип симметрии.

Пусть область G , содержащая в составе своей границы некоторый прямолинейный отрезок γ (конечной или бесконечной длины), отображается функцией $w=f(z)$ на область

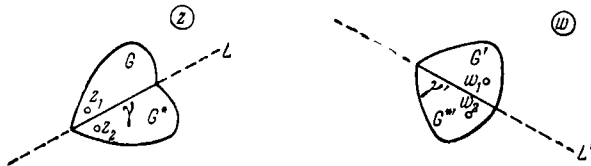


Рис. 35.

G' так, что отрезок γ отображается на прямолинейный отрезок γ' , входящий в границу области G' (рис. 35). Обозначим соответственно через L и L' прямые, на которых лежат отрезки γ и γ' . Имеет место следующая теорема (принцип симметрии): если функция $f(z)$ аналитична в области

G , а также во всех внутренних точках граничного отрезка γ , то эта функция аналитична также в области G^* , симметричной с G относительно прямой L , и обладает тем свойством, что любые две точки z_1 и z_2 , из которых одна лежит в G , симметричные относительно L , отображаются в точки w_1 и w_2 , симметричные относительно прямой L' ¹⁾.

Из принципа симметрии, в частности, следует, что функция $w=f(z)$ отображает область, состоящую из области G , области G^* и отрезка γ , на область, состоящую из области G' , симметричной с ней относительно L' области G'^* и отрезка γ' (рис. 35).

Прямолинейные отрезки γ и γ' с помощью соответствующих дробно-линейных преобразований можно отобразить на дуги окружностей, и так как для дробно-линейных преобразований имеет место свойство симметрии, то принцип симметрии справедлив и в том случае, когда γ и γ' — дуги окружностей.

§ 3. Степенная функция. Функция Жуковского

37. Отображение, осуществляемое степенной функцией

$$w = z^n, \quad (6)$$

где целое положительное число $n \geq 2$, является конформным во всей плоскости, кроме точки $z=0$, так как производная этой функции существует и отлична от нуля всюду, кроме точки $z=0$. В точке $z=0$, как будет показано ниже, конформность отображения нарушается.

Вводя в плоскостях z и w полярные координаты $z = re^{i\varphi}$ и $w = \rho e^{i\theta}$, получим из (6), что $\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi}$, и следовательно,

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi.$$

Из этих равенств следует, что окружности $r = \text{const}$ с центром в точке $z=0$ плоскости z отображаются на окружности $\rho = \text{const}$ с центром в точке $w=0$ плоскости w (рис. 36), причем единичная окружность отображается сама

¹⁾ Если функция $f(z)$ не определена в области, симметричной с G относительно прямой, на которой лежит отрезок γ , то ее можно доопределить так, чтобы теорема осталась справедливой.

на себя, а лучи $\varphi = \text{const}$, выходящие из начала координат плоскости z , на лучи $\theta = \text{const}$, выходящие из начала координат плоскости w . При этом луч $\varphi = 0$, идущий по положительному направлению действительной оси, отображается

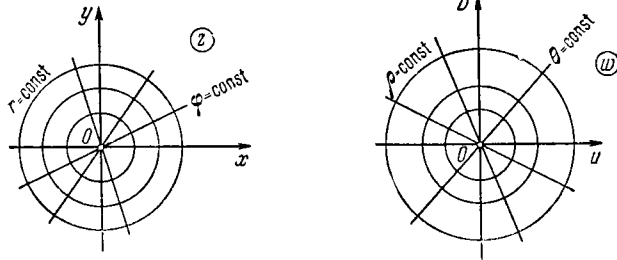


Рис. 36.

сам на себя, т. е. на луч $\theta = 0$; луч $\varphi = \alpha$ плоскости z отображается на луч $\theta = n\alpha$ плоскости w , и угол $0 < \varphi < \alpha$ плоскости z ($\alpha < 2\pi/n$) с вершиной в начале координат отображается на угол $0 < \theta < n\alpha$ плоскости w . Следовательно, конформность отображения действительно нарушается в точке $z = 0$: углы в этой точке увеличиваются при отображении

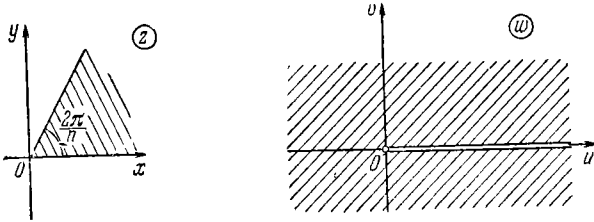


Рис. 37.

в n раз. В частности, угол $0 < \varphi < \pi/n$ величины π/n плоскости z отображается с помощью функции $w = z^n$ на верхнюю полуплоскость $0 < \theta < \pi$ плоскости w . Угол $0 < \varphi < 2\pi/n$ величины $2\pi/n$ отображается на угол $0 < \theta < 2\pi$, т. е. на всю плоскость без действительной положительной полуоси (рис. 37). На эту полуось отображаются обе стороны рассматриваемого угла плоскости z .

Для того чтобы отображение было взаимно однозначным не только внутри угла $0 < \varphi < 2\pi/n$, но и на его сторонах, следует в плоскости w произвести «разрез» по положительной части действительной оси и условиться считать, что луч $\varphi = 0$ отображается на верхний, а луч $\varphi = 2\pi/n$ на нижний край этого разреза (если луч $\varphi = \alpha$, вращаясь против часовой стрелки, приближается к лучу $\varphi = 2\pi/n$, то соответствующий луч в плоскости w приближается к действительной части положительной полуоси снизу).

Если $w = z^n$, то каждой точке z соответствует единственная точка w , но одной и той же точке w ($w \neq 0$, $w \neq \infty$) соответствует (стр. 15) n точек плоскости z , расположенных в вершинах правильного n -угольника с центром в нулевой точке: отображение плоскости z на плоскость w не является, следовательно, взаимно однозначным. Всякие два значения z , соответствующие одному и тому же w (т. е. всякие два значения величины $\sqrt[n]{w}$), имеют один и тот же модуль и аргументы, отличающиеся на число, кратное $2\pi/n$. Если одно из

этих чисел z , то другое $ze^{\frac{2k\pi i}{n}}$, где k — целое.

Область плоскости z , не содержащая никаких различных точек, соответствующих одному и тому же w , т. е. не содержащая никаких двух различных вершин правильного n -угольника с центром в начале координат, отображается с помощью функции $w = z^n$ на соответствующую область плоскости w взаимно однозначно, т. е. в ней функция z^n однолистка. Этим свойством во всяком случае обладает любая область, целиком заключенная внутри угла величины $2\pi/n$ с центром в начале координат. В частности, как указано выше, угол $0 < \varphi < 2\pi/n$ отображается взаимно однозначно на всю плоскость w с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу $\varphi = 0$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ нижний край разреза. Угол $2\pi/n < \varphi < 4\pi/n$ с помощью функции $w = z^n$ также отображается взаимно однозначно на плоскость w с тем же разрезом, причем лучу $\varphi = 2\pi/n$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = 4\pi/n$ нижний край разреза. Такое же отображение получим для каждого из углов, на которые разбивают плоскость z лучи $\varphi = 2k\pi/n$, где k — целое число, причем при отображении угла $2(k-1)\pi/n < \varphi < 2k\pi/n$ ($k = 1, 2, \dots$) на плоскость

с описанным выше разрезом лучу $\varphi = 2(k-1)\pi/n$ соответствует верхний, а лучу $\varphi = 2k\pi/n$ нижний край разреза.

Для того, чтобы область плоскости z взаимно однозначно отображалась на соответствующую область плоскости w с помощью функции $w = z^n$, необходимо и достаточно, как было отмечено выше, чтобы эта область не содержала двух различных вершин какого-нибудь правильного n -угольника с центром в точке $z = 0$ (т. е. двух различных точек вида

$ze^{2k\pi i/n}$, где k — целое действительное число). Область, внутри которой находится начало координат или бесконечно удаленная точка, таким свойством заведомо не обладает, так как в первом случае область содержит достаточно малые правильные n -угольники с центром в начале координат, а во втором случае содержит достаточно большие n -угольники указанного вида, и, следовательно, отображение такой области с помощью функции $w = z^n$ на соответствующую область плоскости w не является взаимно однозначным.

38. В любой односвязной области, не содержащей точек $w = 0$ и $w = \infty$, можно определить, как будет показано, однозначные ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$. Это означает, что в такой области можно определить несколько однозначных аналитических функций, по отношению к каждой из которых функция $w = z^n$ является обратной. Эти функции и называют *однозначными ветвями функции $\sqrt[n]{w}$* .

Вообще, пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в некоторой области G , отображает эту область на область G^* и такова, что обратная функция $z = \varphi(w)$ многозначна в области G^* ; если существуют однозначные, аналитические в области G^* функции $z = \varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots$, для которых данная функция $w = f(z)$ является обратной, то функции $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots$ называются *однозначными ветвями функции $\varphi(w)$* , определенными в области G^* .

Пусть $w = z^n$ и $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$, тогда

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \quad (1)$$

Выберем в точке $w_0 \neq 0$ какое-нибудь определенное значение $\theta = \theta_0$ (например, будем считать, что θ_0 — главное значение аргумента w_0) и фиксируем также число k . Пусть неко-

торая односвязная область, которой принадлежит точка w_0 , не содержит точек $w = 0$, $w = \infty$. При непрерывном перемещении точки w в этой области можно считать, что аргумент θ величины w изменяется также непрерывно. При этом, так как точка w не может совершить полный оборот вокруг начала координат, то не только ρ , но и θ определяется в каждой точке области однозначно. Тем самым равенства (7) определяют непрерывную и однозначную функцию, которая и является ветвью функции $z = \sqrt[n]{w}$. Различным фиксированным в формуле (7) значениям k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) при одном и том же выборе числа θ_0 соответствуют различные ветви функции $\sqrt[n]{w}$ в данной области.

Если точка w совершает один или несколько полных оборотов вокруг начала координат, то непрерывное изменение величины θ при этом движении точки w приводит к тому, что точка w возвращается в исходное положение со значением аргумента θ , отличающимся от исходного на величину, кратную 2π , а это соответствует изменению значения k во втором равенстве (7), т. е. переходу на другую ветвь функции $\sqrt[n]{w}$.

Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности влечет за собой переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется *точкой разветвления* (или *точкой ветвления*) рассматриваемой многозначной функции. Точками разветвления функции $\sqrt[n]{w}$ являются точки $w = 0$ и $w = \infty$. Следует также отметить, что в каждой из этих точек ветвления функция $\sqrt[n]{w}$ имеет только одно значение ($\sqrt[n]{0} = 0$ и $\sqrt[n]{\infty} = \infty$), т. е. различные ветви функции в этих точках совпадают.

39. Как уже отмечалось выше, угол величины α ($\alpha < 2\pi/n$) с вершиной в точке $z = 0$ (соответствующей точке разветвления $w = 0$) отображается функцией $w = z^n$ взаимно однозначно на угол с вершиной в точке $w = 0$ величины $n\alpha$ (в частности, угол с вершиной в точке $z = 0$ величины π/n отображается взаимно однозначно на полуплоскость). Это относится и к тому случаю, когда число n дробное, так как угол с вершиной в начале координат не содержит никакой окрестности нулевой точки (а также и бесконечно удаленной точки), и следовательно, внутри такого угла может быть

определена однозначная ветвь отображающей функции. Но, с другой стороны, с помощью дробно-линейной функции можно отображать на угол область, ограниченную дугами двух окружностей (или дугой окружности и прямолинейным отрезком)¹⁾, поэтому, комбинируя дробно-линейную и степенную функции, можно такую область отобразить на полуплоскость.

Пример 1. Отобразить на верхнюю полуплоскость верхний единичный полукруг (т. е. область $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$).

Граница полукруга состоит из отрезка действительной оси и дуги окружности, пересекающихся под прямым углом в точках $z = \pm 1$. Дробно-линейная функция

$$t = \frac{z-1}{z+1}$$

отображает одну из этих точек в точку $t = \infty$, а другую в точку $t = 0$ и, следовательно, заданную область — во внутренность угла между двумя взаимноперпендикулярными лучами с вершиной в точке $t = 0$. Одна из сторон этого угла пойдет по отрицательной части действительной оси (если z действительное и $-1 < z < 1$, то $-\infty < t < 0$), другая по положительной части мнимой оси (так как точка $z = i$, например, перейдет в точку $t = \frac{i-1}{i+1} = i$). Таким обра-

зом, функция $t = \frac{z-1}{z+1}$ отображает заданный полукруг на угол, изображенный на рис. 38. Остается повернуть этот угол на 90° по часовой стрелке, что соответствует отображению $T = -it$ (угол при этом совместится с первым квадрантом), после чего функция $w = T^2$ отобразит его

на верхнюю полуплоскость. Итак, требуемое отображение осуществляется функцией

$$w = \left(-i \frac{z-1}{z+1}\right)^2 = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

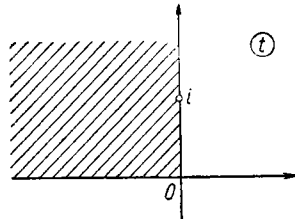
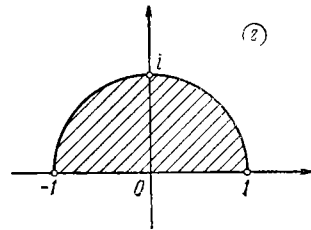


Рис. 38.

Пример 2. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, общую двум кругам радиуса 1 с центрами в точках 0 и 1 (рис. 39).

Точки пересечения дуг, ограничивающих заданную область, соответствуют числам

$$z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Дробно-линейная функция

$$t = \frac{z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad (8)$$

отображает одну из этих точек $\left(z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в точку $t = \infty$, а другую $\left(z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — в точку $t = 0$, и сле-

довательно, данную область — в угол с вершиной в точке $t = 0$. Величина этого угла равна $2\pi/3$. Для того чтобы выяснить, как расположен в плоскости t этот угол, достаточно найти хотя бы одну точку на одной из его сторон. Выясним, например, в какую точку отобразится точка $z = 1$, лежащая на одной из дуг (l_1), ограничивающих данную область. При $z = 1$ получим

$$t = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, дуга l_1 плоскости z отображается на луч (1) плоскости t , выходящий из начала координат и проходящий через

точку $t = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 40. а). Если идти по дуге l_1 из точки z_2 , то отображаемая область окажется слева, следовательно, луч (2) плоскости t , являющийся отображением дуги l_2 , может быть получен поворотом луча (1) на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки.

Так как полученный в плоскости t угол предстоит отобразить на верхнюю полуплоскость, то, прежде чем воспользоваться для этой цели степенной функцией, следует произвести в плоскости t поворот на угол $2\pi/3$ по часовой стрелке с тем, чтобы луч (1) совместить с положительной частью действительной оси, которая степенной функцией отображается сама на себя. Такой поворот осуществляется функцией (см. стр. 70)

$$T = te^{-2\pi i/3}. \quad (9)$$

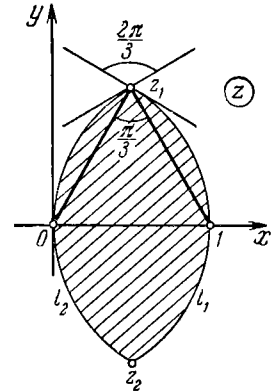


Рис. 39.

¹⁾ Для этого достаточно взять такую дробно-линейную функцию, с помощью которой одна общая точка дуг окружностей отображается в бесконечно удаленную точку. Если другую общую точку отобразить в начало координат, то вершина угла будет находиться в начале координат.

Полученный в результате в плоскости T угол (рис. 40, б) отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w одной из ветвей функции

$$w = T^{3/2} \quad (10)$$

(угол величины $2\pi/3$ отображается на угол величины $\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi$). Объединяя (8), (9) и (10), получаем функцию

$$w = \left[\frac{z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right]^{3/2} = e^{-\pi i} \left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}} \right)^{3/2},$$

или, окончательно,

$$w = - \left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}} \right)^{3/2}.$$

Это, конечно (как и в предыдущем примере), только одна из функций, осуществляющих требуемое отображение. Все множество

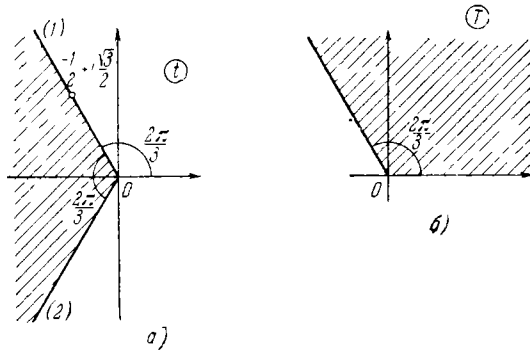


Рис. 40.

функций, удовлетворяющих условию задачи, можно получить, отображая далее с помощью соответствующего дробно-линейного преобразования верхнюю полуплоскость плоскости w саму на себя.

Пример 3. Отобразить на верхнюю полуплоскость всю плоскость z с разрезом вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точку i с точкой $3i$ (рис. 41, а).

Дробно-линейная функция

$$t = \frac{z - i}{z - 3i} \quad (11)$$

отображает концы разреза $z = i$ и $z = 3i$ соответственно в точки $t = 0$ и $t = \infty$, а следовательно, заданную область на плоскость t с разрезом вдоль некоторого луча, выходящего из начала координат. Для того чтобы выяснить направление этого луча, достаточно найти на нем хотя бы одну промежуточную точку. Точке $z = 2i$ разреза в плоскости z соответствует точка

$$t = \frac{2i - i}{2i - 3i} = -1$$

плоскости t . Следовательно, функция (11) отображает данную область на плоскость t с разрезом вдоль луча, идущего по отрицательной

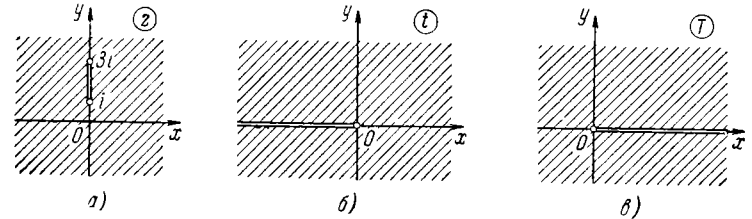


Рис. 41.

части действительной оси (рис. 41, б). Произведя с помощью функции

$$T = te^{\pi i} = -t \quad (12)$$

поворот на угол π , мы отобразим нашу область на плоскость с разрезом по положительной части действительной оси (рис. 41, в); функция

$$w = \sqrt{T} \quad (13)$$

(точнее, одна из ветвей этой функции) отображает плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси на верхнюю полуплоскость. Объединяя (11), (12) и (13), получим

$$w = \sqrt{-\frac{z - i}{z - 3i}}.$$

Это, конечно, только одна из функций, осуществляющих требуемое отображение.

40. Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (14)$$

которую часто называют *функцией Жуковского*. Так как $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$, то функция Жуковского аналитична во всей

плоскости, кроме точки $z=0$, и ее производная отлична от нуля всюду, кроме точек $z=\pm 1$, которые соответствуют точкам $w=\pm 1$ плоскости w . Положив $z=re^{i\varphi}$, найдем

$$\begin{aligned} w &= u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Всякая окружность радиуса $r=R$ плоскости z отображается функцией Жуковского на линию

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \cos \varphi, \\ v &= \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что при $R \neq 1$ уравнения (16) представляют собой параметрические уравнения эллипса

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(R + \frac{1}{R} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(R - \frac{1}{R} \right)^2} = 1 \quad (17)$$

с полуосями

$$a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left| R - \frac{1}{R} \right|$$

и фокусами в точках $u = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \pm 1, v = 0$. Так как $w'(z) = 0$ только при $z = \pm 1$, то отображение, осуществляемое функцией Жуковского, конформно при $R \geq 1$ во внешности круга $|z| > R$, а при $R \leq 1$ — во внутренности круга $|z| < R^1$.

¹⁾ В точке $z=0$, которая является особой точкой рассматриваемой функции, отображение также конформно, так как мы условились (см. стр. 74) углы в бесконечно удаленной точке измерять так, что отображение $w=1/z$ эти углы сохраняет.

Пусть для определенности $R > 1$; тогда по уравнениям (16) нетрудно проследить, что если точка z движется по окружности $|z|=R$ против часовой стрелки (т. е. φ возрастает), то точка $w=u+iv$ движется по эллипсу (17) также против часовой стрелки. Следовательно, в соответствии с принципом взаимно однозначного соответствия, функция Жуковского отображает конформно и взаимно однозначно внешность круга $|z| > R > 1$ на внешность эллипса (17). Если $R > 1$, то $1/R < 1$, а так как замена R на $\frac{1}{R}$ сохраняет эллипс (17), то одновременно на внешность эллипса (17) отображается взаимно однозначно внутренность круга радиуса $R_1 = 1/R < 1$. Действительно, при обходе его окружности против часовой стрелки эллипс обходится по часовой стрелке (советуем читателю это проверить).

Из уравнений (16) видно, что когда $R=1$, то $v=0$, $u=\cos \varphi$, и, следовательно, когда точка z обходит границу единичного круга ($|z|=1$ и φ изменяется от 0 до 2π), то точка $w=u+iv$ дважды пробегает отрезок действительной оси между точками 1 и -1 и, в силу принципа взаимно однозначного соответствия, можно утверждать, что функция Жуковского отображает как внутренность, так и внешность единичного круга на всю расширенную плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$.

Решив равенство (14) относительно z :

$$\begin{aligned} z^2 - 2wz + 1 &= 0, \\ z &= w \pm \sqrt{w^2 - 1}, \end{aligned} \quad (18)$$

мы приходим к выводу, что одна ветвь функции $z=z(w)$, обратной по отношению к функции Жуковского, отображает всю (расширенную) плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внутренность единичного круга, а другая — на внешность единичного круга, причем выбор ветви функции $z(w)$ зависит от выбора ветви $\sqrt{w^2 - 1}$ в равенстве (18).

Из равенств (15) легко заключить, что лучи $\arg z = \varphi$ ($\varphi \neq 0, \pm \pi/2, \pi$) отображаются функцией Жуковского на соответствующие ветви гиперболы:

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1,$$

а лучи $\arg z = 0$, $\arg z = \pi$, $\arg z = \pm \pi/2$ на дважды пробегаемые бесконечные отрезки действительной или мнимой оси.

Так, например, если $\arg z = 0$, то из (15) следует:

$$v = 0, u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$$

и при r , изменяющемся от 0 до ∞ , точка $w = u + iv$ движется по положительной действительной полуоси из точки $w = +\infty$ до точки $w = 1$ (которая соответствует значению $z = r = 1$), а потом из точки $w = 1$ обратно в точку $w = \infty$.

Пример 4. Найти область, на которую функция Жуковского отображает: а) круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$; б) круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1/2, 1]$.

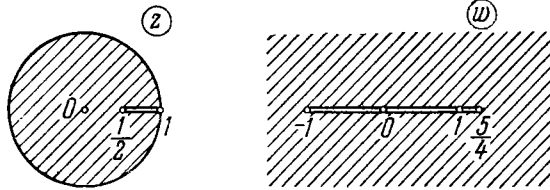


Рис. 42.

а) Функция Жуковского отображает окружность единичного круга на дважды пробегаемый отрезок $[-1, 1]$, отрезок $[1/2, 1]$ отображается функцией Жуковского на отрезок $[1, 5/4]$ ($w = 1$ при $z = 1$, $w = 5/4$ при $z = 1/2$), и поэтому круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$ отображается на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 5/4]$ (рис. 42).

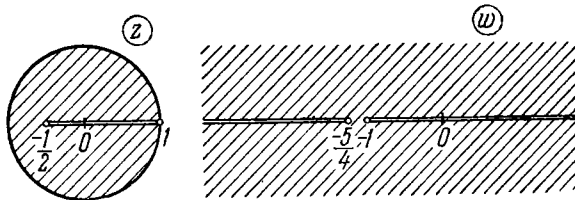


Рис. 43.

б) Когда точка z пробегает отрезок $[-1/2, 1]$ действительной оси, точка $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ движется по действительной оси от $w = -5/4$ (при $z = -1/2$) до $w = -\infty$ (при $z = -0$) и от $w = +\infty$ (при $z = +0$) до $w = 1$ (при $z = 1$). Таким образом, круг

$|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1/2, 1]$ отображается функцией Жуковского на всю плоскость с разрезами по лучам $[-\infty, -5/4]$ и $[-1, +\infty]$ (рис. 43).

Пример 5. Отобразить круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1]$ на круг $|w| < 1$ (рис. 44).

Функция Жуковского $t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ отображает круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1]$ на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 5/3]$. Длина этого отрезка равна $8/3$, а центр его находится в точке $t = 1/3$. Отобразим полученную область на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$; для этого нужно центр отрезка



Рис. 44.

$[-1, 5/3]$ сдвинуть в точку 0, после чего применить преобразование подобия с тем, чтобы длина отрезка стала равной 2 (коэффициент подобия равен, следовательно, $\frac{2}{8/3} = 3/4$). Таким образом, плоскость t с разрезом по отрезку $[-1, 5/3]$ отображается на плоскость T с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ функцией

$$T = \frac{3}{4} \left(t - \frac{1}{3} \right),$$

а эта последняя область отображается, как мы знаем, на внутренность единичного круга функцией, обратной по отношению к функции Жуковского (точнее, одной из ветвей этой функции)

$$w = T + \sqrt{T^2 - 1}.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$\begin{aligned} w &= T + \sqrt{T^2 - 1} = \frac{3}{4} \left(t - \frac{1}{3} \right) + \sqrt{\frac{9}{16} \left(t - \frac{1}{3} \right)^2 - 1} = \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{3} \right] + \sqrt{\frac{9}{16} \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{3} \right]^2 - 1}, \end{aligned}$$

или, после преобразований,

$$w = \frac{3}{8} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} + \sqrt{\left[\frac{3}{8} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \right]^2 - 1}.$$

§ 4. Основные трансцендентные функции

41. Отображение, осуществляемое функцией

$$w = e^z,$$

конформно во всей плоскости, так как производная этой функции существует и отлична от нуля во всякой конечной точке плоскости z . Введя в плоскости z декартовы, а в плоскости w полярные координаты, т. е. положив $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\theta}$, получим

$$\rho e^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Следовательно,

$$\rho = e^x, \quad \theta = y. \quad (19)$$

Из равенств (19) следует, что прямые, параллельные мнимой оси Oy (рис. 45) плоскости z ($x = \text{const}$), переходят при

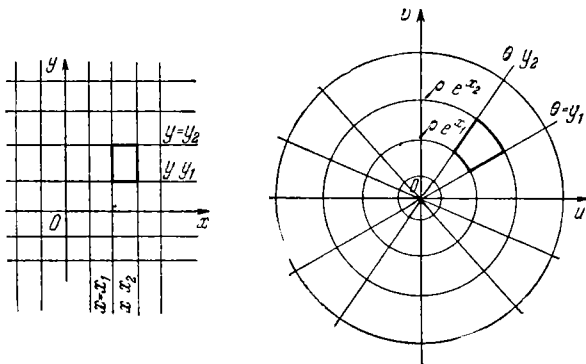


Рис. 45.

отображении $w = e^z$ в окружности с центром в нулевой точке плоскости w ($\rho = \text{const}$), а прямые, параллельные действительной оси Ox ($y = \text{const}$) — в лучи, выходящие из начала координат ($\theta = \text{const}$). Прямоугольник со сторонами

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad x = x_1, \quad x = x_2,$$

параллельными осям координат плоскости z , отображается на область плоскости w , ограниченную лучами

$$\theta = y_1, \quad \theta = y_2$$

и дугами концентрических окружностей

$$\rho = e^{x_1}, \quad \rho = e^{x_2}.$$

Действительная ось плоскости z ($y = 0$) отображается на действительную положительную полуось ($\theta = 0$) плоскости w , прямая $y = \alpha$ — на луч $\theta = \alpha$. Следовательно, полоса ширины α ($\alpha < 2\pi$), прилегающая к действительной оси, $0 < y < \alpha$, отображается конформно и взаимно однозначно на угол $0 < \theta < \alpha$ величины α (в радианах) с вершиной в начале координат, одной из сторон которого является действительная положительная полуось. В частности, полоса $0 < y < \pi$ ширины π отображается функцией $w = e^z$ взаимно однозначно на верхнюю полуплоскость, а полоса $0 < y < 2\pi$ ширины 2π — на всю плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси: $0 < \theta < 2\pi$.

Отображение всей плоскости z на плоскость w не является взаимно однозначным: всякой точке w (кроме точек $w = 0$ и $w = \infty$) соответствует бесконечное множество точек z :

$$z = \text{Ln } w = \ln |w| + i \text{Arg } w = \ln |w| + i \arg w + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для того, чтобы область плоскости z отображалась функцией $w = e^z$ на соответствующую область плоскости w взаимно однозначно, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никаких двух точек, абсциссы которых одинаковы, а ординаты отличаются друг от друга на величину, крайнюю 2π , как как $e^{z_1} = e^{z_2}$ лишь при $z_2 = z_1 + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Такому условию, в частности, удовлетворяет всякая область, заключенная в полосе $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$.

Если плоскость z разбить (рис. 46) на полосы $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то каждая из этих полос отобразится функцией $w = e^z$ взаимно однозначно на всю плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси. Если в плоскости z прямая $y = \alpha$ поднимается

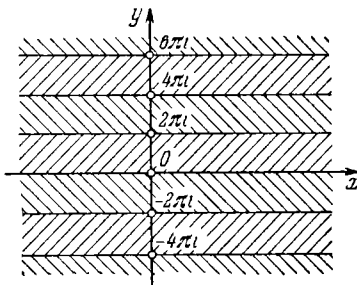


Рис. 46.

от положения $y = 2k\pi$ до положения $y = 2(k+1)\pi$, то соответствующий луч $\theta = \alpha$ в плоскости w совершает полный оборот против часовой стрелки от положения $\theta = 2k\pi$ до положения $\theta = 2(k+1)\pi$. Поэтому, чтобы отображение было взаимно однозначным и непрерывным не только внутри полосы, но и на ее граничных прямых, достаточно условиться, что нижней границе $y = 2k\pi$ соответствует верхний край разреза в плоскости w , а верхней границе $y = 2(k+1)\pi$ — нижний край разреза.

42. В любой односвязной области, не содержащей точек $w = 0$ и $w = \infty$, можно определить однозначные ветви функции $z = \text{Ln } w$. Для этого достаточно, положив $w = \rho e^{i\theta}$, фиксировать в формуле

$$z = \text{Ln } w = \ln \rho + i\theta + 2k\pi i \quad (20)$$

целое число k , выбрать в некоторой точке w_0 этой области какое-либо определенное значение $\theta = \theta_0$ (например, положить θ_0 равным главному значению аргумента w_0) и считать, что θ изменяется непрерывно при движении точки w по непрерывной кривой. Различным значениям k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют различные однозначные ветви функции $\text{Ln } w$. Это следует из рассуждений, аналогичных тем, которые приводились на стр. 88—89 при изучении функции $\sqrt[n]{w}$. Если точка w совершает в своей плоскости один или несколько полных оборотов вокруг начала координат, то она возвращается в начальное положение со значением θ , отличающимся от исходного на величину, кратную 2π , а это равносильно изменению значения k в равенстве (20), т. е. переходу на другую ветвь функции $\text{Ln } w$. Следовательно, точка $w = 0$ является точкой разветвления функции $\text{Ln } w$; нетрудно убедиться, что точкой разветвления является также точка $w = \infty$. В каждой из этих точек функция $\text{Ln } w$ имеет только одно значение ($\text{Ln } 0 = \infty$, $\text{Ln } \infty = \infty$).

Характер точек разветвления функций $z = \sqrt[n]{w}$ и $z = \text{Ln } w$ различен. После n -кратного обхода вокруг точки $w = 0$ мы вернемся к первоначальной ветви функции $\sqrt[n]{w}$; точки разветвления, обладающие таким свойством, называются *алгебраическими точками разветвления* порядка $n - 1$. Иначе обстоит дело с функцией $\text{Ln } w$. Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг

точки $w = 0$ не приведет вновь к первоначальной ветви функции $\text{Ln } w$. Такие точки разветвления называются *логарифмическими*.

43. Так как с помощью дробно-линейной функции область, ограниченная двумя касающимися друг друга окружностями (или окружностью и касающейся ее прямой), может быть отображена на полосу между двумя параллельными прямыми (для этого достаточно, чтобы точка касания отображалась в бесконечно удаленную точку), а полоса ширины π с помощью показательной функции отображается на верхнюю полуплоскость, то, комбинируя дробно-линейную и показательную функции, можно область указанного вида отобразить на верхнюю полуплоскость.

Пример 1. Найти функцию, отображающую область, ограниченную единичной окружностью C и прямой l , касающейся этой окружности в точке $z = i$ (рис. 47), на верхнюю полуплоскость.

Функция

$$t = \frac{z+i}{z-i} \quad (21)$$

отображает общую для окружности и прямой точку $z = i$ (точку касания) в бесконечно удаленную точку плоскости t , следовательно, в силу кругового свойства дробно-линейной функции, как окружность C , так и прямая l отображаются этой функцией на прямые, параллельные друг другу (окружность C и прямая l имеют единственную общую точку i , переходящую в ∞). Так как точка $z = -i$ находится на окружности C и при $z = -i$, $t = 0$, то прямая C' плоскости t , соответствующая окружности C , проходит через начало координат. Для того чтобы определить в плоскости t положение прямой C' , достаточно найти еще хотя бы одну точку, лежащую на этой прямой. Возьмем, например, точку $z = 1$ на окружности C ; ей соответствует на прямой C' точка

$$t = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i.$$

Итак, прямая C' проходит через точки $t = 0$ и $t = i$ и, следовательно, совпадает с мнимой осью плоскости t (рис. 48, а). Чтобы определить положение прямой l' плоскости t , на которую функция

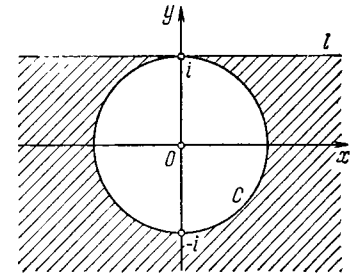


Рис. 47.

(21) отображает прямую l , достаточно знать на прямой l' только одну точку. Точке $z = 1 + i$ прямой l соответствует точка

$$t = \frac{1+i+i}{1+i-i} = 1+2i$$

прямой l' . Прямая l' проходит через точку $1+2i$ параллельно мнимой оси и, следовательно, отстоит от этой оси на расстояние,

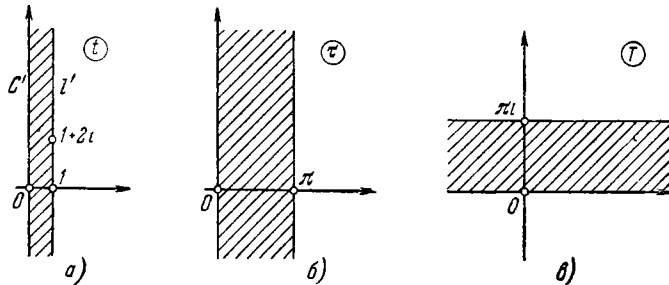


Рис. 48.

равное 1. Итак, функция (21) отображает заданную область на полосу ширины 1, прилегающую к мнимой оси.

Функция

$$\tau = \pi t \quad (22)$$

отобразит эту полосу на полосу ширины π (рис. 48, б), прилегающую к мнимой оси, а с помощью функции

$$T = e^{\frac{\pi}{2} i} \tau = i\tau \quad (23)$$

эта полоса в плоскости τ поворачивается на угол $\pi/2$ против часовой стрелки и переходит в полосу, изображенную на рис. 48, в. Эта последняя полоса функцией

$$w = e^T \quad (24)$$

отображается на верхнюю полуплоскость.

Объединяя (21) — (24), находим одну из функций, осуществляющих требуемое отображение:

$$w = e^{\pi i \frac{z+i}{z-i}}$$

Пример 2. Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу $0 < x < 1$ с разрезом по лучу $x = 1/2, h \leq y < \infty$ (рис. 49).

Функция e^z отображает на верхнюю полуплоскость полосу $0 < y < \pi$, поэтому функция e^{iz} отображает на верхнюю полуплоскость полосу $0 < x < \pi$ (замена z на iz соответствует повороту на угол $\pi/2$, при котором вертикальная полоса $0 < x < \pi$ переходит в горизонтальную полосу $0 < y < \pi$), а функция

$$t = e^{2\pi iz}$$

отображает на верхнюю полуплоскость полосу $0 < x < 1/2$. При этом точке

$$z = \frac{1}{2} + ih$$

соответствует точка

$$t = e^{2\pi i \left(\frac{1}{2} + ih\right)} = e^{\pi i - 2\pi h} = -e^{-2\pi h},$$

и лучу $x = 1/2, -\infty < y < h$, отмеченному на рис. 49 пунктиром, соответствует в плоскости t луч $(-\infty, -e^{-2\pi h})$ на действительной оси, отмеченный тонкой линией на рис. 50. Применяя принцип симметрии, мы приходим к выводу, что функция $t = e^{2\pi iz}$ отображает область, состоящую из полосы $0 < x < 1/2$, симметричной с ней относительно прямой $x = 1/2$ полосы $1/2 < x < 1$ и луча $x = 1/2$,

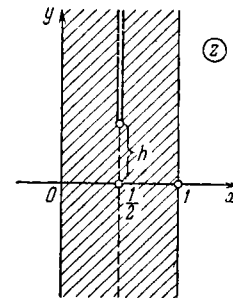


Рис. 49.

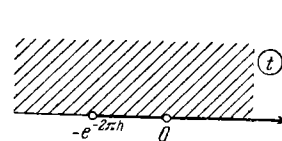


Рис. 50.

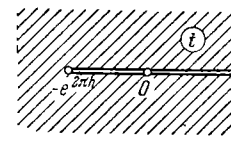


Рис. 51.

$-\infty < y < h$, т. е. как раз заданную область (полосу $0 < x < 1$ с разрезом по лучу $x = 1/2, h \leq y < \infty$), на область, состоящую из верхней полуплоскости плоскости t , симметричной с ней относительно действительной оси области (т. е. нижней полуплоскости), и луча $-\infty < t < -e^{-2\pi h}$ действительной оси, т. е. на всю плоскость t с разрезом по лучу $[-e^{-2\pi h}, +\infty)$ на действительной оси (рис. 51). Функция $T = t + e^{-2\pi h}$ (сдвиг) отображает эту последнюю область на всю плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси, а функция

$$w = \sqrt{T} = \sqrt{t + e^{-2\pi h}}$$

— на верхнюю полуплоскость. Итак, требуемое отображение осуществляется функцией

$$w = \sqrt{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h}}.$$

44. Тригонометрические функции могут быть выражены через показательную (см. стр. 28). Рассмотрим, например, отображение, определяемое функцией

$$\begin{aligned} w = \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Возьмем в плоскости z полосу $y > 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ (рис. 52, а). Если точка z находится на прямой $x = -\pi/2$, то

$$w = -\operatorname{ch} y, \quad (25)$$

и если точка z движется по прямой $x = -\pi/2$ от $y = +\infty$ до $y = 0$, то точка w перемещается по действительной оси

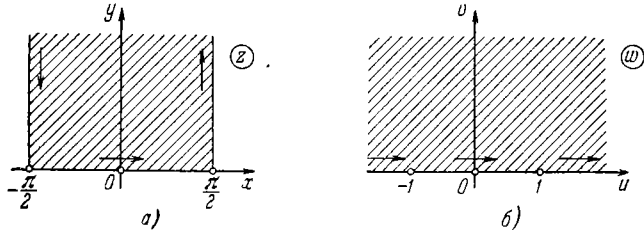


Рис. 52.

от $w = -\infty$ до $w = -1$. На действительной оси $y = 0$, поэтому

$$w = \sin x, \quad (26)$$

и если точка z передвигается по действительной оси от $x = -\pi/2$ до $x = \pi/2$, то соответствующая ей точка w пробегает отрезок действительной оси от $w = -1$ до $w = 1$. На прямой $x = \pi/2$

$$w = \operatorname{ch} y, \quad (27)$$

и если точка z движется по прямой $x = \pi/2$ от $y = 0$ до $y = +\infty$, то соответствующая ей точка w перемещается по действительной оси от $w = 1$ до $w = +\infty$.

Итак, если точка z обходит границу полуполосы $y > 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ так, что эта полуполоса остается слева, то точка w пробегает слева направо всю действительную ось, и поэтому из принципа взаимно однозначного соответствия

следует, что функция $w = \sin z$ отображает рассматриваемую полуполосу на верхнюю полуплоскость (рис. 52, б).

Используя (25) — (27), нетрудно проверить, что если точка z обходит границу полуполосы $y < 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ (на рис. 53, а эта полуполоса заштрихована дважды) так, что

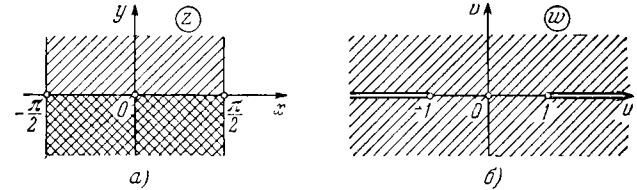


Рис. 53.

эта полуполоса остается слева, то точка w пробегает всю действительную ось справа налево и функция $w = \sin z$ отображает эту полуполосу на нижнюю полуплоскость, причем стороне полуполосы $y < 0$, $x = -\pi/2$ соответствует отрезок $-\infty < w < -1$ действительной оси плоскости w , стороне $y = 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ — отрезок $-1 < w < 1$ и стороне $y < 0$, $x = \pi/2$ — отрезок $1 < w < \infty$.

Проведенное исследование отображений рассмотренных полуполос приводит к выводу, что вся полоса $-\pi/2 < x < \pi/2$ (рис. 53, а) отображается функцией $w = \sin z$ на всю плоскость w с разрезами по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$ (рис. 53, б), причем верхним краям

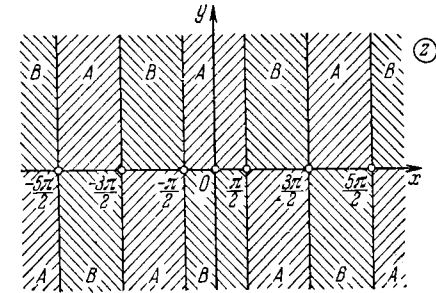


Рис. 54.

этих разрезов соответствуют в плоскости z линии $x = -\pi/2$, $y > 0$ и $x = \pi/2$, $y > 0$, а нижним краям — линии $x = -\pi/2$, $y < 0$ и $x = \pi/2$, $y < 0$.

Так как $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ и $\sin(z + \pi) = -\sin z$, то все полуполосы А (рис. 54) отображаются функцией $w = \sin z$

на верхнюю полуплоскость, а все полулопосы B — на нижнюю полуплоскость плоскости w .

Пример 3. Найти функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость полосу $-\pi/2 < x < \pi/2$ с разрезом вдоль отрезка $0 \leq x < \pi/2$ (рис. 55, а).

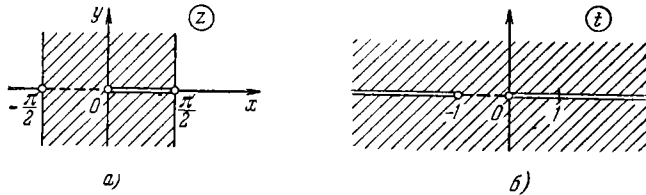


Рис. 55.

Функция $t = \sin z$ отображает, как было показано выше, полулопосу $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$ на верхнюю полуплоскость. При этом отрезок $(0, \pi/2)$ оси x переходит в отрезок $(0, 1)$ действительной оси плоскости t , а отрезок $(-\pi/2, 0)$ оси x — в отрезок $(-1, 0)$ действительной оси. Отрезку $0 < y < \infty$ прямой $x = -\pi/2$ соответствует отрезок $(-\infty, -1)$ действительной оси и отрезку $0 < y < \infty$ прямой $x = \pi/2$ — отрезок $(1, \infty)$ действительной оси плоскости t .

Применим принцип симметрии, выбрав в качестве отрезка γ (см. стр. 84 — 85) отрезок $-\pi/2 < x < 0$ действительной оси (ему соответствует, как указано выше, отрезок $(-1, 0)$ действительной оси плоскости t). На основании принципа симметрии можно утверждать, что функция $t = \sin z$ отображает область, состоящую из «нижней» полулопосы $-\pi/2 < x < \pi/2, y < 0$, «верхней» полулопосы $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$ и отрезка $(-\pi/2, 0)$ действительной оси, т. е. данную в условии задачи область, на всю плоскость t с разрезами по действительной оси вдоль отрезков $(-\infty, -1]$ и $[0, \infty)$ (рис. 55, б) (можно также сказать, что здесь имеется только один разрез, идущий из точки $z = 0$ в точку $z = -1$ через бесконечно удаленную точку).

Функция

$$T = \frac{t+1}{t}$$

отображает плоскость t с указанными разрезами на всю плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси (в этом читатель может убедиться самостоятельно). Наконец, функция $w = \sqrt{T}$, т. е.

$$w = \sqrt{\frac{\sin z + 1}{\sin z}},$$

отображает заданную в условии задачи область на верхнюю полуплоскость.

§ 5. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник

45. Рассмотрим функцию

$$\zeta = \varphi(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (28)$$

где $0 < k < 1$. Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется эллиптическим интегралом первого рода (см. [2], гл. IX). Особыми точками подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (29)$$

являются точки $z = \pm 1$ и $z = \pm 1/k$. Эти точки являются точками разветвления, так как

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \sqrt{1-z} \sqrt{1+z} \sqrt{1-kz} \sqrt{1+kz},$$

а точка $w = 0$ является точкой разветвления функции $\sqrt[n]{w}$ (см. стр. 89). Следовательно, выбор однозначной ветви функции $f(z)$ возможен лишь в такой области, в которой нельзя произвести обход вокруг точек ± 1 и $\pm 1/k$. Для того чтобы обеспечить выполнение указанных условий, будем считать, что точка z в правой части (28) расположена в верхней полуплоскости или на действительной оси (но не в точках ± 1 и $\pm 1/k$) и что путь интегрирования тоже лежит в верхней полуплоскости. Если в дальнейшем будет необходимо интегрировать по действительной оси, то будем обходить точки $\pm 1, \pm 1/k$, например, по верхним полуокружностям с центрами в этих точках. При этих условиях функция $\zeta = \varphi(z)$, определенная равенством (28), будет аналитической и однозначной во всей верхней полуплоскости, а также на действительной оси, за исключением точек $\pm 1, \pm 1/k$.

Для того чтобы функция $\zeta = \varphi(z)$ была вполне определена, нужно договориться о том, какую из двух ветвей функции $f(z)$ мы выбираем. Условимся брать ту ветвь функции $f(z)$, для которой $f(0) = 1$ (для другой ветви $f(0) = -1$).

Найдем линию в плоскости ζ , на которую с помощью (28) отображается действительная ось плоскости z . Точке $z = 0$ соответствует, очевидно, точка $\zeta = 0$. Если точка z движется из положения $z = 0$ по действительной оси вправо,

то интеграл в правой части (28) является обычным определенным интегралом функции действительного переменного, причем пока $z < 1$, подынтегральная функция положительна, а потому ζ тоже является положительной величиной, возрастающей при возрастании z . При $z = 1$ интеграл (28) становится несобственным. Этот интеграл сходится; обозначим:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\omega_1}{2}. \quad (30)$$

Величина ω_1 зависит от k и может быть найдена по таблицам эллиптических интегралов. Продолжим теперь движение точки z по действительной оси в положительном направлении. Точнее, пусть точка z , двигаясь от точки $z = 0$ в положительном направлении (вправо) и несколько не дойдя до точки $z = 1$, обходит ее по верхней полуокружности радиуса ρ (впоследствии нужно считать, что $\rho \rightarrow 0$), после чего точка z продолжает двигаться по действительной оси в положительную сторону. При $1 < z < 1/k$ подкоренное выражение в знаменателе становится отрицательным, а корень мнимым. Выясним, будет ли при этом мнимая часть знаменателя положительной или отрицательной. Запишем

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} &= \\ &= \sqrt{1-z} \sqrt{1+z} \sqrt{1-kz} \sqrt{1+kz}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для последних трех множителей точка $z = 1$ не является точкой разветвления, и поэтому при переходе через эту точку аргумент каждого из этих множителей не изменяется.

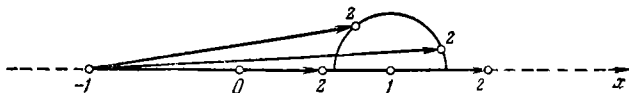


Рис. 56.

Действительно, рассмотрим, например, $\sqrt{1+z}$. Число $1+z = z - (-1)$ изображается вектором, идущим из точки -1 в точку z . При $0 < z < 1$ этот вектор (рис. 56) направлен по действительной оси в положительную сторону. Следова-

тельно, $\arg(1+z) = 0$. Когда точка z движется по полуокружности с центром в точке $z = 1$, вектор, изображающий число $1+z$, сначала отклоняется от действительной оси, но после того как точка z , описав полуокружность, вернулась на действительную ось, направление вектора опять становится прежним. Таким образом, обход вокруг точки $z = 1$ не влияет на аргумент числа $1+z$, а следовательно и числа $\sqrt{1+z}$. Аналогично обстоит дело с множителями $\sqrt{1-kz}$ и $\sqrt{1+kz}$.

Рассмотрим теперь первый множитель $\sqrt{1-z}$. Число $1-z$ изображается вектором, идущим из точки z в точку 1 (рис. 57). При $0 < z < 1$ этот вектор направлен по действительной оси в положительную сторону и $\arg(1-z) = 0$. Но когда точка z обходит по полуокружности точку $z = 1$, вектор поворачивается на 180° по часовой стрелке, следовательно, его аргумент уменьшается на π , и поэтому при $z > 1$ аргумент числа $1-z$ нужно считать равным $-\pi$, а аргумент числа $\sqrt{1-z}$ равным соответственно $-\frac{\pi}{2}$. Так как аргументы всех остальных множителей в (31) не изменились и остались равными нулю, то аргумент всего произведения также станет при $1 < z < 1/k$ равным $-\frac{\pi}{2}$. Произведение (31) стоит в знаменателе подынтегральной функции (29), поэтому аргумент этой функции при $1 < z < 1/k$ следует считать равным $+\pi/2$, т. е. величину $f(z)$ нужно считать чисто мнимой с положительной мнимой частью. Это значит, что при $1 < z < 1/k$ удобнее писать:

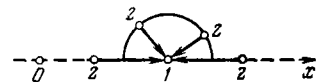


Рис. 57.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}, \quad (32)$$

причем радикал в знаменателе положителен. Без предшествующих рассуждений нельзя было установить, справедливо ли при $1 < z < 1/k$ равенство (32) или равенство

$$f(z) = -i \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Итак, при $1 < z < 1/k$ имеем

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} = \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} + \\ + \int_1^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} = \frac{\omega_1}{2} + i \int_1^z \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)}. \quad (33)$$

Если точка z движется по действительной оси от $z=1$ к $z=1/k$, то из (33) следует, что действительная часть ζ остается постоянной и равной $\omega_1/2$, а мнимая часть положительна и увеличивается, так как подынтегральная функция в последнем интеграле правой части (33) положительна. Это значит, что точка ζ движется параллельно мнимой оси от точки $\zeta = \frac{\omega_1}{2}$ до точки $\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$, где ω_2 — несобственный интеграл

$$\omega_2 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)},$$

вычисляемый с помощью таблиц эллиптических интегралов.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно убедиться, что после того как точка z обойдет по окружности точку $1/k$, аргумент $f(z)$ увеличится еще на $\frac{\pi}{2}$ и станет равным π , т. е. величина $f(z)$ станет действительной и отрицательной. Это означает, что при $z > 1/k$ следует писать

$$f(z) = -\frac{1}{V(z^2-1)(k^2z^2-1)},$$

причем радикал в правой части положителен. Следовательно, при $z > 1/k$ будем иметь

$$\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 - \int_{\frac{1}{k}}^z \frac{dt}{V(t^2-1)(k^2t^2-1)}.$$

Если $z \rightarrow \infty$, то

$$\zeta \rightarrow \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2 - \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{V(t^2-1)(k^2t^2-1)}.$$

Пользуясь подстановкой $t = \frac{1}{k\tau}$, $dt = -\frac{d\tau}{k\tau^2}$ и учитывая, что $\tau=1$ при $t=1/k$ и $\tau \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{V(t^2-1)(k^2t^2-1)} = \int_1^0 \frac{-d\tau}{k\tau^2 V\left(\frac{1}{k^2\tau^2}-1\right)\left(\frac{1}{\tau^2}-1\right)} = \\ = \int_0^1 \frac{d\tau}{V(1-k^2\tau^2)(1-\tau^2)} = \frac{\omega_1}{2}$$

в соответствии с обозначением (30). Следовательно, если $z \rightarrow \infty$, то $\zeta \rightarrow i\omega_2$.

Итак, если точка z движется по действительной оси от $z=1/k$ до $z=+\infty$, то точка ζ движется параллельно действительной оси от $\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ до $\zeta = i\omega_2$.

Продолжая аналогичные рассуждения, обнаружим, что когда точка z движется по действительной оси от $z=-\infty$ до $z=-1/k$, точка ζ продолжает перемещаться параллельно действительной оси от $\zeta = i\omega_2$ до $\zeta = -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$. Далее, отрезок действительной оси плоскости z между $z=-\frac{1}{k}$ и $z=-1$ отобразится на отрезок, параллельный мнимой оси плоскости ζ между точками $\zeta = -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ и $\zeta = -\frac{\omega_1}{2}$ и, наконец, отрезок действительной оси между точками $z=-1$ и $z=0$ отобразится на отрезок действительной оси между точками $\zeta = -\frac{\omega_1}{2}$ и $\zeta=0$.

Таким образом, если точка z пробегает слева направо всю действительную ось (верхняя полуплоскость остается при этом слева), то соответствующая точка ζ обходит против часовой стрелки границу прямоугольника, изображенного на рис. 58. Отсюда следует, что функция $\zeta = \varphi(z)$, определенная с помощью (28), отображает конформно и взаимно

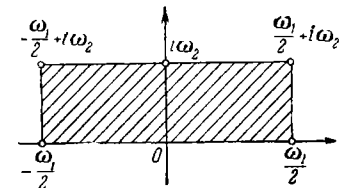


Рис. 58

однозначно верхнюю полуплоскость плоскости z на прямоугольник со сторонами длины ω_1 и ω_2 плоскости ζ . Обратная функция $z = F(\zeta)$ отображает прямоугольник плоскости ζ на верхнюю полуплоскость плоскости z .

Если требуется отобразить верхнюю полуплоскость на некоторый заданный прямоугольник, то сначала, пользуясь таблицами эллиптических интегралов, следует подобрать такое значение параметра k , при котором отношение $\omega_1 : \omega_2$ будет равно отношению сторон заданного прямоугольника. При таком выборе параметра k функция $\varphi(z)$, определенная равенством (28), будет отображать верхнюю полуплоскость на прямоугольник, подобный заданному. Для того чтобы этот прямоугольник отобразить на заданный, достаточно воспользоваться преобразованием подобия, а также, если это понадобится, параллельным переносом и поворотом плоскости. Все эти преобразования осуществляются линейной функцией. Следовательно, функция $w = c_1 \varphi + c_2$, т. е.

$$w = c_1 \int_0^z \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} + c_2,$$

при соответствующем выборе параметров k , c_1 и c_2 отображает верхнюю полуплоскость на любой заданный прямоугольник.

В более подробных курсах рассматривается общая формула Шварца — Кристоффеля, позволяющая строить отображение полуплоскости на любой заданный многоугольник.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. Отобразить верхнюю полуплоскость плоскости z на круг $|w| < 1$ так, чтобы точке $z = i$ и направлению, идущему из этой точки параллельно действительной оси в положительную сторону, соответствовали точка $w = 0$ и выходящее из точки $w = 0$ положительное направление мнимой оси.

2. Найти функцию $w = f(z)$, отображающую конформно и взаимно однозначно единичный круг на себя и такую, что:

- а) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;
в) $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = -\frac{\pi}{2}$.

3. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость каждую из указанных областей:

- а) сегмент $\operatorname{Im} z > 1$, $|z| > 2$; б) область $|z| > 2$, $|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}$;
в) каждую из областей I, II, III, IV, ограниченных окружностями $|z| = 1$ и $|z + i| = 1$ (рис. 59); г) сектор $|z| < 2$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;
д) область $|z| > 2$, $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{3}{2}\pi$; е) всю плоскость с разрезом по прямолинейному отрезку, соединяющему точки $1 + i$ и $2 + 2i$;

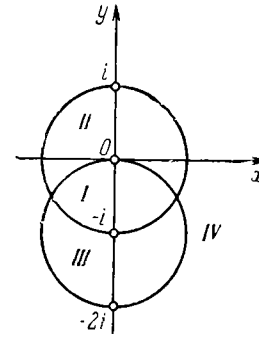


Рис. 59.

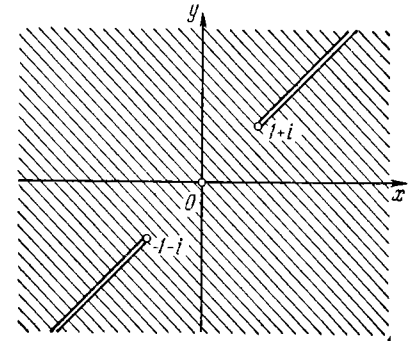


Рис. 60.

- ж) всю плоскость с разрезами, указанными на рис. 60, вдоль биссектрис координатного угла; з) верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку мнимой оси между точками $z = 0$ и $z = ai$ ($a > 0$); и) внешность единичного круга с разрезом по положительной части мнимой оси от $z = i$ до $z = \infty$; к) внутренность единичного круга с разрезом по радиусу от $z = 0$ до $z = 1$; л) область $|z| < 2$, $|z - 1| < 1$; м) область $|z| > 2$, $|z - 3| > 1$; н) полосу $a < \operatorname{Re} z < b$; о) полуполосу $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < a$; п) круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$; р) круг $|z| < 1$ с разрезами по отрезкам $[-1, 0]$ и $[a, 1]$ ($0 < a < 1$).

4. На какую область плоскости w отображает функция $w = \cos z$ полосу $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$?

5. На какую область плоскости w отображает функция $w = \operatorname{tg} z$ полосу $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$?

6. Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу $0 < x < \pi$, $y > 0$ с разрезом по лучу $x = \pi/2$, $h \leq y < \infty$ ($h > 0$).

ГЛАВА IV

РЯДЫ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ

§ 1. Функциональные ряды

46. Функциональный ряд, членами которого являются функции комплексной переменной z

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad (1)$$

может в одних точках сходиться, в других расходиться. Сумма такого ряда

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z),$$

где

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z),$$

является функцией переменной z , определенной в точках, в которых ряд (1) сходится. Множество точек, в которых ряд (1) сходится, будем называть *областью сходимости* этого ряда. *Остатком ряда* (1) называется разность

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

В каждой точке сходимости ряда (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

Другими словами, если ряд в данной точке z сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое число N , что при $n > N$ модуль остатка ряда удовлетворяет неравенству

$$|R_n(z)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Наименьшее число N , определяющее номер n , начиная с которого справедливо неравенство (2), вообще говоря, зави-

сит не только от ε , но и от z , и не является, следовательно одинаковым для всех точек области сходимости ряда; чтобы подчеркнуть эту зависимость, вместо N пишут $N(\varepsilon, z)$.

Предположим, что на некотором множестве точек G (в некоторой области, на некоторой дуге и т. д.) ряд (1) не только сходится, но и *мажорируется* некоторым сходящимся числовым рядом. Это означает, что существует такой сходящийся ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3)$$

с положительными членами, что во всех точках рассматриваемого множества

$$|f_0(z)| \leq a_0, |f_1(z)| \leq a_1, \dots, |f_n(z)| \leq a_n, \dots$$

Будем в этом случае говорить, что на данном множестве точек ряд (1) *сходится правильно*. Очевидно, что в этом случае

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots| \leq \\ &\leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = r_n, \end{aligned}$$

т. е. модуль остатка данного функционального ряда не превосходит остатка r_n числового ряда (3). Но так как ряд (3) сходится, то, как бы ни было мало $\varepsilon > 0$, найдется такое N (зависящее только от ε , так как ряд (3) числовой и его члены от z не зависят), что $r_n < \varepsilon$ при $n > N$. Тем более поэтому при $n > N$ имеем $|R_n(z)| < \varepsilon$. Таким образом, для рядов, правильно сходящихся на некотором множестве точек, неравенство (2) имеет место при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, если $n > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ достаточно велико и зависит только от ε .

Ряды, для которых можно выбрать N не зависящим от z , называются *равномерно сходящимися* на соответствующем множестве точек. Правильно сходящиеся ряды принадлежат, таким образом, к классу равномерно сходящихся рядов (однако не всякий равномерно сходящийся ряд сходится правильно).

Нетрудно видеть, что если все члены ряда (1), сходящегося правильно на некотором множестве G , умножить на одну и ту же ограниченную по модулю функцию $\varphi(z)$, то полученный ряд

$$\varphi(z)f_0(z) + \varphi(z)f_1(z) + \dots + \varphi(z)f_n(z) + \dots \quad (4)$$

будет также правильно сходиться на G . Действительно, так как функция $\varphi(z)$ ограничена, то существует такая постоянная M , что $|\varphi(z)| < M$ во всех точках множества G , и так как ряд (1) мажорируется на G сходящимся рядом (3), то ряд (4) будет мажорироваться сходящимся рядом

$$Ma_0 + Ma_1 + \dots + Ma_n + \dots$$

47. Докажем некоторые свойства рядов, сходящихся равномерно. Все эти свойства справедливы, тем самым, и для правильно сходящихся рядов.

1. Если члены ряда

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (5)$$

являются непрерывными функциями в некоторой области G или на некоторой дуге L и ряд (5) сходится в этой области или на этой дуге равномерно, то сумма ряда $f(z)$ непрерывна в области G или на дуге L .

Пусть z и $z+h$ — любые точки, принадлежащие рассматриваемому множеству (области G или дуге L), $S_n(z)$ и $R_n(z)$ — частичная сумма и остаток ряда (5). Имеем

$$f(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

и

$$f(z+h) - f(z) = S_n(z+h) - S_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z).$$

Ввиду равномерной сходимости ряда (5), как бы ни было мало $\varepsilon > 0$, можно найти такое n , что

$$|R_n(z+h)| < \varepsilon, \quad |R_n(z)| < \varepsilon,$$

откуда

$$|R_n(z+h) - R_n(z)| \leq |R_n(z+h)| + |R_n(z)| < 2\varepsilon,$$

следовательно,

$$|f(z+h) - f(z)| < |S_n(z+h) - S_n(z)| + 2\varepsilon. \quad (6)$$

Функция $S_n(z)$, будучи суммой конечного числа непрерывных функций, также непрерывна на данном множестве, и поэтому, какова бы ни была точка z данного множества, величину $|h|$ можно взять столь малой (точка $z+h$ также принадлежит рассматриваемому множеству), чтобы

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \varepsilon;$$

но тогда из (6) получим

$$|f(z+h) - f(z)| < 3\varepsilon,$$

а так как число ε сколь угодно мало, то это и означает, что функция $f(z)$ непрерывна в любой точке z данного множества.

2. Если члены ряда (5) непрерывны на некоторой дуге L и ряд сходится на этой дуге равномерно, то его можно почленно интегрировать вдоль дуги L , т. е.

$$\int_L f(z) dz = \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz + \dots \quad (7)$$

В силу доказанного выше свойства функция $f(z)$ непрерывна на дуге L и интеграл $\int_L f(z) dz$ существует. Пусть

$\sigma_n(z)$ — частичная сумма ряда в правой части (7). Имеем

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz - \sigma_n(z) &= \\ &= \int_L f(z) dz - \left[\int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz \right] = \\ &= \int_L [f(z) - S_n(z)] dz = \int_L R_n(z) dz, \end{aligned}$$

где $R_n(z)$ — остаток ряда (5). Так как ряд (5) сходится на дуге L равномерно, то можно выбрать N столь большим, чтобы при $n > N$ неравенство $|R_n(z)| < \varepsilon$ имело место во всех точках дуги L . Тогда из последнего равенства получим

$$\left| \int_L f(z) dz - \sigma_n(z) \right| = \left| \int_L R_n(z) dz \right| < \varepsilon l,$$

где l — длина дуги L . Так как $\varepsilon > 0$ при этом сколь угодно мало, то это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_L R_n(z) dz = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(z) = \int_L f(z) dz,$$

что и требовалось доказать.

3. Если члены ряда (5) — аналитические, в некоторой области G функции и ряд (5) сходится в области G равномерно, то его сумма $f(z)$ также является функцией, аналитической в области G .

Выберем любую внутреннюю точку z области G и построим круг столь малого радиуса с центром в этой точке, чтобы он целиком лежал внутри области G (рис. 61). Пусть C — окружность этого круга, а ζ — любая точка на C . Имеем

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \dots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \dots \quad (8)$$

Если z постоянно, а ζ находится на окружности C , то величина $|\zeta - z|$ постоянна (равна радиусу ρ окружности C).

Ряд (5), по условию, сходится равномерно в области G и, тем более, на окружности C . Поэтому ряд, стоящий в правой части (8), также сходится равномерно на C (по отношению к ζ ; напоминаем, что z постоянно), и, по доказанному, его можно вдоль C почленно интегрировать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_0(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \dots \end{aligned}$$

Пользуясь интегральной формулой Коши, отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots,$$

т. е. приходим к равенству

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (9)$$

Функция $f(z)$, будучи суммой равномерно сходящегося ряда аналитических и, следовательно, непрерывных функций, непре-

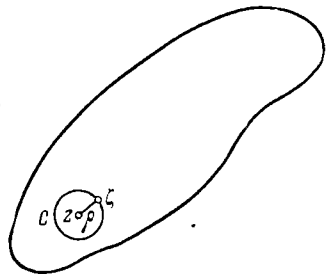


Рис. 61.

рывна в области G . Следовательно, интеграл, стоящий в правой части (9), является интегралом типа Коши и, по доказанному выше (см. п. 29, гл. II), представляет функцию, аналитическую внутри окружности C , в частности, и в точке z . Так как z — любая точка области G , то свойство доказано.

§ 2. Степенные ряды

48. Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad (10)$$

где c_i — постоянные, называется *степенным*. Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля: если степенной ряд (10) сходится в точке z_0 , то он сходится и притом абсолютно во всех точках, лежащих внутри окружности C с центром в точке $z=0$ и проходящей через точку z_0 (т. е. во всех точках z , для которых $|z| < |z_0|$). При этом во всяком круге $z \leq \rho$ (рис. 62) радиуса ρ , меньшего, чем $|z_0|$, ряд (10) сходится правильно.

Доказательство. Из сходимости ряда (10) при $z = z_0$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$$

и, следовательно, модули членов ряда (10) ограничены, т. е.

существует такая постоянная M , что $|c_n z_0^n| < M$ при любом n . Пусть z — любая точка, лежащая внутри окружности C ; тогда $|z| < |z_0|$ и $\left| \frac{z}{z_0} \right| = q < 1$. Общий член ряда (10) можно преобразовать:

$$c_n z^n = c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n.$$

Отсюда видно, что

$$|c_n z^n| < M q^n,$$

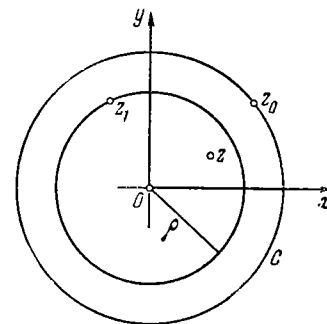


Рис. 62.

следовательно, модули членов ряда (10) в точке z меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

со знаменателем q , меньшим единицы. Следовательно, ряд (10) сходится в точке z абсолютно, и первая часть теоремы доказана.

Возьмем теперь произвольный круг $|z| \leq \rho$ (рис. 62), лежащий внутри окружности C ($\rho < |z_0|$). По доказанному, ряд (10) сходится абсолютно во всякой точке, расположенной внутри окружности C , и в частности, во всякой точке, лежащей на окружности выбранного нами круга радиуса ρ . Итак, если z_1 — какая-нибудь точка на окружности этого круга (т. е. $|z_1| = \rho$), то числовой ряд

$$|c_0| + |c_1 z_1| + |c_2 z_1^2| + \dots + |c_n z_1^n| + \dots$$

сходится. Но для любой другой точки z , лежащей внутри или на окружности круга $|z| \leq \rho$, справедливо неравенство $|z| \leq |z_1|$, следовательно,

$$|c_n z^n| \leq |c_n z_1^n|$$

при любом n . Этим доказано, что в круге $|z| \leq \rho$, где $\rho < |z_0|$, ряд сходится правильно.

49. Рассмотрим теперь любой луч, выходящий из нулевой точки. Возможны три случая.

1) Ряд (10) сходится во всех точках этого луча. Тогда в силу теоремы Абеля ряд (10) сходится внутри круга сколь угодно большого радиуса, т. е. сходится во всей плоскости.

2) Ряд расходится во всех точках луча, кроме точки $z=0$ (в точке $z=0$ сходится всякий степенной ряд вида (10), так как при $z=0$ все члены ряда, кроме первого, обращаются в нуль). В этом случае ряд расходится во всех точках плоскости, кроме точки $z=0$.

Действительно, из теоремы Абеля следует, что если ряд (10) в некоторой точке z расходится, то он расходится и всюду вне круга с центром в начале координат, окружность которого проходит через точку z , так как из сходимости ряда в некоторой точке вне такого круга следовала бы сходимость его и в точке z . Следовательно, в рассматриваемом случае ряд расходится вне круга сколь угодно малого радиуса с центром в нулевой точке, т. е. всюду, кроме точки $z=0$.

3) На луче имеются как точки сходимости, отличные от $z=0$, так и точки расходимости ряда (10). Как было указано выше, из теоремы Абеля следует, что всякая точка сходимости находится ближе к нулевой точке, чем всякая точка расходимости. Следовательно, на луче найдется точка z^* (рис. 63), отделяющая точки луча, в которых ряд (10) сходится, от точек, в которых ряд расходится. Сама точка z^* принадлежит или к числу точек сходимости или к числу точек расходимости ряда (10). Ряд (10) будет сходиться внутри круга G с центром в нулевой точке, окружность которого проходит через точку z^* , и расходиться вне этого круга.

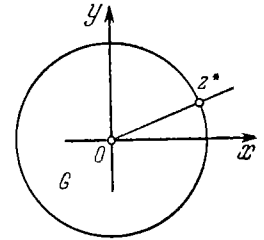


Рис. 63.

Круг G называют *кругом сходимости* степенного ряда (10), а его радиус — *радиусом сходимости* этого ряда. На окружности круга сходимости могут лежать как точки сходимости, так и точки расходимости ряда (10). В рассмотренных выше случаях 1) и 2) можно считать, что радиус сходимости равен соответственно бесконечности и нулю.

Так как во всяком круге, находящемся целиком внутри круга сходимости, как было доказано выше, степенной ряд сходится правильно, то из доказанного в предыдущем параграфе следует, что сумма степенного ряда внутри круга сходимости является аналитической функцией.

Радиус сходимости степенного ряда можно определять, пользуясь известными признаками сходимости рядов (см. [1], п. 189). Ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (11)$$

где a — любое комплексное число, также называют степенным. Этот ряд подстановкой $z-a=t$ сводится к ряду (10), причем точке $t=0$ соответствует точка $z=a$. Следовательно, область сходимости ряда (11) является круг с центром в точке $z=a$.

§ 3. Ряд Тейлора

50. Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга G , ограниченного окружностью C с центром в точке $z=a$ (рис. 64). Разложим эту функцию в степенной ряд вида (11).

Пусть z — любая внутренняя точка круга G . Проведем внутри круга G окружность C' с центром в точке a так, чтобы точка z оказалась внутри этой окружности. Тогда, если ζ — точка на окружности C' , то в соответствии с интегральной формулой Коши имеем

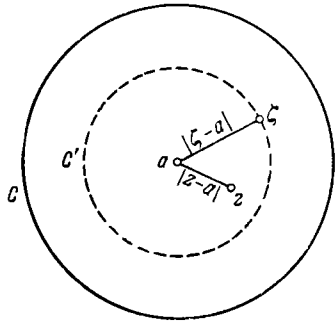


Рис. 64.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (12)$$

Преобразуем один из множителей подынтегральной функции

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \\ &= \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Модуль разности $|\zeta - a|$ равен радиусу окружности C' , а так как модуль разности $|z - a|$ равен расстоянию точки z от центра окружности C' , то, как бы ни перемещалась точка ζ по окружности C' , величина $\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right|$ сохраняет постоянное значение, меньшее единицы. Следовательно, функция

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}$$

является суммой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \dots, \quad (14)$$

сходящейся во всякой точке z внутри окружности C' . Эта прогрессия сходится правильно на окружности C' относительно ζ , потому что при фиксированном z величина $\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| = q$ постоянна на этой окружности и, следовательно, модули членов ряда (14) совпадают с соответствующими членами сходящегося числового ряда

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

Этот последний ряд является, тем самым, мажорирующим для ряда (14). Следовательно, подынтегральную функцию в правой части (12) можно, пользуясь (13) и (14), представить в виде суммы ряда, сходящегося правильно на окружности C' (величина $|f(\zeta)|$ ограничена на окружности C'):

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{(z - a)f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots$$

и произвести почленное интегрирование, что приводит к разложению функции $f(z)$ в степенной ряд:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + \frac{(z - a)}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2} + \\ &+ \frac{(z - a)^2}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \dots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

(множители $(z - a)$, $(z - a)^2$, ..., $(z - a)^n$, ... вынесены за знаки соответствующих интегралов).

Итак, во всякой точке z , находящейся внутри круга G , функция $f(z)$ представлена с помощью (15) в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (16)$$

C' — любая окружность с центром в точке $z = a$, лежащая внутри круга G , или любой другой простой замкнутой контур, однократно обходящий точку a в положительном направлении и лежащий внутри круга G , так как в силу теоремы Коши величина интеграла (16) не зависит от выбора контура C' . Полученный ряд называется *рядом Тейлора*.

Пользуясь интегральной формулой Коши и вытекающей из нее формулой (36) гл. II, можно для коэффициентов ряда Тейлора получить иное представление:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} = f(a), \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ &\quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

и записать разложение в ряд Тейлора в форме, известной из курса математического анализа для функций действительной переменной:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (17)$$

Отсюда, в частности, легко получить известные разложения элементарных функций

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \\ \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

и другие. Равенства

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots, \\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \cos z = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots,$$

служившие нам для определения функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, можно теперь рассматривать как разложения этих функций в ряд Тейлора.

Всякая однозначная элементарная функция является аналитической во всех точках, в которых она определена. Но может случиться, что ряд Тейлора для какой-либо элементарной функции сходится и в такой точке, в которой эта элементарная функция не определена. Условимся в этом случае приписывать рассматриваемой элементарной функции в соответствующей точке значение, равное сумме ее ряда Тейлора в этой точке.

Так, например, равенство

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

справедливо при любом $z \neq 0$. Однако ряд, стоящий в его правой части, сходится и при $z=0$, причем его сумма при $z=0$ равна 1. Условимся поэтому считать, что $\frac{\sin z}{z} = 1$ при $z=0$.

Легко видеть, что при таком условии радиус сходимости ряда Тейлора для всякой однозначной элементарной функции $f(z)$ равен расстоянию ρ от точки $z=a$, являющейся центром круга сходимости, до ближайшей особой точки этой функции.

Действительно, в круге $|z-a| < \rho$ функция $f(z)$ аналитична и поэтому, по доказанному, в этом круге ее ряд Тейлора сходится. С другой стороны, если бы радиус сходимости ряда Тейлора был больше, чем ρ , то внутрь круга сходимости попала бы особая точка функции $f(z)$, которая в силу принятого условия была бы особой точкой и для суммы ряда Тейлора, что невозможно, так как сумма степенного ряда аналитична в круге его сходимости.

51. Если R — радиус круга сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ и эта функция ограничена в круге сходимости, т. е. существует такая постоянная M , что $|f(z)| \leq M$ при $|z| < R$, то, пользуясь интегральной формулой для коэффициентов ряда Тейлора и выбрав в качестве пути интегрирования окружность $|\xi-a| = \rho$ с центром в точке $z=a$, получим (см. свойство 6) на стр. 51

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Так как радиус ρ окружности C можно брать сколь угодно близким к радиусу круга сходимости R , то

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Эти неравенства называют *неравенствами Коши для коэффициентов ряда Тейлора*.

Если функция $f(z)$ является аналитической во всей плоскости, то радиус круга сходимости ряда Тейлора бесконечен, и, следовательно, из неравенств Коши находим, что все коэффициенты c_n , кроме c_0 , равны нулю, и значит, $f(z) = c_0$. Тем самым доказано, что функция, аналитическая и в то же время ограниченная во всей плоскости, постоянна (теорема Лиувилля).

52. Ряд Тейлора можно почленно дифференцировать. Действительно, если $f(z)$ — аналитическая функция, то аналитической является и ее производная $f'(z)$; разложив по формуле (17) в ряд Тейлора функцию $f'(z)$, получим

$$f'(z) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + \dots$$

Но к этому же равенству приводит почленное дифференцирование равенства (17). Полученный после дифференцирования

ряд имеет тот же круг сходимости, что и исходный ряд, так как, с одной стороны, при дифференцировании степенного ряда модули его коэффициентов увеличиваются (коэффициент c_n умножается на n) и поэтому радиус сходимости не может увеличиться, а с другой стороны, радиус сходимости не может и уменьшиться, так как сумма ряда (17), а следовательно, и ее производная являются функциями аналитическими во всякой внутренней точке круга сходимости ряда Тейлора для функции $f(z)$.

53. В качестве точки a в формуле (17) можно взять любую точку, в которой функция $f(z)$ аналитична. Разложение (17) называют *разложением функции $f(z)$ в окрестности точки a* . Если $f(a)=0$, то точка a называется *нулем функции $f(z)$* . В этом случае разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots,$$

так как $c_0 = f(a) = 0$. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0,$$

но $c_n \neq 0$ и, следовательно, разложение имеет вид

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots, \quad (18)$$

то точка a называется *нулем функции $f(z)$ порядка, или кратности, n* . Если $n=1$, то нуль называется *простым*. Продифференцировав (18), приходим к выводу, что если a — нуль порядка n функции $f(z)$, то эта же точка является нулем порядка $n-1$ для функции $f'(z)$.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Разложение (18) можно переписать в виде

$$f(z) = (z-a)^n [c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots] = (z-a)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ определяется как сумма степенного ряда

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots,$$

имеющего, очевидно, тот же круг сходимости, что и данный ряд (18). Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем,

так как $\varphi(a) = c_n \neq 0$. Справедливо и обратное утверждение. *всякая функция вида*

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad (19)$$

где n — целое положительное число, $\varphi(a) \neq 0$, а $\varphi(z)$ аналитична в точке a , имеет в этой точке нуль порядка n .

Действительно, разложив $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a , получим

$$\varphi(z) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1(z-a) + \dots,$$

где $\tilde{c}_0 = \varphi(a) \neq 0$. Отсюда

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z) = \tilde{c}_0(z-a)^n + \tilde{c}_1(z-a)^{n+1} + \dots$$

Мы пришли к разложению вида (18), следовательно, точка a является нулем порядка n функции $f(z)$.

Пример. Точки $z = \pm 2$ являются для функции

$$f(z) = (z^2 - 4)^3 e^z$$

нулями 3-го порядка, так как $f(z) = (z-2)^3(z+2)^3 e^z$, и если положить $\varphi(z) = (z+2)^3 e^z$, то $f(z) = (z-2)^3 \varphi(z)$, причем $\varphi(2) \neq 0$, если же положить $\varphi(z) = (z-2)^3 e^z$, то $f(z) = (z+2)^3 \varphi(z)$ и $\varphi(-2) \neq 0$.

54. Имеет место следующая теорема о единственности аналитической функции:

Если значения аналитических в области G функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в некоторой бесконечной последовательности точек

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, \quad (*)$$

сходящейся к точке a ($\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$), которая является внутренней точкой области G , то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ тождественны во всей области G : $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Ограничимся доказательством теоремы в случае, когда область G — круг, а точка a — центр этого круга. Пусть $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Тогда $f(z_k) = 0$ при любом k . Следовательно, в силу непрерывности функции $f(z)$ имеем $f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0$. Предположим теперь вопреки доказываемому,

что функция $f(z)$ не равна тождественно нулю в круге G , т. е. что не все коэффициенты разложения $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a равны нулю. При этом предположении точка a является нулем функции $f(z)$ некоторого порядка n и поэтому $f(z)$ имеет вид (19). Множитель $(z-a)^n$ нигде, кроме самой точки a , нулю не равен, а функция $\varphi(z)$, входящая в (19), отлична от нуля в точке a , а значит (в силу непрерывности) и в некоторой ее окрестности. Поэтому в некоторой окрестности точки a функция $f(z)$ нигде, кроме самой точки a , не равна нулю. Мы пришли к противоречию, так как в любой окрестности точки a имеются точки из последовательности $(*)$, а в них $f(z) = 0$. Итак, $f(z) \equiv 0$, а следовательно, $f_1(z) = f_2(z)$. Теорема доказана.

§ 4. Ряд Лорана

55. Предположим, что $f(z)$ является однозначной аналитической функцией внутри кольца между concentрическими окружностями C' и C'' с центром в точке $z=a$ (рис. 65), и пусть z — произвольная внутренняя точка этого кольца. Проведем окружности Γ' и Γ'' с центром в точке a так, чтобы каждая из них находилась внутри данного кольца и чтобы точка z оказалась между Γ' и Γ'' .

Опишем из точки z , как из центра, окружность γ , находящуюся в кольце между Γ' и Γ'' . Пользуясь теоремой

Коши для составного контура, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Но, в силу интегральной формулы Коши,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$

и, следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (20)$$

Если ζ — точка на контуре Γ'' , то $|\zeta - a| > |z - a|$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} = \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \dots\right]. \end{aligned}$$

Ряд в правой части этого равенства сходится на окружности Γ'' правильно (см. рассуждения в п. 50); умножив его почленно на $f(\zeta) d\zeta$ и проинтегрировав вдоль Γ'' , получим для первого из интегралов в правой части (20) разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + \frac{z - a}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2} + \\ &+ \frac{(z - a)^2}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \dots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots = \\ &= c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Если же точка ζ находится на контуре Γ' , то $|z - a| > |\zeta - a|$, и следовательно, $\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1$; поэтому для того чтобы получить ряд, правильно сходящийся на Γ' , преобразуем $\frac{1}{\zeta - z}$ иначе:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = - \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} = \\ &= - \frac{1}{z - a} \left[1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \frac{(\zeta - a)^2}{(z - a)^2} + \dots + \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^{n-1}} + \dots\right]. \end{aligned}$$

После такого преобразования для второго из интегралов в правой части (20) получим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{z-a} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\zeta) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{(z-a)^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\zeta - a) f(\zeta) d\zeta + \dots + \\ &+ \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta) d\zeta + \dots = \\ &= \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots, \end{aligned}$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\zeta) (\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

В силу теоремы Коши для составного контура вместо путей интегрирования Γ'' и Γ' в (21) и (22) можно взять любую окружность Γ с центром в точке a , лежащую в данном кольце между C' и C'' .

Заметим также, что при замене n на $-n$ подынтегральное выражение в правой части (21) переходит в подынтегральное выражение правой части (22), поэтому из (20) мы получаем следующее разложение функции $f(z)$, сходящееся во всякой точке z внутри кольца между C' и C'' :

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \\ &+ \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots, \end{aligned}$$

где коэффициенты c_n , как при $n = 0, 1, 2, \dots$, так и при $n = -1, -2, \dots$ определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad (23)$$

а Γ — любая расположенная в данном кольце окружность с центром в точке $z = a$. Полученное разложение называют *рядом Лорана*.

Пример 1. Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

выбрав $a = 0$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z = 1$ и $z = 2$. Следовательно, имеется три круговых «кольца» с центром в точке $z = 0$, в каждом из которых функция аналитична, а именно (рис. 66):

- 1) круг $|z| < 1$,
- 2) кольцо $1 < |z| < 2$,
- 3) внешность круга $|z| > 2$.

В рассматриваемом примере нетрудно получить разложение в ряд Лорана в каждом из перечисленных «колец», не прибегая к формулам для вычисления коэффициентов.

1) Разложение в круге $|z| < 1$.

Функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Так как $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$, а функция $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ является суммой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots,$$

модуль знаменателя которой $|z/2| < 1$, то

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \dots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \dots \quad (24)$$

Аналогично,

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad (25)$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z| < 1$. Складывая (24) и (25), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \dots + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \dots, \end{aligned}$$

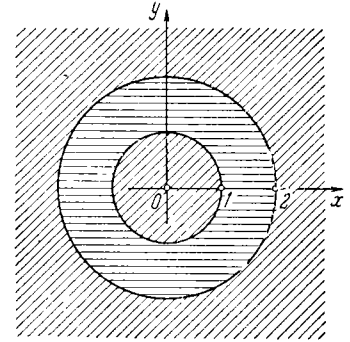


Рис. 66

т. е.

$$c_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$c_{-n} = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

Полученное разложение является рядом Тейлора.

2) Разложение в кольце $1 < |z| < 2$

Ряд (24) остается сходящимся, так как $|z| < 2$, но ряд (25) расходится, потому что $|z| > 1$; поэтому разложение (25) заменяем следующим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) = \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots \end{aligned} \quad (26)$$

В рассматриваемом кольце ряд (26) сходится, так как $|z| > 1$ и, следовательно, $|\frac{1}{z}| < 1$.

Складывая (24) и (26), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \dots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \dots - \\ &\quad - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots, \end{aligned}$$

т. е.

$$c_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$c_{-n} = -1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

3) Разложение в области $|z| > 2$.

Равенство (26) сохраняется, так как если $|z| > 2$, то тем более $|z| > 1$; но ряд в правой части (24) расходится, и равенство (24) заменяем следующим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{z^n} + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Ряд в правой части (27) сходится, так как $|z| > 2$ и, следовательно,

$\left|\frac{2}{z}\right| < 1$. Складывая (26) и (27), получаем:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^3} + \frac{2^2-1}{z^4} + \dots + \frac{2^{n-1}-1}{z^n} + \dots,$$

т. е.

$$\begin{aligned} c_n &= 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ c_{-n} &= 2^{n-1} - 1 \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Пример 2. Выбрав $a=1$, найдем разложения в ряд Лорана в различных областях функции, рассмотренной в примере 1:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

В данном случае построим два круговых «кольца» с центром в точке $z=1$ (рис. 67):

1) круг, из которого удален центр $0 < |z-1| < 1$;

2) внешность круга $|z-1| > 1$.

В каждом из этих «колец» функция $f(z)$ аналитична, а на границах имеет особые точки.

Разложим в каждой из этих областей функцию $f(z)$ по степеням разности $(z-1)$.

1) Разложение в области $0 < |z-1| < 1$.

Как и в примере 1, получим

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{1-(z-1)} = \\ &= -[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \\ &\quad + \dots + (z-1)^n + \dots], \end{aligned}$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z-1| < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - \\ &\quad - (z-1)^2 - \dots - (z-1)^n - \dots, \end{aligned}$$

т. е.

$$c_n = -1 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$c_{-1} = -1, \quad c_{-2} = c_{-3} = \dots = c_{-n} = \dots = 0.$$

2) Разложение в области $|z-1| > 1$.

В этой области

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} \left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \dots\right] = \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \dots + \frac{1}{(z-1)^n} + \dots, \end{aligned}$$

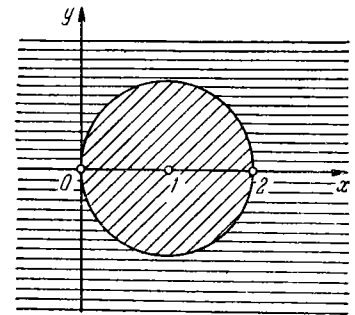


Рис. 67.

причем ряд в правой части равенства сходится, так как $|z-1| > 1$ и, следовательно, $\frac{1}{|z-1|} < 1$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots + \frac{1}{(z-1)^n} + \dots, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} c_n &= 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots), \\ c_{-1} &= 0, \quad c_{-2} = c_{-3} = \dots = c_{-n} = \dots = 1. \end{aligned}$$

56. Докажем единственность разложения функции в ряд Лорана, т. е. разложения вида

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \\ &\dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Иными словами, докажем, что если функция $f(z)$ является в некотором кольце с центром в точке $z=a$ аналитической, то не существует двух различных рядов указанного вида, сходящихся в этом кольце и имеющих своей суммой функцию $f(z)$.

В самом деле, если в некотором круговом кольце $r_1 < |z-a| < r_2$ с центром в точке $z=a$ (рис. 68) ряд вида (28) сходится, т. е. если в этом кольце сходятся ряды

$$c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (29)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \\ + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

то во всяком кольце $r_1 \leq |z-a| \leq r_2$, лежащем внутри данного кольца ($r_1 < r_1 < r_2 < r$),

ряды (29) и (30) сходятся правильно. Для ряда (29) это следует из теоремы Абеля, а для ряда (30) из следующих соображений: после замены $1/(z-a) = t$ ряд (30) превращается в степенной ряд

$$c_{-1}t + c_{-2}t^2 + \dots + c_{-n}t^n + \dots, \quad (31)$$

а так как ряд (30) сходится во всем заданном кольце и, в частности, на любой окружности $|z-a| = \rho$, где $r_1 < \rho < r_2$, то ряд (31) схо-

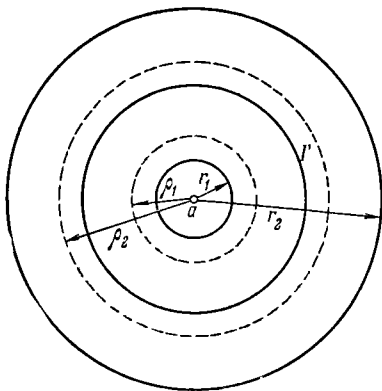


Рис. 68.

дится на окружности $|t| = 1/\rho$ и, в силу теоремы Абеля, сходится правильно в круге $|t| \leq 1/\rho_1$ (так как $1/\rho_1 < 1/\rho$). Возвращаясь к переменной z , мы приходим к выводу, что ряд (30) сходится правильно в области $|z-a| \geq \rho_1$ и тем более в кольце $\rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2$.

Из доказанного следует, в частности, что ряды (29) и (30) сходятся правильно на всякой окружности Γ , лежащей в данном кольце, с центром в точке a (рис. 68). Ряды (29) и (30), а следовательно, и ряд (28), можно поэтому, в соответствии с доказанным, почленно интегрировать вдоль Γ .

В § 4 гл. II было доказано, что интегралы вида

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz,$$

где замкнутый контур Γ однократно обходит в положительном направлении точку $z=a$, равны нулю при всяком целом n , кроме $n=-1$, а в этом последнем случае интеграл равен $2\pi i$. Следовательно, при почленном интегрировании ряда (28) исчезнут все члены, кроме первого члена второй строки, и мы получим

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{c_{-1} dz}{z-a} = c_{-1} \cdot 2\pi i,$$

откуда

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Чтобы определить c_{-n} , нужно до интегрирования умножить все члены ряда (28) на $(z-a)^{n-1}$. Тогда после интегрирования все интегралы, кроме одного, опять обратятся в нуль, и мы получим

$$\int_{\Gamma} f(z) (z-a)^{n-1} dz = \int_{\Gamma} \frac{c_{-n} dz}{z-a} = 2\pi i c_{-n},$$

откуда

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (z-a)^{n-1} dz.$$

Аналогично, для того чтобы определить c_n при $n=0, 1, 2, \dots$, нужно, прежде чем почленно проинтегрировать ряд (28), разделить его члены на $(z-a)^{n+1}$. Тогда после интегрирования получим

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_{\Gamma} \frac{c_n dz}{z-a} = c_n \cdot 2\pi i$$

и

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Мы пришли к формулам (21) и (22) для коэффициентов ряда Лорана и тем самым доказали, что никакое другое разложение функции $f(z)$ в ряд указанного вида невозможно. Так как ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, то доказана и единственность разложения в ряд Тейлора.

§ 5. Изолированные особые точки

57. Особая точка $z=a$ функции $f(z)$ называется *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, т. е. если в некоторой окрестности точки $z=a$ функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=a$. Разложение функции в ряд Лорана, сходящийся к этой функции во всех точках круга с центром в данной изолированной особой точке a , кроме этой точки a (меньший радиус «кольца», в котором происходит разложение, равен нулю), будем называть *разложением функции в ряд Лорана в окрестности данной изолированной особой точки*. Так, в примере 2 (стр. 133) первое из разложений является разложением в окрестности особой точки $z=1$.

Будем называть ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

правильной частью, а ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots$$

главной частью ряда Лорана и выясним, как связано поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ с разложением функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Предположим сначала, что в некоторой окрестности точки $z=a$ функция $f(z)$ ограничена, т. е. существует такая постоянная M , что $|f(z)| < M$ во всех точках этой окрестности. Если обозначить через ρ радиус окружности Γ , по которой происходит интегрирование в формулах (23), получим

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} M \rho^{n-1} 2\pi \rho = M \rho^n,$$

т. е. $|c_{-1}| \leq M\rho$, $|c_{-2}| \leq M\rho^2$ и т. д. Так как в качестве Γ можно взять окружность сколь угодно малого радиуса ρ с центром в точке $z=a$, то отсюда следует, что $c_{-1}=0$,

$c_{-2}=0, \dots, c_{-n}=0, \dots$, т. е. что главная часть ряда в разложении отсутствует и разложение имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (32)$$

Это разложение имеет место во всех точках некоторой окрестности точки $z=a$, кроме самой точки $z=a$. Но правая часть последнего равенства, будучи суммой степенного ряда, аналитична и при $z=a$. Поэтому если под $f(a)$ понимать сумму ряда при $z=a$, т. е. положить $f(a) = c_0$, то $z=a$ станет правильной точкой функции $f(z)$ и разложение (32) будет разложением $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=a$. Итак, если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности изолированной особой точки $z=a$, то мы можем всегда считать эту точку правильной точкой функции, положив $f(a) = c_0$ (см. пример с разложением $\frac{\sin z}{z}$ на стр. 124).

Пусть теперь функция $f(z)$ неограничена в окрестности изолированной особой точки $z=a$. В этом случае либо $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, либо при $z \rightarrow a$ функция $f(z)$ вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). В первом случае будем точку $z=a$ называть *полюсом* функции $f(z)$, во втором — *существенно особой точкой*.

Если точка $z=a$ является полюсом функции $f(z)$, то в достаточно малой окрестности этой точки $|f(z)| > M$, как бы ни было велико M , и поэтому уж во всяком случае $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z=a$. Следовательно, функция $F(z) = \frac{1}{f(z)}$, будучи отношением двух аналитических функций (причем $f(z) \neq 0$), является также функцией аналитической в некоторой окрестности точки $z=a$ всюду, кроме самой точки $z=a$. Но, по условию, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow a} F(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

поэтому функция $F(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z=a$ и по доказанному эту точку можно считать правильной для $F(z)$, положив $F(a) = 0$. Итак, если точка $z=a$ является полюсом функции $f(z)$, то она является нулем функции $\frac{1}{f(z)}$. Будем точку $z=a$ называть *полюсом порядка n*

функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\frac{1}{f(z)}$. В случае $n=1$ будем полюс называть *простым*.

Как было доказано, точка $z=a$ тогда и только тогда является нулем функции $\frac{1}{f(z)}$ порядка n , когда

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \varphi(z), \quad (33)$$

где $\varphi(a) \neq 0$ (функция $\varphi(z)$ аналитична при $z=a$). Но из (33) следует, что

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n \varphi(z)},$$

или, если положить $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$,

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n}, \quad (34)$$

причем функция $\psi(z)$ также аналитична при $z=a$ и $\psi(a) \neq 0$. Итак, *точка $z=a$ тогда и только тогда является полюсом порядка n функции $f(z)$, когда $f(z)$ можно представить в виде (34)*.

Так, например, точка $z=-2$ является полюсом 3-го порядка для функции $\frac{e^z}{(z+2)^3}$, точки $z=\pm 2i$ являются полюсами 1-го порядка для функции $\frac{\cos z}{z^2+4}$, так как $z^2+4=(z-2i)(z+2i)$, точка $z=0$ — полюс 2-го порядка для функции $\frac{\sin z}{z^3}$ (так как $\frac{\sin z}{z^3} = \frac{(\sin z)/z}{z^2}$ и $\frac{\sin z}{z} \neq 0$ при $z=0$). Если числитель правой части (34) разложить в окрестности точки $z=a$ в ряд Тейлора, то получим

$$f(z) = \frac{c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots}{(z-a)^n},$$

где $c_0 = \psi(a) \neq 0$. Отсюда, произведя почленное деление, будем иметь

$$f(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + c_{n+2}(z-a)^2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{z-a} + \frac{c_{n-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_0}{(z-a)^n} \quad (c_0 \neq 0).$$

Таким образом, если точка $z=a$ является полюсом порядка n функции $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму, причем порядок полюса равен наивысшему показателю степени выражения $(z-a)$ в знаменателях членов главной части разложения.

Обратно, предположим, что главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ содержит лишь конечное число отличных от нуля членов:

$$f(z) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1(z-a) + \dots + \tilde{c}_n(z-a)^n + \dots + \frac{\tilde{c}_{-1}}{z-a} + \frac{\tilde{c}_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{\tilde{c}_{-n}}{(z-a)^n} \quad (\tilde{c}_{-n} \neq 0).$$

Произведя приведение к общему знаменателю, получим

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} [\tilde{c}_{-n} + \tilde{c}_{-n+1}(z-a) + \dots + \tilde{c}_{-1}(z-a)^{n-1} + \dots + \tilde{c}_0(z-a)^n + \tilde{c}_1(z-a)^{n+1} + \dots] = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n}, \quad (35)$$

где $\psi(a) = \tilde{c}_{-n} \neq 0$, и функция $\psi(z)$, будучи суммой сходящегося в некоторой окрестности точки $z=a$ степенного ряда, аналитична в этой точке. Сравнив (34) и (35), мы убеждаемся в том, что точка $z=a$ — полюс функции $f(z)$ порядка n .

Итак, *главная часть разложения функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является полюсом*. Отсюда следует, что главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки содержит бесконечное множество отличных от нуля членов. Поведение функции в окрестности существенно особой точки подчиняется следующей теореме, доказательство которой мы не приводим:

Теорема Сохоцкого — Вейерштрасса. *Если точка a является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого заданного комплексного числа A найдется последовательность точек, сходящаяся к точке a , вдоль которой значения $f(z)$ стремятся к A ; для $A = \infty$ теорема также верна.*

Пример. Найти особые точки функции $e^{1/z}$ и определить их характер.

Принимая во внимание, что

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

получим

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots, \quad (36)$$

причем ряд в правой части сходится всюду, кроме точки $z=0$. Равенство (36) можно рассматривать как разложение функции $e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$, и так как его главная часть содержит бесконечное множество членов, то точка $z=0$ является существенно особой точкой функции $e^{1/z}$.

Рассмотрим поведение функции $e^{1/z}$ в окрестности точки $z=0$. При $z \rightarrow 0$ вдоль положительной части действительной оси получим $1/z \rightarrow +\infty$ и $e^{1/z} \rightarrow +\infty$; если $z \rightarrow 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $1/z \rightarrow -\infty$ и $e^{1/z} \rightarrow 0$. Пусть теперь $A = re^{i\varphi}$ — любое комплексное число, отличное от нуля и от бесконечности. Из равенства

$$e^{1/z} = A \quad \text{или} \quad 1/z = \operatorname{Ln} A$$

находим

$$z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i}.$$

Полагая $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получим последовательность точек, сходящуюся к точке $z=0$, так как

$$\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i} = 0,$$

причем функция $e^{1/z}$ не только стремится к A вдоль этой последовательности, но даже в точности равна A в каждой точке рассматриваемой последовательности.

Других особых точек функция $e^{1/z}$ не имеет.

58. Классификацию изолированных особых точек можно распространить и на случай, когда изолированной особой точкой является бесконечно удаленная точка. Назовем бесконечно удаленную точку изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса, нет других особых точек функции $f(z)$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке $z=0$ (кроме, быть может, самой бесконечно удаленной точки), будем называть *разложением в окрестности бесконечно удаленной точки*. Последнее из разложений в примере 1 (стр. 132) является разложением функции $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд (36)

является разложением функции $e^{\frac{1}{z}}$ не только в окрестности точки $z=0$, но также и в окрестности бесконечно удаленной точки. При разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки следует, в соответствии с определением, считать в (28) $a=0$. Запишем члены разложения в следующем порядке:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (37)$$

Назовем ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

правильной частью, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

— *главной частью* разложения (37). Такая терминология вполне естественна, если учесть что при замене $\tilde{z} = 1/z$ окрестность бесконечно удаленной точки отображается на окрестность точки $\tilde{z}=0$ и разложение (37) превращается в разложение функции $f(1/\tilde{z})$ в ряд Лорана в окрестности точки $\tilde{z}=0$:

$$f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = c_0 + c_{-1}\tilde{z} + c_{-2}\tilde{z}^2 + \dots + c_{-n}\tilde{z}^n + \dots + \frac{c_1}{\tilde{z}} + \frac{c_2}{\tilde{z}^2} + \dots + \frac{c_n}{\tilde{z}^n} + \dots,$$

в котором ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \tilde{z}^n$ является правильной частью,

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\tilde{z}^n}$ — главной частью.

Повторив рассуждения, аналогичные приведенным выше, мы приходим к выводу, что если в некоторой окрестности точки $z = \infty$ функция $f(z)$ ограничена, то $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \dots = 0$, разложение (37) принимает вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots$$

и точку $z = \infty$ можно считать правильной точкой функции $f(z)$, положив $f(\infty) = c_0$.

Если $z = \infty$ — правильная точка функции $f(z)$ и $f(\infty) = 0$, то будем точку $z = \infty$ называть *нулем порядка m* функции $f(z)$, если точка $z = 0$ является нулем порядка m функции $f(1/z)$.

Если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, будем точку $z = \infty$ называть *полюсом* функции. Очевидно, что если точки $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$, то точка $z = 0$ — полюс функции $f(1/z)$. Назовем точку $z = \infty$ *полюсом порядка m* функции $f(z)$, если точка $z = 0$ является полюсом порядка m функции $f(1/z)$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ будет иметь вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m,$$

где $c_m \neq 0$.

Если функция $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ неограничена и в то же время предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, ни конечный, ни бесконечный, не существует, то точку $z = \infty$ назовем существенно особой для $f(z)$. В этом случае главная часть разложения (37) содержит бесконечное множество отличных от нуля членов, а поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ определяется теоремой Сохоцкого.

§ 6. Некоторые приемы разложения функций в ряд Лорана

59. Общие формулы (23) для коэффициентов ряда Лорана обычно мало удобны для вычислений. В некоторых случаях могут быть применены более простые приемы.

Для того чтобы разложить в ряд Лорана рациональную функцию, достаточно воспользоваться представлением правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей, как это было сделано в § 4 этой главы (примеры 1 и 2). Простейшая дробь вида $1/(z-a)$ разлагается в ряд, являющийся геометрической прогрессией, а дробь вида $1/(z-a)^k$ ($k > 1$ целое) — в ряд, полученный с помощью $(k-1)$ -кратного дифференцирования геометрической прогрессии.

Заметим, что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму дробей вида $A/(z-a)^n$, где A, a — комплексные числа.

При разложении в ряд Лорана иррациональных и трансцендентных функций иногда можно использовать разложения в ряд Тейлора функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, биномиальный ряд и другие известные разложения. Так, например, в окрестности точки $z = 2$

$$\cos \frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}} + \dots$$

Иногда следует предварительно преобразовать разлагаемую в ряд функцию.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ функцию $\sin \frac{z}{z-1}$.

Имеем:

$$\sin \frac{z}{z-1} = \sin \left(1 + \frac{1}{z-1} \right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sin \frac{z}{z-1} &= \sin 1 + \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{\sin 1}{2!(z-1)^2} - \frac{\cos 1}{3!(z-1)^3} + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Если бесконечно удаленная точка является правильной для функции $f(z)$, то разложение в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки сводится подстановкой $z = 1/\zeta$ к разложению функции $f(1/\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta = 0$.

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = e^{\frac{z}{z+2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Положив $z = \frac{1}{\zeta}$, получим $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = e^{\frac{1/\zeta}{1/\zeta+2}} = e^{\frac{1}{1+2\zeta}}$, причем точка $\zeta = 0$ является для этой функции правильной точкой. Обозначив $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$, будем иметь

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{2}{(1+2\zeta)^2} e^{\frac{1}{1+2\zeta}},$$

$$\varphi''(\zeta) = e^{\frac{1}{1+2\zeta}} \left[\frac{8}{(1+2\zeta)^3} + \frac{4}{(1+2\zeta)^4} \right]$$

и т. д. Следовательно, $\varphi(0) = e$, $\varphi'(0) = -2e$, $\varphi''(0) = 12e$ и т. д. Отсюда

$$\varphi(\zeta) = e(1 - 2\zeta + 6\zeta^2 + \dots),$$

т. е.

$$e^{\frac{z}{z+2}} = e \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{6}{z^2} + \dots \right).$$

Ряд сходится вне круга радиуса $R = 2$ (т. е. при $|z| > 2$), так как единственной особой точкой функции является точка $z = -2$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

1. Доказать, что ряд $z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$ сходится во всем круге сходимости правильно.

2. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ любую ветвь функции $\sqrt[n]{z}$. Каков радиус сходимости полученного ряда?

3. Разложить в окрестности нулевой точки в ряд Тейлора те ветви функций $\operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcsin} z$, для которых $\operatorname{Arctg} 0 = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$. Каков радиус сходимости полученных разложений?

4. Написать первые четыре члена разложения в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки функций:

$$\text{а) } e^{1/(1-z)}, \quad \text{б) } \sin \frac{1}{1-z}; \quad \text{в) } \ln(1+e^z).$$

Каковы радиусы сходимости этих рядов?

5. Найти нули функций и определить их порядки:

$$\text{а) } (z^2 + 9)(z^2 + 4)^5; \quad \text{б) } (1 - e^z)(z^2 - 4)^3; \quad \text{в) } z \sin z; \quad \text{г) } \frac{\sin^2 z}{z}$$

6. Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$:

а) в кольце $|a| < |z| < |b|$; б) в окрестности бесконечно удаленной точки; в) в окрестности точки a .

7. Разложить в ряд Лорана:

а) функцию $z^2 e^{1/z}$ в окрестности точки $z = 0$;

б) функцию $\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ в окрестности точки $z = 2$.

8. Найти несколько первых членов разложения функции $\sin \frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Какова область сходимости этого разложения?

9. Найти все конечные особые точки функций и определить их характер (для полюсов указать порядок):

$$\text{а) } \frac{z+2}{(z-1)^2 z(z+1)}; \quad \text{б) } \frac{1}{(z^2+i)^3}; \quad \text{в) } \frac{1}{\sin z}; \quad \text{г) } \operatorname{tg}^2 z;$$

$$\text{д) } e^{z-2i}; \quad \text{е) } \cos \frac{1}{z+i}; \quad \text{ж) } \operatorname{tg} \frac{1}{z-1}; \quad \text{з) } \frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}; \quad \text{и) } \frac{1-\cos z}{z^2};$$

$$\text{к) } \frac{\sin z}{z^4}; \quad \text{л) } \frac{1}{e^z - 2}.$$

10. Исследовать поведение функций в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\text{а) } \frac{z^2}{3+z^2}; \quad \text{б) } \frac{2z^3 - z + 1}{z^3 + z + 8}; \quad \text{в) } \frac{z}{5-z^4}; \quad \text{г) } e^{-z}; \quad \text{д) } \sin z;$$

$$\text{е) } e^{1/z} + z^2 - 4; \quad \text{ж) } e^{1/z}; \quad \text{з) } e^{1/(1-z)}; \quad \text{и) } e^{-z} + z^3 + z - 2.$$

11. Является ли точка $z = 0$ изолированной особой точкой для функции:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \frac{1}{z}; \quad \text{б) } \sin \frac{1}{z}?$$

12. Является ли бесконечно удаленная точка изолированной особой точкой для функций:

$$\text{а) } e^z; \quad \text{б) } \operatorname{ctg} z?$$

ГЛАВА V ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§ 1. Основная теорема о вычетах

60. Если точка $z = a$ является правильной точкой или изолированной особой точкой однозначной функции $f(z)$, то можно выбрать простой контур C , однократно обходящий точку a в положительном направлении (например, окружность достаточно малого радиуса), так, чтобы на контуре C и всюду внутри этого контура, за исключением, быть может, самой точки a , функция $f(z)$ была аналитической. Величину

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

будем в этом случае называть *вычетом функции $f(z)$ относительно точки a* и писать:

$$\text{Res}[f(z); a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

Из теоремы Коши для составного контура следует, что вычет данной функции относительно заданной точки не зависит от формы и размеров контура C , если этот контур удовлетворяет указанным выше требованиям.

Если точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то коэффициент c_{-1} первого члена главной части разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a (см. формулу (22) гл. IV) равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

и, следовательно, вычет функции $f(z)$ относительно точки a совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a :

$$\text{Res}[f(z); a] = c_{-1}.$$

Если a является правильной точкой функции $f(z)$, то все коэффициенты главной части разложения в окрестности этой точки равны нулю и, следовательно, вычет функции относительно правильной точки равен нулю (это следует также из теоремы Коши). Если a — полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю (если $c_{-1} = 0$).

61. Пусть C_0 — простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением n изолированных особых точек a_1, a_2, \dots, a_n . Окружим эти точки лежащими внутри C_0 окружностями C_1, C_2, \dots, C_n (рис. 69) столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек. Тогда в силу теоремы Коши для составного контура получим

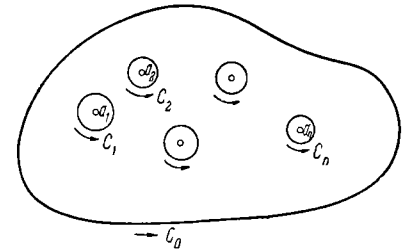


Рис. 69.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(z) dz, \end{aligned}$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки.

Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек

этой функции, находящихся внутри контура C_0 (основная теорема о вычетах):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [f(z); a_k].$$

Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки естественно считать величину

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

где C — окружность с центром в начале координат столь большого радиуса, что вне этой окружности нет особых точек функции $f(z)$, отличных от бесконечно удаленной особой точки. Направление интегрирования на окружности C следует выбрать так, чтобы при обходе контура бесконечно удаленная точка оставалась слева, т. е. направление обхода надо установить по часовой стрелке. Отсюда следует, что если c_{-1} является коэффициентом при $\frac{1}{z}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$\operatorname{Res} [f(z); \infty] = -c_{-1}.$$

Если бесконечно удаленная точка функции $f(z)$ правильная, то вычет относительно нее не обязательно равен нулю. Так, например, для функции

$$f(z) = 2 + \frac{3}{z}$$

точка $z = \infty$ является правильной, если считать $f(\infty) = 2$, но $c_{-1} = 3$, и, следовательно,

$$\operatorname{Res} [f(z); \infty] = -3.$$

Из сопоставления определения вычета относительно бесконечно удаленной точки с основной теоремой о вычетах следует, что если функция имеет конечное число особых точек, то вычет относительно бесконечно удаленной точки равен взятой с обратным знаком сумме вычетов относительно всех особых точек, расположенных в конечной части плоскости. Следовательно, сумма вычетов относительно всех особых точек, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю.

§ 2. Вычет относительно полюса

62. Если точка a является простым полюсом функции $f(z)$, то в окрестности этой точки функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a}, \quad (1)$$

где функция $\varphi(z)$, будучи суммой правильной части разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a , является аналитической и тем более непрерывной функцией в точке a . Из (1) имеем

$$c_{-1} = (z-a)f(z) - (z-a)\varphi(z)$$

и, переходя к пределу при $z \rightarrow a$, получим

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)],$$

так как вследствие непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке a существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a)$ и

$$\lim_{z \rightarrow a} [(z-a)\varphi(z)] = 0.$$

Итак, если a — простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{Res} [f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (2)$$

Пример 1. Вычислить вычет функции $\frac{z^2}{z-2}$ относительно точки $z=2$.

Точка $z=2$ является простым полюсом функции $\frac{z^2}{z-2}$. Следовательно, в соответствии с (2) имеем

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^2}{z-2}; 2 \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{z^2}{z-2} \right] = 4.$$

Пример 2. Вычислить вычет функции $\frac{1}{\sin z}$ относительно точки $z=0$.

Точка $z=0$ является простым полюсом функции $\frac{1}{\sin z}$, так как для функции $\sin z$ эта точка является простым нулем. Следовательно,

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sin z}; 0 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \frac{1}{\sin z} \right) = 1.$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула. Предположим, что точка $z = a$ является простым полюсом функции $f(z)$ и что функция $f(z)$ представлена в виде

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — функции, аналитические в точке a , причем для функции $f_2(z)$ точка a является нулем первого порядка, а $f_1(a) \neq 0$. В соответствии с (2) имеем

$$\operatorname{Res}[f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)}{\frac{f_2(z)}{z-a}} = \frac{f_1(a)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a}}.$$

Но так как $f_2(a) = 0$, то в соответствии с определением производной

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z) - f_2(a)}{z-a} = f_2'(a).$$

Итак,

$$\operatorname{Res}[f(z); a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \quad (3)$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{Res}[\operatorname{ctg} z; 0]$.

Имеем $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Точка $z=0$ является нулем первого порядка для функции $\sin z$ и в соответствии с формулой (3)

$$\operatorname{Res}[\operatorname{ctg} z; 0] = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

Пример 4. Вычислить

$$\oint_C \frac{(z+1) dz}{z^2+4},$$

где C — окружность $|z|=3$, обходимая в положительном направлении.

Внутри контура C функция $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$ имеет особые точки $z = \pm 2i$, являющиеся полюсами первого порядка, так как $z^2+4 = (z-2i)(z+2i)$. Пользуясь формулой (3), получим

$$\operatorname{Res}[f(z); -2i] = \frac{z+1}{(z^2+4)'} \Big|_{z=-2i} = \frac{z+1}{2z} \Big|_{z=-2i} = -\frac{1-2i}{4i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z); 2i] = \frac{z+1}{2z} \Big|_{z=2i} = \frac{1+2i}{4i},$$

и, следовательно, с помощью основной теоремы о вычетах имеем

$$\oint_C \frac{(z+1) dz}{z^2+4} = 2\pi i \left(\frac{1+2i}{4i} - \frac{1-2i}{4i} \right) = 2\pi i.$$

Пример 5. Вычислить

$$\oint_C \frac{z dz}{1-2\sin^2 z},$$

где C — окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

Так как

$$1-2\sin^2 z = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z \right),$$

то внутри контура C подынтегральная функция имеет два простых полюса в точках $z_1 = \frac{\pi}{4}$ и $z_2 = -\frac{\pi}{4}$ ($\frac{3\pi}{4} > 2$). В соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\oint_C \frac{z dz}{1-2\sin^2 z} = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}; \frac{\pi}{4} \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}; -\frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

С помощью формулы (3), учитывая, что $(1-2\sin^2 z)' = -2\sin 2z$, находим

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}; \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\frac{\pi}{4}}{-2\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{8},$$

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}; -\frac{\pi}{4} \right] = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-2\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)} = -\frac{\pi}{8}.$$

Следовательно,

$$\oint_C \frac{z dz}{1-2\sin^2 z} = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) = -\frac{\pi^2 i}{2}.$$

63. Если точка $z=a$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, то в окрестности этой точки

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad (4)$$

где функция $\varphi(z)$ является суммой правильной части разложения в ряд Лорана и, следовательно, аналитична в точке

$z = a$. Умножив обе части (4) на $(z - a)^m$, получим справедливое в некоторой окрестности точки a (кроме самой точки a) равенство

$$(z - a)^m f(z) = (z - a)^m \varphi(z) + c_{-1}(z - a)^{m-1} + \dots + c_{-m}.$$

Продифференцировав обе части этого тождества $m - 1$ раз, получим

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a)^m f(z)] = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a)^m \varphi(z)] + (m - 1)! c_{-1}. \quad (5)$$

Для функции $(z - a)^m \varphi(z)$ точка $z = a$ является нулем порядка не ниже, чем m , следовательно, в точке a обращаются в нуль производные этой функции во всяком случае до порядка $m - 1$ включительно. Поэтому при $z = a$ первое слагаемое в правой части равенства (5) равно нулю, и переходя в (5) к пределу при $z \rightarrow a$, получим

$$c_{-1} = \text{Res} [f(z); a] = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a)^m f(z)]. \quad (6)$$

Пример 6. Определить вычет функции $\frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ относительно точки $z = i$.

Точка $z = i$ является полюсом третьего порядка данной функции, так как

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z - i)^3 (z + i)^3}.$$

В соответствии с (6) получим

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 1)^3}; i \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - i)^3 \frac{1}{(z - i)^3 (z + i)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} [(z + i)^{-3}] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} [(-3)(-4)(z + i)^{-5}] = \\ &= \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16} i. \end{aligned}$$

§ 3. Логарифмические вычеты

64. Если точка a является полюсом порядка m функции $f(z)$, то, как было показано выше (стр. 138), функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - a)^m},$$

где функция $\psi(z)$ аналитична и отлична от нуля в точке a . Отсюда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\text{Ln } f(z)]' = [\text{Ln } \psi(z) - m \text{Ln } (z - a)]' = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{m}{z - a}.$$

Функция $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ является аналитической в точке a , следовательно, главная часть разложения функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в ряд Лорана в окрестности точки a состоит из одного члена $-\frac{m}{z - a}$, поэтому

$$\text{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = -m. \quad (7)$$

Если точка a является нулем порядка m функции $f(z)$, то эта же точка является полюсом порядка m функции $F(z) = \frac{1}{f(z)}$. Так как

$$\text{Ln } f(z) = -\text{Ln } F(z),$$

то

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\text{Ln } f(z)]' = -[\text{Ln } F(z)]' = -\frac{F'(z)}{F(z)}. \quad (8)$$

Для функции $F(z)$ точка a является полюсом порядка m , следовательно, в соответствии с (7)

$$\text{Res} \left[\frac{F'(z)}{F(z)}; a \right] = -m;$$

отсюда на основании равенства (8) получим

$$\text{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = m. \quad (9)$$

Итак, вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки, являющейся нулем функции $f(z)$, равен порядку нуля, а относительно точки, являющейся полюсом функции $f(z)$, — порядку этого полюса с обратным знаком.

65. Предположим, что функция $f(z)$ аналитична и отлична от нуля во всех точках некоторого контура C , а внутри этого контура имеет конечное число особых точек a_1, a_2, \dots, a_k , причем все они являются полюсами. Обозначим через

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ нули функции $f(z)$, расположенные внутри контура C . При этих условиях особыми точками функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$, расположенными внутри контура C , будут только точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и, в соответствии с основной теоремой о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_i \right] + \sum_{q=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right]. \quad (10)$$

Величину, стоящую в левой части этого равенства, называют *логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура C* .

С другой стороны, как показано выше (см. (9)), величина $\operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right]$ равна порядку нуля функции $f(z)$ в точке α_q , в частности, если нуль простой, то $\operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right] = 1$.

Если каждый нуль считать столько раз, каков его порядок, то сумма

$$N = \sum_{q=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_q \right]$$

будет равна числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C . Аналогично, если ввести обозначение

$$P = - \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \alpha_i \right]$$

и условиться каждый полюс функции $f(z)$ считать столько раз, каков его порядок, то из формулы (7) следует, что P равно числу полюсов функции $f(z)$ внутри контура C . Записав равенство (10) с помощью введенных обозначений в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (11)$$

приходим к следующей теореме о логарифмическом вычете: *при указанных выше условиях логарифмический вычет функции относительно замкнутого контура равен*

разности между количеством нулей и количеством полюсов функции, расположенных внутри данного контура.

В частности, если внутри контура C функция $f(z)$ не имеет особых точек, то $P=0$ и логарифмический вычет равен числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C .

66. Если точка z пробегает дугу C с начальной точкой z_0 и конечной точкой z_1 , то соответствующая ей точка $w = f(z)$ пробегает некоторую дугу Γ плоскости w с начальной точкой $w_0 = f(z_0)$ и конечной точкой $w_1 = f(z_1)$.

Если аналитическая функция $f(z)$ не обращается в нуль вдоль дуги C , то в соответствии с правилом вычисления интеграла от аналитической функции (§ 3 гл. II) получим

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ln} f(z_1) - \operatorname{Ln} f(z_0) = \operatorname{Ln} w_1 - \operatorname{Ln} w_0, \quad (12)$$

причем берется любая однозначная вдоль Γ ветвь логарифма. Если C — замкнутый контур ($z_1 = z_0$), то Γ также является замкнутым контуром ($w_1 = w_0$), пробегаемым точкой w один или несколько раз. Однако равенство нулю правой части (12) только в том случае следует из того, что $w_1 = w_0$, когда вдоль Γ можно определить однозначную ветвь функции $\operatorname{Ln} w$, а это возможно лишь тогда, когда внутри области, ограниченной контуром Γ , не содержится точка $w=0$. Если же контур Γ обходит точку $w=0$, то, как было показано в п. 42, к мнимой части логарифма прибавляется приращение, полученное аргументом w (2π при каждом обходе против часовой стрелки и -2π при обходе по часовой стрелке). Поэтому, если контур Γ m раз обходит точку $w=0$, из (12) получаем

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \pm 2m\pi i$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \pm m. \quad (13)$$

Если обозначить через $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ приращение, получаемое аргументом величины $w = f(z)$ при обходе точкой z контура C ,

то равенству (13) можно придать вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Сравнивая (13) с (11), приходим к иной формулировке теоремы о логарифмическом вычете: *разность между числом нулей и числом полюсов функции $f(z)$ внутри контура C равна числу оборотов, которые делает в плоскости w вектор, идущий из точки $w=0$ в точку $w=f(z)$, когда точка z описывает контур C (число оборотов считается при этом положительным, если вектор вращается против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае).*

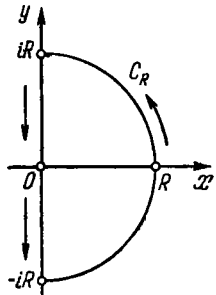
В такой форме теорема о логарифмическом вычете носит название принципа аргумента.

Пример. Найти количество нулей многочлена

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2;$$

а) в правой полуплоскости; б) в первом квадранте.

Так как $P(z)$ не имеет полюсов, то величина $\frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} P(z)$ равна числу нулей $P(z)$ внутри контура C . Возьмем в качестве контура C границу полукруга с центром в точке $z=0$, с диаметром на мнимой оси и столь большого радиуса R , чтобы все нули $P(z)$, лежащие в правой полуплоскости, оказались внутри этого полукруга (рис. 70); применим к этому контуру принцип аргумента и перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. Так как



$$P(z) = z^4 \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} \right), \quad (14)$$

то когда точка z описывает в положительном направлении полуокружность C_R , входящую в выбранный нами контур,

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^4 = 4 \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z = 4\pi,$$

а приращение аргумента второго множителя в правой части (14) сколь угодно близко к нулю при достаточно большом R , так как этот множитель близок к постоянной (единице).

Итак, $\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} P(z) \rightarrow 4\pi$ при $R \rightarrow \infty$. Пусть теперь точка z движется по мнимой оси от $z=iR$ до $z=-iR$. Положив $z=it$, получим

$$P(it) = u + iv = t^4 - 3t^2 + 2 + i(-2t^3 + t),$$

откуда

$$u = t^4 - 3t^2 + 2, \quad v = -2t^3 + t.$$

Для того чтобы представить себе вид линии, которую описывает при этом точка $w=P(z)$, найдем точки пересечения этой линии с мнимой и действительной осями плоскости w , для чего решим уравнения

$$t^4 - 3t^2 + 2 = 0 \quad (15)$$

и

$$-2t^3 + t = 0. \quad (16)$$

Первое из этих уравнений имеет корни $t = \pm \sqrt{2}$, $t = \pm 1$, а второе $t=0$, $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (так как при этом уравнения (15) и (16) не имеют общих корней, то на мнимой оси плоскости z нет нулей функции $P(z)$ и применение принципа аргумента к рассматриваемому контуру законно). Расположим найденные корни в порядке убывания (т. е. в порядке обхода контура):

$$\sqrt{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\sqrt{2}$$

и найдем соответствующие значения u и v . Имеем:

$u=0,$	$v=-3\sqrt{2}$	при	$t=\sqrt{2};$
$u=0,$	$v=-1$	при	$t=1;$
$u=\frac{3}{4},$	$v=0$	при	$t=\frac{1}{\sqrt{2}};$
$u=2,$	$v=0$	при	$t=0;$
$u=\frac{3}{4},$	$v=0$	при	$t=-\frac{1}{\sqrt{2}};$
$u=0,$	$v=1$	при	$t=-1;$
$u=0,$	$v=3\sqrt{2}$	при	$t=-\sqrt{2}.$

Если, наконец, учесть, что при $t=R \rightarrow \infty$ имеем $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow -\infty$, $\frac{v}{u} \rightarrow 0$, а при $t=-R \rightarrow -\infty$ имеем $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow +\infty$,

$\frac{v}{u} \rightarrow 0$, то можно утверждать, что линия, описываемая точкой $w=P(z)$, когда точка z пробегает сверху вниз мнимую ось, имеет вид, изображенный на рис. 71, и общее приращение аргумента вектора $w=P(z)$ равно при этом нулю. Таким образом, при достаточно большом R имеем окончательно

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} P(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 2,$$

следовательно, $P(z)$ имеет два нуля в правой полуплоскости.

Для определения числа нулей $P(z)$ в первом квадранте рассмотрим замкнутый контур γ , изображенный на рис. 72. Пусть γ_R —

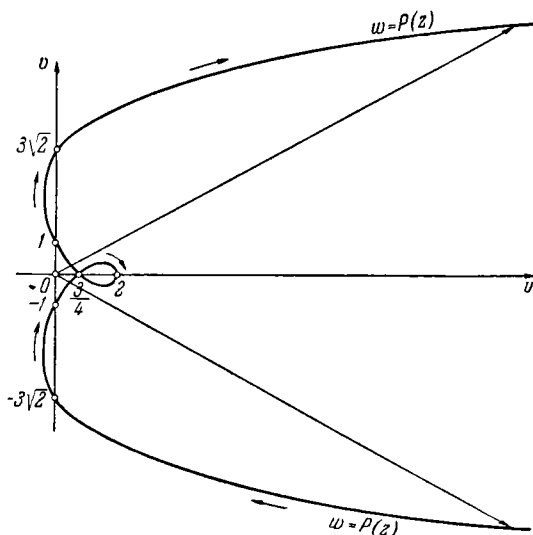


Рис. 71.

дуга окружности, входящая в этот контур. Рассуждение, аналогичное проведенному выше, показывает, что при достаточно большом R величина $\Delta_{\gamma_R} \text{Arg } P(z)$ сколь угодно близка к числу $\frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$.

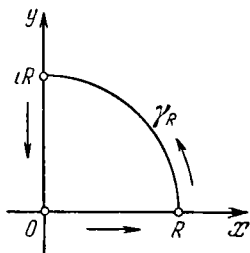


Рис. 72.

При $R \rightarrow \infty$ прямые участки контура γ превращаются соответственно в положительные части мнимой и действительной осей. Когда точка z пробегает сверху вниз положительную часть мнимой оси, соответствующая точка $w = P(z)$ описывает в направлении, указанном стрелкой, первую половину линии, изображенной на рис. 71 (до точки $z=2$). Когда же точка z движется вправо по действительной положительной полуоси, т. е. когда $z > 0$, и возрастает до $z = +\infty$, то $w = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 > 0$ и w также возрастает до $w = +\infty$. Таким обра-

зом, путь, описываемый точкой $w = P(z)$, когда точка z пробегает сначала сверху вниз положительную мнимую полуось, а затем слева направо положительную действительную полуось, имеет вид,

изображенный на рис. 73, и общее приращение аргумента вектора $w = P(z)$ на этом пути равно нулю. Итак, при достаточно большом R имеем

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } P(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

и, следовательно, $P(z)$ имеет один нуль в первом квадранте.

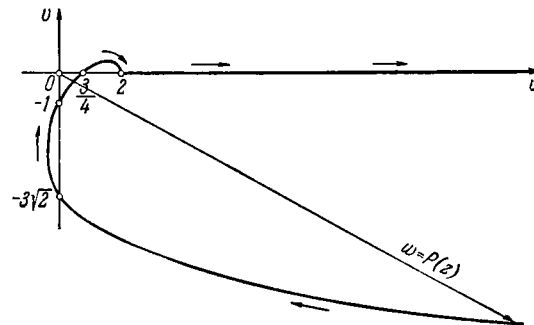


Рис. 73.

Другие примеры на применение принципа аргумента приведены в гл. X.

§ 4. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

67. С помощью вычетов вычисляют некоторые несобственные определенные интегралы.

Предположим сначала, что бесконечно удаленная точка является нулем второго или более высокого порядка функции $f(z)$, и следовательно, разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots \quad (17)$$

(случай $c_{-2} = 0$ не исключается). Допустим также, что $f(z)$ является аналитической функцией на действительной оси, а в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда все лежащие в верхней полуплоскости особые точки функции $f(z)$ можно заключить внутрь расположенного в верхней полуплоскости полукруга

достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. В соответствии с основной теоремой о вычетах интеграл

$$\int_L f(z) dz,$$

взятый по границе L этого полукруга, будет равен числу $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости, причем при дальнейшем увеличении R этот интеграл изменяться не будет, так как никакие новые особые точки при этом внутрь полукруга не попадут.

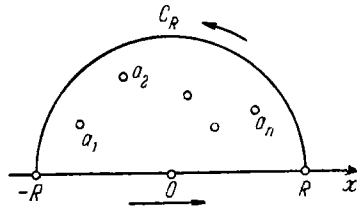


Рис. 74.

Пусть C_R — полуокружность, входящая в состав границы L указанного полукруга (рис. 74); тогда

$$\int_L f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx.$$

На основании (17) имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = c_{-2} + \frac{c_{-1}}{z} + \dots$. Для функции $\varphi(z)$ бесконечно удаленная точка является правильной, причем $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c_{-2}$, следовательно, функция $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки и, в частности, на полуокружности C_R , если ее радиус R достаточно велик, т. е. во всех точках полуокружности C_R

$$|\varphi(z)| \leq M,$$

где M — некоторое положительное число. Следовательно,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} \frac{\varphi(z) dz}{z^2} \right| \leq \frac{M}{R^2} \pi R = \frac{M\pi}{R}$$

и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

А так как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

то тем самым доказано, что если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ равен произведению числа $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Функция $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ имеет в бесконечности нуль четвертого порядка; особыми точками функции являются полюсы второго порядка в точках $z = \pm i$, из них только первый находится в верхней полуплоскости.

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{(z^2+1)^2}; i \right] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}i \right) = \frac{\pi}{2}.$$

68. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

может быть вычислен с помощью теории вычетов и в некоторых других случаях. В частности, интегралы такого вида, встречающиеся в операционном исчислении, часто удается вычислить с помощью следующей леммы Жордана, которую мы приводим без доказательства: пусть C_R — лежащая в верхней полуплоскости дуга окружности радиуса R

с центром в некоторой фиксированной точке z_0 (рис. 75), а функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = e^{itz} F(z),$$

причем $t > 0$. Если функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек и $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Очевидно, что если a_1, a_2, \dots, a_n — особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, то

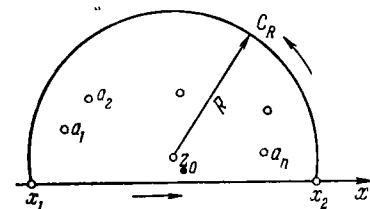


Рис. 75.

при достаточно большом R (см. рис. 75)

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z); a_k].$$

Очевидно также, что при $R \rightarrow \infty$ имеем $x_1 \rightarrow -\infty$, $x_2 \rightarrow +\infty$, и по лемме Жордана получим, переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z); a_k].$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$.

Функция

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10},$$

как нетрудно проверить, удовлетворяет условиям леммы Жордана.

Здесь $t = 1$ и $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы первого порядка $z = 1 + 3i$ и $z = 1 - 3i$ (эти точки являются нулями первого порядка для функции $z^2 - 2z + 10$). В верхней полуплоскости имеется единственная особая точка $z = 1 + 3i$. Вычислим относительно этой точки вычет функции $f(z)$:

$$\text{Res}[f(z); 1 + 3i] = \frac{ze^{iz}}{(z^2 - 2z + 10)'} \Big|_{z=1+3i} = \frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} &= 2\pi i \frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i} = \\ &= \frac{\pi}{3} e^{-3} (1+3i) (\cos 1 + i \sin 1) = \\ &= \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1) + i \frac{\pi}{3} e^{-3} (3 \cos 1 + \sin 1). \end{aligned}$$

Сравнивая в обеих частях этого равенства действительные и мнимые части и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10},$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} &= \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10} &= \frac{\pi}{3} e^{-3} (3 \cos 1 + \sin 1). \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

1. Найти вычеты следующих функций относительно каждого из полюсов:

- а) $\frac{z^2+1}{z-2}$; б) $\frac{e^{\pi z}}{z-i}$; в) $\frac{1}{(z^2+1)^4}$; г) $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ($n > 0$ и целое);
 д) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$; е) $\frac{1}{z^3-z^5}$; ж) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^4}$; з) $\lg z$; и) $\text{ctg}^2 z$; к) $\text{ctg}^1 z$.

2. Найти вычеты относительно точки $z=0$ функций:

- а) $e^{1/z}$; б) $\cos \frac{1}{z}$; в) $\sin \frac{1}{z}$.

3. Вычислить $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, если C — окружность $x^2+y^2=2x$, проходимая однократно в положительном направлении.

4. Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{(z-1) \cdot (z^2+1)}.$$

если C — окружность $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, проходимая однократно в положительном направлении.

5. Вычислить

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n} \quad (n > 0 \text{ и целое}),$$

если C — однократно проходимая в положительном направлении окружность $|z| = 1$, в следующих случаях:

а) $|a| < |b| < 1$; б) $|a| < 1 < |b|$; в) $1 < |a| < |b|$.

6. Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$; 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0);$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n > 0 \text{ и целое});$ д) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 9};$

в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0);$ е) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 4x + 20}.$

7. Определить, сколько нулей в каждом квадранте имеют многочлены:

а) $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$; б) $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

ГЛАВА VI

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

§ 1. Плоскопараллельные векторные поля

69. Векторное поле

$$\mathbf{A} = A_x(x, y, z, t)\mathbf{i} + A_y(x, y, z, t)\mathbf{j} + A_z(x, y, z, t)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат, а t — время, называется *плоскопараллельным*, если все векторы поля параллельны некоторой плоскости P , причем в точках каждой прямой, перпендикулярной к этой плоскости, в любой фиксированный момент времени t векторы поля равны между собой (рис. 76).

В дальнейшем мы будем считать плоскость P параллельной плоскости xOy . Тогда

$$A_z(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\mathbf{A} = A_x(x, y, t)\mathbf{i} + A_y(x, y, t)\mathbf{j}.$$

Очевидно, что изучение плоскопараллельного векторного поля сводится к изучению плоского векторного поля в плоскости P или в любой другой параллельной ей плоскости.

Векторное поле называется *стационарным*, если оно не изменяется с течением времени.

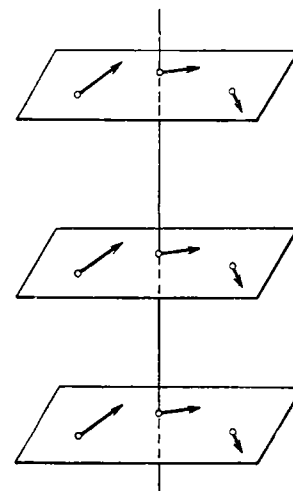


Рис. 76.

В этой главе мы будем рассматривать лишь плоские (или плоскопараллельные) стационарные векторные поля

$$\mathbf{A} = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j}. \quad (1)$$

Точку (x, y) в плоскости xOy можно характеризовать комплексным числом $z = x + iy$, а вектор

$$\mathbf{A} = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j}$$

— комплексным числом $A_x(x, y) + iA_y(x, y)$. Поэтому наряду с записью (1) вектор можно представлять в виде

$$\mathbf{A} = A_x(x, y) + iA_y(x, y). \quad (2)$$

Следовательно, векторное поле (1) можно задать, указав две функции действительных переменных $A_x(x, y)$ и $A_y(x, y)$ или одну функцию комплексного переменного

$$\varphi(z) = A_x(x, y) + iA_y(x, y).$$

§ 2. Комплексный потенциал

70. Напомним некоторые понятия векторного анализа (см. [1], гл. IX, § 3) в применении к плоским стационарным векторным полям (1), или в комплексной форме (2). Координаты $A_x(x, y)$ и $A_y(x, y)$ вектора \mathbf{A} в области их определения будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Циркуляцией вектора поля \mathbf{A} вдоль замкнутого контура C называется криволинейный интеграл

$$\Gamma_C = \int_C A_s(x, y) ds,$$

где A_s — проекция вектора $\mathbf{A}(x, y)$ на положительное направление касательной к дуге C в точке (x, y) (положительное направление на касательной соответствует положительному направлению обхода дуги C), ds — элемент дуги кривой C . Если ввести вектор $d\mathbf{s} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy$ (или в комплексной форме $ds = dx + i dy$), то по формуле для скалярного произведения

$$A_s ds = \mathbf{A} d\mathbf{s} = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$$

и

$$\Gamma_C = \int_C \mathbf{A} d\mathbf{s} = \int_C A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy. \quad (3)$$

Если в некоторой односвязной области циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то подынтегральное выражение $A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$ в этой области является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, называемой *потенциальной функцией*. По отношению к функции $u(x, y)$ вектор \mathbf{A} называется градиентом и обозначается

$$\mathbf{A} = \text{grad } u(x, y).$$

Справедливо и обратное утверждение: если в (3) подынтегральное выражение $A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в односвязной области G ,

$$du(x, y) = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy,$$

т. е.

$$A_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

то циркуляция по любому замкнутому контуру C в этой области равна нулю.

В рассматриваемом случае, т. е. при $\mathbf{A} = \text{grad } u(x, y)$, векторное поле называется *безвихревым* или *потенциальным*.

Для того чтобы в (3) подынтегральное выражение являлось полным дифференциалом и, следовательно, поле $\mathbf{A} = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j}$ было бы потенциальным, как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x}. \quad (4)$$

Если условие (4) выполняется во всех точках рассматриваемого поля, за исключением конечного числа точек z_k , в которых условие (4) нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из производных $\frac{\partial A_x}{\partial y}$, $\frac{\partial A_y}{\partial x}$, то циркуляция по замкнутому контуру C , обходящему какую-нибудь из этих точек или группу таких точек, может быть отличной от нуля. Если циркуляция по контуру C , ограничивающему область D , внутри которой находится лишь одна из этих точек z_k , отлична от нуля, то точка z_k называется *вихревой точкой*. Если при этом контур C однократно обходит точку z_k в положительном направлении, то число Γ_C называется *интенсивностью вихря* в точке z_k .

Потоком вектора поля A через замкнутую или незамкнутую кривую C называется криволинейный интеграл

$$N_C = \int_C A_n ds,$$

где ds — элемент дуги кривой C , а A_n — проекция вектора $A(x, y)$ на положительное направление нормали к кривой C в точке (x, y) .

Вектор dn , направленный по нормали к кривой C в точке (x, y) и по длине равный вектору $ds = i dx + j dy$, направленному по касательной к той же кривой, можно записать в виде

$$dn = \pm (i dy - j dx).$$

Выбрав какой-нибудь из двух знаков перед скобкой в правой части равенства, мы установим положительное направление на нормали. Условимся в дальнейшем брать знак $+$, тогда $dn = i dy - j dx$. При этом условии для замкнутого контура C , с направлением обхода против часовой стрелки, вектор dn направлен по внешней нормали к контуру C .

Так как

$$A_n ds = A dn = A_x(x, y) dy - A_y(x, y) dx,$$

то

$$N_C = \int_C A_n ds = \int_C A dn = \int_C -A_y(x, y) dx + A_x(x, y) dy. \quad (5)$$

Если в некоторой области поток вектора через любой замкнутый контур C равен нулю, то подынтегральное выражение $-A_y(x, y) dx + A_x(x, y) dy$ в (5) является полным дифференциалом некоторой функции $v(x, y)$, называемой *функцией тока* (это название связано с гидродинамическим смыслом функции v , см. стр. 173),

$$dv = -A_y(x, y) dx + A_x(x, y) dy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x(x, y).$$

В этом случае поле называется *соленоидальным*.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является

$$-\frac{\partial A_y(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x}. \quad (6)$$

Если условие соленоидальности (6) выполняется во всех точках рассматриваемого поля, за исключением конечного числа точек z_k , в которых условие (6) нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из производных

$$\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial y},$$

то поток вектора поля через замкнутый контур, внутри которого содержатся точки z_k , может быть отличным от нуля.

Если поток N_C вектора поля A через замкнутый контур C , ограничивающий область, в которой содержится лишь одна из этих точек z_k , отличен от нуля, то точка z_k называется *источником*, если $N_C > 0$, и *стоком*, если $N_C < 0$. При этом предполагается, что контур C обходит в положительном направлении, т. е. при обходе контура C точка z_k остается слева. Если контур C однократно обходит точку z_k в положительном направлении, то число N_C называется *обильностью* источника (если $N_C > 0$) или стока (если $N_C < 0$). Если в области D , ограниченной контуром C , не проходящим через точки z_k , содержится несколько точек z_k , то поток N_C вектора поля через контур C , однократно проходящий в положительном направлении, равен алгебраической сумме обильностей всех источников и стоков, находящихся в области D .

Аналогичная теорема, являющаяся следствием свойств криволинейных интегралов от полных дифференциалов, конечно, справедлива и для циркуляции по контуру C в потенциальном поле с конечным числом вихревых точек.

71. Предположим, что поле $A(x, y)$ потенциально и соленоидально, следовательно, существуют потенциальная функция $u(x, y)$ и функция тока $v(x, y)$, определяемые с точностью до постоянных слагаемых своими полными дифференциалами:

$$du = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy,$$

$$dv = -A_y(x, y) dx + A_x(x, y) dy.$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

называемую *комплексным потенциалом*. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= A_x(x, y), & \frac{\partial u}{\partial y} &= A_y(x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -A_y(x, y), & \frac{\partial v}{\partial y} &= A_x(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно, комплексный потенциал $f(z) = u + iv$ является аналитической функцией.

Весь превосходно разработанный аппарат теории аналитических функций может быть использован для изучения потенциально-соленоидальных векторных полей, если их описывать с помощью комплексного потенциала.

Если известен комплексный потенциал $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то соответствующее ему векторное поле $A = A_x(x, y) + iA_y(x, y)$ легко определяется, так как

$$A_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \left(= \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad A_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \left(= -\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = A_x(x, y) - iA_y(x, y),$$

получим

$$A = A_x(x, y) + iA_y(x, y) = \overline{f'(z)}. \quad (7)$$

Следовательно, $|A(x, y)| = |f'(z)|$, а аргумент вектора $A(x, y)$ отличается от аргумента вектора $f'(z)$ знаком (так как $\arg \overline{f'(z)} = -\arg f'(z)$). Линии уровня функций u и v

$$u(x, y) = c, \quad v(x, y) = c$$

образуют ортогональную сеть, так как их образами в плоскости w при конформном отображении (сохраняющем углы) $w = f(z)$ являются взаимно-ортогональные семейства прямых, параллельных осям координат $u = c$ и $v = c$. Линии уровня функции $u(x, y)$ ортогональны вектору поля, так как вектор поля A является градиентом функции $u(x, y)$. Следовательно,

вектор поля $A(x, y)$ направлен по касательным к линиям уровня $v(x, y) = c$, т. е. линии уровня функции $v(x, y)$ являются векторными линиями рассматриваемого векторного поля.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_C f'(z) dz &= \int_C [A_x(x, y) - iA_y(x, y)](dx + idy) = \\ &= \int_C A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy + \\ &\quad + i \int_C -A_y(x, y) dx + A_x(x, y) dy = \Gamma_C + iN_C, \end{aligned}$$

где C — замкнутый контур (см. (3) и (5)).

Во многих прикладных задачах приходится изучать потенциально-соленоидальные векторные поля с изолированными особыми точками z_k , т. е. точками, в которых не выполнено условие потенциальности

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

или условие соленоидальности

$$-\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial x}.$$

Среди точек z_k могут быть вихревые точки, источники и стоки. Могут быть вихревые точки, которые одновременно являются источниками или стоками; такие точки называются *вихреисточниками* или *вихрестокami*. Могут быть также и иные особые точки, например, особые точки, получающиеся от слияния источника со стоком равной бесконечной обильности (см. стр. 176—178).

Заметим, что если условия потенциальности (4) и соленоидальности (6) выполнены в многосвязной области G , то потенциальная функция $u(x, y)$ и функция тока $v(x, y)$ могут быть многозначными. Действительно,

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy, \quad (8)$$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -A_y(x, y) dx + A_x(x, y) dy, \quad (9)$$

но в случае многосвязной области G криволинейные интегралы от полных дифференциалов могут до некоторой степени зависеть от пути интегрирования, соединяющего заданные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x, y)$, а именно: интегралы вида (8), определяющие функцию $u(x, y)$, не обязательно одинаковы вдоль двух путей C_1 и C_2 , идущих из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x, y)$, если в области между C_1 и C_2 имеются особые точки функции $f(z)$; так же обстоит дело и с интегралами вида (9), определяющими функцию $v(x, y)$.

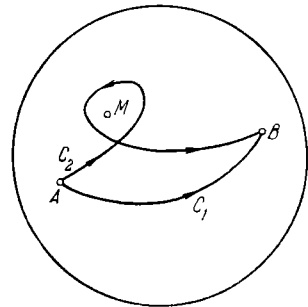


Рис. 77.

На рис. 77 изображена двусвязная область: круг, из которого удалена точка M . Если точка M является вихревой, то криволинейные интегралы (8), взятые по путям C_1 и C_2 , очевидно, будут отличаться на не равную нулю

циркуляцию вектора A по замкнутому контуру C , однократно обходящему точку M . Точно так же, если точка M является источником (или стоком), то криволинейные интегралы (9), взятые по путям C_1 и C_2 , будут отличаться на величину потока вектора A через упомянутый выше замкнутый контур C , т. е. на обильность источника (или стока), находящегося в точке M .

§ 3. Комплексный потенциал в гидродинамике

72. Рассмотрим поле скоростей

$$A = A_x(x, y)i + A_y(x, y)j$$

стационарного плоскопараллельного движения несжимаемой жидкости в области, не имеющей источников или стоков жидкости.

В рассматриваемом случае поток $N_C = \int_C A_n ds$ вектора скорости A через некоторую кривую C по абсолютной величине равен в соответствующих единицах количеству жидкости, протекающей в единицу времени через кривую C^1). Если

¹⁾ Точнее, количеству жидкости, протекающей через цилиндрическую поверхность единичной высоты с образующими, параллельными оси Oz , проекцией которой на плоскость xOy является кривая C .

в области D , ограниченной замкнутым контуром C , нет источников и стоков, то в силу несжимаемости жидкости ее количество внутри контура C не может изменяться и, следовательно, количество втекающей в область D жидкости равно количеству вытекающей жидкости, т. е. поток вектора скорости через замкнутый контур C равен нулю — поле соленоидально.

Если, кроме того, рассматриваемое поле скоростей движения несжимаемой жидкости потенциально, то для его изучения целесообразно ввести комплексный потенциал

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

При этом векторными линиями $v = c$ будут *линии тока* жидкости, так как касательный к ним вектор A является вектором скорости течения. Отсюда и происходит название функции v — «функция тока». Названия «источник», «сток», «обильность» источника или стока также заимствованы из рассматриваемой в этом параграфе гидродинамической интерпретации векторного поля.

Пример 1. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, комплексный потенциал которого равен az , где действительное число $a > 0$.

Функция $w = az$ является аналитической во всей плоскости и, следовательно, ее можно рассматривать как комплексный потенциал движения несжимаемой жидкости, в котором отсутствуют вихревые точки, источники, стоки и другие особые точки. Так как

$$\frac{dw}{dz} = a,$$

а a — число действительное и положительное, то вектор скорости параллелен действительной оси, направлен в положительную сторону и по длине равен a во всех точках плоскости.

Пример 2. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, линии тока, линии уровня потенциальной функции (*эквипотенциальные линии*), зная комплексный потенциал $w = \text{Ln } z$.

Для течения жидкости, определяемого комплексным потенциалом

$$w = \text{Ln } z,$$

особой точкой является начало координат, так как $z = 0$ является особой точкой функции

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}.$$

¹⁾ Предполагается, что при дифференцировании выбирается непрерывная в окрестности точки $z (z \neq 0)$ ветвь функции $\text{Ln } z$.

Длина вектора скорости A в точке z в соответствии с (7) равна

$$|A| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}.$$

Следовательно, модуль вектора скорости обратно пропорционален расстоянию точки от начала координат.

Угол α , образованный направлением вектора скорости и положительным направлением оси Ox , согласно (7) равен

$$\alpha = -\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \operatorname{Arg} z,$$

и следовательно, направление вектора скорости в точке z совпадает с направлением луча, идущего из начала координат в эту точку.

Очевидно, линиями тока являются лучи, выходящие из начала координат (рис. 78), а линиями уровня потенциальной функции — окружности с центром в начале координат.

К тому же выводу можно было прийти, выделив из комплексного потенциала потенциальную функцию и функцию тока

$$u + iv = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

откуда ($z = \rho e^{i\varphi}$):

$$u = \ln |z| = \ln \rho, \\ v = \operatorname{Arg} z = \varphi.$$

Отсюда видно, что линии уровня потенциальной функции: $\rho = c_1$, а линии тока: $\varphi = c_2$ (c_1, c_2 — постоянные).

Начало координат является источником. Так как других особых точек нет, то для подсчета обилиности источника следует вычислить поток через любой простой замкнутый контур, содержащий начало координат. Выбрав в качестве такого контура окружность C радиуса r с центром в начале координат, получим

$$N = \int_C A_n ds = \int_C \frac{1}{r} ds = \frac{1}{r} \int_C ds = \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi$$

(на окружности C всюду $A_n = |A| = \frac{1}{r}$).

Пример 3. Найти поле скоростей движения несжимаемой жидкости, линии тока и эквипотенциальные линии, зная комплексный потенциал $w = i \operatorname{Ln} z$.

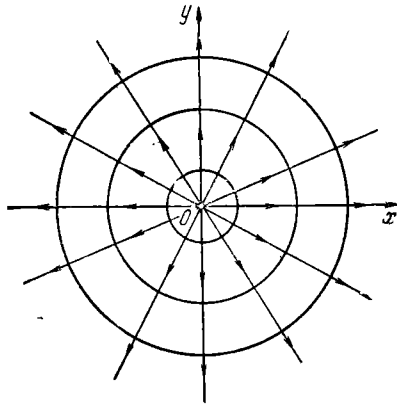


Рис. 78.

Для комплексного потенциала

$$w = i \operatorname{Ln} z$$

единственной особой точкой является начало координат. Пусть A — вектор скорости, а α — угол, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{i}{z}, \quad |A| = \frac{1}{|z|},$$

$$\alpha = -\operatorname{Arg} \frac{i}{z} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} z.$$

Модуль вектора скорости обратно пропорционален расстоянию точки от начала координат, а направление вектора скорости (рис. 79)

перпендикулярно к лучу, соединяющему точку z с началом координат, т. е. совпадает с направлением касательной к окружности с центром в начале координат, проходящей через данную точку. Отсюда следует, что линиями тока являются окружности с центром в начале координат, а линиями уровня потенциальной функции — лучи, выходящие из начала координат. К этому же выводу можно было прийти, выделив из комплексного потенциала потенциальную функцию и функцию тока.

Начало координат является вихревой точкой. Для того чтобы вычислить циркуляцию вектора A по контуру C , обходящему вихревую точку (интенсивность вихря), проще всего взять в качестве контура C окружность с центром в начале координат произвольного радиуса r . Вектор скорости касателен к этой окружности и

$$A_s = -|A| = -\frac{1}{r}$$

(отрицательный знак указывает на то, что движение происходит по часовой стрелке). Следовательно,

$$\Gamma = \int_C A_s ds = - \int_C \frac{1}{r} ds = -2\pi.$$

Пример 4. Найти линии тока движения несжимаемой жидкости, если комплексный потенциал равен $w = (a + bi) \operatorname{Ln} z$.

Из примеров 2 и 3 следует, что в движении, определяемом комплексным потенциалом $w = (a + bi) \operatorname{Ln} z$, где a и b — действи-

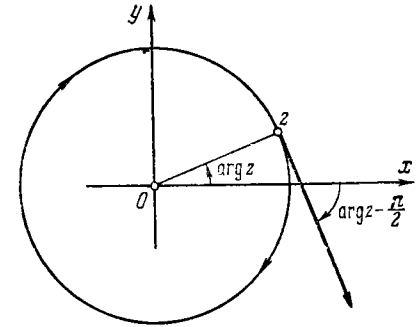


Рис. 79.

тельные постоянные, начало координат является вихресточником (если $a > 0$, $b \neq 0$) или вихресток (если $a < 0$, $b \neq 0$), причем поток через контур, окружающий начало координат, равен $2\pi a$, а циркуляция равна $-2\pi b$. Линиями тока являются логарифмические спирали (рис. 80). Действительно, поскольку $z = \rho e^{i\varphi}$,

$$\begin{aligned} w &= (a + bi) \operatorname{Ln} z = \\ &= (a + bi) (\ln \rho + i\varphi) = \\ &= (a \ln \rho - b\varphi) + \\ &\quad + i(b \ln \rho + a\varphi). \end{aligned}$$

Функция тока имеет вид $v = b \ln \rho + a\varphi$, и линии тока определяются уравнением $b \ln \rho + a\varphi = c$, где c — постоянная, или

$$\ln \rho = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \varphi,$$

откуда

$$\rho = C e^{-\frac{a}{b} \varphi} \quad \left(C = e^{\frac{c}{b}} \right).$$

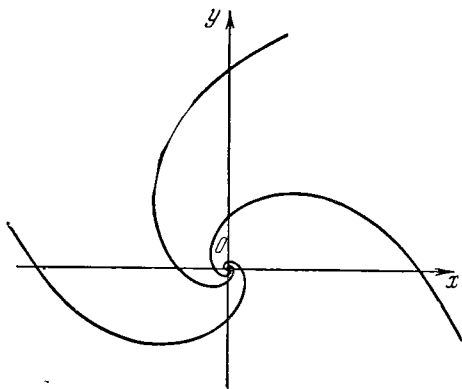


Рис. 80.

Пример 5. Найти линии тока, эквипотенциальные линии и особые точки движения несжимаемой жидкости, если комплексный потенциал равен $w = \frac{1}{z}$.

Движение, определенное комплексным потенциалом

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

имеет единственную особую точку $z = 0$.

Так как $\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$, то в прежних обозначениях получим

$$|A| = \left| -\frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{|z|^2}, \quad \alpha = -\operatorname{Arg} \left(-\frac{1}{z^2} \right) = 2 \operatorname{Arg} z - \pi.$$

Уравнение семейства линий тока $\frac{y}{x^2 + y^2} = c$, где c — постоянная,

или, полагая $\frac{1}{c} = 2C$,

$$x^2 + y^2 = 2Cy,$$

т. е. линиями тока (рис. 81) являются окружности

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

с центрами на оси Oy , касающихся оси Ox . Аналогичные вычисления показывают, что линиями уровня потенциальной функции (на рис. 81 они обозначены пунктиром) являются окружности

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2$$

с центрами на оси Ox , касающихся оси Oy .

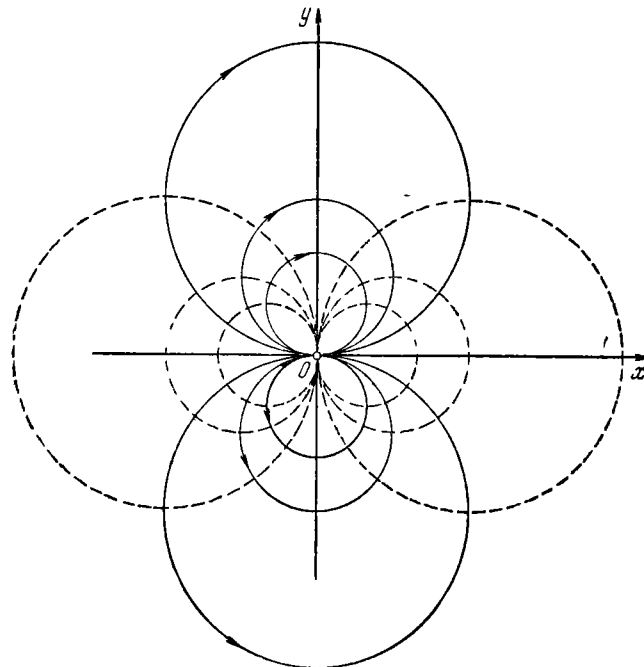


Рис. 81.

Легко убедиться в том, что жидкость движется по линиям тока в указанном на рис. 81 направлении. Для этого достаточно подсчитать величину угла α между вектором скорости и положительным направлением оси Ox , например, для точек, лежащих на мнимой оси, т. е. для точек z , у которых $\arg z = \pm \pi/2$.

Заметим, что комплексный потенциал

$$w = \frac{\operatorname{Ln}(z + h) - \operatorname{Ln} z}{h}$$

при действительном положительном h определяет течение жидкости с источником в точке $-h$ (см. пример 1) обильности $2\pi/h$ и стоком

в начале координат обильности $-2\pi h$. Так как

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(z+h) - \ln z}{h} = (\ln z)' = \frac{1}{z},$$

то начало координат в течении жидкости, определяемом комплексным потенциалом $w = \frac{1}{z}$, можно рассматривать как точку, в которой совмещены сток и источник одинаковой «бесконечно большой» обильности. Такую точку называют *диполем*¹⁾.

Нетрудно непосредственным вычислением проверить, что как поток через любой замкнутый контур, окружающий диполь и не содержащий других особых точек, так и циркуляция по такому контуру равны нулю.

§ 4. Задачи на обтекание

73. В задачах на обтекание требуется определить комплексный потенциал плоского поля скоростей безвихревого течения несжимаемой жидкости, обтекающего заданные линии, т. е., если перейти к пространственной задаче, определить комплексный потенциал плоскопараллельного поля скоростей безвихревого течения несжимаемой жидкости, обтекающего заданные покоящиеся в жидкости цилиндрические твердые тела, образующие которых перпендикулярны к плоскости векторного поля (можно считать также, что эти цилиндрические тела движутся в покоящейся жидкости в направлении, перпендикулярном к образующим цилиндрических поверхностей).

Очевидно, течение жидкости не определяется одной только формой обтекаемых тел, поэтому для единственности решения задачи на обтекание необходимо, кроме формы обтекаемых тел, задать еще некоторые добавочные условия.

74. Рассмотрим гладкую кривую C , в обе стороны удаляющуюся в бесконечность (это означает, что при движении точки z по кривой C в любую сторону z стремится к бесконечности). Эта кривая разбивает плоскость на две области D_1 и D_2 (рис. 82), называемые *криволинейными полуплоскостями*.

¹⁾ Впрочем, диполь можно рассматривать также как точку, в которой совмещены две вихревые точки с одинаковыми бесконечно большими, но противоположными по знаку циркуляциями, так как величину h можно считать мнимой (см. пример 3).

Задача заключается в том, чтобы в одной из этих областей (например, D_1) определить комплексный потенциал поля скоростей безвихревого течения несжимаемой жидкости, обтекающего кривую C , в котором отсутствуют источники и стоки.

Так как в точках кривой C вектор скорости должен быть направлен по касательной к этой кривой, то кривая C должна быть линией тока искомого поля скоростей

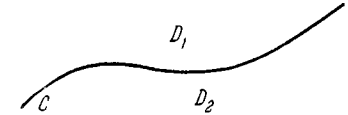


Рис. 82.

$$v(x, y) = v_0,$$

где v_0 постоянно. Функция тока $v(x, y)$ определяется по своим частным производным

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x(x, y)$$

лишь с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, можно считать $v_0 = 0$.

Итак, искомый комплексный потенциал

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

должен отображать кривую C в прямую $v = 0$, а следовательно, область D_1 должна отобразиться в полуплоскость $v > 0$ (или $v < 0$).

Существует (см. стр. 81) бесконечное множество аналитических функций, осуществляющих указанное отображение. Чтобы задача стала вполне определенной, необходимы добавочные условия.

В задачах гидродинамики такими условиями обычно являются задание модуля вектора скорости в бесконечности, т. е. задание $|f'(z)|$ при $z = \infty$ и требование $f(\infty) = \infty$.

Рассмотрим в качестве примера безвихревое течение жидкости (без источников и стоков), обтекающей линию, составленную из луча $-\infty < x \leq -R$, верхней полуокружности радиуса R с центром в точке $z = 0$ и луча $R \leq x < \infty$ в области G (рис. 83), расположенной выше этой линии. В соответствии со сказанным выше, комплексный потенциал $w = f(z)$ такого течения должен отображать границу области G на действительную ось, а область G — на верхнюю (или нижнюю) полуплоскость. Скорость в бесконечности будем

считать заданной и равной числу v_∞ (v_∞ — действительное число, так как в силу условий задачи скорость в бесконечности направлена по действительной оси).

Функция $t = \frac{z}{R}$ отображает область G на область G' , заштрихованную на рис. 84; область G' отображается, как

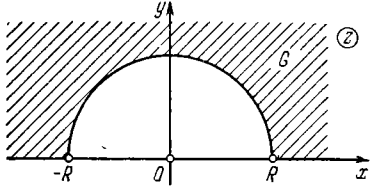


Рис. 83.

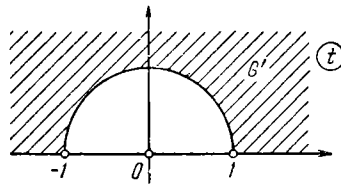


Рис. 84.

читатель легко проверит, на верхнюю полуплоскость функцией Жуковского

$$T = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

Таким образом, одной из функций, отображающих область G на верхнюю полуплоскость, является функция

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) = \frac{1}{2R} \left(z + \frac{R^2}{z} \right).$$

При этом $T = \infty$ при $z = \infty$. Совершив преобразование подобия $w = kT$ ($k > 0$), мы получим общий вид функции, отображающей область G на верхнюю полуплоскость и удовлетворяющей условию $w(\infty) = \infty$ (с точностью до постоянного слагаемого, соответствующего сдвигу, которое всегда можно опустить):

$$w = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$$

($a = k/2R$ — положительная постоянная). Отсюда

$$\frac{dw}{dz} = a \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right), \quad v_\infty = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=\infty} = a,$$

и, окончательно, искомый комплексный потенциал имеет вид

$$w = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (10)$$

Модуль вектора скорости определяется равенством

$$|A| = \left| v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) \right|.$$

В точках $z = \pm R$ скорость равна нулю; такие точки называются *критическими*.

Огделив в (10) мнимую часть от действительной, определим функцию тока:

$$u + iv = v_\infty \left(x + iy + \frac{R^2}{x + iy} \right) = v_\infty \left[x + iy + \frac{R^2(x - iy)}{x^2 + y^2} \right],$$

откуда

$$v = v_\infty \left(y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right).$$

Следовательно, семейство линий тока определяется уравнением

$$y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} = c,$$

или

$$(x^2 + y^2 - R^2)y = c(x^2 + y^2).$$

Линии тока симметричны относительно оси Oy и имеют асимптоты, параллельные оси Ox (рис. 85).

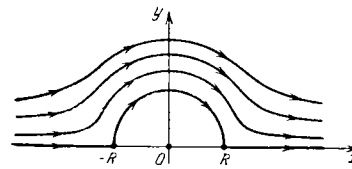


Рис. 85.

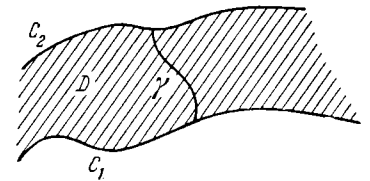


Рис. 86.

75. Рассмотрим криволинейную полосу D (рис. 86), ограниченную двумя гладкими кривыми C_1 и C_2 , пересекающимися лишь в бесконечности. Задача опять заключается в том, чтобы определить в полосе D поле скоростей стационарного течения несжимаемой жидкости, обтекающей кривые C_1 и C_2 , или комплексный потенциал этого течения.

Так как кривые C_1 и C_2 должны быть линиями тока искомого течения жидкости, то комплексный потенциал

отображает линии C_1 и C_2 соответственно на прямые $v = v_0$ и $v = v_1$. Следовательно, определение искомого комплексного потенциала сводится к нахождению аналитической функции, отображающей заданную криволинейную полосу D на прямолинейную полосу, ограниченную прямыми $v = v_0$ и $v = v_1$; без ограничения общности можно считать $v_0 = 0$.

Конечно, для однозначного определения комплексного потенциала необходимы добавочные условия. Такими условиями в гидромеханике обычно являются задание расхода жидкости, т. е. потока N_γ вектора скорости через кривую γ , соединяющую кривые C_1 и C_2 (рис. 86), и требование ограниченности скорости при $z \rightarrow \infty$.

Заметим, что задание расхода жидкости N_γ определяет величину разности $v_1 - v_0$. Действительно,

$$N_\gamma = \int_\gamma -A_v(x, y) dx + A_x(x, y) dy = \int_\gamma dv = v_1 - v_0.$$

Пример. Найти комплексный потенциал течения жидкости в канале, берега которого (рис. 87) имеют форму парабол $x =$

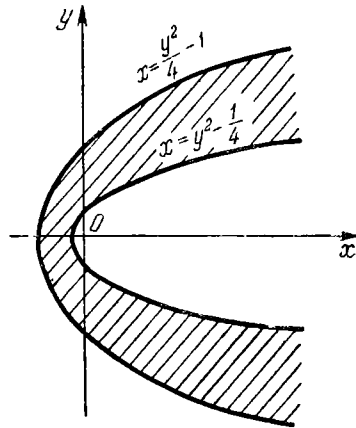


Рис. 87.

$= y^2 - \frac{1}{4}$ и $x = \frac{y^2}{4} - 1$, если расход жидкости равен Q .

Функция $w = \sqrt{z}$ отображает криволинейную полосу между параболлами $x = y^2 - \frac{1}{4}$ и $x = \frac{y^2}{4} - 1$ в полосу между прямыми $v = 1/2$ и $v = 1$. Здесь $v_1 - v_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, функция $w = \sqrt{z}$ является комплексным потенциалом течения жидкости в заданном канале, когда расход жидкости равен $\frac{1}{2}$.

Функция $w = 2Q \sqrt{z}$, соответствующая расходу Q , дает решение поставленной задачи.

76. Перейдем к задаче об обтекании замкнутого контура. Найдем сначала комплексный потенциал плоскопараллельного течения жидкости, обтекающего круговой цилиндр радиуса R , предполагая, что в плоскости, перпендикулярной к оси ци-

линдра, течение симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через центр сечения цилиндра, а скорость в бесконечности направлена параллельно оси симметрии и равна v_∞ .

Выберем систему координат так, чтобы начало координат находилось в центре сечения цилиндра, а направление скорости в бесконечности совпадало с положительным направлением оси Ox (рис. 88). Из условий задачи следует, что линия, составленная из отрезка $-\infty < x \leq -R$ действительной оси, верхней полуокружности радиуса R с центром в точке $z = 0$ и отрезка $R \leq x < \infty$, должна быть одной из линий тока, и следовательно, дело сводится к задаче, уже решенной на стр. 179—181. Таким образом, комплексный потенциал в рассматриваемой задаче равен

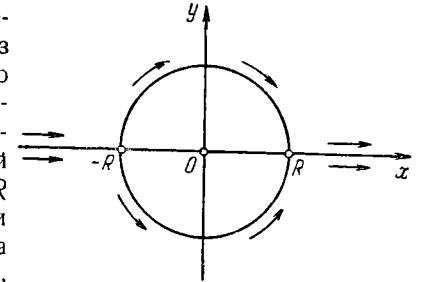


Рис. 88.

$$w = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right).$$

Найдем более общее решение задачи. Выше было показано (пример 3 на стр. 174), что функция $w = i \Gamma \ln z$ является комплексным потенциалом течения с вихревой точкой в начале координат и циркуляцией, равной -2π . Линиями тока в этом случае являются окружности с центром в начале координат. Для комплексного потенциала

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (11)$$

величина циркуляции вокруг вихревой точки в начале координат равна Γ , а скорость в бесконечности равна нулю. Так как цилиндр радиуса R с центром в начале координат обтекается каждым из течений, определяемых комплексными потенциалами (10) и (11), то течение с комплексным потенциалом

$$w = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (12)$$

будет также обтекать этот цилиндр. Скорость такого течения в бесконечности параллельна действительной оси и равна v_∞ , циркуляция вокруг начала координат равна Γ .

Если C — заданный замкнутый контур (рис. 89), а функция $t = \varphi(z)$ отображает внешность контура C взаимно однозначно и конформно на внешность круга радиуса R с центром в начале координат, то в соответствии с (12) функция

$$w = v_\infty \left[\varphi(z) + \frac{R^2}{\varphi(z)} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \varphi(z) \quad (13)$$

является комплексным потенциалом течения, обтекающего C . С помощью функции $t = \varphi(z)$ линии тока течения, обтекающего в плоскости z контур C , отображаются на линии тока

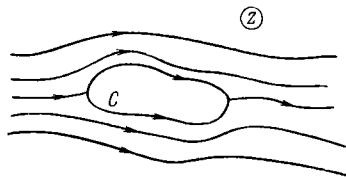


Рис. 89.

течения, обтекающего в плоскости t круг радиуса R ; точка $t = \infty$ является при этом общей для всех линий тока. Потребовав, чтобы $\varphi(\infty) = \infty$, мы получим в плоскости z течение, обладающее тем же свойством. Если потребовать еще, чтобы $\varphi'(\infty) = 1$ ¹⁾, то скорость течения, определяемого комплексным потенциалом (13) в бесконечно удаленной точке, окажется равной v_∞ :

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=\infty} \left. \frac{dt}{dz} \right|_{z=\infty} = v_\infty \cdot 1 = v_\infty.$$

¹⁾ Аналитическая функция, отображающая одну односвязную область на другую, определяется однозначно (см. стр. 83), если задать в какой-либо точке отображаемой области значение отображающей функции и аргумент ее производной. Поэтому для определения единственной функции $t = \varphi(z)$, отображающей внешность контура C на внешность данного круга $|t| > R$, достаточно, кроме равенства $\varphi(\infty) = \infty$, задать только аргумент числа $\varphi'(\infty)$, например считать этот аргумент равным нулю, т. е. считать $\varphi'(\infty)$ действительным положительным числом. Следовательно, вообще говоря, невозможно найти функцию $\varphi(t)$, осуществляющую требуемое отображение и удовлетворяющую условиям

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \varphi'(\infty) = 1, \quad (a)$$

если считать радиус круга R в плоскости t заданным, но можно найти такой радиус R , при котором условия (a) будут выполнены. При этом число R в равенстве (13) определяется из условий (a).

§ 5. Комплексный потенциал в электростатике и термодинамике

77. Плоское электростатическое поле, т. е. поле вектора напряженности

$$\mathbf{E} = E_x(x, y)\mathbf{i} + E_y(x, y)\mathbf{j},$$

является полем градиента

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} v(x, y),$$

где v — потенциал электростатического поля, и следовательно, это поле потенциально. Во всех точках, в которых нет зарядов (заряды играют здесь роль источников и стоков в гидродинамике), электростатическое поле соленоидально, и для его изучения целесообразно воспользоваться понятием комплексного потенциала. Однако, в отличие от гидродинамики, в задачах электростатики применяют несколько иные обозначения и иную терминологию. *Комплексным потенциалом* поля \mathbf{E} называется функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где

$$dv = -[E_x(x, y)dx + E_y(x, y)dy],$$

а

$$du = -E_y(x, y)dx + E_x(x, y)dy.$$

Функция $u(x, y)$ называется *силовой функцией*, а функция $v(x, y)$, как уже упомянуто выше, — *потенциалом электростатического поля*. Имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -E_y - iE_x = -i[E_x - iE_y],$$

откуда

$$|\mathbf{E}| = |f'(z)|, \quad \operatorname{Arg} \mathbf{E} = -\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} f'(z)\right].$$

Линии уровня потенциальной функции $v(x, y)$ называются *эквипотенциальными линиями*, а линии уровня силовой функции $u(x, y)$ — *силовыми линиями*.

Циркуляция вектора напряженности \mathbf{E} по замкнутому контуру C

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{E}_s ds$$

равна работе поля при перемещении единичного заряда по замкнутому контуру и всегда равна нулю.

Поток вектора напряженности через замкнутый контур

$$N_C = \oint_C E_n ds,$$

в силу известной теоремы Гаусса, равен алгебраической сумме расположенных внутри контура C зарядов, умноженной на 2π (рассматривается плоский случай).

Пример 1. Выяснить характер электростатического поля, соответствующего комплексному потенциалу $f(z) = i \operatorname{Ln} z$.

Здесь (см. для сравнения пример 3 на стр. 174) $u = -\operatorname{Arg} z$, $v = \ln|z|$. Эквипотенциальными линиями являются окружности $|z| = c$, силовыми линиями являются лучи $\operatorname{Arg} z = C$.

Найдем модуль и аргумент вектора напряженности:

$$|E| = |f'(z)| = \left| \frac{i}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$$

$$\operatorname{Arg} E = -\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} \frac{i}{z} \right] = -\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} z \right] = \operatorname{Arg} z - \pi.$$

Это означает, что вектор напряженности направлен вдоль луча $\operatorname{Arg} z = C$ (вдоль силовой линии) к началу координат.

Единственной особой точкой является точка $z=0$; в ней расположен заряд. Для того чтобы найти величину этого заряда, следует вычислить поток вектора E через замкнутый контур C , однократно обходящий точку $z=0$. Выбрав в качестве такого контура окружность $|z|=r$, получим

$$E_n = -|E| = -\frac{1}{|z|} = -\frac{1}{r},$$

откуда

$$N_C = - \int_C \frac{1}{r} ds = -2\pi$$

и, в силу теоремы Гаусса, величина заряда равна $\frac{-2\pi}{2\pi} = -1$.

Отсюда следует, что комплексный потенциал, соответствующий заряду -1 в точке $z=0$, имеет вид

$$f(z) = -i \operatorname{Ln} z$$

или

$$f(z) = i \operatorname{Ln} \frac{1}{z}.$$

Пример 2. Выяснить характер электростатического поля, соответствующего комплексному потенциалу $f(z) = i/z$. Здесь (см. для сравнения стр. 176)

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Эквипотенциальными линиями являются окружности с центрами

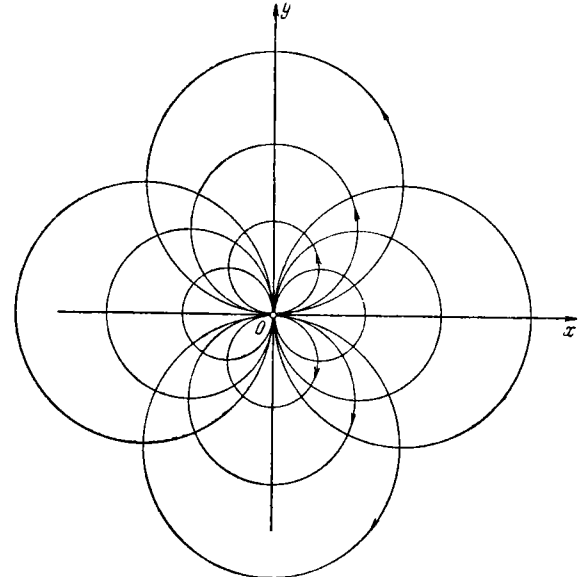


Рис. 90.

на оси Ox , касающиеся оси Oy (рис. 90), силовыми линиями — окружностями с центрами на оси Oy , касающиеся оси Ox . Так как $f'(z) = -i/z^2$, то вектор напряженности определяется равенствами

$$|E| = \frac{1}{|z|^2}, \quad \operatorname{Arg} E = 2 \operatorname{Arg} z.$$

В особой точке $z=0$ расположен диполь. Нетрудно (см. стр. 176) убедиться в том, что рассмотренное электростатическое поле является предельным при $h \rightarrow 0$ для поля, определяемого двумя зарядами: одним — величины $1/h$, находящимся в точке $z=0$, и другим — величины $-1/h$ в точке $-h$.

78. В поле скоростей течения жидкости вдоль обтекаемой линии постоянна функция тока, в электростатическом поле,

аналогично, вдоль проводника постоянна потенциальная функция, поэтому вместо гидродинамических задач на обтекание в электростатике возникают задачи об определении поля E или его комплексного потенциала в односвязных или многосвязных областях, ограниченных проводниками. Приведем несколько типов таких задач.

а) Определение электростатического поля (или его комплексного потенциала) в области, ограниченной проходящим через бесконечно удаленную точку проводником C , если известны величина и направление вектора E в бесконечности (см. рис. 82).

б) Определение электростатического поля (или его комплексного потенциала) в криволинейной потесе, ограниченной двумя не пересекающимися на конечном расстоянии проводниками C_1 и C_2 в предположении, что разность потенциалов между проводниками задана (см. рис. 86).

в) Определение электростатического поля во внешности замкнутого проводника C , если известны величина и направление вектора E в бесконечности.

г) Определение поля между двумя замкнутыми непересекающимися проводниками, если известна разность потенциалов между ними.

Эти задачи решаются совершенно аналогично соответствующим задачам на обтекание.

Комплексный потенциал в задачах электростатики находится так же, как и в задачах гидромеханики, как функция, отображающая заданную область на стандартную область, соответствующую типу рассматриваемой задачи (полуплоскость, полоса между параллельными прямыми, внешность круга, кольцо).

79. В задачах термодинамики часто приходится рассматривать векторное поле

$$A = -k \operatorname{grad} u(x, y, z)$$

или в плоском случае

$$A = -k \operatorname{grad} u(x, y),$$

где u — температура соответственно в точке (x, y, z) или (x, y) , k — коэффициент внутренней теплопроводности, который мы будем считать постоянным. Вектор A называется *вектором*

потока тепла При постоянном k векторное поле

$$A = -k \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} (-ku),$$

будучи полем градиента, потенциально. Это поле также и соленоидально во всех точках, в которых нет источников и стоков тепла, ибо стационарный поток тепла через любой замкнутый контур C , ограничивающий некоторую область D , в которой нет источников и стоков тепла, должен быть равен нулю (в противном случае количество тепла в области D изменялось бы, и следовательно, изменились бы с течением времени температура u и ее градиент, т. е. поле A не было бы стационарным). Для изучения поля теплового потока также целесообразно использовать понятие комплексного потенциала.

Задачи термодинамики, соответствующие основным задачам на обтекание, формулируются и решаются так же, как и аналогичные задачи электростатики, только, говоря о проводниках, мы должны теперь иметь в виду не проводники электричества, а хорошие проводники тепла, а вместо разности потенциалов теперь надо задавать разность температур.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

В задачах 1 — 4 требуется определить модуль и направление вектора поля A , найти уравнения линий тока и линий уровня потенциальной функции по заданному комплексному потенциалу w .

1. $w = z^2$.

2. $w = z + \frac{1}{z}$.

3. $w = (1 + i) \operatorname{Ln} z$.

4. $w = \sqrt{z - a}$ (a — действительное число).

В задачах 5 и 6 требуется определить семейства линий тока и линий уровня потенциальной функции, а также характер особых точек по заданному комплексному потенциалу w .

5. $w = \operatorname{Ln} \frac{z}{z-1}$. 6. $w = i \operatorname{Ln} \frac{z}{z-1}$.

ГЛАВА VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. Определение преобразования Лапласа

80. В этой главе мы рассмотрим определение и основные свойства преобразования Лапласа, на базе которого в последующем будет строиться операционное исчисление. Для этого нам понадобятся уже известные сведения из теории функций комплексного переменного. Именно применение этой теории и обеспечит сравнительную простоту изучения свойств преобразования Лапласа и использование этих свойств в таком важном разделе математики, как решение дифференциальных уравнений, и таком важном разделе электротехники, как изучение переходных процессов в электрических цепях.

Начнем с определения. *Преобразованием Лапласа* функции действительного переменного $f(t)$ называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1)$$

Несобственный интеграл в правой части равенства, зависящий от комплексного параметра p , называется *интегралом Лапласа*. Свойства интегралов, зависящих от комплексного параметра, используемые в дальнейшем, аналогичны соответствующим свойствам интегралов, зависящих от действительного параметра (см. [1], гл. VI, § 3).

Прежде всего установим, какие функции $f(t)$ мы будем рассматривать и какие условия надо на них наложить, чтобы несобственный интеграл (1) сходил и действительно определял некоторую функцию $F(p)$. Будем предполагать следующее:

1) Функция $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geq 0$; это значит, что она или непрерывна, или имеет точки разрыва только первого рода (в каждом конечном интервале число таких точек разрыва обязательно конечно).

2) Функция $f(t)$ равна нулю при отрицательных значениях t

$$f(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (2)$$

Так как в интеграле Лапласа значения функции $f(t)$ при $t < 0$ вообще не участвуют, то не имеет значения, чему они равны. Как будет видно из дальнейшего (в п. 97), удобнее считать, что они равны нулю. При изучении многих физических процессов роль переменной t играет время и сказанное означает, что процесс начинается с некоторого момента времени (удобнее всего считать, что в момент $t = 0$).

3) При возрастании t модуль функции $f(t)$ может возрастать, но не быстрее некоторой показательной функции, т. е.

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad (3)$$

где M и α — постоянные.

Последнее условие обеспечивает, как мы вскоре убедимся, сходимость интеграла Лапласа. Условию 3) удовлетворяют, конечно, все ограниченные функции (в частности, $\sin t$ и $\cos t$); в этом случае α можно положить равным нулю: $|f(t)| \leq M$.

Ему удовлетворяют и все степенные функции t^k ($k > 0$), так как любая такая функция растет медленнее, чем показательная функция e^t ; применяя правило Лопиталя, легко проверить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k}{e^t} = 0$. (При $k < 0$ соответствующие степенные функции имеют бесконечный разрыв при $t = 0$ и не удовлетворяют первому условию.) Если читатель вспомнит, с какими функциями ему приходилось сталкиваться при изучении различных физических процессов, то он легко установит, что почти для всех таких функций условие (3) выполняется. (В качестве примера функции, для которой условие (3) не выполняется, можно указать e^{t^2} .)

Любая функция $f(t)$, удовлетворяющая сформулированным выше трем условиям, называется *оригиналом*; функцию $F(p)$, определяемую формулой (1), будем называть *изображением* (для ясности иногда говорят «изображением по Лапласу»).

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteq f(t).$$

Употребляются также символы

$$f(t) \rightarrow F(p), \quad f(t) \leftrightarrow F(p), \quad F(p) = L\{f(t)\}.$$

Формула для обратного перехода от изображения $F(p)$ к оригиналу $f(t)$ имеет более сложный вид; мы ее приведем и будем исследовать позже (в третьем параграфе).

Приведем простой пример. Пусть $\eta(t)$ — *единичная функция*

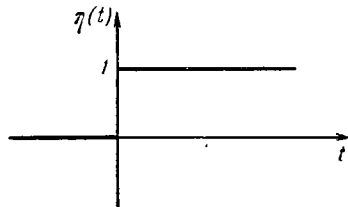


Рис. 91.

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

График ее приведен на рис. 91; ясно, что она является оригиналом. Для нее

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

причем последнее заключение можно сделать только в том случае, когда $e^{-pt} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $p = \sigma + is$, то $|e^{-pt}| = |e^{-\sigma t - ist}| = e^{-\sigma t}$. Последнее выражение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, если $\sigma > 0$. Таким образом, интеграл Лапласа для единичной функции сходится при $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$, и ее изображением является функция $1/p$.

Так как мы условились, что всякий оригинал равен нулю при $t < 0$, то для простоты будем писать, что единичная функция $\eta(t) = 1$, и тогда соответствие запишется так:

$$1 \doteq \frac{1}{p}. \quad (5)$$

Вообще в этой части книги, если речь идет о какой-то функции $f(t)$, например, о $\sin t$, $\cos t$, e^t и т. д., то всегда

подразумеваются следующие функции:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \sin t, & \text{если } t > 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \cos t, & \text{если } t > 0; \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ e^t, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Графики этих функций приведены на рис. 92 (соответственно а, б, в). Видно, что функции $f_2(t)$ и $f_3(t)$ имеют

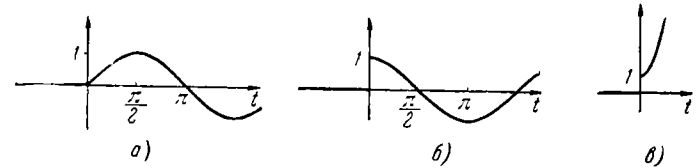


Рис. 92.

в точке $t=0$ разрывы первого рода. Функция $f_1(t)$ в точке 0 непрерывна (если $f_1(0)=0$), но ее график имеет угловую точку.

С помощью единичной функции $\eta(t)$ можно было бы записать

$$f_1(t) = \eta(t) \sin t, \quad f_2(t) = \eta(t) \cos t, \quad f_3(t) = \eta(t) e^t,$$

однако для сокращения записи множитель $\eta(t)$ мы будем опускать и просто писать

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \cos t, \quad f_3(t) = e^t.$$

Совершенно не обязательно считать, что оригинал $f(t)$ принимает только действительные значения. Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительного переменного, т. е. иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — соответственно действительная и мнимая части $f(t)$.

При этом каждая из функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ должна удовлетворять первому условию, наложенному на оригинал. Условия 2) и 3) формулируются совершенно одинаково для функций, принимающих как действительные значения, так и комплексные.

81. Перейдем теперь к доказательству того, что каждому оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$ и установим общие свойства изображения. Имеет место следующая

Теорема. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом. Тогда интеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

сходится абсолютно для всех значений комплексной переменной p , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > \alpha$ (т. е. в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$), где α — постоянная, участвующая в условии 3), и определяет изображение $F(p)$, которое является функцией, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ (рис. 93; на этом рисунке $\alpha > 0$, но, разумеется, α может быть и числом отрицательным, и нулем).

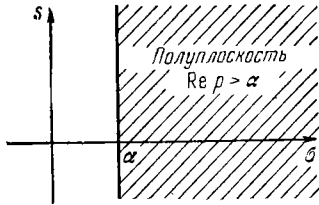


Рис. 93.

Чтобы доказать абсолютную сходимость интеграла, воспользуемся условием 3), согласно которому $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$; если $p = \sigma + is$, то $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}$ и поэтому

$$|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = M e^{(\alpha - \sigma)t}. \quad (6)$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{(\alpha - \sigma)t} dt = M \frac{e^{(\alpha - \sigma)t}}{\alpha - \sigma} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - \alpha}, \quad (7)$$

так как, по условию теоремы, $\alpha - \sigma < 0$ и потому $e^{(\alpha - \sigma)t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Неравенство (7) и показывает, что интеграл Лапласа сходится абсолютно.

Доказательство того, что изображение $F(p)$ — функция аналитическая, основывается на свойствах правильно (или равномерно) сходящихся интегралов (см. [1], п. 137); приведем его мелким шрифтом.

Если $\operatorname{Re} p \geq \alpha_0 > \alpha$, то на основании формулы (6) справедливо неравенство $|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(\alpha - \alpha_0)t}$; функция в правой его части не зависит от p и интеграл от нее в пределах от 0 до ∞ сходится, так как $\alpha - \alpha_0 < 0$. Этим доказана правильная сходимость интеграла Лапласа при $\operatorname{Re} p \geq \alpha_0$. Производная подынтегральной функции по параметру p равна $-t f(t) e^{-pt}$. Ее модуль не превосходит функции $M t e^{(\alpha - \alpha_0)t}$, интеграл от которой также сходится (он легко

вычисляется и равен $M'(\alpha - \alpha_0)^2$). Следовательно, и интеграл от производной по параметру p сходится правильно, а отсюда и следует, что интеграл Лапласа можно дифференцировать по p , т. е. что функция $F(p)$ является аналитической. (В теоремах о правильно сходящихся интегралах, на которые мы ссылаемся, требуется, чтобы подынтегральная функция была непрерывна и по переменной интегрирования t и по параметру p ; можно доказать, что теоремы справедливы и тогда, когда эта функция по t кусочно-непрерывна.)

В качестве примера найдем изображение функции e^{at} , где $a = \beta + i\gamma$ — любое комплексное число. Разумеется, согласно нашему условию при $t < 0$ функция равна нулю. Условия 1) и 3), очевидно, выполняются, причем в силу равенства $|e^{at}| = e^{\beta t}$ можно положить $M = 1$ и $\alpha = \beta$. Интегрируя, получим

$$\int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a},$$

если только $e^{-(p-a)t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Последнее же имеет место при $\operatorname{Re}(p-a) = \operatorname{Re} p - \beta > 0$, т. е. при $\operatorname{Re} p > \beta$.

Таким образом,

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}. \quad (8)$$

Если $a = 0$, то мы снова получаем формулу (5):

$$1 \doteq \frac{1}{p}.$$

Крайне существенно то обстоятельство, что хотя теорема утверждает сходимость интеграла Лапласа только при $\operatorname{Re} p > \beta$, в полученной формуле соответствия $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$ правая часть является аналитической функцией при всех значениях p , кроме точки $p = a$, где она имеет полюс. Как мы увидим в дальнейшем, в большинстве случаев дело будет обстоять так же, как и в приведенном примере. Функция $F(p)$ оказывается определенной и аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ (где интеграл Лапласа сходится абсолютно), но и в значительно большей части комплексной плоскости p , чаще всего во всей плоскости, за исключением изолированных особых точек. Пользуясь же приведенной теоремой, мы можем лишь утверждать, что в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ функция $F(p)$

не будет иметь особых точек: все они оказываются лежащими или левее прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$, или на самой этой прямой.

Чтобы читателю стал более ясен смысл этого замечания, приведем аналогичный пример, встречающийся при рассмотрении рядов. Как известно, в единичном круге имеем

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z},$$

причем ряд слева (геометрическая прогрессия) сходится только при $|z| < 1$; в то же время функция, стоящая справа, — аналитическая при всех значениях z , кроме точки $z = 1$. Однако эта функция является суммой геометрической прогрессии только при $|z| < 1$. Так же обстоит дело и в приведенном выше примере. Функция $F(p) = \frac{1}{p-a}$ — аналитическая всюду, кроме точки $p = a$, однако то, что она выражается интегралом $\int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt$, можно утверждать только при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

В дальнейшем нас, как правило, будет интересовать только само изображение $F(p)$, а вовсе не та область, в которой оно выражается интегралом Лапласа. Мы должны быть всегда уверены только в одном: в какой-то полуплоскости (безразлично какой) интеграл Лапласа сходится абсолютно. Забегая вперед, укажем, что каждому изображению $F(p)$ отвечает единственный оригинал $f(t)$, если только не обращать внимания на значения функции $f(t)$ в точках разрыва. Это означает также, что на изображение не влияют те значения оригинала, которые мы ему приписываем в точках разрыва.

82. Отметим еще поведение любого изображения $F(p)$ в бесконечно удаленной точке. Из неравенства (7) следует, что

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{\sigma - \alpha},$$

где α — постоянная из условия 3) и $\sigma = \operatorname{Re} p$. Поэтому, если p стремится к бесконечности так, что при этом и $\sigma \rightarrow \infty$ (например, вдоль положительной части действительной оси), то $F(p)$ стремится к нулю.

Если, в частности, $F(p)$ — функция, аналитическая в бесконечно удаленной точке (см. п. 58), то дополнительное условие

$\sigma \rightarrow \infty$ не играет роли, и $F(p)$ стремится к нулю при p стремящемся к бесконечности по любому закону:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (9)$$

Иначе говоря, если изображение $F(p)$ аналитично в бесконечно удаленной точке, то оно обязательно имеет там нуль.

83. Перед тем как перейти к изучению основных свойств преобразования Лапласа, поясним основную идею его применения. Преобразование Лапласа устанавливает соответствие между оригиналами $f(t)$ и их изображениями $F(p)$:

$$f(t) \doteq F(p).$$

Оказывается, что определенным действиям, производимым над оригиналами, будут соответствовать некоторые действия, производимые над их изображениями, причем, как правило, действия над изображениями будут проще, чем над оригиналами (это будет показано в следующем параграфе). В этом проявляется полная аналогия с основной идеей применения логарифмов в элементарной математике. Роль оригиналов там играют числа, а роль изображений — их логарифмы. Действию умножения чисел соответствует сложение их логарифмов, действию возвышения числа в степень соответствует умножение логарифма этого числа на показатель степени и т. д. Таким образом, более сложные действия над числами заменяются более простыми действиями над их логарифмами, и схема применения логарифмов выглядит примерно так. Чтобы, скажем, перемножить числа, мы сначала по таблице находим их логарифмы и складываем их. Найдя логарифм произведения, мы снова, пользуясь таблицами, возвращаемся к числу и получаем искомый результат. Все это, разумеется, хорошо известно читателю, и мы повторили это только для того, чтобы более ясной стала рассматриваемая нами аналогия.

Именно, если имеется некоторое сложное соотношение между оригиналами, то при помощи преобразования Лапласа мы будем получать значительно более простое соотношение между изображениями. Например, вместо дифференциального

уравнения относительно оригинала будет получаться алгебраическое уравнение относительно изображения. Решив это последнее и перейдя затем от изображения назад к оригиналу, мы и получим решение исходного дифференциального уравнения.

Приведенную аналогию с логарифмами можно продолжить. Ведь главное при действиях с логарифмами — это хорошо знать свойства логарифмов и правила логарифмирования. Само же соответствие между числами и логарифмами устанавливается при помощи таблиц логарифмов, и можно превосходно владеть методами вычислений, совершенно не зная, как фактически составлялись логарифмические таблицы. Точно так же обстоит дело и здесь. После того как мы в следующем параграфе установим основные правила действия над преобразованиями Лапласа и составим таблицу соответствия между оригиналами и изображениями (своего рода «аналог» таблицы логарифмов), нам уже не придется больше вычислять интеграл Лапласа для различных оригиналов $f(t)$, и переход от оригинала к изображению и обратно — от изображения к оригиналу будет осуществляться при помощи этой таблицы.

Таким образом, читатель с самого начала должен привыкнуть к тому, что интеграл Лапласа (1) нужен главным образом для установления основных свойств и правил преобразования Лапласа, или, как мы чаще будем говорить, свойств и правил операционного исчисления.

Вообще под *операционным исчислением* понимают методы решения задач, основанные на следующих этапах:

- 1) от искомых функций переходят к некоторым другим функциям — их изображениям;
- 2) над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями (отсюда название — операционное исчисление);
- 3) произведя действия над изображениями и получив некоторый результат, возвращаются к самим функциям.

В нашем курсе в качестве преобразования, позволяющего перейти от функций к их изображениям, будет применяться главным образом преобразование Лапласа. Несколько позже (в § 4) мы вкратце коснемся еще одного преобразования — преобразования Фурье, также играющего важную роль при решении многих прикладных задач.

§ 2. Свойства преобразования Лапласа

84. В этом параграфе мы рассмотрим основные свойства преобразования Лапласа и составим краткую таблицу, устанавливающую соответствие между некоторыми оригиналами и их изображениями. Для сокращения записи условимся, что оригиналы будут обозначаться через $f(t)$, $g(t)$ и т. д., а их изображения (аналитические функции комплексного переменного) соответственно через $F(p)$, $G(p)$, ..., т. е.

$$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p).$$

Напомним также, что мы уже имеем формулу соответствия (8):

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$$

и, в частности,

$$1 \doteq \frac{1}{p}.$$

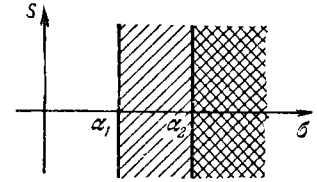


Рис. 94.

I. Теорема линейности. Для любых действительных или комплексных постоянных A и B

$$Af(t) + Bg(t) \doteq AF(p) + BG(p), \quad (10)$$

т. е. линейной комбинации оригиналов соответствует та же линейная комбинация изображений.

Доказательство немедленно следует из хорошо известного свойства интеграла:

$$\int_0^{\infty} [Af(t) + Bg(t)] e^{-pt} dt = A \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + B \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt.$$

Заметим только, что если интегралы справа абсолютно сходятся в разных полуплоскостях: $\operatorname{Re} p > \alpha_1$ и $\operatorname{Re} p > \alpha_2$, то интеграл слева сходится в их общей части (покрытой двойной штриховкой на рис. 94). Но, как уже отмечено выше, нас не интересует, в какой полуплоскости сходится интеграл, лишь бы он вообще где-нибудь сходил. Разумеется, теорема линейности остается справедливой для любого конечного числа слагаемых.

В качестве применения этой теоремы найдем изображения тригонометрических и гиперболических функций. По формулам Эйлера

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Полагая в формуле (8) $a = \pm i\omega$ и применяя теорему линейности, получим

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (11)$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (12)$$

Опять пользуясь теоремой линейности, легко получим

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \doteq \frac{\omega \cos \varphi + p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}, \quad (13)$$

$$\cos(\omega t + \varphi) \doteq \frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

Совершенно аналогично, исходя из определения гиперболических функций

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2},$$

найдем, что

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (14)$$

Заметим, что каждое из изображений (11) — (14) есть функция, аналитическая во всей плоскости p , с особыми точками $\pm i\omega$ (для $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$) или $\pm \omega$ (для $\operatorname{sh} \omega t$ и $\operatorname{ch} \omega t$).

В бесконечно удаленной точке все найденные изображения аналитичны и, как легко проверить, обращаются в нуль; это в точности соответствует общему положению о поведении изображений $F(p)$ в бесконечно удаленной точке (см. формулу (9)).

II. Теорема подобия. Для любого постоянного $\lambda > 0$

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad (15)$$

т. е. умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению аргумента изображения и самого изображения $F(p)$ на то же число λ .

В самом деле, по определению преобразования Лапласа

$$f(\lambda t) \doteq \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt.$$

Совершая в интеграле подстановку $\lambda t = t_1$, $dt = \frac{1}{\lambda} dt_1$, получим

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-\frac{p}{\lambda} t_1} dt_1 = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right),$$

так как безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования (t или t_1).

Допустим, что нам была бы известна формула (11) только для частного случая $\omega = 1$, т. е.

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Тогда, воспользовавшись теоремой подобия, мы получили бы

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

что в точности совпадает с формулой (11).

III. Теорема затухания¹⁾. Для любого действительного или комплексного числа a

$$e^{at} f(t) \doteq F(p - a), \quad (16)$$

т. е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой «смещение» независимой переменной p . Поэтому теорему называют также теоремой смещения.

И здесь доказательство немедленно следует из определения преобразования Лапласа:

$$e^{at} f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a).$$

Теорема затухания помогает расширить таблицу соответствия между оригиналами и изображениями, позволяя по известному соотношению $f(t) \doteq F(p)$ находить изображение

¹⁾ Названия теорем ясно подчеркивают связь рассматриваемых вопросов с физическими представлениями. Смысл термина «затухание» заключается в том, что если $a < 0$, то множитель e^{at} в равенстве (16) убывает.

функции $e^{at}f(t)$. Например, из формул (11) и (12) получим

$$\begin{aligned} e^{at} \sin \omega t &\doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}, \\ e^{at} \cos \omega t &\doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В обоих случаях мы заменили в выражении для изображения переменную p на $p-a$.

Совершенно аналогично из формул (14) следует

$$\begin{aligned} e^{at} \operatorname{sh} \omega t &\doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}, \\ e^{at} \operatorname{ch} \omega t &\doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Часто оказываются полезными формулы соответствия для произведения оригинала $f(t)$ на $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$. Применяя теоремы затухания и линейности, читатель легко самостоятельно получит формулы:

$$\begin{aligned} f(t) \cos \omega t &\doteq \frac{1}{2} [F(p-i\omega) + F(p+i\omega)], \\ f(t) \sin \omega t &\doteq \frac{1}{2i} [F(p-i\omega) - F(p+i\omega)], \end{aligned} \quad (19)$$

где $f(t) \doteq F(p)$. Ясно, что формулы (17) являются частными случаями последних формул.

85. Перейдем к дальнейшим свойствам преобразования Лапласа.

IV. Теорема запаздывания. Для любого постоянного $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p). \quad (20)$$

На этой теореме будет основано изображение многих функций (в частности, функций, описывающих импульсные процессы), и поэтому мы рассмотрим ее подробнее. Прежде всего выясним смысл термина «запаздывание». Пусть график функции $f(t)$ изображен на рис. 95, а. Тогда график функции $f(t-\tau)$, изображенный на рис. 95, б, будет сдвинут относительно графика $f(t)$ на τ , причем на участке $(0, \tau)$ график совпадает с осью $0t$, так как на этом участке $t-\tau < 0$ и поэтому функция $f(t-\tau)$ равна нулю. Таким образом,

процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается как бы с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$; отсюда и термин «запаздывание». Если, например, $\eta(t) \equiv 1$ (единичная функция), то график функции

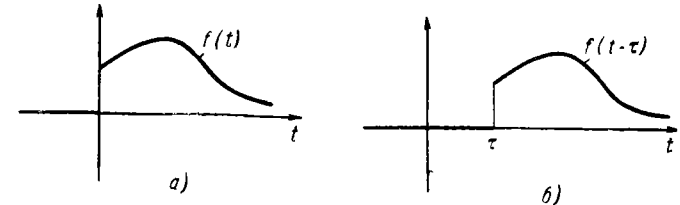


Рис. 95.

$\eta(t-\tau)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 96. На рис. 97 сплошной линией изображен график функции $f(t) = et$ и пунктирной — график функции $f(t-\tau)$, которая равна $e^{t-\tau}$ при $t > \tau$ и 0 при $t < \tau$. Эту функцию коротко можно записать так: $e^{t-\tau} \eta(t-\tau)$. Исходя из физического толкования, теорему запаздывания

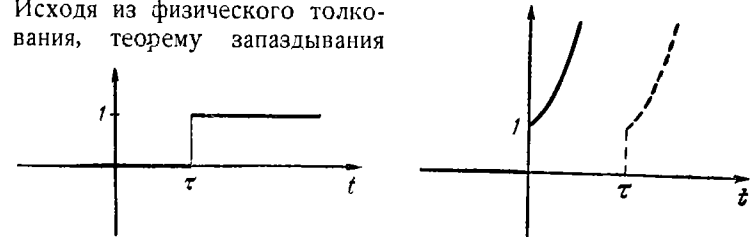


Рис. 96.

Рис. 97.

можно сформулировать так: запаздывание оригинала на время τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Для доказательства теоремы запишем

$$f(t-\tau) \doteq \int_0^\infty f(t-\tau) e^{pt} dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-p\tau} dt,$$

так как на участке $(0, \tau)$ подынтегральная функция равна нулю. Совершая подстановку $t-\tau \doteq t_1$ и замечая, что при этом нижний предел интегрирования станет равным нулю, получим

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t_1) e^{-pt_1} dt_1.$$

Интеграл справа есть как раз $F(p)$, и, таким образом, мы доказали, что

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

Согласно этой теореме изображение оригинала $\eta(t - \tau)$, график которого изображен на рис. 96 (единичная функция, запаздывающая на время τ), будет равно $\frac{1}{p} e^{-p\tau}$, а оригинала e^t , сдвинутого на τ (пунктирная линия на рис. 97), есть $\frac{e^{p\tau}}{p - 1}$.

Применим теперь теорему запаздывания к построению изображения единичного импульса $\varphi(t)$, действующего за промежуток времени τ :

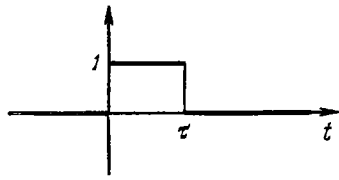


Рис. 98.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < t < \tau, \\ 0, & \text{если } t > \tau. \end{cases}$$

График его приведен на рис. 98.

Ясно, что этот единичный импульс можно рассматривать как

разность двух оригиналов: единичной функции и единичной функции, сдвинутой на τ (рис. 91 и 96). Так как изображение последней функции есть $\frac{1}{p} e^{-p\tau}$, то, применяя теорему линейности, получим

$$\varphi(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}). \quad (21)$$

Пусть теперь единичный импульс начинается не в момент $t = 0$, а в некоторый момент $t = T$ и по-прежнему действует

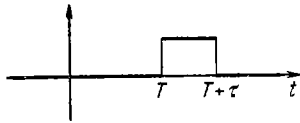


Рис. 99.



Рис. 100.

в течение времени τ (рис. 99). Снова применяя теорему запаздывания, получим, что его изображение равно $\frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{-pT}$.

Пусть, наконец, имеется периодическая система импульсов, изображенная на рис. 100. Ясно, что эту систему можно

рассматривать как сумму импульсов, которые начинаются в моменты времени nT ($n = 0, 1, 2, \dots$) и длятся время τ ($\tau < T$). Применяя теоремы запаздывания и линейности, получим

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) + \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{-pT} + \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{-2pT} + \dots = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{1 - e^{-p\tau}}{p(1 - e^{-pT})}.$$

Геометрическая прогрессия сходится, потому что $|e^{-pT}| < 1$, если только $\operatorname{Re} p > \alpha > 0$. В том частном случае, когда $T = 2\tau$, формула упрощается:

$$f(t) \doteq \frac{1}{p(1 + e^{-p\tau})}.$$

Если в указанном частном случае первый импульс начать не с нуля, а с момента $t = \tau$, то изображение опять умножится на $e^{-p\tau}$ и будет равно

$$\frac{e^{-p\tau}}{p(1 + e^{-p\tau})} = \frac{1}{p(e^{p\tau} + 1)}.$$

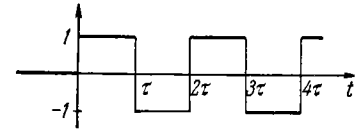


Рис. 101.

Рекомендуем читателю самостоятельно проверить, что для оригинала, изображенного на рис. 101, т. е. задаваемого формулой

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2n\tau < t < (2n+1)\tau, \\ -1, & \text{если } (2n+1)\tau < t < (2n+2)\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

имеет место соответствие

$$f(t) \doteq \frac{1 - e^{-p\tau}}{p(1 + e^{-p\tau})},$$

которое после простых преобразований можно выразить через гиперболический тангенс

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

Совершенно не обязательно, чтобы все импульсы были одинаковыми. Применяя предыдущие формулы, легко установить,

что система двух импульсов, показанная на рис. 102, имеет изображение

$$\frac{a}{p}(1 - e^{-p\tau_1}) + \frac{b}{p}(1 - e^{-p\tau_2})e^{-pT}.$$

Можно также построить изображение и периодической системы таких импульсов.

Аналогично строятся и изображения синусоидальных

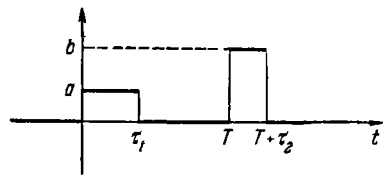


Рис. 102.

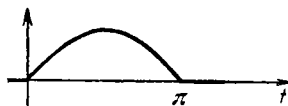


Рис. 103.

импульсов. Чтобы получить импульс в виде одной полу-волны синусоиды $\sin t$ (рис. 103), нужно сложить два оригинала, один из которых есть $\sin t$, а другой — та же синусоида, запаздывающая на π (сплошной и пунктирный графики

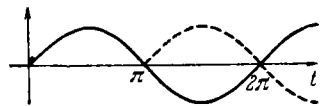


Рис. 104.

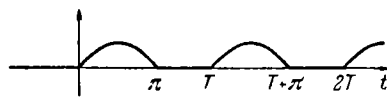


Рис. 105.

на рис. 104). Применяя формулу (11) и теорему запаздывания, получим изображение такой полуволны:

$$f(t) \doteq \frac{1}{p^2 + 1}(1 + e^{-\pi p}).$$

Такой же импульс, начинающийся с запаздыванием на T , имеет изображение

$$\frac{1}{p^2 + 1}(1 + e^{-\pi p})e^{-pT},$$

а периодическая система таких импульсов (рис. 105; $T \geq \pi$) — изображение

$$\frac{1}{p^2 + 1}(1 + e^{-\pi p})(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-pT})}.$$

В частности, если $T = \pi$, т. е. рассматривается оригинал, равный $|\sin t|$, то изображение равно

$$\frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})} = \frac{\operatorname{cth} \frac{\pi p}{2}}{p^2 + 1}.$$

Значительно реже, чем теорема запаздывания, применяется теорема опережения: если $\tau > 0$, то

$$f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} [F(p) - \int_0^\tau f(t) e^{-pt} dt]. \quad (22)$$

Графики функций $f(t)$ и $f(t + \tau)$ изображены на рис. 106, причем ординаты пунктирной части графика $f(t + \tau)$ должны быть заменены нулем, так что график $f(t + \tau)$ остается как бы срезанным. Это и приводит к тому, что в формуле (22) из $F(p)$ вычитается интеграл в конечных пределах.

Для доказательства теоремы запишем

$$f(t + \tau) \doteq \int_0^\infty f(t + \tau) e^{-pt} dt$$

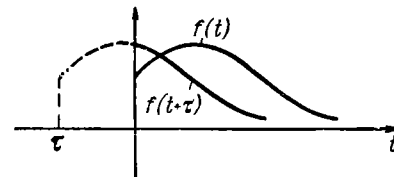


Рис. 106.

и совершим в интеграле подстановку $t + \tau = t_1$. Тогда

$$f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} \int_\tau^\infty f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = e^{p\tau} \left[\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt - \int_0^\tau f(t) e^{-pt} dt \right]$$

(мы переменную интегрирования вновь обозначили буквой t). Так как первый интеграл в скобках есть как раз $F(p)$, то теорема доказана.

86. Для получения большого числа новых изображений оказывается удобным рассматривать оригиналы и изображения, зависящие от параметра. Пусть функция $f(t, x)$ при каждом фиксированном значении x является оригиналом и ей соответствует изображение

$$F(p, x) = \int_0^\infty f(t, x) e^{-pt} dt. \quad (23)$$

Будем предполагать, что выполнены все условия, при соблюдении которых интеграл (23), рассматриваемый как

функция параметра x , можно дифференцировать по этому параметру под знаком интеграла; тогда

$$\frac{\partial F(p, x)}{\partial x} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} e^{-pt} dt.$$

Указанное правило дифференцирования интеграла по параметру позволяет сформулировать следующую теорему.

V. Теорема о дифференцировании по параметру. Если при любом значении x оригиналу $f(t, x)$ соответствует изображение $F(p, x)$, то

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}. \quad (24)$$

Покажем, как следует применять эту теорему. Согласно формуле (8)

$$e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}.$$

Здесь параметром является a ; дифференцируя левую и правую части по этому параметру, получим новую формулу:

$$te^{at} \doteq \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Продолжение дифференцирования приводит к соответствиям

$$t^2 e^{at} \doteq \frac{2}{(p-a)^3}, \quad t^3 e^{at} \doteq \frac{3!}{(p-a)^4},$$

и, вообще,

$$t^n e^{at} \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}. \quad (25)$$

Полагая $a=0$, получим

$$t \doteq \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \doteq \frac{2}{p^3}, \quad \dots, \quad t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (26)$$

Изображения дробных степеней t^k будут получены позднее. Совершенно аналогично, дифференцируя по параметру ω обе части соответствий:

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{и} \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

найдем

$$t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (27)$$

Рекомендуем читателю самостоятельно найти изображения для функций $t \operatorname{ch} \omega t$ и $t \operatorname{sh} \omega t$.

87. До сих пор рассматривались те свойства преобразования Лапласа, которые применяются главным образом для расширения таблицы оригиналов и изображений. Все выведенные формулы мы сведем в краткую таблицу, приведенную на стр. 229—230; там же будут даны указания о более подробных таблицах такого рода.

Теперь мы перейдем к наиболее важным свойствам преобразования Лапласа, связанным с действиями дифференцирования и интегрирования.

Предварительно сделаем несколько замечаний. В предыдущем параграфе были сформулированы три условия, при соблюдении которых функция $f(t)$ является оригиналом. Дальше в качестве оригиналов будут рассматриваться производные функции: $f'(t)$, $f''(t)$ и т. д. Поэтому, не делая в дальнейшем никаких оговорок, будем раз и навсегда считать, что если какая-либо производная функция $f(t)$ принимается за оригинал, то для нее выполняются все требуемые свойства. Кроме того, если, например, в качестве оригинала выступает первая производная, то будем считать, что сама функция $f(t)$ при всех $t > 0$ непрерывна. Если за оригинал принимается $f''(t)$, то этому условию должна удовлетворять первая производная $f'(t)$ и т. д. В то же время, когда речь пойдет о первообразной для функции $f(t)$, в частности об интеграле с переменным верхним пределом $\int_0^t f(t) dt$, никаких

дополнительных оговорок делать не нужно. Можно показать, что если функция $f(t)$ является оригиналом, то и интеграл $\int_0^t f(t) dt$ также является оригиналом.

Как мы уже видели (см. рис. 91, 92), часто случается, что точка $t=0$ является точкой разрыва оригинала. Так как нам в дальнейшем придется говорить о значении $f(0)$, то условимся всегда понимать под этим предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow 0$ справа, т. е.

$$f(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t) \quad (28)$$

(см. [1], гл. II, п. 33).

Аналогично, если точка $t=0$ является точкой разрыва для первой производной $f'(t)$, то условимся, что

$$f'(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t). \quad (29)$$

Так же поступим в случае производных высших порядков.

Во многих руководствах для предела (28) вводят специальные обозначения $f(+0)$ или $f(0+)$. Мы этого для сокращения записи делать не будем, но всякий раз, как в тексте встретятся выражения $f(0)$ или $f'(0)$, их надо определять по формулам (28) и (29).

После сделанных оговорок перейдем к формулировке и доказательству теорем.

VI. Теорема дифференцирования оригинала. Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad (30)$$

т. е. дифференцирование оригинала сводится к умножению на p его изображения и вычитанию $f(0)$.

В частности, если $f(0) = 0$, то

$$f'(t) \doteq pF(p). \quad (31)$$

Для доказательства запишем преобразование Лапласа для производной $f'(t)$:

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Интегрируя по частям и полагая $u = e^{-pt}$, $du = -pe^{-pt} dt$, $dv = f'(t) dt$, $v = f(t)$, получим

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Согласно условию роста оригинала, $|f(t)| \leq Me^{at}$; поэтому, если $\operatorname{Re} p > a$, то

$$|f(t) e^{-pt}| < Me^{(a-\operatorname{Re} p)t} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. Поэтому от первого слагаемого остается $-f(0)$, и окончательно

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),$$

что и требовалось доказать.

Применяя теорему повторно, получим

$$\begin{aligned} f''(t) &\doteq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\ f'''(t) &\doteq p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) = \\ &= p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0), \end{aligned}$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (32)$$

Самый простой случай — тот, когда все начальные значения функции и ее производных равны нулю:

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0;$$

тогда

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p), \quad (33)$$

т. е. при нулевых начальных значениях n -кратное дифференцирование оригинала сводится к умножению на p^n его изображения.

88. Подчеркнем, что условия, при которых теорема дифференцирования справедлива, существенны. Возьмем функцию $\eta(t - \tau)$, график которой изображен на рис. 96. Производная $\eta'(t - \tau)$ этой функции равна нулю во всех точках, кроме точки $t = \tau$, где сама функция разрывна и ее производная не существует. Так как

$$\eta(t - \tau) \doteq \frac{1}{p} e^{-p\tau},$$

то по теореме дифференцирования мы получили бы

$$\eta'(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \quad (*)$$

(при $t=0$ функция $\eta(t - \tau)$ равна нулю). В то же время, если оригинал (в данном случае — производная функции $\eta(t - \tau)$) во всех точках, кроме одной, равен нулю, то и интеграл Лапласа от него тоже равен нулю. Таким образом, соответствие $(*)$ не верно! Следовательно, наличие хотя бы одной точки, где оригинал разрывен, может привести к тому, что теорема становится неприменимой.

В настоящее время широкое развитие получила теория обобщенных функций, в которой вопросы, связанные с только что рассмотренным примером, трактуются с другой точки зрения. В этой теории часто встречается так называемая δ -функция, или импульсная функция Дирака, определяемая следующим образом:

$$1) \quad \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq \tau, \\ \infty, & \text{если } t = \tau; \end{cases}$$

$$2) \quad \int_a^b \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau),$$

где $[a, b]$ — любой интервал, заключающий внутри себя точку τ , а $f(t)$ — оригинал, непрерывный в точке τ . В теории обобщенных функций $\delta(t - \tau)$ рассматривается как производная сдвинутой единичной функции $\eta(t - \tau)$. (Функции называются «обобщенными», потому что их свойства противоречат определению функции, принятому в анализе.) Тогда

$$\eta'(t - \tau) = \delta(t - \tau) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau},$$

что совпадает с результатом, полученным формальным применением теоремы дифференцирования.

Теория обобщенных функций как раз и строится с таким расчетом, чтобы расширить область применимости основных теорем обычного анализа. Эта теория принесла очень большую пользу при решении ряда задач математики и физики ¹⁾.

89. Из теоремы дифференцирования вытекают два важных следствия.

1. Если $f'(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ — функция, аналитическая в бесконечности, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0). \quad (34)$$

Это следует из того, что (см. формулу (9)) любое изображение, аналитическое в бесконечности, стремится при $p \rightarrow \infty$ к нулю. Поэтому изображение производной $f'(t)$ — функция $pF(p) - f(0)$ — стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$, откуда и вытекает равенство (34).

Аналогично, если и $f''(t)$ — оригинал, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [p^2 F(p) - pf(0)] = f'(0).$$

Проверим формулу (34) на простых примерах.

Так,

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{и} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = 0 = \sin 0.$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{и} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{p}{p^2 + \omega^2} = 1 = \cos 0.$$

¹⁾ Краткие сведения об обобщенных функциях содержатся в книге А. Д. Мышкиса, Лекции по высшей математике, «Наука», 1967. Читатель, заинтересованный этими вопросами более серьезно, должен обратиться к специальной литературе.

2. Если $f'(t)$ является оригиналом и существует предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty). \quad (35)$$

Действительно, согласно (30)

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Перейдем к пределу при $p \rightarrow 0$ (законность перехода к пределу под знаком интеграла можно обосновать):

$$\lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(0)] = \int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0),$$

так как, по предположению, $f(\infty)$ существует. Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0) = f(\infty) - f(0),$$

откуда и следует (35). Заметим, что если $p = 0$ — правильная точка для $F(p)$, то очевидно, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = 0.$$

Поэтому наибольший интерес формула (35) представляет тогда, когда $p = 0$ — особая точка для изображения $F(p)$.

Приведенным следствием нужно пользоваться с большой осторожностью. Если с самого начала не проверить, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то можно прийти к неверным результатам. Так,

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{и} \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} = 0,$$

в то же время $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \omega t$ не существует, и следовательно, формула (35) здесь неприменима.

Для единичной функции $\eta(t)$ предел при $t \rightarrow \infty$ равен 1, формула (35) применима, и действительно,

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} = 1.$$

Если $f(t) = e^{at}$, то $F(p) = \frac{1}{p-a}$. При $a \neq 0$ точка $p=0$ правильная и

$$\{pF(p)\}_{p=0} = 0.$$

Если $a < 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0$, и формула (35) справедлива; если же $a > 0$, то оригинал при $t \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности и формула (35) теряет силу.

Рекомендуем читателю самостоятельно проверить, что если a — комплексное число, то формула (35) справедлива для функции e^{at} при $\operatorname{Re} a < 0$ и $a = 0$, и неприменима при $\operatorname{Re} a > 0$ или при $\operatorname{Re} a = 0$, $\operatorname{Im} a \neq 0$.

90. VII. Теорема интегрирования оригинала.

Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) = \int_0^t f(t) dt$, то

$$g(t) \doteq \frac{F(p)}{p}, \quad (36)$$

т. е. интегрирование оригинала в пределах от 0 до t приводит к делению изображения на p .

Прежде всего заметим, что $g'(t) = f(t)$ и $g(0) = 0$ (интеграл с одинаковыми нижним и верхним пределами). Поэтому, обозначая изображение $g(t)$ через $G(p)$, т. е. $g(t) \doteq G(p)$, и применяя теорему дифференцирования, получим

$$g'(t) = f(t) \doteq pG(p) - g(0) = pG(p).$$

Но так как $f(t) \doteq F(p)$, то $F(p) = pG(p)$, откуда

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Приведенные теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала оправдывают замечание, сделанное в конце предыдущего параграфа о том, что более сложным действиям над оригиналами (в данном случае — дифференцированию и интегрированию) соответствуют более простые действия над изображениями (умножение и деление на p и в первом случае вычитание постоянного числа $f(0)$).

Проверим теоремы VI и VII на простых примерах. Так, $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$; отсюда

$$(e^t)' = e^t \doteq p \frac{1}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

Исходя из соответствия $\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$, получим

$$(\cos t)' = -\sin t \doteq p \frac{p}{p^2+1} - 1 = -\frac{1}{p^2+1},$$

что опять-таки справедливо. Можно также записать, что

$\sin t = \int_0^t \cos t dt$, и, применив теорему интегрирования, снова

получить $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Вот более сложный пример: согласно формуле (17)

$$e^{at} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

Поэтому, дифференцируя левую часть и умножая правую часть на p , получим соответствие

$$e^{at} (a \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \doteq \frac{p\omega}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

которое можно также проверить, воспользовавшись формулами (17) и (18) и теоремой линейности.

91. Перейдем к теоремам дифференцирования и интегрирования изображений.

VIII. Теорема дифференцирования изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$-tf(t) \doteq F'(p), \quad (37)$$

т. е. дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $-t$. Формула (37) следует из правила диф-

ференцирования аналитической функции $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$,

о котором мы уже говорили раньше: чтобы найти производную $F'(p)$, т. е. производную по p от интеграла Лапласа, нужно вычислить интеграл от производной по p подынтегрального выражения

$$F'(p) = \int_0^\infty f(t) (-t) e^{-pt} dt.$$

Но это и означает, что

$$-tf(t) \doteq F'(p).$$

Применяя теорему несколько раз, последовательно найдем оригиналы для высших производных изображения $F(p)$:

$$\begin{aligned} t^2 f(t) &\doteq F''(p), \\ -t^3 f(t) &\doteq F'''(p) \end{aligned}$$

и, вообще,

$$(-1)^n t^n f(t) \doteq F^{(n)}(p). \quad (38)$$

Пользуясь формулой (38), легко найти изображения для степенных функций t^k при целых значениях k , которые мы раньше получали дифференцированием по параметру (теорема V).

Исходя из формулы $1 \doteq \frac{1}{p}$ и применяя (38), последовательно найдем $-t \doteq -\frac{1}{p^2}$, т. е. $t \doteq \frac{1}{p^2}$; $-t^2 \doteq -\frac{2}{p^3}$, т. е. $t^2 \doteq \frac{2}{p^3}$ и, вообще, $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$ (формула (26)).

IX. Теорема интегрирования изображения.

Если интеграл $\int_p^\infty F(z) dz$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z) dz, \quad (39)$$

т. е. интегрирование изображения в пределах от p до ∞ соответствует делению оригинала на t .

Эту теорему мы доказывать не будем и приведем лишь несколько примеров.

Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, а $\int_p^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arccotg} p$, то

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \operatorname{arccotg} p.$$

Применяя еще теорему VII, найдем, что

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \doteq \frac{\operatorname{arccotg} p}{p}.$$

Интеграл, стоящий слева, не выражается при помощи элементарных функций, и определяет неэлементарную функцию $\operatorname{Si}(t)$.

Из формул (5) и (8) следует

$$1 - e^{at} \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p-a}.$$

Имеем

$$\int_p^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-a} \right) dz = \ln \frac{z}{z-a} \Big|_p^\infty = \ln 1 - \ln \frac{p}{p-a} = \ln \frac{p-a}{p}.$$

Поэтому

$$\frac{1 - e^{at}}{t} \doteq \ln \frac{p-a}{p}.$$

Отметим, что теорему IX нельзя применять к формуле $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$, так как интеграл $\int_p^\infty \frac{dz}{z-a}$ расходится; при этом и функция e^{at}/t не будет оригиналом, так как она имеет бесконечный разрыв при $t=0$.

92. Теорема интегрирования изображения иногда позволяет совершать интересные преобразования несобственных интегралов, облегчающие их вычисление. Пусть

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt.$$

Если заранее предположить, что $\int_0^\infty \varphi(t) dt$ сходится, то

$$\Phi(0) = \int_0^\infty \varphi(t) dt. \quad (40)$$

Отметим, что $\Phi(0)$ может существовать и тогда, когда интеграл справа расходится. Так, если $\varphi(t) = e^t$, то $\Phi(p) = \frac{1}{p-1}$ и $\Phi(0) = -1$, в то время как $\int_0^\infty e^t dt$, очевидно, расходится. Если же

$\varphi(t) = e^{-t}$, то $\Phi(p) = \frac{1}{p+1}$; интеграл $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$ сходится и равен $\Phi(0) = 1$ ¹⁾.

Применим формулу (40), положив $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$ и считая, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ сходится,

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \Phi(0), \quad (*)$$

где $\Phi(p)$ — изображение для оригинала $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \Phi(p).$$

По формуле (39) это изображение равно $\int_p^{\infty} F(z) dz$, где $F(p)$ — изображение $f(t)$. Полагая $p=0$, найдем

$$\Phi(0) = \int_p^{\infty} F(z) dz|_{p=0} = \int_0^{\infty} F(z) dz.$$

Подставляя в равенство (*) вместо $\Phi(0)$ его значение, получаем искомое соотношение

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(z) dz, \quad (41)$$

где $f(t) \doteq F(p)$, и интеграл справа можно вычислить по положительной полуоси. Так, если считать известным, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

¹⁾ Это различие объясняется тем, что для оригинала e^{-t} полуплоскость абсолютной сходимости интеграла Лапласа ($\operatorname{Re} p > -1$) содержит точку $p=0$, а для оригинала e^t не содержит (полуплоскость $\operatorname{Re} p > 1$). Для соответствия $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ полуплоскость абсолютной сходимости $\operatorname{Re} p > 0$; точка $p=0$ лежит на ее границе, и формула (40) также неприменима: интеграл $\int_0^{\infty} \sin t dt$ расходится.

сходится, то, исходя из соответствия $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Точно так же, если предварительно доказать, что при $a > 0$ и $b > 0$ интеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ сходится, то по формуле (41) найдем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{z+a} - \frac{1}{z+b} \right) dz = \ln \frac{z+a}{z+b} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

93. Для того чтобы найти оригинал, соответствующий произведению изображений, познакомимся сначала с одним сравнительно простым действием над оригиналами — сверткой. Начнем с определения.

Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется интеграл

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Этот интеграл является функцией переменной t , которая входит в подынтегральное выражение и является также переменным верхним пределом интеграла. Свертка функций обычно обозначается символом $f * g$:

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (42)$$

Покажем, что выражение для свертки не зависит от порядка, в каком берутся функции $f(t)$ и $g(t)$ (как говорят, действие свертки коммутативно). В интеграле $\int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau$ сделаем подстановку $t-\tau = \tau_1$, тогда

$$\int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_t^0 g(t-\tau_1) f(\tau_1) (-d\tau_1) = \int_0^t f(\tau_1) g(t-\tau_1) d\tau_1.$$

Следовательно,

$$g * f = f * g. \quad (43)$$

Приведем примеры отыскания свертки двух функций. Пусть $f(t) = e^t$ и $g(t) = t$. Тогда

$$\int_0^t e^\tau (t - \tau) d\tau = t(e^t - 1) - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1,$$

т. е.

$$e^t * t = e^t - t - 1.$$

Читатель может проверить, что то же самое получится при вычислении $t * e^t = \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau$. Приведем еще два примера:

$$\sin t * t = \int_0^t (t - \tau) \sin \tau d\tau = -\sin t + t,$$

$$\cos t * t = \int_0^t (t - \tau) \cos \tau d\tau = -\cos t + 1.$$

Докажем, что если $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, то и их свертка также является оригиналом. Первые два свойства проверить легко, а для доказательства третьего воспользуемся тем, что существуют такие числа α_1 и α_2 , для которых $|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha_1 t}$ и $|g(t)| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}$. Если обозначить через α наибольшее из двух чисел α_1 и α_2 , то подынтегральная функция в свертке при любом τ ($0 \leq \tau \leq t$) не превосходит

$$|f(\tau)g(t - \tau)| \leq M_1 e^{\alpha \tau} M_2 e^{\alpha(t - \tau)} = K e^{\alpha t},$$

где $K = M_1 M_2$. По теореме об оценке интеграла

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right| < K e^{\alpha t} t < K e^{(\alpha+1)t},$$

так как $t < e^t$ при всех t . Поэтому свертка удовлетворяет и третьему условию. Теперь перейдем к формулировке соответствующего правила операционного исчисления.

Х. Теорема умножения изображений. Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то свертке функций $f * g$ соответствует произведение изображений

$$f * g \doteq F(p)G(p). \quad (44)$$

Доказательство этой теоремы несколько сложнее многих предыдущих. Прежде всего запишем интеграл Лапласа для свертки

$$f * g \doteq \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] e^{-pt} dt$$

и будем рассматривать его как двойной интеграл, распространенный по бесконечной области D , изображенной на рис. 107. Пределы изменения t от 0 до ∞ , а τ — от 0 до t .

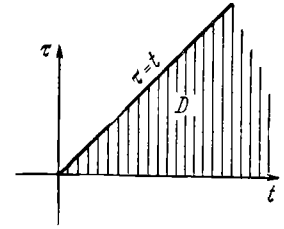


Рис. 107.

Изменим порядок интегрирования, т. е. произведем внешнее интегрирование по τ в пределах от 0 до ∞ , а внутреннее интегрирование по t в пределах от τ до ∞ :

$$\int_0^\infty dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) e^{-pt} d\tau = \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty f(\tau)g(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Во внутреннем интеграле справа произведем подстановку $t - \tau = t_1$, $dt = dt_1$, и вынесем множители $f(\tau)$ и $e^{-p\tau}$, как не зависящие от переменной интегрирования t_1 , за знак внутреннего интеграла. Тогда получится двойной интеграл

$$\int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1} dt_1,$$

который представляет произведение двух интегралов, так как внутренний интеграл не зависит от τ . Первый из них есть $F(p)$, а второй $G(p)$, а это и означает, что

$$f * g \doteq F(p)G(p).$$

Теорема доказана. Поскольку эта теорема будет применяться главным образом в приложениях, то мы ограничимся пока только ее проверкой на уже известных изображениях. На стр. 220 была вычислена свертка функций $e^t * t = e^t - t - 1$.

По теореме умножения должно быть $e^t * t \doteq \frac{1}{p^2(p-1)}$, и действительно, $e^t - t - 1 \doteq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}$. Свертке $\sin t * t$ должно соответствовать изображение $\frac{1}{p^2+1} \frac{1}{p^2}$. Проверка дает

$$\sin t * t \doteq -\sin t + t \doteq -\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

Позже нам понадобится специальный случай теоремы умножения. Именно, будем искать оригинал, соответствующий произведению $pF(p)G(p)$. Запишем это произведение в виде

$$pF(p)G(p) = [pF(p) - f(0)]G(p) + f(0)G(p).$$

Тогда первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f'(t)$ (теорема дифференцирования оригинала) и $g(t)$. Применяя теоремы умножения и линейности, получим

$$pF(p)G(p) \doteq f'(t) * g(t) + f(0)g(t).$$

Если записать свертку в развернутом виде, то

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &\doteq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau = \\ &= f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (45)$$

(последнее равенство написано на основании свойства коммутативности свертки). Формула (45) называется *интегралом Дюамеля*. В этой формуле можно поменять местами изображения $F(p)$ и $G(p)$, а следовательно, и оригиналы $f(t)$ и $g(t)$; тогда получатся две новые формулы, записать которые предоставляем читателю.

94. Подобно тому как произведению изображений соответствует свертка оригиналов, так и умножению оригиналов соответствует определенное действие над изображениями — свертка в комплексной области. Пусть

$$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p)$$

и $\operatorname{Re} p > \alpha$ — полуплоскость, в которой абсолютно сходятся оба интеграла Лапласа, определяющие данные изображения.

Сверткой двух изображений называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)G(p-z)dz, \quad (46)$$

где путь интегрирования — вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = \gamma > \alpha$ (рис. 108), а p — комплексная переменная, такая, что $\operatorname{Re} p > \gamma + \alpha$. Свертка (46) коммутативна, т. е. функции F и G можно поменять местами. Теперь сформулируем теорему.

XI. Теорема умножения оригиналов. Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)G(p-z)dz, \quad (47)$$

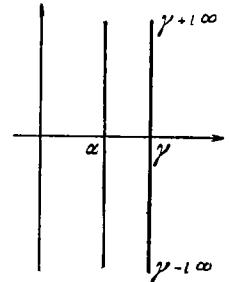


Рис. 108.

т. е. произведению оригиналов соответствует свертка изображений.

Доказательство этой теоремы мы не приводим (оно опирается на формулу обращения, которая будет рассматриваться только в следующем параграфе).

Важно отметить следующее: функции $F(z)$ и $G(z)$ аналитичны при $\operatorname{Re} z > \alpha$. Функция $G(p-z)$, где p фиксировано и таково, что $\operatorname{Re} p > \gamma + \alpha$, аналитична при $\operatorname{Re} z < \gamma$, потому что тогда $\operatorname{Re}(p-z) > \operatorname{Re} p - \gamma > \alpha$. Отсюда следует, что если $\operatorname{Re} p$ достаточно велико, то линия интегрирования разделяет особые точки функций $F(z)$ и $G(p-z)$: первые лежат левее ее, а вторые — правее.

Положив $g(t) = f(t)$, получим из (47)

$$[f(t)]^2 \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)F(p-z)dz. \quad (48)$$

Интеграл в правой части формулы (47) обычно стараются вычислить с помощью теоремы о вычетах. Приведем один простой пример. Известно, что $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ и $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$.

Вычислим по формуле (47) изображение произведения $e^t \sin t$ и убедимся, что придем к известному результату (первая из формул (17) при $a=1$ и $\omega=1$). Имеем

$$e^t \sin t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{z^2+1} \frac{1}{p-z-1} dz.$$

Сразу замечаем, что $a=1$, следовательно, $\gamma > 1$ и $\operatorname{Re} p > 1+\gamma$. Подынтегральная функция имеет при $z=\infty$ нуль третьего порядка; из доказанного на стр. 160 следует, что интеграл по любой дуге окружности $|z|=R$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. В области D_1 (рис. 109) подынтегральная функция имеет два полюса первого порядка: $z_1=i$ и $z_2=-i$. Полюс $z_3=p-1$ лежит правее прямой $\operatorname{Re} z=\gamma$, т. е. в области D_2 , так как $\operatorname{Re} z_3 = \operatorname{Re} p - 1 > 1 + \gamma - 1 = \gamma$.

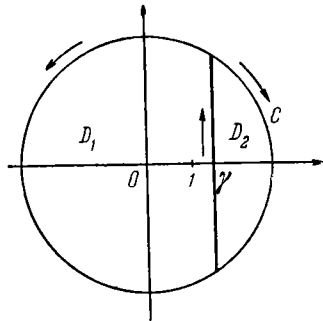


Рис. 109.

Применяя теорему о вычетах к контуру, ограничивающему область D_1 , и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)} &= \frac{1}{2i(p-i-1)} + \frac{1}{-2i(p+i-1)} = \\ &= \frac{1}{(p-1)^2+1}, \end{aligned}$$

т. е. как раз нужную формулу.

Еще проще было применить теорему о вычетах к контуру, ограничивающему область D_2 (прямая и дуга C), так как в D_2 лежит только один простой полюс $z_3=p-1$. Учитывая, что контур обходим здесь в отрицательном направлении, снова найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(p-z-1)} = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

95. Ранее было получено соответствие (формула (26))

$$t^n = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

где n — целое и положительное число. Значительно более сложным оказывается получить изображение оригиналов t^k , где k — любое положительное число (если $k < 0$, то функция t^k имеет бесконечный разрыв при $t=0$).

Сначала кратко познакомимся с одной очень важной функцией — *гамма-функцией Эйлера*. Она определяется несобственным интегралом

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (49)$$

который, как мы сейчас покажем, сходится при $x > 0$.

Пусть сначала $x \geq 1$. Воспользуемся тем, что степенная функция t^{x-1} с любым показателем степени $x-1$ при $t \rightarrow \infty$ растет медленнее, чем показательная функция e^{at} , где a — произвольное положительное число, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{at}} = 0$$

(это легко проверить при помощи правила Лопиталья). Значит, отношение $\frac{t^{x-1}}{e^{at}}$ во всяком случае ограничено; поэтому $t^{x-1} \leq M e^{at}$. Если выбрать $a < 1$, то

$$t^{x-1} e^{-t} \leq M e^{-(1-a)t} = M e^{-\beta t},$$

где $\beta = 1 - a > 0$. Подынтегральная функция положительна и

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq M \int_0^\infty e^{-\beta t} dt = M \left. \frac{e^{-\beta t}}{-\beta} \right|_0^\infty = \frac{M}{\beta}.$$

Это и означает, что интеграл (49) сходится.

Если $0 < x < 1$, то функция t^{x-1} обращается в бесконечность при $t=0$. Поэтому предварительно разобьем интеграл (49) на сумму несобственных интегралов

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Сходимость второго интеграла доказывается так же, как в случае $x \geq 1$, так как в интервале $[1, \infty)$ приведенные выше неравенства

остаются справедливыми. В первом же интеграле $e^{-t} < 1$ и поэтому

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt < \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{x}$$

(если $x \leq 0$, то этот интеграл расходится).

Итак, доказано, что интеграл (49) сходится при любом $x > 0$.

Предположим, что $x > 1$, и применим к интегралу (49) формулу интегрирования по частям, полагая $t^{x-1} = u$ и $e^{-t} dt = dv$:

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = -t^{x-1} e^{-t} \Big|_0^\infty + (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt.$$

Так как внеинтегральный член в правой части равенства обращается в нуль при $t = \infty$ и при $t = 0$, то мы получаем рекуррентную формулу

$$\Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1), \quad (50)$$

которая представляет важнейшее свойство гамма-функции. Пользуясь этой формулой, легко вычислим значения гамма-функции $\Gamma(x)$, когда x равно целому положительному числу n . Заметим предварительно, что

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1. \quad (51)$$

Далее, по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1) \Gamma(n-1) = (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) = \dots = \\ &= (n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \end{aligned}$$

Таким образом, для любого целого положительного числа n

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (52)$$

Вычислим еще часто встречающееся значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Совершая в интеграле, определяющем гамма-функцию, подстановку $t = u^2$, найдем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (*)$$

(Мы воспользовались значением интеграла Пуассона $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; см. [1], гл. VIII, п. 131.) Учитывая формулу (50), последовательно получим

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \dots$$

При других значениях x интеграл (49) может быть вычислен только приближенными методами, и для значений гамма-функции составлены специальные таблицы.

Теперь можно приступить к отысканию изображения функции t^k . По определению,

$$t^k \doteq \int_0^\infty t^k e^{-pt} dt.$$

Вычислим последний интеграл, считая для простоты, что p — действительное положительное число. Можно доказать, что получающаяся формула справедлива и при p комплексном, если $\operatorname{Re} p > 0$.

Сделаем подстановку $pt = t_1$, $p dt = dt_1$. Тогда

$$\int_0^\infty t^k e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{k+1}} \int_0^\infty t_1^k e^{-t_1} dt_1 = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}.$$

Следовательно,

$$t^k \doteq \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}. \quad (53)$$

При целых значениях k получается уже знакомая формула (26). Заметим еще, что при $-1 < k < 0$ функция t^k имеет бесконечный разрыв в точке $t=0$ и не является оригиналом. Однако правая часть формулы (53) имеет смысл и при этих значениях k . Поэтому функцию t^k при $-1 < k < 0$ мы будем считать как бы «особым» оригиналом, а ее «изображение» находить по формуле (53).

В частности, учитывая формулу (*), получим

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (54)$$

Можно доказать, что к этим «особым» оригиналам и изображениям применимы все теоремы операционного исчисления. Например, по теореме затухания

$$\frac{e^{at}}{\sqrt{\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p-a}}.$$

96. В заключение для удобства читателя перечислим еще раз все свойства (теоремы) операционного исчисления, сохранения прежние обозначения.

I. $Af(t) + Bg(t) \doteq AF(p) + BG(p)$ (теорема линейности).

II. $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$ ($\lambda > 0$) (теорема подобия).

III. $e^{at}f(t) \doteq F(p-a)$ (теорема затухания).

IV. $f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p)$ ($\tau > 0$) (теорема запаздывания).

V. Если $f(t, x) \doteq F(p, x)$, то $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}$ (теорема о дифференцировании по параметру).

VI. $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$ (теорема дифференцирования оригинала)

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

VII. $\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}$ (теорема интегрирования оригинала).

VIII. $tf(t) \doteq F'(p)$ (теорема дифференцирования изображения).

IX. $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_t^\infty F(p) dp$ (теорема интегрирования изображения).

X. $f * g = \int_0^\infty f(\tau) g(t-\tau) d\tau \doteq F(p) G(p)$ (теорема умножения изображений)

$pF(p)G(p) \doteq f'(t) * g(t) + f(0)g(t) = g'(t) * f(t) + g(0)f(t)$ (интеграл Дюамеля).

XI. $f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)G(p-z)dz$ (теорема умножения оригиналов).

В таблице 1 собраны формулы соответствия, полученные в настоящем параграфе. Рядом с номером формулы в скобках стоит номер, под которым эта формула впервые встретилась в тексте. Более подробные таблицы будут приведены в конце следующего параграфа, после того как мы рассмотрим теорему обращения, позволяющую по заданному изображению $F(p)$ находить соответствующий ему оригинал $f(t)$.

Таблица 1

Формулы соответствия

Номер формулы	Оригинал	Изображение
1 (4)	1	$\frac{1}{p}$
2 (9)	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3 (12)	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
4 (13)	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
5 (14)	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
6 (14)	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
7 (17)	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
8 (17)	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
9	$e^{at} \sin (\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + (p-a) \sin \varphi}{(p-a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{at} \cos (\omega t + \varphi)$	$\frac{(p-a) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p-a)^2 + \omega^2}$
11 (26)	t	$\frac{1}{p^2}$
12 (26)	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13 (25)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14 (27)	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
15 (27)	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$

Продолжение табл. 1

Номер формулы	Оригинал	Изображение
16	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
17	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
18	$t^k (k > -1)$	$\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$

§ 3. Теорема обращения

97. До сих пор, изучая соответствие $f(t) \doteq F(p)$, мы пользовались только интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

выражающим изображение $F(p)$ через оригинал $f(t)$. Напомним, что если $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, то интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p > \alpha$. Теперь мы приведем формулу, выражающую теорему обращения и позволяющую по заданному изображению $F(p)$ отыскивать оригинал $f(t)$.

Теорема обращения. Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ — ее изображением, то в любой точке t , где оригинал $f(t)$ непрерывен, имеет место формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (55)$$

где интегрирование производится по любой бесконечной прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа от $f(t)$ (см. рис. 108).

В связи с теоремой обращения заметим, что если нам легко проверить, является ли заданная функция $f(t)$ оригиналом, т. е. выполняются ли соответствующие три условия, то относительно произвольно заданной аналитической функции $F(p)$ нам заранее неизвестно, является ли она изображением.

Займемся прежде всего выяснением вопроса о том, при каких условиях функция $f(t)$, определенная формулой (55), является оригиналом, а затем уже наметим доказательство того, что $F(p)$ является ее изображением. (Полное доказательство теоремы требует значительно больших сведений из анализа и выходит за рамки настоящей книги.)

Вычисление интеграла (55) для произвольных аналитических функций $F(p)$ представляет большие трудности; мы ограничимся некоторыми частными случаями, играющими, однако, очень важную роль в приложениях. Именно, будем предполагать, что $F(p)$ — функция, аналитическая во всей комплексной плоскости p , за исключением конечного числа особых точек¹⁾, и удовлетворяющая условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (56)$$

При этом предполагается, что в бесконечно удаленной точке функция $F(p)$ — аналитическая.

Напомним, что согласно формуле (9) условие (56) есть необходимое условие того, что функция, аналитическая в бесконечно удаленной точке, является изображением. Выберем прямую интегрирования $\operatorname{Re} p = \gamma$ в интеграле (55) так, чтобы все особые точки функции $F(p)$ лежали левее этой прямой. Таким образом, правее этой прямой и на самой прямой, т. е. при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$, функция $F(p)$ особых точек не имеет. В этих предположениях интеграл (55) легко вычисляется на основании леммы Жордана (см. стр. 161). Так как эта лемма понадобится нам в несколько измененном виде, то сформулируем ее заново, по-прежнему не приводя доказательства²⁾.

Лемма Жордана. Пусть функция $F(p)$ стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Тогда интеграл

$$\int_{\mathcal{C}_R} F(p) e^{pt} dp,$$

¹⁾ Приводимый ниже результат верен и в более общем случае, однако для наших целей вполне достаточно формулировки в тексте.

²⁾ Если читатель сравнит приведенную формулировку с формулировкой, данной в п. 68, то он обнаружит их полное совпадение, произведя замену $p = iz$.

где $t > 0$, взятый по дуге C_R окружности $|p| = R$, такой, что на ней $\operatorname{Re} p < \gamma$ (рис. 110), стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ t > 0}} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (57)$$

Если $t < 0$, то стремится к нулю интеграл, взятый по дополнительной к C_R дуге C'_R , в точках которой $\operatorname{Re} p > \gamma$:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ t < 0}} \int_{C'_R} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (58)$$

Возьмем теперь контур, состоящий из отрезка AB прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ и дуги C_R , радиус которой выберем настолько большим, чтобы все особые точки $F(p)$ (а их по условию конечное число) попали внутрь рассматриваемого контура (см. рис. 110). По основной теореме о вычетах

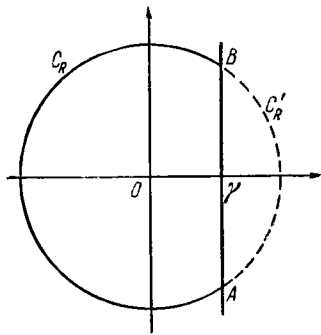


Рис. 110.

$$\begin{aligned} \int_{AB} F(p) e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = \\ = 2\pi i \sum \operatorname{Res} [F(p) e^{pt}; a_k], \end{aligned}$$

где a_k — особые точки функции $F(p)$. Если $t > 0$, то при $R \rightarrow \infty$ по лемме Жордана $\int_{C_R} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0$,

а интеграл по отрезку AB переходит в интеграл по всей бесконечной вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$. Разделив обе части равенства на $2\pi i$, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t) = \sum \operatorname{Res} [F(p) e^{pt}; a_k], \quad (59)$$

где a_k — все особые точки функции $F(p)$. Если же $t < 0$, то берем контур, состоящий из отрезка AB и дуги C'_R . Внутри этого контура особых точек нет и по теореме Коши

$$\int_{AB} F(p) e^{pt} dp + \int_{C'_R} F(p) e^{pt} dp = 0.$$

По лемме Жордана второй интеграл при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю; поэтому

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp = 0 \quad \text{при } t < 0,$$

т. е. $f(t) = 0$ при $t < 0$. Таким образом, функция $f(t)$ удовлетворяет второму из условий, наложенных на оригинал.

Первое и третье условия просто проверяются в том частном случае, когда все особые точки функции $F(p)$ — полюсы. (При сделанных предположениях $F(p)$ — рациональная функция. Доказательство этого факта мы приводить не будем.)

Вспоминая формулы для вычисления вычетов (см. § 2 гл. V), можно убедиться, что функция $f(t)$ при $t > 0$ представляет в этом случае линейную комбинацию показательных функций $e^{a_k t}$ и произведений $t^m e^{a_k t}$ (подробнее об этом будет сказано в п. 99), а любая из таких функций, разумеется, удовлетворяет всем условиям, наложенным на оригинал.

В случае, когда $F(p)$ имеет существенно особые точки, доказательство более сложно, и мы его не приводим.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $F(p) = \frac{1}{p}$. Найти $f(t)$.

Можно проверить, что все условия, налагаемые на функцию $F(p)$, выполняются, и функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad \gamma > 0,$$

является оригиналом. Подынтегральная функция имеет один простой полюс в точке $p = 0$ с вычетом, равным 1. Поэтому при $t > 0$ имеем $f(t) = 1$, а при $t < 0$ функция $f(t) = 0$. Мы получили единичную функцию $\eta(t)$, что и следовало ожидать.

Пример 2. Пусть $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$. Найти $f(t)$.

Применяя сразу формулу (59), получим при $t > 0$

$$f(t) = \operatorname{Res} \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + 1}, i \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + 1}, -i \right] = \frac{e^{it}}{2i} + \frac{e^{-it}}{-2i} = \sin t.$$

98. Приведем теперь схему доказательства теоремы обращения. Начнем с установленного выше соотношения

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp.$$

Если заменить t на $t - \tau$, где $\tau > 0$, то получим функцию $\eta(t - \tau)$:

$$\eta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp. \quad (60)$$

График функции $\eta(t - \tau)$ изображен на рис. 96. Положим в формуле (60) последовательно $\tau = \tau_k$ и $\tau = \tau_{k+1}$ и вычтем из первого равенства второе. Разность функций $\eta(t - \tau_k) - \eta(t - \tau_{k+1})$

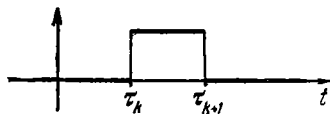


Рис. 111.

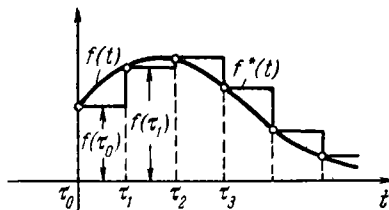


Рис. 112.

представляет импульс, изображенный на рис. 111. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau_k)} - e^{p(t-\tau_{k+1})}}{p} dp = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau_k, \\ 1, & \text{если } \tau_k < t < \tau_{k+1}, \\ 0, & \text{если } t > \tau_{k+1}. \end{cases} \quad (61)$$

Числитель подынтегральной функции преобразуем к следующему виду:

$$e^{p(t-\tau_k)} - e^{p(t-\tau_{k+1})} = e^{pt} e^{-p\tau_k} (1 - e^{-p(\tau_{k+1}-\tau_k)}) = e^{pt} e^{-p\tau_k} (1 - e^{-p\Delta\tau_k}),$$

где $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Далее, раскладывая $e^{-p\Delta\tau_k}$ в ряд, получим

$$\frac{1 - e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \frac{1 - 1 + p\Delta\tau_k - \frac{p^2 \Delta\tau_k^2}{2!} + \dots}{p} \approx \Delta\tau_k,$$

если считать $\Delta\tau_k$ малой величиной и отбросить все члены, содержащие $\Delta\tau_k$ в степенях выше второй; поэтому левая часть формулы (61) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} e^{-p\tau_k} \Delta\tau_k dp.$$

Пусть теперь $f(t)$ — произвольный оригинал. Заменим его ступенчатой функцией $f^*(t)$ (рис. 112), которую представим себе как сумму бесконечного числа импульсов в интервалах (τ_k, τ_{k+1}) . Высота каждого импульса равна $f(\tau_k)$ и его можно записать как

$$\frac{f(\tau_k)}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} e^{-p\tau_k} \Delta\tau_k dp.$$

Сумму таких импульсов, т. е. ступенчатую функцию $f^*(t)$, представим в виде

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} f(\tau_k) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} e^{-p\tau_k} \Delta\tau_k dp. \quad (62)$$

Заменим бесконечную сумму интегралов в формуле (62) интегралом от суммы (этот шаг мы не обосновываем). Вынося еще e^{pt} за знак суммы, получим

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta\tau_k \right) dp.$$

Если $\Delta\tau_k$ стремится к нулю, то величина τ_k будет пробегать все значения от 0 до ∞ . Следовательно, можно считать, что сумма, стоящая под знаком интеграла, будет стремиться к интегралу

$$\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

который как раз и является изображением $F(p)$ (и этот шаг оставлен нами без доказательства!) При этом ступенчатая функция $f^*(t)$ с уменьшением основания каждой ступеньки будет стремиться к функции $f(t)$, и мы окончательно получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

т. е. формулу (55).

Рекомендуем читателю сравнить приведенное рассуждение с тем, при помощи которого получается представление функции интегралом Фурье (см. [1], гл. XII, п. 207), и убедиться в их полной аналогии.

99. Применим формулу (59) к наиболее важному частному случаю, когда $F(p)$ — рациональная функция:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (63)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — многочлены, причем степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$. При этом условии

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A(p)}{B(p)} = 0,$$

т. е. равенство (56) соблюдается. Функция $F(p)$ имеет только конечное число особых точек. Эти точки являются нулями знаменателя $B(p)$ и, следовательно, полюсами самой функции $F(p)$. (Предполагается, что $A(p)$ и $B(p)$ не имеют общих корней, т. е. что числитель и знаменатель дроби (63) не имеют общих множителей, и дробь несократима.)

Согласно предыдущему функция $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ является изображением: соответствующий оригинал находится по формуле (59), в которой все особые точки a_k — полюсы. Применяя формулу для вычета в полюсе любого порядка, получим

$$\begin{aligned} \frac{A(p)}{B(p)} \doteq f(t) = \\ = \sum \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow a_k} \left[(p - a_k)^{n_k} \frac{A(p) e^{pt}}{B(p)} \right]^{(n_k - 1)}, \end{aligned} \quad (64)$$

где a_k — нули знаменателя $B(p)$, а n_k — их кратность. Дифференцирование совершается по комплексной переменной p при постоянном t . Формула (64) называется *формулой разложения* (или *теоремой разложения*).

При практическом использовании формулы (64) предел вычисляют следующим образом: знаменатель $B(p)$ содержит множитель $(p - a_k)^{n_k}$ и поэтому может быть представлен в виде

$$(p - a_k)^{n_k} B_1(p),$$

где $B_1(a_k) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{p \rightarrow a_k} \left[(p - a_k)^{n_k} \frac{A(p) e^{pt}}{(p - a_k)^{n_k} B_1(p)} \right]^{(n_k - 1)} = \left[\frac{A(p) e^{pt}}{B_1(p)} \right]_{p=a_k}^{(n_k - 1)}. \quad (65)$$

В том частном случае, когда все полюсы простые, формула (64) упрощается. Вычеты находятся по формуле (3) (стр. 150) и

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteq f(t) = \sum \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t}. \quad (66)$$

Если $p=0$ является корнем знаменателя, то $B(p)$ можно записать в виде $pB_1(p)$, где $B_1(0) \neq 0$ (все корни $B(p)$ простые!). Тогда

$$B'(p) = B_1(p) + pB_1'(p).$$

При этом $B'(0) = B_1(0)$, а $B'(a_k) = a_k B_1'(a_k)$, так как $B_1(a_k) = 0$, поскольку все ненулевые корни многочленов $B(p)$ и $B_1(p)$ совпадают. Выделяя из суммы (66) слагаемое, отвечающее нулевому корню, получим

$$\frac{A(p)}{pB_1(p)} \doteq f(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum \frac{A(a_k)}{a_k B_1'(a_k)} e^{a_k t}, \quad (67)$$

где сумма берется по всем ненулевым корням многочлена $B(p)$, т. е. по всем корням $B_1(p)$.

Отметим, что формула разложения иногда оказывается применимой и в гораздо более общем случае, когда изображение $F(p)$ имеет бесконечное число полюсов. Однако, как точная формулировка соответствующей теоремы, так и практическое ее применение выходят за рамки книги и мы отсылаем читателя к более специальной литературе [6], [7].

Пример 3. Пусть $F(p) = \frac{1}{p(p+a)(p+b)}$. Найти $f(t)$.

Здесь

$$A(p) = 1, B(p) = p(p+a)(p+b) \text{ и } B_1(p) = (p+a)(p+b).$$

Производная $B_1'(p) = (p+a) + (p+b)$. Корни знаменателя $p_1 = 0$, $p_2 = -a$, $p_3 = -b$. По формуле (67) получим

$$f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}.$$

Можно было бы получить оригинал $f(t)$, разложив $\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$ на простейшие дроби и найдя оригинал для каждой такой дроби. С другой стороны, обратно, формула (66) дает удобный способ разложения дроби $\frac{A(p)}{B(p)}$ на простейшие, при условии, что все корни знаменателя простые. Так, в приведенном примере, применив к найденному оригиналу теорему линейности и формулу (8), получим

$$F(p) = \frac{1}{ab} \frac{1}{p} + \frac{1}{a(a-b)} \frac{1}{p+a} + \frac{1}{b(b-a)} \frac{1}{p+b},$$

т. е.

$$\frac{1}{p(p+a)(p+b)} = \frac{1}{ab} \frac{1}{p} + \frac{1}{a(a-b)} \frac{1}{p+a} + \frac{1}{b(b-a)} \frac{1}{p+b}.$$

Следует заметить, что если нам известно разложение дроби $\frac{A(p)}{B(p)}$ на простейшие (см. [1], гл. V, п. 82), то оригинал находится сразу с помощью уже известных формул соответствия. Простейшим дробям $\frac{A}{p-a}$ соответствуют оригиналы Ae^{at} , а дробям $\frac{A}{(p-a)^k}$ — оригиналы $\frac{A}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at}$ (это следует из формулы 13 табл. 1).

Простейшую дробь $\frac{Mp+N}{p^2+Ap+B}$ представим в виде суммы

$$\frac{M\left(p+\frac{A}{2}\right)}{\left(p+\frac{A}{2}\right)^2+\Delta} + \frac{N-\frac{MA}{2}}{V\Delta} \frac{V\Delta}{\left(p+\frac{A}{2}\right)^2+\Delta},$$

где $\Delta = B - \frac{A^2}{4} < 0$ (если $\Delta > 0$, то знаменатель раскладывается на линейные множители), и применяем формулы 7 и 8 табл. 1, в которых нужно положить

$$\omega = V\Delta \quad \text{и} \quad a = -\frac{A}{2}.$$

Пример 4. Пусть

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p + 2}{(p-2)(p^2 + 4p + 8)}.$$

Представим $F(p)$ в виде суммы простейших дробей

$$\frac{3p^2 + 3p + 2}{(p-2)(p^2 + 4p + 8)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Mp+N}{p^2 + 4p + 8}$$

и найдем неопределенные коэффициенты (предоставляем это сделать читателю): $A=1$, $M=2$, $N=3$.

Записав $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{2(p+2)}{(p+2)^2+4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+2)^2+4},$$

переходим по указанным выше формулам к оригиналу

$$f(t) = e^{2t} + 2e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t.$$

(Можно было бы также воспользоваться формулами 11 и 12 табл. 2.)

Пример 5. Пусть $F(p) = \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3}$. Найти $f(t)$.

Здесь

$$A(p) = p+2, \quad B(p) = (p-1)^2 p^3.$$

Функция $F(p)$ имеет два полюса: полюс $p=0$ кратности 3 и $p=1$ кратности 2. Применяя формулу (65), находим вычеты в этих полюсах:

$$\frac{1}{2!} \left[\frac{(p+2)e^{pt}}{(p-1)^2} \right]_{p=0}'' = t^2 + 5t + 8.$$

(При вычислении производной удобно воспользоваться формулой Лейбница для производной произведения $(uv)' = u'v + 2u'v' + v''u$ (см. [1], гл. III, п. 54), положив $u = \frac{p+2}{(p-1)^2}$ и $v = e^{pt}$.)

Далее,

$$\left[\frac{(p+2)e^{pt}}{p^3} \right]_{p=1}' = (3t-8)e^t.$$

Таким образом,

$$\frac{p+2}{p^3(p-1)^2} = (3t-8)e^t + t^2 + 5t + 8.$$

Пример 6. Пусть

$$F(p) = \frac{p+c}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)},$$

где a , b и c — действительные числа. Знаменатель $B(p)$ имеет простые комплексно-сопряженные корни $\pm ai$ и $\pm bi$. Производная

$$B'(p) = 2p(p^2+b^2) + 2p(p^2+a^2).$$

Вычисляя вычеты, получим

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}, ai] = \frac{ai+c}{2ai(b^2-a^2)} e^{iat} = \frac{1}{2a(b^2-a^2)} (a-ci) e^{iat},$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[F(p)e^{pt}, -ai] &= \frac{-ai+c}{-2ai(b^2-a^2)} e^{-iat} = \\ &= \frac{1}{2a(b^2-a^2)} (a+ci) e^{-iat}. \end{aligned}$$

Заметим, что вычеты в комплексно-сопряженных полюсах $\pm ai$ также оказались комплексно-сопряженными. Их сумма равна удвоенной действительной части любого из них

$$2 \text{Re} \left[\frac{1}{2a(b^2-a^2)} (a-ci) e^{iat} \right] = \frac{1}{b^2-a^2} \left(\cos at + \frac{c}{a} \sin at \right).$$

Аналогично, сумма второй пары вычетов равна

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \left(\cos bt + \frac{c}{b} \sin bt \right),$$

и окончательно

$$f(t) = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[\cos at - \cos bt + c \left(\frac{\sin at}{a} - \frac{\sin bt}{b} \right) \right].$$

В связи с решением последнего примера сделаем к формуле (66) несколько замечаний. Чаще всего приходится иметь дело с функциями $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, у которых все коэффициенты многочленов $A(p)$ и $B(p)$ — действительные числа (именно так было в примере 6). Тогда, как известно, комплексные корни многочлена $B(p)$ (если они есть) попарно сопряжены: наряду с комплексным корнем a_k имеется и корень \bar{a}_k . Поскольку все коэффициенты действительны, то комплексные величины $A(a_k)$ и $A(\bar{a}_k)$, $B'(a_k)$ и $B'(\bar{a}_k)$, $e^{a_k t}$ и $e^{\bar{a}_k t}$ будут также сопряжены друг с другом (предлагаем читателю это проверить). Следовательно, слагаемые в сумме (66), отвечающие комплексно-сопряженным корням a_k и \bar{a}_k , сопряжены, и их сумма равна удвоенной действительной части любого из слагаемых:

$$\frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t} + \frac{A(\bar{a}_k)}{B'(\bar{a}_k)} e^{\bar{a}_k t} = 2 \operatorname{Re} \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t}.$$

Разбивая сумму (66) на две, получим (напоминаем, что все корни $B(p)$ считаются простыми):

$$f(t) = \sum \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t} + 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t}, \quad (68)$$

где первая сумма распространена на все действительные корни $B(p)$, а вторая — на все комплексные корни с положительной (для определенности) мнимой частью.

Слагаемые второй суммы формулы (68) можно представить в ином виде. Если $a_k = \gamma_k + i\beta_k$, то $e^{a_k t} = e^{\gamma_k t} (\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t)$. Полагая для краткости $\frac{A(a_k)}{B'(a_k)} = M_k + iN_k$, запишем

$$2 \operatorname{Re} \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t} = 2e^{\gamma_k t} [M_k \cos \beta_k t - N_k \sin \beta_k t].$$

Если $\alpha_k = 0$, т. е. корень a_k — чисто мнимый, то ему соответствует тригонометрическая функция

$$2 [M_k \cos \beta_k t - N_k \sin \beta_k t].$$

Допустим, что все действительные корни знаменателя $B(p)$ отрицательны, а все действительные части комплексных корней неположительны (или отрицательны, или равны нулю). Как раз с таким случаем обычно приходится иметь дело в теории колебаний. Тогда действительным корням ($\beta_k = 0$) соответствуют затухающие аperiodические колебания, комплексным корням с отрицательной действительной частью — затухающие гармонические колебания и чисто мнимым корням ($\alpha_k = 0$) — незатухающие гармонические колебания. Если есть нулевой корень, то ему соответствует постоянное отклонение. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ все слагаемые формулы (68), кроме тех, которые соответствуют нулевому и чисто мнимым корням, стремятся к нулю. При больших значениях t слагаемые, стремящиеся к нулю, роли не играют. Если их отбросить, то оставшиеся члены характеризуют установившийся колебательный процесс. Картина резко меняется, если среди корней $B(p)$ есть корни с положительной действительной частью (или просто положительные). Слагаемые, отвечающие таким корням, содержат множитель $e^{\alpha_k t}$ ($\alpha_k > 0$), стремящийся к бесконечности¹⁾. Колебательная система в этом случае, как говорят, теряет устойчивость. Подробно эти вопросы будут рассматриваться в разделе, посвященном теории устойчивости.

100. В заключение этого параграфа приведем таблицу, в которой собраны оригиналы для наиболее часто встречающихся дробно-рациональных изображений. Таблица 2 построена по следующему принципу: сначала идут рациональные функции $\frac{A(p)}{B(p)}$, у которых знаменатель $B(p)$ — многочлен первой

¹⁾ Если среди корней имеются кратные чисто мнимые корни или кратный нулевой корень, то им также соответствуют неограниченные слагаемые: например, если $F(p) = \frac{1}{p^2}$, то $f(t) = t$, или, если $F(p) = \frac{1}{(p-i)^2}$, то $f(t) = te^{it}$.

степени, затем второй степени и т. д. Во всех случаях в числителях стоят многочлены $A(p)$, степени которых меньше степеней знаменателя. Как правило, многочлен $B(p)$ уже считается разложенным на линейные или квадратичные множители. Более сложные примеры соответствия между оригиналами и изображениями, в частности изображения некоторых специальных функций, часто встречающихся в задачах математической физики, будут рассмотрены в § 3 гл. VIII.

Отметим, что существуют гораздо более подробные таблицы соответствия для преобразования Лапласа. Можно указать таблицы в книгах: Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, «Наука», 1965; В. А. Диткин и А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», 1965; В. А. Диткин и А. П. Прудников, Справочная математическая библиотека (СМБ), Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961. При пользовании двумя последними книгами следует иметь в виду, что там операционное соответствие основано на несколько ином преобразовании — преобразовании Лапласа — Карсона, определяемом формулой

$$f(t) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

и отличающемся от преобразования Лапласа множителем p . Если изображение для оригинала $f(t)$ взято из таблиц преобразования Карсона (обозначим его через $F_K(p)$), то чтобы получить требуемое преобразование Лапласа $F(p)$, надо его разделить на p :

$$F(p) = \frac{F_K(p)}{p}.$$

В более старых курсах электротехники часто пользовались преобразованием Карсона, свойства которого совершенно аналогичны свойствам изученного нами преобразования Лапласа.

В настоящее время предпочитают иметь дело с преобразованием Лапласа, главным образом благодаря его тесной связи с преобразованием Фурье, которое мы рассмотрим в § 4.

Таблица 2

Оригиналы для дробно-рациональных изображений

Номер формулы	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
2	$\frac{1}{1+ap}$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}$
3	$\frac{1}{p(p-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
4	$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
5	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
6	$\frac{b+cp}{p(p-a)}$	$-\frac{b}{a} + \left(c + \frac{b}{a}\right) e^{at}$
7	$\frac{p}{(p-a)^2}$	$(1+at) e^{at}$
8	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$
9	$\frac{b+cp}{p^2+a^2}$	$c \cos at + \frac{b}{a} \sin at$
10	$\frac{b+cp}{p^2-a^2}$	$c \operatorname{ch} at + \frac{b}{a} \operatorname{sh} at$
11	$\frac{1}{p^2+ap+b}$	
	$\Delta = b - \frac{a^2}{4} > 0,$	$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \sin \sqrt{\Delta} t$
	$\Delta = b - \frac{a^2}{4} < 0,$	$\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t$
	$\Delta = b - \frac{a^2}{4} = 0,$	$te^{-\frac{at}{2}}$

Продолжение табл. 2

Номер фор- мулы	Изображение	Оригинал
12	$\frac{p}{p^2 + ap + b}$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} > 0,$	$e^{-\frac{at}{2}} \left(\cos \sqrt{\Delta} t - \frac{a}{2\sqrt{\Delta}} \sin \sqrt{\Delta} t \right) =$ $= \sqrt{\frac{b}{\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \sin (\sqrt{\Delta} t + \varphi);$ $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{a}$
	$\Delta = b - \frac{a^2}{4} < 0,$	$e^{-\frac{at}{2}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{-\Delta} t - \right.$ $\left. - \frac{a}{2\sqrt{-\Delta}} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t \right)$
	$\Delta = b - \frac{a^2}{4} = 0$	$e^{-\frac{at}{2}} \left(1 - \frac{at}{2} \right)$
13	$\frac{1}{p^2 (p-a)}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - 1 - at)$
14	$\frac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{e^{at} - [1 + (a-b)t] e^{bt}}{(a-b)^2}$
15	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)} +$ $+ \frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
16	$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$
17	$\frac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t] e^{bt}}{(a-b)^2}$
18	$\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)} +$ $+ \frac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
19	$\frac{p}{(p-a)^4}$	$\left(t + \frac{1}{2} at^2 \right) e^{at}$

Продолжение табл. 2

Номер фор- мулы	Изображение	Оригинал
20	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$
21	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)}$	$\frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1)$
22	$\frac{1}{(p+b)(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2 + b^2} \left(e^{-bt} - \cos at + \frac{b}{a} \sin at \right)$
23	$\frac{(p+b)^2}{p(p^2 + a^2)}$	$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos at + 2b \sin at$
24	$\frac{1}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{at}{\sqrt{2}} \sin \frac{at}{\sqrt{2}} - \right.$ $\left. - \operatorname{sh} \frac{at}{\sqrt{2}} \cos \frac{at}{\sqrt{2}} \right)$
25	$\frac{1}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\operatorname{ch} at - \sin at)$
26	$\frac{p}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^2} \sin \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{at}{\sqrt{2}}$
27	$\frac{p}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$
28	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$
29	$\frac{1}{(p^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$
30	$\frac{1}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\sin bt}{b} - \frac{\sin at}{a} \right)$
31	$\frac{1}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\operatorname{sh} at}{a} - \frac{\operatorname{sh} bt}{b} \right)$
32	$\frac{1}{(p^2 - a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{1}{a^2 + b^2} \left(\frac{\operatorname{sh} at}{a} - \frac{\sin bt}{b} \right)$
33	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$
34	$\frac{p}{(p^2 - a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \operatorname{sh} at$

Продолжение табл. 2

Номер фор- мулы	Изображение	Оригинал
35	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{a^4} \left(1 - \cos at - \frac{at}{2} \sin at \right)$
36	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{a^4} \left(1 - \operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at \right)$
37	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\cos at}{a^2} - \frac{\cos bt}{b^2} \right)$
38	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\operatorname{ch} at}{a^2} - \frac{\operatorname{ch} bt}{b^2} \right)$
39	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5} [(3 - a^2 t^2) \sin at - 3at \cos at]$
40	$\frac{1}{(p^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5} [(3 + a^2 t^2) \operatorname{sh} at - 3at \operatorname{ch} at]$
41	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^3}$	$\frac{t}{8a^3} (\sin at - at \cos at)$
42	$\frac{p}{(p^2 - a^2)^3}$	$\frac{t}{8a^3} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at).$

§ 4. Преобразование Фурье

101. В этом параграфе мы укажем на другой пример интегрального преобразования функции $f(t)$, также играющего важную роль в приложениях. Начнем с известного читателю вопроса о разложении функции в ряд Фурье. Если функция $f(t)$ определена в интервале $(-\pi, \pi)$ и имеет кусочно-непрерывную производную, то ее можно представить в виде суммы ряда Фурье, который мы запишем в комплексной форме (см. [1], гл. XII, п. 204):

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

$$\text{где } c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (69)$$

В случае произвольного интервала $(-l, l)$ разложение записывается так:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}}, \quad (70)$$

где

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{\pi n t}{l}} dt. \quad (71)$$

Каждая из функций $e^{\pm i \frac{\pi n t}{l}}$ ($n=1, 2, \dots$) периодична и, как легко проверит читатель, имеет период $T = \frac{2l}{n}$.

Поэтому сумма $\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}}$ является периодической функцией с периодом $T = 2l$ и чтобы разложение (70) было справедливо на всей оси $0t$, нужно считать, что функция $f(t)$ периодически продолжена на всю числовую ось.

Напомним еще, что в точках разрыва функции $f(t)$ сумма ряда Фурье равна полусумме предельных значений $f(t)$ при приближении аргумента к точке разрыва слева и справа. Если значения функции $f(t)$ на концах основного интервала $(-l, l)$ не равны между собой: $f(-l) \neq f(l)$, то при периодическом продолжении функции точки $\pm l$ становятся точками разрыва и поэтому сумма ряда Фурье в этих точках равна

$$\frac{f(-l) + f(l)}{2}.$$

Разложение в ряд Фурье с точки зрения физики можно трактовать как представление периодического процесса в виде суммы гармонических колебаний. Выражение для гармоники с частотой $\frac{\pi n}{l}$ (n -й гармоники) мы получаем, взяв сумму членов разложения, отвечающих значениям $\pm n$ и учитывая, что из формулы, определяющей c_n , следует, что $c_{-n} = \bar{c}_n$:

$$\frac{1}{2} \left(c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}} + c_{-n} e^{-i \frac{\pi n t}{l}} \right) = \operatorname{Re} \left(c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}} \right) = |c_n| \cos \left(\frac{\pi n t}{l} - \psi_n \right),$$

где $\psi_n = \arg c_n$, т. е. $c_n = |c_n| e^{-i\psi_n}$. Так как $c_n = a_n - ib_n$, где a_n и b_n — обычные коэффициенты Фурье, то $\operatorname{tg} \psi_n = \frac{b_n}{a_n}$.

Последовательность комплексных чисел c_n называется *спектральной последовательностью* функции $f(t)$; последовательность действительных чисел $|c_n|$ — ее *амплитудным спектром* и последовательность ψ_n — *фазовым спектром*.

Мы особенно хотим подчеркнуть, что если известна функция $f(t)$, то формулой (71) полностью определена ее спектральная последовательность, и наоборот, если задана спектральная последовательность c_n , то функция $f(t)$ может быть восстановлена по формуле (70).

Таким образом, каждой функции $f(t)$ (разумеется, удовлетворяющей условиям разложимости в ряд Фурье) ставится в соответствие определенная последовательность комплексных чисел — ее спектральная последовательность, и наоборот.

Если применить терминологию, принятую в операционном исчислении, то функция $f(t)$ играет роль оригинала, а ее спектральная последовательность — роль изображения.

102. Приведем в качестве примера применения такого соответствия следующую задачу. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение (\dot{x} означает производную $\frac{dx}{dt}$)

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t), \quad (72)$$

где a_1 и a_2 — постоянные, а $f(t)$ — периодическая функция; для сокращения записи примем, что период $T = 2\pi$. Требуется найти частное решение уравнения (72) тоже периодическое, того же периода. Функцию $f(t)$ запишем в виде ряда Фурье, считая, что известна ее спектральная последовательность. Тогда

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (73)$$

Известно (см. [1], гл. X, п. 171), что если правая часть линейного дифференциального уравнения равна сумме нескольких функций, то частное решение такого уравнения можно искать в виде суммы частных решений уравнений с той же левой частью, но с правыми частями, соответственно равными отдель-

ным слагаемым правой части данного уравнения. Учитывая это, найдем сначала частное решение уравнения

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = c_n e^{int}, \quad (74)$$

имеющее вид $A_n e^{int}$. Дважды дифференцируем функцию $A_n e^{int}$, подставляем в уравнение (74) и сокращаем на e^{int} :

$$-n^2 A_n + a_1 i n A_n + a_2 A_n = c_n;$$

отсюда

$$A_n = \frac{c_n}{-n^2 + a_2 + i a_1 n}. \quad (75)$$

Читателя не должно смущать, что частное решение $A_n e^{int}$ представляет комплексную функцию переменной t . Сгруппировав слагаемые, отвечающие индексам $\pm n$, мы получим решение в действительной форме.

Легко видеть, что комплексные числа A_n представляют спектральную последовательность искомого частного решения, т. е. что это решение записывается в виде

$$x_q = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{int}. \quad (76)$$

При этом мы должны еще доказать, что полученный ряд (76) сходится. Это очень легко сделать в предположении, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$$

абсолютно сходится. Из формулы (75) следует, что

$$|A_n| = \frac{|c_n|}{\sqrt{(a_2 - n^2)^2 + a_1^2 n^2}},$$

откуда ясно, что при больших значениях $|n|$ имеет место неравенство $|A_n| < |c_n|$. По признаку сравнения заключаем,

что ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ сходится абсолютно, а следовательно, абсолютно сходится и ряд (76), так как $|e^{int}| = 1$. Более сложными рассуждениями можно установить, что сходимость ряда (76) имеет место и в более общих случаях. Отметим еще

что формула (75) может потерять смысл для какого-либо $n=k$ только в случае

$$a_1=0 \text{ и } a_2=k^2;$$

тогда уравнение (74) примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

и частное решение, соответствующее слагаемым с индексами $\pm k$, уже не имеет вида $A_k e^{ik t}$ (случай резонанса). Соответствующие изменения решения в этом случае предоставляем сделать читателю самостоятельно.

103. Рассмотренный пример играет очень важную роль при изучении процессов в колебательных контурах под воздействием периодической несинусоидальной электродвижущей силы. Как известно, дифференциальное уравнение для тока $i(t)$ в колебательном контуре имеет вид

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = v(t), \quad (77)$$

где R — сопротивление, L — индуктивность, C — емкость контура и $v(t)$ — электродвижущая сила.

Дифференцируя обе части уравнения (77) по t , получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} v'(t). \quad (78)$$

Будем считать, что $v(t)$ имеет период $T=2\pi$ и

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{int}, \quad (79)$$

т. е. что E_n — спектральная последовательность напряжения. Тогда легко получить выражения для спектральной последовательности *установившегося тока* — частного решения, имеющего вид

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{int}.$$

Название установившийся ток объясняется тем, что общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0; \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Как легко видеть, корни λ_1 и λ_2 либо отрицательны (если $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$), либо являются комплексными числами с отрицательной действительной частью (если $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$). В обоих случаях модули $|e^{\lambda_1 t}|$ и $|e^{\lambda_2 t}|$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ и в цепи остается только *вынужденный ток*, который и характеризует установившийся процесс (это полностью соответствует замечанию на стр. 241).

Если $v(t)$ задано разложением (79), то уравнение (77) примет вид (мы предполагаем, что ряд (79) можно почленно дифференцировать):

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{inE_n}{L} e^{int}.$$

Сначала отыскиваем решение вида $I_n e^{int}$ для уравнения, в правой части которого стоит одно слагаемое суммы: $\frac{inE_n}{L} e^{int}$.

По формуле (75), в которой надо положить $c_n = \frac{inE_n}{L}$, $a_1 = -\frac{R}{L}$ и $a_2 = \frac{1}{LC}$, получим

$$I_n = \frac{inE_n}{L \left(-n^2 + \frac{1}{LC} + \frac{R}{L} in \right)} = \frac{E_n}{R + i \left(Ln - \frac{1}{Cn} \right)}. \quad (80)$$

Пользуясь разложением (70), читатель легко проверит, что если период $T=2l$ (а не 2π), то в последней формуле надо n заменить на $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$. Если с учетом этого записать формулу (80) в виде

$$I_n = \frac{E_n}{R + i \left(L\omega_n - \frac{1}{C\omega_n} \right)}, \quad (81)$$

то она приобретает вид закона Ома для постоянного тока. Разумеется, надо помнить, что E_n и I_n — это не напряжение и ток, а комплексные числа, представляющие спектральные последовательности напряжения и тока. Выражение, стоящее в знаменателе (81), называется *комплексным сопротивлением* контура и обычно обозначается Z_n :

$$Z_n = R + i \left(L\omega_n - \frac{1}{C\omega_n} \right). \quad (82)$$

В отличие от цепи постоянного тока, комплексное сопротивление зависит от частоты ω_n соответствующей гармоники. Таким образом, зная спектральную последовательность E_n напряжения, мы при помощи формулы (81) находим спектральную последовательность установившегося тока, а следовательно, и сам ток:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{i\omega_n t}.$$

104. Перейдем теперь к случаю, когда $f(t)$ — непериодическая функция, заданная на всей оси $0t$, и будем считать, что она удовлетворяет следующим условиям:

1. В любом конечном интервале функция $f(t)$ может быть разложена в ряд Фурье.

2. Существует несобственный интеграл от абсолютной величины функции $f(t)$, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ сходится.

Тогда функцию $f(t)$ можно представить в виде *интеграла Фурье*, который мы запишем в комплексной форме (см. [1], гл. XII, п. 209):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (83)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (84)$$

Так же как и для рядов Фурье, в точках разрыва функции $f(t)$ (они обязательно первого рода) интеграл Фурье

равен полусумме предельных значений слева и справа:

$$\frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2},$$

где t_0 — точка разрыва, $f(t_0 - 0)$ — предельное значение слева и $f(t_0 + 0)$ — предельное значение справа.

Если каждой периодической функции, как указано выше, ставилась в соответствие ее спектральная последовательность, то теперь непериодической функции $f(t)$ мы поставим в соответствие комплексную функцию $F(\omega)$, которую будем называть *спектральной функцией* или *преобразованием Фурье* функции $f(t)$.

Формула (84) позволяет по функции $f(t)$ найти ее спектральную функцию $F(\omega)$, а формула (83), наоборот, по спектральной функции $F(\omega)$ восстановить исходную функцию $f(t)$.

Функция $|F(\omega)|$ называется *амплитудным спектром* (или *амплитудной характеристикой*), а

$$\psi(\omega) = -\arg F(\omega)$$

— *фазовым спектром*. При этом

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\psi(\omega)}.$$

Такая запись принята по аналогии с рядами Фурье, где комплексный коэффициент $c_n = a_n - ib_n = |c_n| e^{-i\psi_n}$ (см. стр. 248).

Из формулы (84) следует, что $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ (функция $f(t)$ принимает только действительные значения). Поэтому $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$, т. е. амплитудный спектр есть четная функция. Так как $\arg F(-\omega) = -\arg F(\omega)$, то фазовый спектр есть нечетная функция.

Говорят, что периодическая функция имеет *дискретный спектр* (ей соответствует спектральная последовательность), а непериодическая функция имеет *непрерывный спектр* (ей соответствует спектральная функция).

С точки зрения физики это означает, что рассматриваемый процесс уже нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными частотами $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, теперь для его построения необходимы гармонические колебания всех частот.

Вернемся снова к дифференциальному уравнению (72):

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t),$$

и будем теперь считать, что $f(t)$ — непериодическая функция, для которой известна ее спектральная функция $F(\omega)$. Частное решение уравнения

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = F(\omega) e^{i\omega t},$$

при любом фиксированном ω имеющее вид $A(\omega) e^{i\omega t}$, найдем так же, как это сделано на стр. 249. При этом формула (75) заменится следующей:

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 + a_2 + ia_1 \omega}. \quad (85)$$

Если рассматривать правую часть уравнения (72), функцию $f(t)$, как «сумму» всех ее составляющих $F(\omega) e^{i\omega t}$ (поделенную на 2π), то и частное решение будет аналогичной «суммой» составляющих $A(\omega) e^{i\omega t}$. При этом, разумеется, слово «сумма», поставленное в кавычки, означает предельный переход от суммы по дискретным значениям ω_n к интегралу по непрерывно изменяющемуся параметру ω (именно такой предельный переход совершается при переходе от ряда Фурье к интегралу Фурье). Таким образом, мы нашли спектральную функцию искомого частного решения $A(\omega)$, а по формуле (83) можем восстановить и само это решение:

$$x_{\text{ч}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (86)$$

Так же как и раньше, докажем абсолютную сходимость интеграла (86) при условии, что абсолютно сходится интеграл от функции $F(\omega)$ и $a_1 \neq 0$. (Последнее означает, что ни при каком значении ω знаменатель в формуле (85) не обращается в нуль, что соответствует отсутствию резонанса.)

Действительно, при этих условиях $A(\omega)$ определено при всех значениях ω и

$$|A(\omega)| = \frac{|F(\omega)|}{\sqrt{(a_2 - \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2}} < |F(\omega)|$$

при достаточно больших значениях $|\omega|$.

Обращаясь к физической иллюстрации полученного решения, устанавливаем полную аналогию с тем, что было сказано в п. 103. Разница только в том, что теперь установившийся ток будет слагаться не из дискретных гармоник, а из гармоник с непрерывно меняющейся частотой. Если раньше мы заменяли напряжение $v(t)$ суммой гармоник, то теперь запишем, что

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $E(\omega)$ — спектральная функция напряжения. Считая возможным дифференцирование под знаком интеграла, получим

$$v'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega.$$

Для отыскания спектральной функции тока ищем решение уравнения

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{E(\omega) i\omega}{L},$$

имеющее вид $I(\omega) e^{i\omega t}$. Внося соответствующие изменения в формулу (85), получим аналог формулы (80):

$$I(\omega) = \frac{E(\omega)}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{E(\omega)}{Z(\omega)}, \quad (87)$$

где $Z(\omega)$ — комплексное сопротивление.

Спектральная функция тока найдена. По формуле (83) ток равен

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega)}{Z(\omega)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (88)$$

При этой аналогии надо только иметь в виду, что если при периодическом процессе $|I_n|$ давал амплитуду тока отдельной гармоники, то при непериодическом процессе $|I(\omega)|$ представляет закон распределения амплитуд в зависимости от частоты ω . Так как теперь нельзя выделить отдельную гармонику, то нельзя говорить и об ее амплитуде

можно говорить лишь о гоке, представляющем совокупность гармоник, частоты которых заполняют некоторый интервал.

105. Установим теперь связь между преобразованиями Лапласа и Фурье. Для этого рассмотрим сначала *одностороннее* преобразование Фурье. При этом преобразовании функция $f(t)$ считается равной нулю при $t < 0$. Тогда формула (84) приобретает вид

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Правая часть в точности совпадает с интегралом Лапласа, если в последнем положить $p = i\omega$, т. е. считать комплексную переменную p чисто мнимой. Следует, однако, иметь в виду, что преобразование Лапласа применяется для функций, удовлетворяющих условию (см. стр. 191)

$$|f(t)| \leq Me^{at},$$

в то время как для существования одностороннего преобразования Фурье требуется сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt \quad (89)$$

(первые два условия, которым удовлетворяют оригиналы, совпадают с соответствующими условиями при преобразовании Фурье).

Ясно, что последнее условие (сходимость интеграла) накладывает на функцию $f(t)$ гораздо более жесткие ограничения, чем условие быстроты ее роста. Даже для таких простых и часто встречающихся функций, как единичная функция $\eta(t)$, $\sin t$, $\cos t$, не говоря уже о степенных функциях t , t^2 , ..., интеграл (89) является расходящимся:

$$\int_0^{\infty} 1 dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} t dt = \infty;$$

геометрически ясно, что интегралы $\int_0^{\infty} |\sin t| dt$ и $\int_0^{\infty} |\cos t| dt$ также расходятся. В то же самое время все эти функции

имеют изображение по Лапласу¹⁾. Дело в том, что модуль подынтегральной функции при преобразовании Лапласа

$$|f(t) e^{-pt}| = |f(t)| e^{-\sigma t} \quad (\sigma = \operatorname{Re} p)$$

отличается от модуля $|f(t)|$ быстро убывающим при $\sigma > 0$ множителем $e^{-\sigma t}$, который и обеспечивает абсолютную сходимость интеграла Лапласа. Если в условии 3) оригинала считать, что постоянная $\alpha < 0$, то

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt < M \int_0^{\infty} e^{\alpha t} dt = M \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = -\frac{M}{\alpha},$$

так как при $\alpha < 0$ функция $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае функция $f(t)$ имеет как преобразование Лапласа, так и преобразование Фурье (одностороннее). Условие $\alpha < 0$ означает, что мнимая ось принадлежит области сходимости интеграла Лапласа. Но тогда в формуле обращения (55)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

можно положить $\gamma = 0$, $p = i\omega$, $dp = i d\omega$ и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (90)$$

Мы получили формулу обращения для преобразования Фурье. Несущественное различие полученной формулы и формулы (83) (вместо $F(\omega)$ стоит $F(i\omega)$) объясняется тем, что для точного соответствия обозначений преобразование Фурье следовало бы писать в виде $F(i\omega)$, считая в интеграле Лапласа p чисто мнимой величиной. Часто так и поступают.

Таким образом, можно сказать, что если оригинал $f(t)$ при преобразовании Лапласа дополнительно удовлетворяет условию сходимости интеграла (89), то для него существует и преобразование Фурье, и все свойства последнего немедленно получаются из свойств преобразования Лапласа при замене

¹⁾ Рассмотрение дифференциальных уравнений и связанных с ними задач электротехники в случаях, когда правая часть уравнения (72) не допускает преобразования Фурье, но имеет преобразование Лапласа, будет произведено в следующей главе.

комплексной переменной p на чисто мнимую величину $i\omega$. В частности, так будет всегда, когда $\alpha < 0$ или когда оригинал $f(t)$ отличен от нуля только на некотором конечном интервале, скажем $(0, T)$, а при всех $t > T$ он равен нулю (при этом $\int_0^\infty |f(t)| dt = \int_0^T |f(t)| dt$).

106. Воспользуемся установленной связью между преобразованиями Фурье и Лапласа, чтобы вывести важное для приложений соотношение, являющееся аналогом формулы Парсеваля для рядов Фурье. Напомним сначала эту формулу.

Пусть функция $f(t)$ в интервале $(-l, l)$ представлена рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}}.$$

Умножим обе части равенства на $f(t)$ и проинтегрируем в пределах от $-l$ до l :

$$\int_{-l}^l f^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-l}^l f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{\pi n t}{l}} dt. \quad (91)$$

Считая возможным почленное интегрирование ряда в правой части равенства и применяя формулу (71) для коэффициентов ряда Фурье, получим

$$\int_{-l}^l f^2(t) dt = \frac{l}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}$$

Деля на $l/2$ и учитывая, что $c_n c_{-n} = c_n \bar{c}_n = |c_n|^2$, мы приходим к формуле Парсеваля¹⁾:

$$\frac{2}{l} \int_{-l}^l f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (92)$$

¹⁾ Так как $|c_{-n}| = |c_n|$, то правую часть можно записать и так: $c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Правая часть формулы (92) более симметрична и поэтому предпочтительнее.

Пусть теперь $f(t)$ — непериодическая функция, заданная на интервале $(0, \infty)$ и имеющая преобразование Фурье. По предыдущему, если преобразование Лапласа функции $f(t)$ есть $F(p)$, то ее преобразование Фурье запишется как $F(i\omega)$. Применим теорему умножения оригиналов в том частном случае, когда оригиналы совпадают (формула (48), стр. 223):

$$f^2(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z) F(p-z) dz.$$

Так как мнимая ось принадлежит теперь полуплоскости сходимости интеграла Лапласа (это есть условие существования преобразования Фурье), то можно положить $\gamma = 0$. Заменяя еще $z = i\omega$, $dz = i d\omega$, получим

$$f^2(t) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) F(p-i\omega) d\omega,$$

где $F(i\omega)$ — преобразование Фурье функции $f(t)$. Предположим еще, что $\int_0^\infty f^2(t) dt$ сходится, и применим формулу (40), полагая $\varphi(t) = f^2(t)$ (тогда $\Phi(p)$ — изображение $f^2(t)$); получим

$$\int_0^\infty f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) F(-i\omega) d\omega.$$

Замечая, наконец, что $F(-i\omega) = \overline{F(i\omega)}$, окончательно получим

$$\int_0^\infty f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega \quad (93)$$

(формула Парсеваля для преобразования Фурье).

В заключение отметим, что важность преобразования Фурье заключается в его тесной связи с физическими представлениями; в то же время применение преобразования Лапласа оказывается более удобным благодаря возможности использования теории аналитических функций комплексного переменного.

107. Приведем некоторые примеры преобразований Фурье.

Пример 1. Пусть $\alpha > 0$ и

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Как было отмечено, функция $f(t)$ имеет преобразование Фурье. Сначала находим преобразование Лапласа:

$$e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p + \alpha}.$$

Заменяя теперь p на $i\omega$, получим преобразование Фурье

$$F(\omega) = \frac{1}{i\omega + \alpha}.$$

Отсюда амплитудный спектр: $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ и фазовый спектр

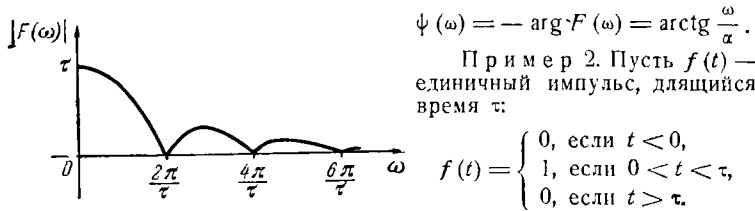


Рис. 113.

Пример 2. Пусть $f(t)$ — единичный импульс, длящийся время τ :

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < t < \tau, \\ 0, & \text{если } t > \tau. \end{cases}$$

Согласно формуле (21) преобразованием Лапласа этой функции

служит $\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})$. Так как при всех $t > \tau$ функция $f(t)$ равна нулю, то ее преобразование Фурье существует и может быть получено из преобразования Лапласа заменой p на $i\omega$:

$$F(\omega) = \frac{1 - e^{-i\tau\omega}}{i\omega} = e^{-\frac{i\tau\omega}{2}} \frac{e^{\frac{i\tau\omega}{2}} - e^{-\frac{i\tau\omega}{2}}}{i\omega} = \frac{2 \sin \frac{\tau\omega}{2}}{\omega} e^{-\frac{i\tau\omega}{2}}.$$

Амплитудный спектр функции выражается формулой

$$|F(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\tau\omega}{2}}{\omega} \right|;$$

при $\omega = 0$ он имеет значение $|F(0)| = \tau$. График его изображен на рис. 113. При построении фазового спектра $\psi(\omega)$ приходится

быть осторожным в выборе значения $\arg F(\omega)$. По определению, $\psi(\omega) = -\arg F(\omega)$. Поэтому если $0 < \frac{\tau\omega}{2} < \pi$, то $\sin \frac{\tau\omega}{2} > 0$ и $\psi(\omega) = \frac{\tau\omega}{2}$. Если же $\pi < \frac{\tau\omega}{2} < 2\pi$, то $\sin \frac{\tau\omega}{2} < 0$ и $\psi(\omega) = \frac{\tau\omega}{2} - \pi$.

Дальше функцию $\psi(\omega)$ следует продолжить периодически, и мы получим разрывную функцию, график которой изображен на рис. 114.

Пример 3. Пусть $f(t) = \sin t$ на интервале $(0, \pi)$ и $f(t) = 0$ при всех остальных t (синусоидальный импульс; см. рис. 103). Для такой функции

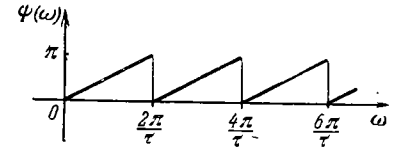


Рис. 114.

преобразованием Лапласа служит функция $\frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1}$, а преобразованием Фурье

$$F(\omega) = \frac{1 + e^{-i\pi\omega}}{1 - \omega^2} = \frac{e^{\frac{i\pi\omega}{2}} + e^{-\frac{i\pi\omega}{2}}}{1 - \omega^2} e^{-\frac{i\pi\omega}{2}} = \frac{2 \cos \frac{\pi\omega}{2}}{1 - \omega^2} e^{-\frac{i\pi\omega}{2}}.$$

Отсюда

$$|F(\omega)| = \left| \frac{2 \cos \frac{\pi\omega}{2}}{1 - \omega^2} \right|.$$

При $\omega = 1$ функция $|F(\omega)|$ не определена, и мы ищем предел:

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} |F(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 1} \left| \frac{2 \cos \frac{\pi\omega}{2}}{1 - \omega^2} \right| = \lim_{\omega \rightarrow 1} \left| \frac{-2 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi\omega}{2}}{-2\omega} \right| = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, при $0 < \omega < 3$ фазовый спектр $\psi(\omega) = \frac{\pi\omega}{2}$, так как дробь $\frac{2 \cos \frac{\pi\omega}{2}}{1 - \omega^2}$ положительна. При $3 < \omega < 5$ эта дробь отрицательна и

$$\psi(\omega) = \frac{\pi\omega}{2} - \pi;$$

при $5 < \omega < 7$ имеем

$$\psi(\omega) = \frac{\pi\omega}{2} - 2\pi \text{ и т. д.}$$

¹⁾ Мы не берем $\psi(\omega) = \frac{\omega\tau}{2} + \pi$, так как тогда $\psi(\omega) > 2\pi$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

1. Найти изображения оригиналов:

а) $\sin^2 t$; б) $\cos^2 \omega t$; в) $\sin^3 t$; г) $\cos^4 t$.

У к а з а н и е. Пользуясь формулой Эйлера, выразить степени синуса и косинуса через тригонометрические функции кратных дуг.

2. Найти изображения оригиналов:

а) $\sin 2t \sin 4t$; б) $\sin t \cos 3t$; в) $\cos 2t \cos 4t$.

У к а з а н и е. Преобразовать произведения тригонометрических функций в суммы.

3. Пользуясь теоремой затухания (смещения), найти изображения оригиналов:

а) $e^{-t} \sin 2t \sin 4t$; б) $e^{-2t} \operatorname{ch} 3t$; в) $\operatorname{ch} 2t \cos t$; г) $\operatorname{sh} at \sin \omega t$.

4. Пользуясь теоремами дифференцирования и интегрирования изображений, найти изображения оригиналов:

а) $\frac{\sin 4t}{t}$; б) $t^2 \cos t$; в) $\frac{\sin^2 t}{t}$; г) $t^2 \operatorname{ch} at$.

5. Найти изображения оригиналов:

а) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < a, \\ -1, & \text{если } a < t < 2a, \\ 0, & \text{если } t > 2a; \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 2-t, & \text{если } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{если } t > 2; \end{cases}$ в) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < a, \\ t-a, & \text{если } a < t < b, \\ b-a, & \text{если } t > b. \end{cases}$

6. Проверить формулы 14, 17, 20, 22, 25, 35, 42 табл. 2.

7. Пользуясь табл. 2 или формулами разложения, найти оригиналы для следующих изображений:

а) $\frac{p^2}{(p-1)^3}$; б) $\frac{p^2}{(p^2-a^2)^2}$; в) $\frac{p^3}{(p^2+4)^2}$; г) $\frac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$.

ГЛАВА VIII

ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Решение дифференциальных уравнений

108. Одним из важнейших применений операционного исчисления, связанных с преобразованием Лапласа, является решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Возьмем неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t) \quad (1)$$

и найдем его частное решение при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (2)$$

Операционный метод решения такой задачи состоит в том, что мы считаем как искомую функцию $x(t)$, так и правую часть $f(t)$ оригиналами и переходим от уравнения (1), связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения $X(p)$ и $F(p)$. Для этого воспользуемся теоремой о дифференцировании оригинала:

$$\dot{x}(t) \doteq p X(p) - x_0,$$

$$\ddot{x}(t) \doteq p^2 X(p) - p x_0 - \dot{x}_0.$$

Применяя также теорему линейности, перейдем в уравнении (1) от оригиналов к изображениям:

$$p^2 X(p) - p x_0 - \dot{x}_0 + a_1 [p X(p) - x_0] + a_2 X(p) = F(p). \quad (3)$$

В результате мы получили уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$. (Рекомендуем читателю еще раз обратиться к тексту на стр. 197.) Решая его, находим

$$X(p) (p^2 + a_1 p + a_2) = F(p) + p x_0 + \dot{x}_0 + a_1 x_0$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{p x_0 + \dot{x}_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (4)$$

Итак, изображение искомого решения найдено. Осталось по таблицам, или, пользуясь теоремой обращения, по известному изображению $X(p)$ найти соответствующий ему оригинал $x(t)$; он и будет являться искомым решением.

Операторное решение $X(p)$ по формуле (4) имеет особенно простой вид при нулевых начальных условиях:

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0. \quad (5)$$

В этом случае

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (6)$$

Изложенный метод применим к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами любого порядка.

Пусть дано уравнение n -го порядка:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f(t) \quad (7)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (8)$$

Применяя преобразование Лапласа и пользуясь общей формулой (32) теоремы дифференцирования, получим

$$(p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} \dot{x}_0 - \dots - x_0^{(n-1)}) + a_1 (p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - \dots - x_0^{(n-2)}) + \dots + a_{n-1} (p X(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p),$$

где $x(t) \doteq X(p)$ и $f(t) \doteq F(p)$. Отсюда

$$X(p) = \frac{F(p) + \Phi(p)}{L(p)}, \quad (9)$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$, а $\Phi(p)$ — многочлен степени не выше, чем $(n-1)$, с коэффициентами, зависящими от начальных значений $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$. Если, в частности, все начальные значения равны нулю:

$$x_0 = \dot{x}_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0,$$

то $\Phi(p) = 0$ и

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)}. \quad (10)$$

Переходя в формулах (9) или (10) от изображений к оригиналам, получаем искомые решения.

При практическом решении вовсе нет нужды пользоваться готовыми формулами (9) или (10). Нужно только помнить метод их получения. Заметим еще, что если в формулах (4) или (9) считать начальные значения x_0, \dot{x}_0, \dots не заданными, а произвольными постоянными, то мы получим не частное решение, а общее.

К сказанному сделаем только одно замечание. Так как мы правую часть уравнения (7), а также решение $x(t)$ считаем оригиналами, то при $t < 0$ их нужно считать равными нулю. Таким образом, мы получаем, вообще говоря, решение $x(t)$ только при $t \geq 0$. Начальные значения $x(0), \dot{x}(0), \dots$ представляют при этом предельные значения соответственно $x(t), \dot{x}(t), \dots$ при $t \rightarrow 0$ справа. Как мы уже отмечали, при изучении физических процессов нас, как правило, интересует только течение процесса начиная с некоторого момента времени, который мы и принимаем за $t = 0$.

Впрочем, при решении конкретных примеров очень часто получающееся решение оказывается справедливым при всех значениях t (конечно, если и правая часть уравнения определена при всех t), хотя это и требует проверки. Перейдем к примерам.

В предлагаемых примерах мы рекомендуем в качестве упражнения проводить самостоятельно все необходимые выкладки.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{3t},$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.$$

Полагая $x(t) \doteq X(p)$ и находя изображение правой части $e^{3t} \doteq \frac{1}{p-3}$, составляем операторное уравнение

$$p^2 X(p) - 3p X(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3},$$

откуда

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p^2-3p+2)} = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Функция $X(p)$ имеет полюсы первого порядка в точках $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ (корни знаменателя). Применяя формулу разложения

(66) гл. VII для случая простых полюсов, находим решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}.$$

Функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению при всех значениях t .

При практическом решении дифференциальных уравнений операционным методом рекомендуется, конечно, пользоваться готовыми таблицами соответствия между оригиналами и изображениями. Чем эти таблицы подробнее, тем меньше придется делать дополнительных вычислений и преобразований. В частности, решение примера 1 можно проверить по формуле 15 табл. 2.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^3 e^{-2t}$$

при начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2.$$

Найдем прежде всего изображение правой части. Так как $t^3 \doteq \frac{3!}{p^4}$ (формула 12 табл. 1), то по теореме затухания

$$t^3 e^{-2t} \doteq \frac{3!}{(p+2)^4}.$$

Учитывая, что

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) - 1 \quad \text{и} \quad \ddot{x}(t) \doteq p^2X(p) - p - 2,$$

составим операторное уравнение:

$$p^2 X(p) - p - 2 + 4pX(p) - 4 + 4X(p) = \frac{3!}{(p+2)^4};$$

отсюда

$$X(p) = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^3}.$$

Оригинал для первого слагаемого находим по формуле, указанной выше. Так как $\frac{5!}{p^6} \doteq t^5$, то

$$\frac{3!}{(p+2)^6} \doteq \frac{3!}{5!} t^5 e^{-2t}$$

(теорема затухания!).

Второе слагаемое запишем в виде

$$\frac{p+2+4}{(p+2)^3} = \frac{1}{p+2} + \frac{4}{(p+2)^2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t}, \quad \frac{4}{(p+2)^2} \doteq 4te^{-2t},$$

и окончательно

$$x(t) = e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{1}{20} t^5 e^{-2t} = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{t^5}{20} \right).$$

Советуем читателю убедиться, что если решать данное уравнение обычными методами, то это потребует гораздо более длинных выкладок.

Пример 3. Найти решение уравнения

$$x^{IV} + 2\ddot{x} + x = \sin t$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \ddot{\ddot{x}}(0) = 0.$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2 + 1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{2}{(p^2 + 1)^3}.$$

Для нахождения оригинала пользуемся общей формулой разложения. Так как коэффициенты в выражении для $X(p)$ действительны, то вычеты в полюсах $\pm i$ — сопряженные комплексные числа. Вычисляем поэтому вычет только в точке $p = i$ (см. стр. 240):

$$\text{Res} \left[X(p) e^{pt}; i \right] = \frac{1}{2!} \left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2} \right]_{p=i}' = \frac{e^{it}}{16} \left[-3t + i(t^2 - 3) \right].$$

Взяв удвоенную действительную часть полученного выражения, находим $x(t)$:

$$x(t) = -\frac{3}{8} t \cos t + \frac{3-t^2}{8} \sin t.$$

Результат можно проверить по формуле 39 табл. 2.

Покажем на одном примере, как следует поступать, если начальные значения заданы не в точке $t = 0$.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$\ddot{x} + x = e^t$$

при начальных условиях $x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 0$.

Положим $t = \tau + 1$ и $x(t) = x(\tau + 1) = x_1(\tau)$. Уравнение и начальные условия перепишутся теперь в виде

$$\ddot{x}_1 + x_1 = e^{\tau+1} \quad \left(\text{здесь } \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{d\tau}, \quad \ddot{x}_1 = \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} \right),$$

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

(значению $t=1$ соответствует $\tau=0$). Переходя к операторному уравнению, получим

$$x_1(\tau) \doteq X(p), \quad \dot{x}_1(\tau) \doteq pX(p) - 1, \quad \ddot{x}_1(\tau) \doteq p^2X(p) - p$$

и

$$p^2X(p) - p + X(p) = \frac{e}{p-1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{e}{(p^2+1)(p-1)} + \frac{p}{p^2+1}.$$

Возвращаясь к оригиналам, найдем (соответствующие выкладки читатель проделает самостоятельно или воспользуется формулой 22 табл. 2):

$$x_1(\tau) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos \tau - \frac{e}{2} \sin \tau + \frac{e}{2} e^\tau.$$

Чтобы получить решение заданного уравнения, осталось заменить τ на $t-1$:

$$x(t) = \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos(t-1) - \frac{e}{2} \sin(t-1) + \frac{e^t}{2}.$$

109. До сих пор мы рассматривали дифференциальные уравнения, у которых правая часть была непрерывной функцией и задавалась единым аналитическим выражением. Иногда встречаются и такие случаи, когда правая часть уравнения на различных интервалах задается разными аналитическими выражениями (например, является функцией ступенчатого вида) и имеет точки разрыва. Если правая часть является оригиналом, то операционный метод решения применим. Остановимся на некоторых особенностях решений таких уравнений на примере уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t). \quad (1)$$

Полагая $x(t) \doteq X(p)$, мы дважды применяем теорему о дифференцировании оригинала. Согласно замечаниям, сделанным перед этой теоремой (см. стр. 209—210), как само решение $x(t)$, так и его первая производная $\dot{x}(t)$ должны быть функциями непрерывными. Поэтому из уравнения следует, что вторая производная $\ddot{x}(t)$ будет иметь разрывы в тех же точках, что и правая часть $f(t)$. Разумеется, если $f(t)$ непрерывна, то непрерывна и $\ddot{x}(t)$. Поэтому функция $x(t)$ будет удовлетворять уравнению (1) во всех точках, где правая часть $f(t)$ непрерывна. В точках же разрыва $f(t)$ проверку произ-

водить не имеет смысла, так как разрывна $\ddot{x}(t)$. Перейдем к примерам и начнем с уравнения первого порядка.

Пример 5. Найти при $t > 0$ решение уравнения

$$\dot{x} + x = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{если } t > 2, \end{cases}$$

при нулевом начальном условии $x(0) = 0$. График правой части уравнения есть «ступенька», изображенная на рис. 98.

Учитывая начальное условие и формулу (21) гл. VII, составим операторное уравнение

$$pX(p) + X(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p(p+1)}.$$

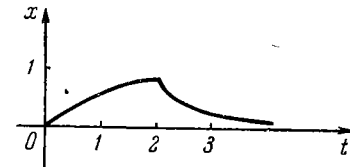


Рис. 115.

Для отыскания $x(t)$ заметим, что $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, и следовательно, $\frac{1}{p(p+1)} \doteq 1 - e^{-t}$. Для изображения $\frac{e^{-2p}}{p(p+1)}$ оригинал найдем по теореме запаздывания:

$$\frac{e^{-2p}}{p(p+1)} \doteq (1 - e^{-(t-2)}) \eta(t-2) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < 2, \\ 1 - e^{-(t-2)}, & \text{если } t > 2. \end{cases}$$

Окончательно,

$$x(t) = 1 - e^{-t} - (1 - e^{-(t-2)}) \eta(t-2),$$

или

$$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & \text{если } 0 < t < 2, \\ e^{-(t-2)} - e^{-t} = e^{-t}(e^2 - 1), & \text{если } t > 2. \end{cases}$$

Как легко проверить, $x(t)$ — непрерывная функция, но ее производная в точке $t=2$ имеет разрыв:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \dot{x}(t) = \frac{1}{e^2}, \quad \lim_{t \rightarrow 2^+} \dot{x}(t) = -\frac{e^2 - 1}{e^2}.$$

График функции $x(t)$ при $t=2$ имеет угловую точку (рис. 115).

Если бы этот пример мы решали без помощи операционного исчисления, то должны были бы сначала найти решение уравнения $\dot{x} + x = 1$ при условии $x(0) = 0$. Это будет функция $x = 1 - e^{-t}$. Затем найти общее решение уравнения $\dot{x} + x = 0$ — функцию $x = Ce^{-t}$ и подобрать C так, чтобы $(1 - e^{-t})_{t=2} = (Ce^{-t})_{t=2}$. При этом условии решение $x(t)$ будет непрерывным при переходе через точку $t=2$. Так как $C = e^2 - 1$, то мы снова получаем

решение $x(t) = e^{-t}(e^2 - 1)$ в интервале $(2, \infty)$. При большом числе точек разрыва, а также в случаях уравнений высших порядков этот способ приводит к весьма громоздким выкладкам, которых мы и избегаем, пользуясь операционным методом.

Пример 6. Рассмотрим еще пример решения уравнения второго порядка. Найдите при $t > 0$ решение уравнения

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 1, & \text{если } 1 < t < 3, \\ 0, & \text{если } t > 3 \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Правая часть дифференциального уравнения — та же «ступенька», что и в примере 5, но запаздывающая на $\tau = 1$. Поэтому операторное уравнение примет вид

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p} e^{-p},$$

или

$$X(p) = \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p(p^2 + 1)}.$$

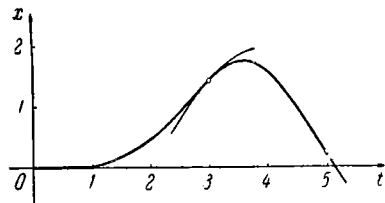


Рис. 116.

Как и в предыдущем примере, сначала находим оригинал

для $\frac{1}{p(p^2 + 1)}$. По формуле 20 табл. 2 имеем

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \doteq 1 - \cos t.$$

(это можно сразу получить и без таблицы, заметив, что $\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$). Тогда по теореме запаздывания

$$\frac{e^{-p}}{p(p^2 + 1)} \doteq [1 - \cos(t-1)] \eta(t-1), \quad \frac{e^{-3p}}{p(p^2 + 1)} \doteq [1 - \cos(t-3)] \eta(t-3).$$

Окончательное решение $x(t)$ таково:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 1 - \cos(t-1), & \text{если } 1 < t < 3, \\ -\cos(t-1) + \cos(t-3), & \text{если } t > 3. \end{cases}$$

Предоставляем читателю проверить, что в точках разрыва правой части $t=1$ и $t=3$ решение $x(t)$ и его производная $\dot{x}(t)$ непрерывны, а $\ddot{x}(t)$ в этих же точках имеет разрывы. Схематический график функции $x(t)$ приведен на рис. 116. При построении этого графика учтено, что при $t=3$ графики функций $1 - \cos(t-1)$ и

$\cos(t-3) - \cos(t-1) = 2 \sin 1 \sin(t-2)$ имеют общую касательную.

Пример 7. Приведем в заключение еще один пример, в котором правая часть представляет единичный синусоидальный импульс (см. рис. 103). Найдите при $t > 0$ решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} \sin t, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{если } t > \pi, \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Операторное решение имеет вид

$$X(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(1 + p^2)(p^2 + \omega^2)}.$$

Пусть сначала $\omega^2 \neq 1$. Тогда по формуле 30 табл. 2 имеем

$$\frac{1}{(1 + p^2)(p^2 + \omega^2)} \doteq \frac{\sin \omega t - \omega \sin t}{\omega(1 - \omega^2)},$$

и по теореме запаздывания

$$\frac{e^{-\pi p}}{(1 + p^2)(p^2 + \omega^2)} \doteq \frac{\sin \omega(t - \pi) - \omega \sin(t - \pi)}{\omega(1 - \omega^2)} \eta(t - \pi).$$

Таким образом, уравнение имеет решение

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega t - \omega \sin t}{\omega(1 - \omega^2)}, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ \frac{2 \cos \frac{\omega \pi}{2} \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{\omega(1 - \omega^2)}, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$$

Интересно отметить, что если ω равно нечетному числу, то при $t > \pi$ имеем $x(t) = 0$.

Пусть $\omega^2 = 1$ (случай резонанса). Тогда по формуле 28 табл. 2

$$\frac{1}{(1 + p^2)^2} \doteq \frac{\sin t}{2} - \frac{t \cos t}{2}.$$

Снова применяя теорему запаздывания, найдем

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sin t - t \cos t}{2}, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ -\frac{\pi \cos t}{2}, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$$

(То же самое можно получить, перейдя в решении для $\omega \neq 1$ к пределу при $\omega \rightarrow 1$.)

Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в справедливости полученных решений и построить их графики.

110. Покажем теперь, как при решении дифференциальных уравнений применяется теорема умножения и, в частности, интеграл Дюамеля.

Введем сначала сокращенную запись линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Именно, будем символом $L[x]$ обозначать левую часть уравнения (7)

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x; \quad (11)$$

$L[x]$ называется *линейным дифференциальным оператором n -го порядка*. Числа (или функции, если речь идет об уравнениях с переменными коэффициентами) a_1, a_2, \dots, a_n называются *коэффициентами оператора*.

Из самого определения следует, что

$$L[C_1 x_1 + C_2 x_2] = C_1 L[x_1] + C_2 L[x_2], \quad (12)$$

т. е. что *оператор от линейной комбинации функций равен линейной комбинации операторов от этих функций*. Отсюда, кстати, и происходит название — *линейный оператор*. Неоднородное уравнение сокращенно запишется в виде

$$L[x] = f(t). \quad (13)$$

Смысл применения теоремы умножения будет заключаться в том, что если нам известно решение уравнения (13) при какой-то одной правой части, то мы получим возможность с помощью свертки отыскивать решение при любой другой правой части. Особенно удобно начинать со случая, когда $f(t) \equiv 1$:

$$L[x] = 1. \quad (14)$$

Начальные условия будем считать нулевыми:

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (15)$$

Соответствующее решение обозначим через $x_1(t)$, а его изображение — через $X_1(p)$. Операторное уравнение примет вид

$$X_1(p) p^n + a_1 X_1(p) p^{n-1} + \dots + a_n X_1(p) = \frac{1}{p},$$

или

$$X_1(p) L(p) = \frac{1}{p}, \quad (16)$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ — *характеристический многочлен*. Сокращенная форма записи уравнения с помощью оператора L особенно удобна тем, что позволяет совершенно одинаково записывать как левую часть дифференциального уравнения, так и его характеристический многочлен. При этом коэффициенты оператора и многочлена совпадают.

Так как мы считаем, что решение $x_1(t)$, а следовательно, и его изображение $X_1(p)$ уже известны, то из формулы (16) можно найти

$$L(p) = \frac{1}{p X_1(p)}. \quad (17)$$

Возьмем теперь уравнение с любой правой частью $L[x] = f(t)$ при тех же нулевых начальных условиях. Его операторное уравнение $X(p) L(p) = F(p)$, где $F(p) \doteq f(t)$. Находя отсюда $X(p)$ и заменяя $L(p)$ по формуле (17), получим

$$X(p) = p X_1(p) F(p).$$

Согласно формуле (45) гл. VII искомое решение $x(t)$ равно

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (18)$$

так как $x_1(0) = 0$ в силу начальных условий, или

$$x(t) = x_1(t) f(0) + \int_0^t f'(\tau) x_1(t - \tau) d\tau. \quad (19)$$

(Воспользовавшись коммутативностью действия свертки, можно написать еще две аналогичные формулы.) Отметим, что для получения $x(t)$ нам не нужно знать изображение $F(p)$ правой части уравнения.

Таким образом, зная решение для единичной правой части, мы при помощи интегрирования находим решение для любой правой части. Напомним только, что в обоих случаях начальные условия — нулевые. Полученные формулы играют очень важную роль, которая будет разъяснена на примере электротехнических задач в § 2.

Пример 8. Найти решение уравнения $\dot{x} + x = e^{-t^2}$ при нулевых начальных условиях.

Изображения функции, стоящей в правой части, мы не знаем и сначала решаем уравнение $\dot{x} + x = 1$ при тех же нулевых начальных условиях. Операторное уравнение

$$X_1(p)p^2 + X_1(p) = \frac{1}{p}$$

имеет решение $X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$; соответствующий ему оригинал равен $x_1(t) = 1 - \cos t$ (см. формулу 20 табл. 2). Поэтому по формуле (18)

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2} \sin \tau d\tau.$$

Выразить полученный интеграл при помощи элементарных функций нельзя.

Пример 9. Записать при помощи интеграла Дюамеля решение уравнения $\dot{x} - x = f(t)$ при нулевых начальных условиях.

Начнем, как и раньше, с уравнения $\dot{x} - x = 1$. Его операторное уравнение имеет решение $X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)}$ и

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1$$

(формула 21 табл. 2). Поэтому

$$x(t) = \int_0^t f(t - \tau) \operatorname{sh} \tau d\tau.$$

111. Операционный метод решения одного линейного дифференциального уравнения почти без всяких изменений переносится на решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, как однородных, так и неоднородных. Поэтому мы ограничимся рассмотрением примеров.

Пример 10. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t, \\ \dot{y} + 3x - 2y = 2e^t \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Если считать, что $x(t) \doteq X(p)$ и $y(t) \doteq Y(p)$, то по теореме дифференцирования оригинала $\dot{x} \doteq pX - 1$ и $\dot{y} \doteq pY - 1$ (для краткости записи мы не пишем аргументы функций). Система операторных уравнений примет вид

$$pX - 1 + X - Y = \frac{1}{p-1}, \quad pY - 1 + 3X - 2Y = \frac{2}{p-1},$$

или, после преобразования,

$$\begin{cases} (p+1)X - Y = \frac{1}{p-1} + 1, \\ 3X + (p-2)Y = \frac{2}{p-1} + 1. \end{cases}$$

В результате мы получили систему алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных изображений $X(p)$ и $Y(p)$. Решая эту систему, находим

$$X(p) = \frac{1}{p-1}, \quad Y(p) = \frac{1}{p-1}$$

и, возвращаясь к оригиналам,

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t.$$

Операционный метод в равной мере применим и для решения систем уравнений с производными высших порядков.

Пример 11. Найти решение однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x} - x + y + z = 0, \\ \dot{y} + x - y + z = 0, \\ \dot{z} + x + y - z = 0 \end{cases}$$

при начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Система операторных уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} (p^2 - 1)X + Y + Z = p, \\ X + (p^2 - 1)Y + Z = 0, \\ X + Y + (p^2 - 1)Z = 0. \end{cases}$$

Эту систему решим при помощи определителей. Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2 - 1 & 1 \\ 1 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим его, опираясь на свойства определителей (сначала к первому столбцу прибавим оба остальных столбца, а затем из второй и третьей строк вычтем первую; в результате этих преобразований определитель не изменится):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p^2 + 1 & 1 & 1 \\ p^2 + 1 & p^2 - 1 & 1 \\ p^2 + 1 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} p^2 + 1 & 1 & 1 \\ 0 & p^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 - 2 \end{vmatrix} = (p^2 + 1)(p^2 - 2)^2. \end{aligned}$$

Вычислим определители Δ_X , Δ_Y и Δ_Z :

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 0 & p^2 - 1 & 1 \\ 0 & 1 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = p[(p^2 - 1)^2 - 1] = p^3(p^2 - 2),$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 - 1 \end{vmatrix} = -p(p^2 - 2),$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} p^2 - 1 & 1 & p \\ 1 & p^2 - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -p(p^2 - 2).$$

Теперь находим изображения искомых решений:

$$X(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}, \quad Y(p) = Z(p) = -\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}.$$

Для перехода к оригиналам воспользуемся формулой 32 табл. 2, согласно которой ($a = \sqrt{2}$, $b = 1$):

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)} \doteq \frac{1}{3} \left(\frac{\text{sh } \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} - \sin t \right).$$

Применяя теорему дифференцирования оригинала, находим

$$y(t) = z(t) = -\frac{1}{3} (\text{ch } \sqrt{2}t - \cos t).$$

Снова применяя эту же теорему, получим (каждый раз значение оригинала при $t=0$ равно нулю)

$$x(t) = \frac{2}{3} \text{ch } \sqrt{2}t + \frac{1}{3} \cos t.$$

Мы напомнили читателю правило решения системы линейных уравнений при помощи определителей со следующей целью. Часто в практических задачах, после того как система уравнений составлена, нам оказываются нужными не все неизвестные функции, а только некоторые из них. В этих случаях, воспользовавшись формулами Крамера, мы можем сразу выписать выражения для нужных изображений, не отыскивая остальных. Следует еще иметь в виду, что при большом числе неизвестных функций для решения систем алгебраических уравнений (а также для вычисления определителей) применяются специальные вычислительные приемы линейной алгебры.

Можно рассматривать и такие неоднородные системы дифференциальных уравнений, правые части которых имеют

точки разрыва; при этом следует поступать так же, как при решении примера 5.

Пример 12. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} + y = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{если } t > 1, \end{cases} \\ \dot{y} + x = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{если } t > 2, \end{cases} \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$.

Система операторных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} pX + Y = \frac{1 - e^{-p}}{p}, \\ X + pY = \frac{1 - e^{-2p}}{p}. \end{cases}$$

Ее решение

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2-1)}, \\ Y(p) &= \frac{1}{p(p+1)} + \frac{e^{-p}}{p(p^2-1)} - \frac{e^{-2p}}{p^2-1}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к оригиналам и применяя теорему запаздывания, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 1 - e^{-t}, & \text{если } 0 < t < 1, \\ 1 - e^{-t} - \text{sh}(t-1), & \text{если } 1 < t < 2, \\ -e^{-t} - \text{sh}(t-1) + \text{ch}(t-2), & \text{если } t > 2, \end{cases} \\ y(t) &= \begin{cases} 1 - e^{-t}, & \text{если } 0 < t < 1, \\ -e^{-t} + \text{ch}(t-1), & \text{если } 1 < t < 2, \\ -e^{-t} + \text{ch}(t-1) - \text{sh}(t-2), & \text{если } t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Рекомендуем читателю построить графики найденных решений и проверить, что решения непрерывны в точках $t=1$ и $t=2$, но имеют разрывные производные.

§ 2. Приложения операционного исчисления к задачам электротехники

112. В § 4 гл. VII уже рассматривались некоторые задачи электротехники в связи с отысканием установившегося тока в колебательном контуре при периодическом и непериодическом внешнем напряжении. Методы операционного

исчисления позволяют с большим успехом рассчитывать любые процессы в сложных электрических цепях при произвольном внешнем напряжении. Эти методы ввел в электротехнику английский инженер-электрик О. Хевисайд. Они оказались настолько удобными для применения, что в настоящее время в большинстве курсов электротехники и теории автоматического регулирования занимают одно из центральных мест при расчете электрических цепей. Мы собираемся познакомить читателя только с принципиальной стороной дела, совершенно не касаясь специальных вопросов, которые изучаются в курсах электротехники.

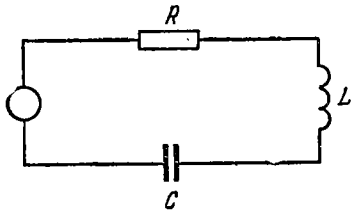


Рис. 117.

(рис. 117), уравнение которого мы уже записывали на стр. 250:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = v(t). \quad (20)$$

Будем считать, что в начальный момент ток равен нулю: $i(0) = 0$. Последний член левой части уравнения представляет напряжение на обкладках конденсатора; его выражение показывает, что при $t = 0$ это напряжение равно нулю, т. е. что в начальный момент заряды на обкладках конденсатора отсутствуют. Эти начальные условия соответствуют задачам включения. Более общий случай начальных условий мы рассмотрим несколько позже.

Введем *операторный ток* $I(p) \doteq i(t)$ и *операторное напряжение* $V(p) \doteq v(t)$. По теореме дифференцирования оригинала

$$\frac{di}{dt} \doteq pI(p),$$

так как $i(0) = 0$, а по теореме интегрирования

$$\int_0^t i dt \doteq \frac{I(p)}{p}.$$

Уравнение колебательного контура перепишем в операторном виде

$$Lpl(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = V(p),$$

откуда

$$I(p) = \frac{V(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{V(p)}{Z(p)}, \quad (21)$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ — *операторное сопротивление* контура. Комплексное сопротивление контура (формула (82) гл. VII) получается из операторного сопротивления, если в последнем положить $p = i\omega$. Формула (21) называется *операторной формой закона Ома*.

По найденному операторному току $I(p)$, пользуясь теоремой обращения, можно восстановить и сам ток:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{V(p)}{Z(p)} e^{pt} dp. \quad (22)$$

Разумеется, в конкретных задачах следует пользоваться таблицами или какой-либо из формул разложения.

Поясним сказанное примером. Пусть в колебательный контур включается постоянный ток: $v(t) = E$. Тогда $V(p) = \frac{E}{p}$ и формула (21) принимает вид

$$I(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{E}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

По формуле 11 табл. 2 получим:

$$\begin{aligned} 1) \Delta &= \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0, \quad i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\sqrt{\Delta}t; \\ 2) \Delta &= \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0, \quad i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}; \\ 3) \Delta &= \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} < 0; \quad i(t) = \frac{E}{L\sqrt{-\Delta}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t. \end{aligned}$$

В первом случае получаются затухающие гармонические колебания, во втором и третьем случаях затухающие апериодические процессы. В третьем случае для большей наглядности ток $i(t)$ лучше представить в ином виде. Корни трехчлена $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}$ равны $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$, следовательно, они действительны и отрицательны. Записывая операторный ток в виде $I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)}$ и применяя формулу 5 табл. 2, получим

$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{-\Delta}} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}),$$

где $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$. Отсюда ясно видно, что $i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Так же просто решается задача о включении в контур синусоидального напряжения $A \sin \omega t$ (в этом случае $V(p) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}$). Можно рассматривать случаи, когда напряжение $v(t)$ — разрывная функция, и т. д. Все это полностью повторяет задачи решения дифференциальных уравнений, рассмотренные в § 1.

Особо остановимся на роли интеграла Дюамеля. Пусть в контур включается постоянное единичное напряжение $v_1(t) = 1$. Тогда $V_1(p) = \frac{1}{p}$ и по формуле (21)

$$I_1(p) = \frac{1}{pZ(p)}, \text{ или } Z(p) = \frac{1}{pI_1(p)}.$$

Если теперь в контур включить любое напряжение $v(t)$, то

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} = pI_1(p)V(p). \quad (23)$$

Следовательно, по формуле (45) гл. VII

$$i(t) = \int_0^t i_1'(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad (i(0) = 0), \quad (24)$$

или

$$i(t) = v(0) i_1(t) + \int_0^t v'(\tau) i_1(t - \tau) d\tau. \quad (25)$$

Таким образом, зная реакцию контура на единичное напряжение, мы с помощью написанных формул можем вычислить реакцию контура на любое внешнее напряжение. В полученные формулы не входят ни изображение напряжения $V(p)$, ни, что самое главное, операторное сопротивление контура $Z(p)$. Последнее означает, что мы можем рассчитывать контур, фактически не зная его параметров, если только нам удалось экспериментально получить ток $i_1(t)$ — реакцию контура на единичное напряжение.

Перейдем к случаю ненулевых начальных условий. Во-первых, будем считать, что в начальный момент в контуре есть ток $i(0) = i_0$, и, во-вторых, что на обкладках конденсатора есть начальный заряд q_0 . Последнее обстоятельство приводит к некоторому изменению дифференциального уравнения контура, именно, к падению напряжения на конденсаторе добавится постоянное слагаемое $\frac{q_0}{C}$, и уравнение примет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + \frac{q_0}{C} = v(t). \quad (26)$$

Переходя к операторному уравнению и учитывая, что теперь $\frac{di}{dt} \doteq pI(p) - i_0$, получим

$$LpI(p) - Li_0 + Ri(p) + \frac{I(p)}{Cp} + \frac{q_0}{Cp} = V(p),$$

откуда

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} + \frac{Li_0 + \frac{q_0}{Cp}}{Z(p)}, \quad (27)$$

где $V(p) \doteq v(t)$, а $Z(p)$ — операторное сопротивление контура.

Таким образом, к току, определяемому операторной формулой $\frac{V(p)}{Z(p)}$, добавится еще ток, операторное выражение которого равно $\frac{LCi_0p + q_0}{CpZ(p)}$. Этот ток соответствует заданным начальным условиям и называется *током короткого замыкания*. Он получается, если в уравнении контура положить $v(t) = 0$, т. е. накоротко замкнуть контур.

113. Преимущества операторного метода расчета сказываются все больше и больше тогда, когда мы начинаем рассматривать не один контур, а сложную электрическую цепь. Как известно, расчет цепей постоянного тока производится на основании законов Кирхгофа.

1. *Алгебраическая сумма всех токов, притекающих к любой точке цепи, равна нулю.*

2. *Для каждого замкнутого контура цепи алгебраическая сумма падений напряжений в отдельных ветвях контура равна нулю.*

В курсах электротехники доказывается, что если в цепи протекает ток, изменяющийся во времени, то для операторного тока и операторного напряжения оба закона Кирхгофа остаются справедливыми. Первый закон формулируется совершенно одинаково, как для самих токов, так и для их изображений, т. е. для операторных токов. Чтобы иметь возможность пользоваться вторым законом Кирхгофа, мы должны научиться вычислять операторное падение напряжения на отдельных участках цепи.

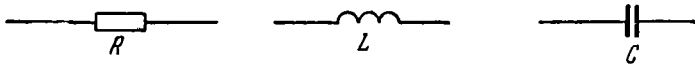


Рис. 118.

Рассмотрим простейшие участки цепи, изображенные на рис. 118. Как известно, напряжение на концах участка с сопротивлением R равно $v_R = Ri$; на участке с индуктивностью L равно $v_L = L \frac{di}{dt}$ и на участке с емкостью C равно $v_C = \frac{1}{C} \int i dt$ (в последнем случае считается, что при $t=0$ заряд на обкладках конденсатора $q_0=0$).

Переходя к операторным токам и напряжениям и считая для простоты, что начальный ток i_0 равен нулю, получим

$$V_R(p) = Ri(p), \quad V_L(p) = LpI(p), \quad V_C(p) = \frac{I(p)}{Cp}.$$

Все эти соотношения объединяются в единой форме *операторного закона Ома*

$$V(p) = Z(p)I(p), \quad (28)$$

где $Z(p)$ — операторное сопротивление участка цепи. На участках с сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C соответственно имеем

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = Lp, \quad Z_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

Далее, при последовательном соединении участков цепи (рис. 119) операторные сопротивления, так же как и обычные, складываются.

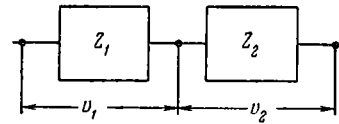


Рис. 119.

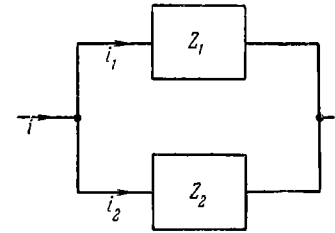


Рис. 120.

Действительно, $V_1 = Z_1 I$, $V_2 = Z_2 I$ (аргумент для краткости записи опускаем). Так как

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t),$$

то

$$V = V_1 + V_2 = (Z_1 + Z_2) I,$$

т. е. операторное сопротивление всей цепи Z равно

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

Аналогично, при параллельном соединении (рис. 120)

$$V = Z_1 I_1 = Z_2 I_2,$$

и так как $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, то

$$I = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right),$$

откуда для операторного сопротивления цепи Z имеем

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

или

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Таким образом, операторное сопротивление цепи в случае нулевых начальных условий может вычисляться по обычным правилам соединения элементов цепи. С этой точки зрения уравнение для колебательного контура получится особенно просто. Мы имеем последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости и по только что установленным правилам находим операторное сопротивление контура

$$Z = R + Lp + \frac{1}{Cp}.$$

Согласно второму закону Кирхгофа $ZI = V$, и мы приходим к знакомому уравнению (21).

Приведем более сложные примеры.

Пример 1. Найти операторное сопротивление участка цепи, изображенного на рис. 121.

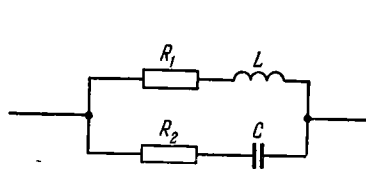


Рис. 121.

Для верхнего участка цепи $Z_1 = R_1 + Lp$, а для нижнего — $Z_2 = R_2 + \frac{1}{Cp}$. Следовательно,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1 + Lp} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{Cp}},$$

или

$$Z = \frac{(R_1 + Lp)(R_2 Cp + 1)}{LCp^2 + C(R_1 + R_2)p + 1}.$$

Пример 2. Найти ток в контуре, изображенном на рис. 122, если при $t = 0$ включается постоянное напряжение E .

Для параллельных ветвей, содержащих C и R , операторное сопротивление равно $\frac{R}{CRp + 1}$. Поэтому для всего контура

$$Z = Lp + \frac{R}{CRp + 1} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{CRp + 1}.$$

Операторный ток равен

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} = E \frac{RCp + 1}{p(LCRp^2 + Lp + R)}.$$

Пользуясь табл. 2, легко перейти от операторного тока к его оригиналу, т. е. к обыкновенному току.

Мы не останавливаемся на более специальных примерах, а также на случае ненулевых начальных условий. Читатель найдет их в курсах электротехники.

§ 3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными

114. В этом параграфе мы вкратце рассмотрим решение некоторых дифференциальных уравнений с частными производными — *уравнений математической физики*. Мы не будем касаться вывода соответствующих уравнений, отсылая читателя, например, к книге [4], а просто на нескольких примерах покажем, как такие уравнения можно решать при помощи операционного исчисления.

Начнем с задачи о распространении тепла в полубесконечном стержне. Требуется найти при $x > 0$ и $t > 0$ решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (29)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u(0, t) = u_0 \quad (30)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при } x > 0. \quad (31)$$

Решение этого уравнения при заданных условиях описывает процесс распространения тепла в полубесконечном однородном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, если начальная температура стержня равна нулю, а на его конце все время поддерживается постоянная температура u_0 . Начальная температура $u(x, 0)$ в точке $x = 0$ разрывна: при $x = 0$ она равна u_0 , а при $x > 0$ она равна нулю.

Будем считать, что искомое решение $u(x, t)$ при любом фиксированном $x (x > 0)$ является оригиналом по переменной t :

$$u(x, t) \doteq U(x, p).$$

Тогда согласно теореме о дифференцировании оригинала

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq pU - u(x, 0) = pU. \quad (32)$$

Рассматривая x как параметр и применяя теорему о дифференцировании по параметру (разумеется, предполагая, что все требуемые для этого условия соблюдены), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteq \frac{\partial U}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (33)$$

Подставив изображения для производных в уравнение (29), перейдем к операторному уравнению:

$$pU = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (34)$$

Желая подчеркнуть, что в полученном уравнении p рассматривается как постоянная, мы вместо частной производной $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ пишем обыкновенную производную $\frac{d^2 U}{dx^2}$. В результате применения преобразования Лапласа мы перешли от уравнения с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению, в данном случае к линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Применяя также преобразование Лапласа к краевому условию

$$u(0, t) = u_0 \doteq \frac{u_0}{p}, \quad (35)$$

получим соответствующее краевое условие для уравнения (34):

$$U|_{x=0} = \frac{u_0}{p}. \quad (36)$$

Общее решение уравнения (34) имеет вид

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{x \sqrt{p}}{a}} + C_2 e^{-\frac{x \sqrt{p}}{a}}. \quad (37)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим при помощи условия (36) и вытекающего из физического смысла задачи требования ограниченности решения $u(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$. Из последнего следует, что и изображение $U(x, p)$ ограничено при $x \rightarrow \infty$ (доказательство мы опускаем). Это означает, что

Таблица 3

Изображения — иррациональные и трансцендентные функции, встречающиеся при решении задач математической физики

Номер формулы	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a \sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
2	$e^{-a \sqrt{p}}$	$\frac{a}{2 \sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
3	$\frac{1}{p} e^{-a \sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^{1)}$
4	$\frac{1}{p + \sqrt{p}}$	$e^t [1 - \Phi(\sqrt{t})]$
5	$\frac{1}{1 + \sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t [1 - \Phi(\sqrt{t})]$
6	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$	$J_0(t)^2)$
7	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}}$	$J_0(it)$
8	$1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}$	$J_1(t)^2)$
9	$\sqrt{p^2 + 1} - p$	$\frac{J_1(t)}{t}$
10	$\frac{1}{p} e^{-\frac{a}{p}}$	$J_0(2\sqrt{at})$

¹⁾ $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ — интеграл вероятностей.

²⁾ $J_0(t)$ и $J_1(t)$ — функции Бесселя первого рода порядка 0 и 1. Краткие сведения об этих функциях см. в [4], § 10.

Продолжение табл. 3

Номер формулы	Изображение	Оригинал
11	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{at})$
12	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sin(2\sqrt{at})$
13	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{\alpha}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch}(2\sqrt{at})$
14	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{\frac{\alpha}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{sh}(2\sqrt{at})$

$C_1 = 0$. Подставляя условие (36) в общее решение (37), находим, что $C_2 = \frac{u_0}{p}$. Следовательно, частное решение

$$U(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}. \quad (38)$$

Воспользуемся формулой 3 из табл. 3 (немного позже будет показано, как эта формула получается), заменим в ней a на $\frac{x}{a}$ и перейдем к оригиналу, т. е. к искомому решению

$$u(x, t) = u_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy = u_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right], \quad (39)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$ — интеграл вероятностей.

Полученная формула в точности совпадает с формулой (15.3'') книги [4], только нужно в ней считать начальную температуру стержня равной нулю ($u|_{t=0} = 0$).

Заметим, что решение (39) не определено при $t = 0$. Поэтому начальное условие $u(x, 0) = 0$ следует понимать так, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} u(x, t) = u_0 [1 - \Phi(\infty)] = 0.$$

Но именно такой смысл мы и условились придавать значению оригинала при $t = 0$ (см. формулу (28) гл. VII).

Получив решение при краевом условии $u(0, t) = u_0$, легко при помощи теоремы умножения изображений перейти к решению при общем краевом условии

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad (40)$$

по-прежнему считая, что в начальный момент $t = 0$ температура точек стержня при $x > 0$ равна нулю: $u(x, 0) = 0$.

Положим, что $\varphi(t) \doteq F(p)$. Тогда краевое условие для преобразованного уравнения (34) будет иметь вид

$$U|_{x=0} = F(p). \quad (41)$$

Отыскивая произвольную постоянную C_2 в общем решении (37) (напомним, что $C_1 = 0$), получаем, что $C_2 = F(p)$, т. е.

$$U(x, p) = F(p) e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}. \quad (42)$$

Согласно формуле 2 табл. 3, в которой a заменено на $\frac{x}{a}$, имеем

$$e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} \doteq \frac{x e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t^3}}$$

(и эта формула будет получена позднее). Применяя теорему умножения изображений, приходим к решению

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (43)$$

(Рекомендуем читателю сравнить полученное решение с формулой (17.17) указанной выше книги; для полной их тождественности надо в последней положить $l = 0$ и $D = a^2$.)

Функция $u(x, t)$, определенная формулой (43), обращается в нуль при $x > 0$ и $t = 0$, так что начальное условие соблюдается. При $x = 0$ и $t > 0$ формула (43) функцию $u(x, t)$ формально не определяет, так как несобственный интеграл

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

расходится (при $\tau = t$ подынтегральная функция

обращается в бесконечность). Чтобы проверить условие (40), преобразуем предварительно интеграл в правой части (43),

$$\text{положив } \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} = z, \quad \frac{x d\tau}{4a(t-\tau)^{3/2}} = dz, \quad \tau = t - \frac{x^2}{4a^2 z^2}.$$

Тогда

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4a^2 z^2}\right) e^{-z^2} dz.$$

Теперь видно, что при $x = 0$ и $t > 0$

$$u(0, t) = \varphi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \varphi(t).$$

115. Наметим путь решения задачи в том случае, когда стержень конечный и задана начальная температура. Эта задача приводит к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с краевыми условиями

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < l).$$

Считая по-прежнему $u(x, t)$ оригиналом, а $U(x, p)$ — его изображением, по формуле (32) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pU - f(x).$$

Преобразованное уравнение принимает вид

$$pU - f(x) = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2},$$

или

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U = -\frac{1}{a^2} f(x),$$

т. е. становится неоднородным. Это уравнение нужно решить при краевых условиях

$$U|_{x=0} = F_1(p), \quad U|_{x=l} = F_2(p),$$

где

$$F_1(p) \doteq \varphi_1(t) \quad \text{и} \quad F_2(p) \doteq \varphi_2(t).$$

Найдя изображение $U(x, p)$ и перейдя к оригиналу $u(x, t)$, получим искомое решение.

Отметим, что в большинстве случаев изображение $U(x, p)$ оказывается сложной трансцендентной функцией, и переход к оригиналу совершить бывает нелегко.

Для читателя, знакомого с решением приведенной задачи методом Фурье, заметим, что операционный метод и метод Фурье часто хорошо дополняют друг друга. Так, при помощи метода Фурье удобно решать задачи с нулевыми краевыми условиями: $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$, и произвольным начальным условием. Операционный метод, наоборот, проще применять в случае нулевого начального условия и произвольных краевых условий.

116. Рассмотрим еще задачу о распространении электрических колебаний вдоль длинных линий. Как известно (см., например, [4], § 7), напряжение $u(x, t)$ и ток $i(x, t)$ в линии связаны системой дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial i}{\partial x} + Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (44)$$

где R — активное сопротивление, L — индуктивность, G — проводимость изоляции и C — емкость, рассчитанные на единицу длины линии. Будем считать, что в начальный момент напряжение и ток вдоль линии равны нулю:

$$u(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0. \quad (45)$$

Не задаваясь пока краевыми условиями, составим операционные уравнения, положив

$$u(x, t) \doteq U(x, p), \quad i(x, t) \doteq I(x, p)$$

и учитывая, что по теореме дифференцирования оригинала

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq pU, \quad \frac{\partial i}{\partial t} \doteq pI,$$

а по теореме о дифференцировании по параметру

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteq \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} \doteq \frac{dI}{dx}$$

(для изображений U и I вместо частных производных по x мы пишем обыкновенные). После простых преобразований операторная система примет вид

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx} = -(Lp + R)I, \\ \frac{dI}{dx} = -(Cp + G)U. \end{cases} \quad (46)$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно изображений U и I (p считается величиной постоянной). Для решения системы проще всего исключить одну из неизвестных функций, например I . Дифференцируя первое из уравнений по x и заменяя $\frac{dI}{dx}$ его выражением, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - (Lp + R)(Cp + G)U = 0. \quad (47)$$

Его общее решение

$$U(x, p) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}, \quad (48)$$

где $\lambda = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}$. Функцию I найдем из первого уравнения системы (46):

$$I(x, p) = -\frac{1}{Lp + R} \frac{dU}{dx} = \sqrt{\frac{Cp + G}{Lp + R}} (Be^{-\lambda x} - Ae^{\lambda x}). \quad (49)$$

Чтобы найти произвольные постоянные A и B (в их выражениях будет входить величина p), нужно задать краевые условия, которые могут быть весьма разнообразны. Пусть, например, напряжения в начале и в конце линии (при $x=0$ и при $x=l$) являются заданными функциями времени

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t). \quad (50)$$

Применяя преобразование Лапласа, получим краевые условия для уравнения (47):

$$U|_{x=0} = F_1(p), \quad U|_{x=l} = F_2(p), \quad (51)$$

где $F_1(p) \doteq \varphi_1(t)$ и $F_2(p) \doteq \varphi_2(t)$.

Подставляя краевые условия (51) в общее решение (48), можно найти A и B , а затем и сами изображения U и I . Однако эти изображения оказываются в большинстве случаев слишком сложными, и чтобы перейти от них к оригиналам, требуются специальные приемы (см., например, [3], [6]).

Сделаем упрощающее предположение, что линия очень длинная, и положим $l = \infty$. Тогда второе из краевых условий (51) отпадает и заменяется требованием ограниченности изображений $U(x, p)$ и $I(x, p)$ при $x \rightarrow \infty$. Если λ выбрано так, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то $e^{\lambda x}$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, и последнее требование приводит к равенству $A = 0$.

Перепишем первое из условий (51) в виде $U|_{x=0} = F(p)$ и подставим его (в 48); получим $B = F(p)$. Таким образом,

$$\begin{cases} U(x, p) = F(p) e^{-\sqrt{(Lp+R)(Cp+G)}x}, \\ I(x, p) = \sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}} U(x, p). \end{cases} \quad (52)$$

Даже при сделанном предположении переход к оригиналам оказывается все же очень сложным, и мы ограничимся рассмотрением частных случаев.

1. Линия без потерь: $R = 0$, $G = 0$. В этом случае

$$U(x, p) = F(p) e^{-px \sqrt{LC}}, \quad I(x, p) = \sqrt{\frac{C}{L}} U(x, p).$$

Оригиналы находятся немедленно по теореме запаздывания:

$$u(x, t) = \varphi(t - x \sqrt{LC}), \quad \text{если } t > x \sqrt{LC}, \\ u(x, t) = 0, \quad \text{если } t < x \sqrt{LC}$$

($\varphi(t) = u(0, t)$ — напряжение в начале линии). Ток равен напряжению, умноженному на $\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Процесс распространения напряжения и тока носит волновой характер. Напряжение $\varphi(t)$, приложенное к началу линии, перемещается вдоль линии со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (в точке x напряжение возникает в момент $t = x \sqrt{LC}$; значит, скорость распространения $v = \frac{x}{t} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$).

2. Линия без искажений: $RC=LG$. После простых преобразований получим

$$(Lp + R)(Cp + G) = (p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})^2, \quad \sqrt{\frac{Cp + G}{Lp + R}} = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Поэтому

$$U(x, p) = e^{-\sqrt{RG}x} F(p) e^{-px\sqrt{LC}}, \quad I(x, p) = \sqrt{\frac{C}{L}} U(x, p).$$

Перейдем к оригиналам:

$$u(x, t) = e^{-\sqrt{RG}x} \varphi(t - x\sqrt{LC}), \quad \text{если } t > x\sqrt{LC}, \\ u(x, t) = 0, \quad \text{если } t < x\sqrt{LC}.$$

Как и в случае линии без потерь, имеем $i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} u(x, t)$.

Таким образом, в линии без искажений процесс распространения напряжения и тока также носит волновой характер, с тем только отличием, что по мере продвижения волн по линии они затухают благодаря множителю $e^{-\sqrt{RG}x}$. Скорость распространения волн, а также отношение напряжения к току остаются постоянными.

Если в линиях без потерь и без искажений картина распространения напряжения и тока сравнительно проста, то в остальных случаях она значительно сложнее. Приведем лишь еще один пример.

3. Линия без утечки и индуктивности: $G=0$, $L=0$. (Этот случай приближенно осуществляется в подземном или подводном кабеле, где благодаря хорошей изоляции утечка практически отсутствует, а индуктивность играет незначительную роль по сравнению с емкостью.) Из общей формулы (52) получим

$$U(x, p) = F(p) e^{-x\sqrt{RC}V\bar{p}}, \quad I(x, p) = \sqrt{\frac{C}{R}} F(p) \sqrt{p} e^{-x\sqrt{RC}V\bar{p}}.$$

Предположим для простоты, что напряжение в начале линии постоянно: $\varphi(t) = u(0, t) = u_0$. Тогда $F(p) = \frac{u_0}{p}$ и

$$U(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-x\sqrt{RC}V\bar{p}}, \quad I(x, p) = \sqrt{\frac{C}{R}} \frac{u_0}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{RC}V\bar{p}}.$$

Оригиналы найдем по формулам 3 и 1 табл. 3:

$$u(x, t) = u_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{R}} \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{RCx^2}{4t}}.$$

117. В заключение этого параграфа покажем, как можно получить некоторые формулы соответствия, приведенные в табл. 3. Начнем с формулы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \div \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}. \quad (53)$$

Предоставляем читателю проверить, что при $t \rightarrow 0$ оригинал стремится к нулю.

Интеграл Лапласа от оригинала равен

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} e^{-pt} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2}{4t} - pt} dt.$$

Сделаем подстановку: $pt = z^2$, $dt = \frac{2zdz}{p}$; тогда

$$F(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi p}} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{z^2} - z^2} dz, \quad (54)$$

где $\beta = \frac{a\sqrt{p}}{2}$. Введем обозначение $I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{z^2} - z^2} dz$ и вычис-

лим этот интеграл при помощи специального приема — дифференцирования по параметру. Найдем $I'(\beta)$, взяв интеграл от производной подынтегрального выражения по β :

$$I'(\beta) = \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{z^2} - z^2} \left(-\frac{2\beta}{z^3} \right) dz.$$

Замена переменной $\frac{\beta}{z} = u$, $-\frac{\beta dz}{z^2} = du$ приводит нас снова к интегралу $I(\beta)$:

$$I'(\beta) = -2 \int_0^\infty e^{-u^2 - \frac{\beta^2}{u^2}} du = -2I(\beta).$$

В результате мы пришли к дифференциальному уравнению $I'(\beta) = -2I(\beta)$; его общее решение:

$$I(\beta) = Ce^{-2\beta}.$$

Чтобы найти C , положим $\beta = 0$. Тогда

$$C = I(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(интеграл Пуассона). Окончательно

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}.$$

Подставляя выражение для $I(\beta)$ в (54) и заменяя $\beta = \frac{\alpha \sqrt{p}}{2}$, получим

$$F(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi p}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha \sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha \sqrt{p}},$$

т. е. как раз требуемое изображение.

Дифференцируя обе части соответствия (53) по параметру α

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \left(-\frac{2\alpha}{4t}\right) \doteq \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha \sqrt{p}} (-\sqrt{p}),$$

придем к формуле 2 табл. 3:

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \doteq e^{-\alpha \sqrt{p}}.$$

Применим теорему об интегрировании оригинала

$$\int_0^t \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} dt \doteq \frac{1}{p} e^{-\alpha \sqrt{p}} \quad (55)$$

и преобразуем интеграл слева при помощи подстановки $\frac{\alpha^2}{4t} = y^2$,

$t = \frac{\alpha^2}{4y^2}$, $\sqrt{t} = \frac{\alpha}{2y}$, $\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{\alpha dy}{y^2}$; получаем

$$\int_0^t \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy. \quad (56)$$

Введем функцию $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ — интеграл вероятностей. Так как $\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 1$, то интеграл (56) равен

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),$$

и формула соответствия (55) переписывается в виде

$$1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \doteq \frac{1}{p} e^{-\alpha \sqrt{p}}$$

(формула 3 табл. 3).

Остальные формулы табл. 3 в тексте книги не встречались, и мы их выводить не будем.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VIII

1. Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

- а) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$;
- б) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 6e^{-t}$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$;
- в) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 12e^{3t}$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 6$;
- г) $\ddot{x} + 4x = 3 \sin t + 10 \cos 3t$, $x(0) = -2$, $\dot{x}(0) = 3$;
- д) $\ddot{x} - x = 4 \sin t + 5 \cos 2t$, $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = -2$.

2. Решить системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

- а) $\begin{cases} \dot{x} + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ \dot{y} - 2x + y = 7e^{2t} \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 3; \end{matrix} \right\}$
- б) $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} - y = e^t, \\ 2\dot{x} + \dot{y} + 2y = \cos t \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 0; \end{matrix} \right\}$
- в) $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = x + y \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 0; \end{matrix} \right\}$
- г) $\begin{cases} \ddot{x} - 3x - 4y + 3 = 0, \\ \ddot{y} + x + y - 5 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} x(0) = \dot{x}(0) = 0, \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0. \end{matrix} \right\}$

где $M > 0$ и α — постоянные, то ряд сходится при $|z| > R$, где $R = e^\alpha$. Действительно, ряд мажорируется геометрической прогрессией

$$\left| \frac{a_n}{z^n} \right| \leq M \left(\frac{e^\alpha}{|z|} \right)^n,$$

которая сходится, если $|z| > e^\alpha$. Из доказанного следует, что функция $F(z)$ — аналитическая при $|z| > R$, а разложение (1) — ее ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (см. п. 58). Ясно, что $z = \infty$ — правильная точка и $F(\infty) = a_0$.

Приведем один простой, но важный для дальнейшего пример. Пусть

$$a_n = b^n = e^{n \ln b},$$

где b — любое число, не равное нулю. Так как $|a_n| = |b^n| = |b|^n = e^{n \ln |b|}$, то, сравнивая с (2), видим, что ряд (1) сходится при $|z| > |b|$ ($\alpha = \ln |b|$). z -преобразованием последовательности $\{b^n\}$ служит функция

$$F(z) = 1 + \frac{b}{z} + \dots + \frac{b^n}{z^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{b}{z}} = \frac{z}{z - b}. \quad (3)$$

Отметим, что хотя ряд, определяющий z -преобразование, сходится только при $|z| > |b|$, сама функция $F(z)$ оказалась определенной и аналитической во всей плоскости, кроме точки $z = b$. С подобным же явлением мы встречались и при изучении преобразования Лапласа (см. стр. 195).

Если z -преобразование некоторой последовательности $\{a_n\}$ является заданной функцией $F(z)$, аналитической в бесконечности, то чтобы найти саму последовательность $\{a_n\}$ (т. е. найти *обратное z -преобразование*), нужно разложить функцию $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки; этот ряд будет содержать только правильную часть (см. п. 58).

Например, если $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, то, пользуясь решением примера 1 на стр. 131–132, получим

$$a_0 = 0, \quad a_n = 2^{n-1} - 1 \quad (n \geq 1).$$

Воспользовавшись общими формулами для отыскания коэффициентов ряда Лорана, легко записать выражения для

ГЛАВА IX ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. Определение дискретного преобразования

118. Изучая преобразования Лапласа и Фурье, мы в качестве оригиналов $f(t)$ рассматривали функции непрерывного аргумента. Большой интерес представляет аналог операционного исчисления для случая, когда оригиналами служат *функции целочисленного аргумента* или *последовательности*. Это новое исчисление, опирающееся на *дискретное преобразование Лапласа*, в настоящее время является математической основой теории линейных импульсных систем, т. е. таких систем, работа которых связана с передачей и преобразованием последовательностей импульсов¹⁾.

Начнем со следующего определения. Пусть дана последовательность действительных или комплексных чисел

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

которую будем кратко обозначать символом $\{a_n\}$.

z -преобразованием последовательности $\{a_n\}$ называется функция комплексного переменного $F(z)$, определенная рядом

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots \quad (1)$$

Прежде всего докажем, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$|a_n| \leq M e^{\alpha n}, \quad (2)$$

¹⁾ Наиболее полное изложение всех вопросов, связанных с импульсными системами, содержится в книге Я. З. Цыпкина «Теория линейных импульсных систем», Физматгиз, 1963.

членов последовательности $\{a_n\}$ через функцию $F(z)$. Для этого нужно в формуле (22) на стр. 130 положить $a=0$ (это соответствует разложению как в окрестности начала координат, так и в окрестности бесконечно удаленной точки) и заметить, что теперь коэффициенты правильной части ряда обозначены не через c_{-n} , а через a_n :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz. \quad (4)$$

Здесь C — любая замкнутая кривая, окружающая все особые точки функции $F(z)$, в частности, окружность с центром в начале координат и достаточно большого радиуса.

Если, как это часто бывает, функция $F(z)$ является аналитической во всей плоскости, за исключением конечного числа особых точек (лежащих внутри контура C), то может оказаться, что более удобно вычислять коэффициенты a_n , отыскивая вычеты подынтегральной функции в особых точках.

119. Во многих случаях бывает удобно ввести новую независимую переменную q , положив

$$z = e^q. \quad (5)$$

Если обозначить $F(z) = F(e^q) = F^*(q)$, то

$$F^*(q) = a_0 + a_1 e^{-q} + \dots + a_n e^{-nq} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nq}. \quad (6)$$

Функция $F^*(q)$ называется *дискретным преобразованием Лапласа* последовательности $\{a_n\}$.

Напомним (см. п. 41), что соответствие между точками плоскостей z и q , определенное равенством $z = e^q$, не взаимно однозначно; все точки $q + 2k\pi i$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствуют одной и той же точке z . Это значит, что функция $F^*(q)$ — периодическая с чисто мнимым периодом $2\pi i$:

$$F^*(q + 2\pi i) = F^*(q).$$

Если взять в плоскости q любую полосу, параллельную действительной оси и шириной 2π , то соответствие между ее точками и точками плоскости z станет взаимно однозначным. Положим $q = \sigma + i\tau$ и выберем в качестве основной полосу

— $\pi \leq \tau \leq \pi$. Точки, лежащие на границах этой полосы, переходят в точки отрицательной части действительной оси: $e^{\sigma \pm i\pi} = -e^{\sigma}$; поэтому полоса отображается на всю плоскость z с разрезом по отрицательной части действительной оси; также будут отображаться и все полосы, ей параллельные (в п. 41 полосы, изображенные на рис. 46, выбирались так, что разрез в плоскости z шел по положительной части действительной оси).

Ясно, что в силу периодичности функцию $F^*(q)$ можно рассматривать только в основной полосе; в остальных полосах ее значения будут повторяться.

Так как $|z| = |e^{\sigma + i\tau}| = e^{\sigma}$, то из сходимости z -преобразования при $|z| > e^{\alpha}$ следует сходимость дискретного преобразования Лапласа при $\sigma > \alpha$. Функция $F^*(q)$ аналитична в полуплоскости $\sigma > \alpha$, и в частности, в полуполосе $\sigma > \alpha$, — $\pi \leq \tau \leq \pi$, заштрихованной

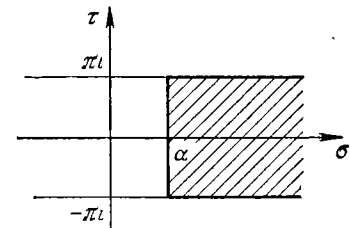


Рис. 123.

на рис. 123. Может случиться, что существует функция, аналитическая во всей полосе — $\pi \leq \tau \leq \pi$, за исключением конечного числа особых точек, и совпадающая с $F^*(q)$ в указанной полуполосе. Будем тогда говорить, что функция $F^*(q)$ продолжена на всю полосу — $\pi \leq \tau \leq \pi$. Ее особые точки могут лежать только левее прямой $\sigma = \alpha$ и на самой этой прямой.

Посмотрим, как преобразуется формула (4) при замене $z = e^q$. Если C — окружность $|z| = R' > e^{\alpha}$, то в основной полосе плоскости q ей соответствует прямолинейный отрезок $[\gamma - i\pi, \gamma + i\pi]$, где $\gamma = \ln R' > \alpha$. Учитывая, что $dz = e^q dq$, получим

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\pi}^{\gamma + i\pi} F^*(q) e^{nq} dq. \quad (7)$$

120. Пусть теперь нам задана функция $\varphi(t)$, определенная при $t \geq 0$, и члены последовательности $\{a_n\}$ являются значениями этой функции для равноотстоящих друг от друга значений аргумента

$$a_0 = \varphi(0), \quad a_1 = \varphi(T), \quad \dots, \quad a_n = \varphi(nT), \quad \dots$$

Построенная для этой последовательности функция

$$F^*(Tq) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nT) e^{-nTq} \quad (8)$$

называется *дискретным преобразованием Лапласа функции* $\varphi(t)$, *соответствующим периоду повторения* T . Отметим, что если функция $\varphi(t)$ является оригиналом для обычного преобразования Лапласа, то для последовательности $\{\varphi(nT)\}$ условие (2), очевидно, выполняется: $|\varphi(nT)| \leq M e^{\alpha nT}$, где M и α — постоянные, определяющие рост оригинала $\varphi(t)$ (см. стр. 191).

Не обязательно считать, что последовательность значений аргумента nT начинается с нуля; иногда приходится рассматривать «смещенные» последовательности: $a_n = \varphi(nT + \Delta T)$, где ΔT — постоянное смещение, не зависящее от n , и такое, что $0 < \Delta T < T$.

Всегда можно изменить масштаб по оси t так, чтобы период повторения стал равным 1; для этого нужно уменьшить масштаб в T раз, т. е. положить $\varphi(Tt) = f(t)$. Тогда $f(n) = a_n$ и

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq}. \quad (9)$$

Смещенная последовательность, соответствующая периоду повторения 1, будет иметь вид $\{f(n + \varepsilon)\}$, где $\varepsilon = \Delta T/T$ — относительное смещение ($0 < \varepsilon < 1$).

Последовательность $\{f(n)\}$ будем, как правило, обозначать проще: $f(n)$; ее называют также *решетчатой функцией*. Итак, всякая функция $f(t)$, являющаяся оригиналом для обычного преобразования Лапласа, «порождает» решетчатую функцию $f(n)$, для которой определено дискретное преобразование Лапласа $F^*(q)$. Соответствие между $f(n)$ (*оригиналом*) и $F^*(q)$ (изображением) будем записывать в виде

$$f(n) \div F^*(q) \quad \text{или} \quad F^*(q) \div f(n).$$

Дискретное преобразование Лапласа называют также *D-преобразованием* и пишут $F^*(q) = D\{f(n)\}$.

Решетчатая функция $f(n)$ определена только при $n = 0, 1, 2, \dots$. В дальнейшем будем считать, что $f(n) = 0$ при

$n = -1, -2, \dots$. Тогда формула (4) будет справедлива и для целых отрицательных значений n . В самом деле, функция $F(z)$ аналитическая в бесконечно удаленной точке, и поэтому $|F(z)| \leq M$ (M — постоянная) при $|z| \geq R$, где R — радиус окружности C , по которой производится интегрирование. Пользуясь простейшей оценкой модуля интеграла (см. стр. 51), получим

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} M R^{n-1} \cdot 2\pi R = M R^n \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$, если $n < 0$. Это и значит, что $f(n) = a_n = 0$ при $n < 0$.

В дальнейшем мы всегда будем пользоваться следующими обозначениями: n — номер члена последовательности $\{a_n\}$, определяющей данную решетчатую функцию; в правой части равенства (6) ему соответствует слагаемое $a_n e^{-nq}$. Аргумент решетчатой функции принимает только целые значения, причем для отрицательных значений аргумента решетчатая функция равна нулю. Так, например, если k — целое положительное число, то $f(n - k)$ — решетчатая функция, равная нулю при $n < k$, и ее дискретное преобразование определяется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n - k) e^{-nq} = \sum_{n=k}^{\infty} f(n - k) e^{-nq}.$$

Если же взять функцию $f(n + k)$, то ее D -преобразование будет иметь вид $\sum_{n=0}^{\infty} f(n + k) e^{-nq}$.

Заметим еще следующее. Значения порождающей функции $f(t)$ при $t = n + \varepsilon$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) или, что то же самое, значения функции $f(t + \varepsilon)$ при $t = 0, 1, 2, \dots$ ($0 < \varepsilon < 1$) определяют смещенную последовательность, которую будем также называть *смещенной решетчатой функцией* и обозначать $f_{\varepsilon}(n)$; соответствующее дискретное преобразование Лапласа обозначим $F_{\varepsilon}^*(q)$. Для того, чтобы были определены смещенные решетчатые функции $f_{\varepsilon}(n)$, соответствующие всевозможным значениям ε ($0 < \varepsilon < 1$), функция $f(t)$ должна быть определена при всех значениях $t \geq 0$, тогда как сама решетчатая функция $f(n)$ определяется только значениями функции $f(t)$ при $t = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому любое

изменение порождающей функции $f(t)$, при котором не изменяется ее значения при $t=0, 1, 2, \dots$, не отразится на решетчатой функции $f(n)$.

Рассмотрим некоторые простые примеры.

Пример 1. Пусть $f(t) = \eta(t)$ — единичная функция: $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 0$. Воспользуемся найденным z -преобразованием последовательности $\{b^n\}$ (см. (3)); положив $b=1$ и $z=e^q$, получим требуемое соответствие

$$\eta(n) \div \frac{e^q}{e^q - 1}. \quad (10)$$

Пример 2. Пусть $f(t) = e^{at}$. Теперь нужно положить $b=e^a$ и

$$e^{an} \div \frac{e^q}{e^q - e^a}. \quad (11)$$

Для смещенной решетчатой функции $f_e(n) = e^{a(n+\varepsilon)}$ получим

$$e^{a(n+\varepsilon)} \div \frac{e^q e^{a\varepsilon}}{e^q - e^a}. \quad (12)$$

В левых частях соответствий (11) и (12) должны, строго говоря, стоять функции, совпадающие соответственно с e^{an} или $e^{a(n+\varepsilon)}$ при $n=0, 1, 2, \dots$ и равные нулю при $n=-1, -2, \dots$. Это замечание относится и к другим формулам соответствия и в дальнейшем специально повторяться не будет.

Пример 3. Пусть $f(0) = a_0$ и $f(n) = 0$ при $n=1, 2, \dots$. В соответствии с (9) изображение $F^*(q) = a_0$. Это значит, что постоянному изображению соответствует оригинал, значение которого при $n=0$ совпадает с изображением и который равен нулю при всех других значениях n .

§ 2. Свойства дискретного преобразования

121. В этом параграфе будут рассмотрены основные свойства дискретного преобразования Лапласа (D -преобразования). Ввиду того, что эти свойства аналогичны соответствующим свойствам обычного преобразования Лапласа, мы будем по возможности кратки в их формулировках и особенно в доказательствах. В дальнейшем, как правило, решетчатые функции-оригиналы обозначаются символами $f(n), g(n), \dots$, а их изображения — соответственно $F^*(q), G^*(q), \dots$. Для обычного же преобразования Лапласа оригиналы будут обозначаться $f(t), g(t), \dots$, а их изображения — $F(p), G(p), \dots$.

I. Теорема линейности. Для любых действительных или комплексных постоянных A и B

$$Af(n) + Bg(n) \div AF^*(q) + BG^*(q). \quad (13)$$

Доказательство немедленно вытекает из самого определения преобразования. Пользуясь этой теоремой и формулой (11), легко получить соответствие

$$\sin \omega n \div \frac{e^q \sin \omega}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}. \quad (14)$$

При $\omega = \pi$ изображение тождественно равно нулю; так и должно быть, потому что при этом и сама решетчатая функция $\sin \pi n$ равна нулю.

Предоставляем читателю найти изображения $\cos \omega n, \operatorname{sh} \omega n$ и $\operatorname{ch} \omega n$ (они приведены в табл. 4).

II. Теорема затухания (смещение независимого переменного в области изображения). Если a — любое действительное или комплексное число, то

$$e^{an} f(n) \div F^*(q - a). \quad (15)$$

И здесь доказательство сразу следует из определения (9):

$$e^{an} f(n) \div \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{an} e^{-qn} = F^*(q - a).$$

Как и для обычного преобразования Лапласа, с помощью этой теоремы легко получить изображения для произведений тригонометрических и гиперболических функций на показательную.

III. Теоремы запаздывания и опережения (смещение независимой переменной в области оригинала). Если постоянная k — целое положительное число, то

$$f(n - k) \div e^{-qk} F^*(q), \quad (16)$$

$$f(n + k) \div e^{qk} \left[F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) e^{-qr} \right]. \quad (17)$$

Напомним, что под $f(n - k)$ понимается решетчатая функция с аргументом $n - k$; она равна нулю при $n - k < 0$. Так, например, если $f(n) = e^{an}$, то $f(n - 3)$ — решетчатая функция, равная нулю при $n = 0, 1, 2$ и равная $e^{a(n-3)}$ при $n = 3, 4, \dots$

Чтобы доказать формулу (16), запишем соответствие

$$f(n - k) \div \sum_{n=k}^{\infty} f(n - k) e^{-qn}.$$

Полагая под знаком суммы $n - k = r$, получим

$$f(n - k) \div \sum_{r=0}^{\infty} f(r) e^{-q(r+k)} = e^{-qk} F^*(q)$$

(от обозначения индекса суммирования сумма не зависит).

Для доказательства формулы (17) произведем замену $n + k = r$; тогда

$$\begin{aligned} f(n + k) \div \sum_{n=0}^{\infty} f(n + k) e^{-qn} &= \sum_{r=k}^{\infty} f(r) e^{-q(r-k)} = \\ &= e^{qk} \left[\sum_{r=0}^{\infty} f(r) e^{-qr} - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) e^{-qr} \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулы (16) и (10), получим изображение запаздывающей единичной функции

$$\eta(n - k) \div \frac{e^q}{e^q - 1} e^{-qk} = \frac{1}{(e^q - 1) e^{q(k-1)}}, \quad (18)$$

в частности, $\eta(n - 1) \div \frac{1}{e^q - 1}$.

122. Пусть порождающая функция $f(t, x)$ зависит не только от основного переменного t , но и от параметра x ; тогда и соответствующая решетчатая функция $f(n, x)$ также зависит от этого параметра и

$$f(n, x) \div F^*(q, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n, x) e^{-qn}. \quad (19)$$

Будем считать, что выполнены условия, при соблюдении которых правую часть равенства можно почленно дифференцировать по x . Тогда

$$F_x^*(q, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_x(n, x) e^{-qn},$$

и мы получаем следующую теорему:

IV. Теорема о дифференцировании по параметру. Если $f(n, x) \div F^*(q, x)$, то

$$\frac{\partial f(n, x)}{\partial x} \div \frac{\partial F^*(q, x)}{\partial x}. \quad (20)$$

Пусть роль параметра x играет относительное смещение ε , т. е. $f(t, \varepsilon) = f(t + \varepsilon)$ и, следовательно, $f(n, \varepsilon) = f_\varepsilon(n)$. Частная производная функции $f(t + \varepsilon)$ по параметру ε совпадает с производной этой функции по всему аргументу, т. е. с $f'(t + \varepsilon)$. Но функция $f'(t + \varepsilon)$ порождает смещенную решетчатую функцию $f'_\varepsilon(n)$, и поэтому

$$f'_\varepsilon(n) \div \frac{\partial F_\varepsilon^*(q)}{\partial \varepsilon}. \quad (21)$$

123. Переходя к теоремам дифференцирования и интегрирования, изменим по сравнению с § 2 гл. VII порядок их рассмотрения и начнем с соответствующих теорем для изображения.

V. Теорема о дифференцировании изображения. Дифференцирование изображения соответствует умножению оригинала (решетчатой функции) на $-n$

$$-nf(n) \div F^{*'}(q). \quad (22)$$

Теорема следует из возможности почленного дифференцирования ряда (9), определяющего изображение $F^*(q)$; обосновать эту возможность предоставляем читателю самостоятельно.

Повторное дифференцирование приводит к общей формуле

$$(-1)^k n^k f(n) \div F^{*(k)}(q). \quad (23)$$

Применяя эту формулу к соответствию $\eta(n) \div \frac{e^q}{e^q - 1}$, последовательно получим

$$\begin{aligned} n \div \frac{e^q}{(e^q - 1)^2}, \quad n^2 \div \frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}, \\ n^3 \div \frac{e^q(e^{2q} + 4e^q + 1)}{(e^q - 1)^4}, \quad \dots \end{aligned}$$

Значительно более простой вид имеют изображения для последовательностей, определяемых биномиальными коэффициентами

$$\frac{n(n-1)}{2!} \div \frac{e^q}{(e^q - 1)^3}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \div \frac{e^q}{(e^q - 1)^4}, \quad \dots$$

Общая формула такова:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \div \frac{e^q}{(e^q - 1)^{m+1}}. \quad (24)$$

Условимся произведение m множителей $x(x-1)\dots(x-m+1)$, из которых каждый следующий на единицу меньше предыдущего, называть *факториальной функцией* и обозначать символом $x^{[m]}$. Тогда доказываемая нами формула (24) кратко запишется так:

$$\frac{n^{[m]}}{m!} \div \frac{e^q}{(e^q - 1)^{m+1}}. \quad (24')$$

Формулу (24) легко получить, сформулировав теорему о дифференцировании изображения в терминах z -преобразования. Согласно определению

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Последовательно дифференцируя, получим

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -n a_n z^{-(n+1)}, \quad F''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n z^{-(n+2)}, \dots$$

Отсюда видно, что

$$\{n a_n\} \div -z F'(z), \quad \{n(n+1) a_n\} \div z^2 F''(z), \dots \\ \dots, \{n(n+1)\dots(n+m-1) a_n\} \div (-1)^m z^m F^{(m)}(z). \quad (25)$$

Произведя дифференцирование и заменив z на e^q , получим правые части соответствий в терминах D -преобразования (мы пользуемся для D -преобразования и z -преобразования одним и тем же символом соответствия).

Применим формулу (25) к единичной решетчатой функции $\{a_n\} = \eta(n)$; для нее $a_n = 1$ и $F(z) = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$. Последовательные производные равны

$$F'(z) = -(z-1)^{-2}, \quad F''(z) = 2!(z-1)^{-3}, \dots, \quad F^{(m)}(z) = (-1)^m m! (z-1)^{-(m+1)}.$$

Поэтому

$$\{n(n+1)\dots(n+m-1)\} \div \frac{m! z^m}{(z-1)^{m+1}} = \frac{m! e^{qm}}{(e^q - 1)^{m+1}}.$$

Воспользуемся еще теоремой запаздывания (см. формулу (16)), положив $k = m-1$; при этом в последней формуле нужно всюду заменить n на $n-m+1$. Расположив множи-

тели в обратном порядке и разделив на $m!$, приходим к формуле (24).

VI. Теорема об интегрировании изображения. Если $f(0) = 0$ и если принять, что $\frac{f(n)}{n} \Big|_{n=0} = 0$, то

$$\frac{f(n)}{n} \div \int_q^{\infty} F^*(q) dq. \quad (26)$$

Действительно, в силу условия теоремы

$$F^*(q) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-qn}.$$

Интегрируя и замечая, что $\int_q^{\infty} e^{-qn} dq = \frac{e^{-qn}}{n}$, приходим к доказываемой теореме (законность почленного интегрирования ряда легко обосновывается).

Например, если $f(n) = \eta(n-1)$, то $F^*(q) = \frac{1}{e^q - 1}$ и

$$\frac{\eta(n-1)}{n} \div \int_q^{\infty} \frac{dq}{e^q - 1} = \ln \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Заметим, что решетчатая функция $\frac{\eta(n-1)}{n}$ соответствует последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

124. Введем определение конечных разностей функции¹⁾. Пусть $f(t)$ — заданная функция и $\Delta t = h$ — фиксированное приращение независимого переменного t (*шаг*). *Первой разностью* или *разностью первого порядка* называется выражение

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t). \quad (27)$$

Аналогично, *разность второго порядка* определяется как

$$\Delta^2 f(t) = \Delta \Delta f(t) = \Delta f(t+h) - \Delta f(t).$$

¹⁾ Понятие конечной разности лежит в основе теории интерполяции и играет важную роль в численных методах анализа (см., например, книгу Б. П. Демидовича и И. А. Марона, Основы вычислительной математики, «Наука», 1967).

Так как $\Delta f(t+h) = f(t+2h) - f(t+h)$, то

$$\Delta^2 f(t) = f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t). \quad (28)$$

Вообще, разность k -го порядка равна

$$\Delta^k f(t) = \Delta \Delta^{k-1} f(t) = \Delta^{k-1} f(t+h) - \Delta^{k-1} f(t). \quad (29)$$

Все последовательные разности можно выразить через значения функции $f(t)$ в точках $t+rh$ ($r=0, 1, 2, \dots$). Так,

$$\Delta^3 f(t) = f(t+3h) - 3f(t+2h) + 3f(t+h) - f(t).$$

Общая формула такова:

$$\Delta^k f(t) = f(t+kh) - C_k^1 f(t+(k-1)h) + \\ + C_k^2 f(t+(k-2)h) - \dots + (-1)^k f(t), \quad (30)$$

где $C_k^r = \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} = \frac{k^{[r]}}{r!}$ — биномиальные коэффициенты.

Обратно, значения функции $f(t)$ в точках $t+h, t+2h, \dots, t+kh$ можно выразить через $f(t), \Delta f(t), \dots, \Delta^k f(t)$. Имеем $f(t+h) = f(t) + \Delta f(t)$,

$$f(t+2h) = f(t+h) + \Delta f(t+h) = \\ = f(t) + \Delta f(t) + \Delta f(t) + \Delta^2 f(t) = f(t) + 2\Delta f(t) + \Delta^2 f(t)$$

и, вообще,

$$f(t+kh) = f(t) + C_k^1 \Delta f(t) + C_k^2 \Delta^2 f(t) + \dots + \Delta^k f(t). \quad (31)$$

Когда речь идет о конечных разностях решетчатой функции $f(n)$, то шаг h считают равным 1 (периоду повторения) и $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Например, если $f(n) = an$, то $\Delta f(n) = a$; все последующие разности этой функции, очевидно, равны нулю.

Если $f(n) = n^2$, то $\Delta f(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $\Delta^2 f(n) = 2$, $\Delta^3 f(n) = \Delta^4 f(n) = \dots = 0$.

Легко проверить, что последовательные разности функции $f(n) = n^k$ являются многочленами понижающихся степеней и $\Delta^k f(n) = k!$. Все последующие разности равны нулю.

Очень просто выражаются разности факториальных функций:

$$\Delta n^{[k]} = k n^{[k-1]}, \quad \Delta^2 n^{[k]} = k(k-1) n^{[k-2]}, \quad \dots,$$

они похожи на производные степенной функции.

Для показательной функции e^{an} первая разность $\Delta e^{an} = e^{a(n+1)} - e^{an} = (e^a - 1)e^{an}$. Вторая разность $\Delta^2 e^{an} = (e^a - 1)^2 e^{an}$ и, вообще,

$$\Delta^k e^{an} = (e^a - 1)^k e^{an}.$$

125. Покажем, что при изучении дискретного преобразования Лапласа конечные разности играют роль, аналогичную той, которую играют производные для обычного преобразования Лапласа.

VII. Теорема о разности решетчатой функции. Если $f(n) \div F^*(q)$, то

$$\Delta f(n) \div (e^q - 1) F^*(q) - e^q f(0). \quad (32)$$

Доказательство следует из теоремы опережения (см. формулу (17)), согласно которой $f(n+1) \div e^q [F^*(q) - f(0)]$. Применяя к разности $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ теорему линейности, получаем требуемую формулу.

Повторно применяя формулу (32), получим сначала изображение разности второго порядка:

$$\Delta^2 f(n) \div (e^q - 1)^2 F^*(q) - (e^q - 1)e^q f(0) - e^q \Delta f(0), \quad (33)$$

а затем и любого k -го порядка:

$$\Delta^k f(n) \div (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q [(e^q - 1)^{k-1} f(0) + \\ + (e^q - 1)^{k-2} \Delta f(0) + \dots + (e^q - 1) \Delta^{k-2} f(0) + \Delta^{k-1} f(0)]. \quad (34)$$

Можно было бы заменить все разности $\Delta^k f(0)$ их выражениями через значения функции в соответствующих точках по формуле (30), однако тогда формула соответствия приняла бы более громоздкий вид. Заметим только, что если $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = \Delta^2 f(0) = \dots = \Delta^{k-1} f(0) = 0$ (тогда и $f(1) = f(2) = \dots = f(k-1) = 0$), то формула (34) упрощается,

$$\Delta^k f(n) \div (e^q - 1)^k F^*(q). \quad (35)$$

При обычном преобразовании Лапласа это соответствует случаю, когда начальные значения оригинала $f(t)$ и его производных равны нулю.

Если в анализе обратным действием по отношению к дифференцированию является интегрирование, то при рассмотрении конечных разностей обратным действием образованию первой разности является суммирование.

Суммой решетчатой функции $f(n)$ называется решетчатая функция $g(n)$, определенная следующим образом:

$$g(0)=0, \quad g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (36)$$

В частности, $g(1)=f(0)$, $g(2)=f(0)+f(1)$, ...

Ясно, что исходная функция $f(n)$ служит для функции $g(n)$ первой разностью:

$$\Delta g(n)=g(n+1)-g(n)=f(n). \quad (36')$$

VIII. Теорема о сумме решетчатой функции.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \div \frac{F^*(q)}{e^q - 1}. \quad (37)$$

Пусть

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = g(n) \div G^*(q).$$

Так как $g(0)=0$, то по формуле (35) $\Delta g(n)=f(n) \div (e^q - 1) G^*(q) = F^*(q)$, т. е.

$$G^*(q) = \frac{F^*(q)}{e^q - 1},$$

и формула (37) доказана.

126. Между значениями решетчатой функции-оригинала и ее изображения в нуле и на бесконечности имеют место соотношения, подобные установленным в п. 89 для обычного преобразования Лапласа. Напомним, что функция $F(z)$, являющаяся z -преобразованием последовательности $f(n)$, аналитична в бесконечности (см. п. 118) и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = a_0 = f(0).$$

Поэтому

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F^*(q) = f(0). \quad (38)$$

Заметим, что если $z \rightarrow \infty$, то $q \rightarrow \infty$, так что $\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty$. Это предполагается в формуле (38) и в других формулах, на ней основанных. Из определения функции $F(z)$ (см. равен-

ство (1)) получаем также $\lim_{z \rightarrow \infty} z [F(z) - a_0] = a_1 = f(1)$. Поэтому

$$\lim_{q \rightarrow \infty} e^q [F^*(q) - f(0)] = f(1).$$

Аналогично,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \{e^{2q} [F^*(q) - f(0)] - f(1)e^q\} = f(2) \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим соответствие

$$\varphi(n) \div \Phi^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) e^{-qn};$$

если предположить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ сходится, то в этом соответствии можно положить $q=0$, и тогда

$$\Phi^*(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n). \quad (39)$$

Так, в частности будет, если величина α , входящая в условие (2) роста оригинала, отрицательна (см. также п. 92).

Пусть теперь функция $\varphi(n)$ является первой разностью решетчатой функции $f(n)$, для которой существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = f(\infty).$$

Тогда ряд (39) сходится, так как $\varphi(n) = \Delta f(n)$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = f(\infty) - f(0).$$

Поэтому $\Phi^*(0) = f(\infty) - f(0)$.

Если $f(n) \div F^*(q)$, то по формуле (32)

$$\Delta f(n) = \varphi(n) \div (e^q - 1) F^*(q) - f(0) = \Phi^*(q).$$

Переходя к пределу при $q \rightarrow 0$ и пользуясь значением $\Phi^*(0)$, получим

$$\lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) F^*(q) = f(\infty). \quad (40)$$

Отсюда, в частности, следует, что если $q=0$ — правильная точка для изображения $F^*(q)$, то $f(\infty)=0$. Предоставляем читателю самостоятельно подобрать примеры, иллюстрирующие выведенные предельные соотношения.

127. Введем определение *свертки* решетчатых функций

$$f(n) * g(n) = \sum_{r=0}^n f(n-r) g(r). \quad (41)$$

Легко проверить, что свертка коммутативна, т. е. $f * g = g * f$. Ясно, что свертка является решетчатой функцией.

IX. Теорема умножения изображений. Произведению изображений соответствует свертка оригиналов

$$f(n) * g(n) \div F^*(q) G^*(q). \quad (42)$$

Для доказательства умножим обе части равенства

$$G^*(q) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} g(r)$$

на $F^*(q)$ и внесем этот множитель под знак суммы:

$$F^*(q) G^*(q) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} F^*(q) g(r).$$

По теореме запаздывания $e^{-qr} F^*(q) \div f(n-r)$, и по теореме линейности

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} F^*(q) g(r) \div \sum_{r=0}^{\infty} f(n-r) g(r) = \sum_{r=0}^n f(n-r) g(r),$$

так как при $r > n$ значения $f(n-r)$ равны нулю. Теорема доказана.

Сверткой изображений называется функция

$$F^*(q) * G^*(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\pi}^{\gamma + i\pi} F^*(s) G^*(q-s) ds. \quad (43)$$

Предполагается, что функции F^* и G^* аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re} q > \alpha$ и $\gamma > \alpha$. Тогда свертка аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} q > \alpha + \gamma$. В этой полуплоскости $\operatorname{Re}(q-s) > \alpha$, когда точка s находится на отрезке интегрирования $[\gamma - i\pi, \gamma + i\pi]$, и поэтому обе функции, стоящие под знаком интеграла в правой части (42), — аналитические. Предоставляем читателю проверить, что свертка изображений также обладает свойством коммутативности.

X. Теорема умножения оригиналов. Произведению оригиналов соответствует свертка изображений:

$$f(n) g(n) \div F^*(q) * G^*(q). \quad (44)$$

Доказательство этой теоремы удобнее провести в терминах z -преобразования. Обозначим $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$; тогда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$. Пусть оба ряда сходятся при $|z| > R$. Рассмотрим интеграл (называемый *сверткой z -преобразований*)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(\zeta) G\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (45)$$

где C — окружность $|\zeta| = R' > R$ и $|z| > RR'$ (последнее условие обеспечивает аналитичность $G\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ как функции ζ на окружности C и внутри нее). Интеграл (45) сразу вычисляется по теореме о вычетах, если заменить функции F и G их разложениями и найти коэффициент при ζ^{-1} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\zeta) G\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \zeta^n}{z^n} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= a_0 b_0 + \frac{a_1 b_1}{z} + \dots + \frac{a_n b_n}{z^n} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что интеграл (45) является z -преобразованием последовательности $\{a_n b_n\}$, т. е. решетчатой функции $f(n) g(n)$.

Переходя к D -преобразованию, положим $\zeta = e^s$, $d\zeta = e^s ds$, $z = e^q$. При этом $F(\zeta) = F^*(s)$, $G(z/\zeta) = G(e^{q-s}) = G^*(q-s)$ и окружность C преобразуется в отрезок $[\gamma - \pi i, \gamma + \pi i]$, где $\gamma = e^{R'} > e^R = \alpha$. Таким образом, интегралы (43) и (45) равны между собой; это и значит, что свертка $F^*(q) * G^*(q)$ есть D -преобразование произведения $f(n) g(n)$.

Пользуясь результатами двух последних пунктов, читатель сможет самостоятельно доказать *формулу Парсеваля* (см. п. 106) для дискретного преобразования Лапласа: если

для решетчатой функции $f(n)$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} [f(n)]^2$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(n)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(i\omega) F^*(-i\omega) d\omega.$$

Таблица 4

Формулы соответствия для D -преобразования

Номер формулы	Оригинал $f(n)$	Изображение $F^*(q)$
1	$\gamma(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0, \\ 1 & \text{при } n \geq 0 \end{cases}$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$
2	n	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}$
3	n^2	$\frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}$
4	n^3	$\frac{e^q(e^{2q} + 4e^q + 1)}{(e^q - 1)^4}$
5	n^4	$\frac{e^q(e^{3q} + 11e^{2q} + 11e^q + 1)}{(e^q - 1)^5}$
6	$n^{[2]} = n(n-1)$	$2 \frac{e^q}{(e^q - 1)^3}$
7	$n^{[k]} = n(n-1) \dots (n-k+1)$	$k! \frac{e^q}{(e^q - 1)^{k+1}}$
8	e^{an}	$\frac{e^q}{e^q - e^a}$
9	ne^{an}	$\frac{e^q e^a}{(e^q - e^a)^2}$
10	$n^2 e^{an}$	$\frac{e^q e^a (e^q + e^a)}{(e^q - e^a)^3}$
11	$n^{[2]} e^{an}$	$2 \frac{e^q e^{2a}}{(e^q - e^a)^3}$
12	$n^{[k]} e^{an}$	$k! \frac{e^q e^{ka}}{(e^q - e^a)^{k+1}}$
13	$\sin \omega n$	$\frac{e^q \sin \omega}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}$
14	$\cos \omega n$	$\frac{(e^q - \cos \omega) e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + 1}$

¹⁾ При $n < 0$ все оригиналы $f(n)$ считаются равными нулю.

Продолжение табл. 4

Номер формулы	Оригинал $f(n)$	Изображение $F^*(q)$
15	$\text{sh } \omega n$	$\frac{e^q \text{sh } \omega}{e^{2q} - 2e^q \text{ch } \omega + 1}$
16	$\text{ch } \omega n$	$\frac{(e^q - \text{ch } \omega) e^q}{e^{2q} - 2e^q \text{ch } \omega + 1}$
17	$e^{an} \sin \omega n$	$\frac{e^q e^a \sin \omega}{e^{2q} - 2e^q e^a \cos \omega + e^{2a}}$
18	$e^{an} \cos \omega n$	$\frac{(e^q - e^a \cos \omega) e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos \omega + e^{2a}}$
19	$\frac{\sin \omega n}{n}$	$\omega + \text{arctg } \frac{\sin \omega}{e^q - \cos \omega}$
20	$(-1)^n \frac{\sin \omega n}{n}$	$\omega - \text{arctg } \frac{\sin \omega}{e^q + \cos \omega}$

128. Приведем в заключение краткую таблицу формул соответствия для дискретного преобразования Лапласа (табл. 4); формулы для z -преобразования получаются путем замены e^q на z . Более подробные таблицы такого рода содержатся в книгах Я. З. Цыпкина, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, 1963 (в терминах D -преобразования) и Э. Джурин, Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1963 (в терминах z -преобразования). Впрочем, и приведенную таблицу легко расширить при помощи изложенных свойств дискретного преобразования.

§ 3. Формулы разложения

129. Общие формулы для отыскания оригинала по заданному изображению были приведены в § 1; это — формула (4) в терминах z -преобразования и формула (7) в терминах D -преобразования. В этом параграфе мы рассмотрим наиболее важный для практического применения дискретного преобразования случай, когда изображение является рациональной функцией от e^q :

$$F^*(q) = \frac{C^*(q)}{B^*(q)} = \frac{c_0 e^{qm} + c_1 e^{q(m-1)} + \dots + c_m}{b_0 e^{qr} + b_1 e^{q(r-1)} + \dots + b_r}. \quad (46)$$

В терминах z -преобразования этому соответствует отношение двух многочленов

$$F(z) = \frac{C(z)}{B(z)} = \frac{c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m}{b_0 z^r + b_1 z^{r-1} + \dots + b_r}, \quad (47)$$

причем степень числителя не может превышать степени знаменателя ($m \leq r$), так как $z = \infty$ — правильная точка для функции $F(z)$ (см. п. 118).

Если $m = r$, то можно разделить числитель на знаменатель и выделить целую часть; ясно, что она будет равна $c_0/b_0 = F(\infty) = F^*(\infty)$. В соответствии с формулой (38) на стр. 312 это будет значение оригинала $f(n)$ при $n = 0$. Оставшаяся дробная часть $F(z)$ представляет уже правильную дробь, равную нулю на бесконечности; ей соответствует оригинал, равный нулю при $n = 0$.

В дальнейшем всегда предполагается, что целая часть (если она есть) уже выделена и дробь (47) — правильная, т. е. $m < r$.

Как и в п. 99, требуемые формулы получаются путем разложения рациональной функции $F(z) = C(z)/B(z)$ на простейшие дроби. Пусть сначала все корни z_k знаменателя $B(z)$ простые; они являются простыми полюсами функции $F(z)$ и поэтому ее разложение на простые дроби имеет вид

$$F(z) = \frac{C(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{d_k}{z - z_k}.$$

Коэффициенты d_k — вычеты $F(z)$ в простых полюсах, следовательно, $d_k = C(z_k)/B'(z_k)$.

Перейдем к переменной q ($z = e^q$) и обозначим $z_k = e^{\ln z_k} = e^{q_k}$; тогда

$$\frac{C^*(q)}{B^*(q)} = \sum_{k=1}^r \frac{d_k}{e^q - e^{q_k}}. \quad (48)$$

Выражения для коэффициентов разложения можно записать в виде

$$d_k = \frac{C^*(q)}{\dot{B}^*(q)}, \quad (49)$$

обозначая точкой дифференцирование по e^q .

Применим теперь к уже встречавшемуся соответствию $e^{an} \leftrightarrow \frac{e^q}{e^q - e^a}$ теорему запаздывания, положив в формуле (16) $k = 1$:

$$\frac{1}{e^q - e^a} \leftrightarrow \psi(n), \text{ где } \psi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ e^{a(n-1)}, & \text{если } n \geq 1. \end{cases} \quad (50)$$

Применив теорему линейности, получим из (48) и (50) формулу разложения

$$\frac{C^*(q)}{B^*(q)} \leftrightarrow \sum_{k=1}^r d_k e^{q_k(n-1)} = \sum_{k=1}^r d_k z_k^{n-1}, \quad (51)$$

правую часть которой следует при $n = 0$ заменить нулем; в последующих аналогичных формулах это будет всегда подразумеваться.

Проследим, как ведут себя отдельные оригиналы-слагаемые в сумме (51) при $n \rightarrow \infty$. Если $|z_k| = |e^{q_k}| > 1$, то $\operatorname{Re} q_k = \ln |z_k| > 0$ и $|e^{q_k n}| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$; значит, соответствующее слагаемое оригинала по модулю неограниченно возрастает.

Если $|z_k| < 1$, то $\operatorname{Re} q_k < 0$, и соответствующее слагаемое оригинала стремится к нулю: $|e^{q_k n}| \rightarrow 0$. В частности, корню $z_k = 0$ (при $\operatorname{Re} q_k = -\infty$) соответствует в оригинале слагаемое, равное d_k при $n = 1$ и 0 при $n > 1$.

Наконец, если $|z_k| = 1$, т. е. $z_k = e^{i\varphi_k}$, то соответствующее слагаемое оригинала $d_k e^{i\varphi_k(n-1)}$ — функция с постоянным модулем $|d_k|$ и колеблющимся аргументом.

Если знаменатель $B(z)$ имеет корень $z_k = 1$, то он играет ту же роль, что и корень $p = 0$ в формулах разложения обычного преобразования Лапласа. В этом случае $q_k = 0$, и соответствующее слагаемое есть постоянная решетчатая функция $d_k \eta(n-1)$.

Если один из корней знаменателя $B(z)$ равен 1, то, введя обозначение $B^*(q) = (e^q - 1) \dot{B}_1^*(q)$, легко получить аналог формулы (67) п. 99:

$$\frac{A^*(q)}{(e^q - 1) \dot{B}_1^*(q)} \leftrightarrow \frac{A^*(0)}{\dot{B}_1^*(0)} + \sum_{k=2}^r \frac{A^*(q_k)}{(e^{q_k} - 1) \dot{B}_1^*(q_k)} e^{q_k(n-1)}. \quad (52)$$

Если коэффициенты многочленов $C(z)$ и $B(z)$ — действительные числа, то комплексно-сопряженным корням знаменателя $B(z)$ соответствуют комплексно-сопряженные слагаемые в суммах, входящих в правые части (51) или (52). Эти слагаемые можно объединить, получая линейные комбинации решетчатых функций $e^{an} \cos \beta n$ и $e^{an} \sin \beta n$ с действительными коэффициентами (это будет аналог формулы (68) п. 99).

Если все корни знаменателя $B(z)$ простые и по модулю не превосходят единицы, то слагаемые оригинала, соответствующие корням с модулями, равными 1, характеризуют *установившийся колебательный процесс*, так как все остальные слагаемые стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ (см. стр. 241).

130. Перейдем к изучению общего случая, когда знаменатель $B(z)$ имеет кратные корни. Пусть, например, корень α имеет кратность s . Запишем разложение функции $F(z)$ в виде

$$F(z) = \frac{C(z)}{B(z)} = \frac{d_1}{z-\alpha} + \dots + \frac{d_\nu}{(z-\alpha)^\nu} + \dots + \frac{d_s}{(z-\alpha)^s} + \varphi(z), \quad (53)$$

где $\varphi(z)$ — сумма всех остальных слагаемых, отвечающих другим корням. Найдем прежде всего оригинал, соответствующий изображению $(z-\alpha)^{-\nu}$ или $(e^q - e^\alpha)^{-\nu}$, где $e^\alpha = \alpha$. Будем опираться на формулу (24'), полагая в ней $m = \nu - 1$:

$$\frac{n!^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \div \frac{e^q}{(e^q - 1)^\nu}.$$

Применим сначала теорему затухания (формула (15)):

$$e^{an} \frac{n!^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \div \frac{e^{q-\alpha}}{(e^{q-\alpha} - 1)^\nu} = \frac{e^{q-\alpha} e^{a(\nu-1)}}{(e^q - e^\alpha)^\nu},$$

а затем теорему запаздывания (при $k=1$):

$$e^{a(n-\nu)} \frac{(n-1)!^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \div \frac{1}{(e^q - e^\alpha)^\nu} \quad (54)$$

(числовой множитель $e^{a(\nu-1)}$ перенесен в левую часть соответствия). Так как $(n-1)!^{\nu-1} = (n-1)(n-2)\dots(n-(\nu-1))$, то оригинал в левой части равен нулю при $n=1, 2, \dots, \nu-1$ (кроме того, он равен нулю и при $n=0$). При $\nu=1$ мы снова возвращаемся к формуле (50), если условились, что $x^{(0)}=1$ и $0!=1$.

Формула (54) позволяет найти оригиналы для каждого слагаемого в разложении (53) на простейшие дроби и записать общий вид соответствия:

$$\frac{C^*(q)}{B^*(q)} \div \sum_a \sum_{\nu=1}^s d_\nu \frac{(n-1)!^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{a(n-\nu)}, \quad (55)$$

где символ a под знаком внешней суммы означает суммирование по всем значениям a , соответствующим корням $B(z)$.

Можно написать общие выражения для коэффициентов d_ν . Перепишем разложение (53) в виде

$$F(z)(z-\alpha)^s = d_s + \dots + d_\nu (z-\alpha)^{s-\nu} + \dots + d_1 (z-\alpha)^{s-1} + \varphi(z)(z-\alpha)^s,$$

замечаем, что d_ν есть $(s-\nu)$ -й коэффициент разложения левой части в ряд Тейлора по степеням $(z-\alpha)$. Поэтому

$$d_\nu = \frac{1}{(s-\nu)!} \left[\frac{C(z)(z-\alpha)^s}{B(z)} \right]_{z=\alpha}^{(s-\nu)}. \quad (56)$$

При $\nu=1$ получаем d_1 — вычет в кратном полюсе.

§ 4. Связь между преобразованием Лапласа, D-преобразованием и преобразованием Лапласа — Стильеса

131. Покажем, как можно прийти к дискретному преобразованию Лапласа, совершая некоторый предельный переход в обычном преобразовании Лапласа. Этот переход в значительной мере выясняет физический смысл дискретного преобразования решетчатых функций и его связь с работой импульсных систем.

Возьмем некоторый оригинал $f(t)$ и соответствующую ему ступенчатую функцию $f^*(t)$, равную $f(n)$ в каждом интервале $[n, n+1)$ (т. е. при $n \leq t < n+1$). Эту ступенчатую функцию можно записать в виде суммы

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) [\eta(t-n) - \eta(t-(n+1))]. \quad (57)$$

Построение графиков функций $f^*(t)$ и $\eta(t-n) - \eta(t-(n+1))$ показано на стр. 234 (нужно только на рис. 111 и 112 считать, что $\tau_n = n$).

Каждый отдельный прямоугольный импульс — слагаемое в формуле (55) — деформируем, не изменяя площади соответствующего прямоугольника, а именно: строим прямоугольник, основанием которого служит отрезок между точками n и $n + \tau$ (длины τ), а высота равна $\frac{1}{\tau} f(n)$. Иначе говоря, мы уменьшаем время действия импульса, сохраняя его величину. Сумму таких деформированных импульсов обозначим через $f_{\tau}^*(t)$:

$$f_{\tau}^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{\eta(t-n) - \eta(t-(n+\tau))}{\tau}. \quad (58)$$

Ясно, что в каждом из интервалов $[n, n + \tau)$ функция $f_{\tau}^*(t)$ равна $\frac{1}{\tau} f(n)$, а вне этих интервалов она равна нулю.

Вспомяная формулу для изображения единичного импульса (см. п. 85), будем иметь

$$f_{\tau}^*(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{1 - e^{-p\tau}}{p\tau} e^{-pn} \quad (59)$$

(это обычное, а не дискретное преобразование Лапласа!).

Перейдем формально к пределу при $\tau \rightarrow 0$; это означает, что мы переходим к последовательности дискретных мгновенных импульсов, равных по величине $f(n)$. Так как

$$\frac{1 - e^{-p\tau}}{p\tau} \rightarrow 1 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0,$$

то в правой части формулы (59) получим $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-pn}$, т. е.

дискретное преобразование Лапласа решетчатой функции $f(n)$ (переменная, от которой зависит F^* , обозначена теперь через p , а не через q , как раньше).

Таким образом, дискретное преобразование Лапласа решетчатой функции $f(n)$ в некотором смысле близко к обычному преобразованию Лапласа функции $f_{\tau}^*(t)$ при малых τ .

Осуществим только что указанный предельный переход несколько иначе. Вместо функции $f_{\tau}^*(t)$ возьмем функцию $f_{\tau}(t)$, равную

$$f_{\tau}(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta(t-n) - \eta(t-(n+\tau))}{\tau}. \quad (60)$$

Отличие ее от функции $f_{\tau}^*(t)$ состоит в том, что на каждом интервале $[n, n + \tau)$ она равна не постоянной величине $\frac{1}{\tau} f(n)$, а $\frac{1}{\tau} f(t)$; вне этих интервалов она тоже равна нулю¹⁾. Довольно ясно, что если функция $f(t)$ непрерывна, то при $\tau \rightarrow 0$ получается та же дискретная последовательность импульсов, что и раньше; поэтому можно считать, что изображения функций $f_{\tau}(t)$ и $f_{\tau}^*(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ будут сближаться.

Функция $f_{\tau}(t)$ представляет собой произведение двух оригиналов; через $F(p)$ обозначим изображение первого множителя: $f(t) \doteq F(p)$. Второй множитель есть сумма единичных импульсов, поделенная на длительность импульса τ ; изображение такой суммы равно $\frac{1 - e^{-p\tau}}{p\tau (1 - e^{-p})}$ (см. стр. 205; в доказанном там соответствии следует положить $T=1$).

По теореме умножения оригиналов для преобразования Лапласа (см. п. 94)

$$f_{\tau}(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p-z) \frac{1 - e^{-z\tau}}{z\tau (1 - e^{-z})} dz. \quad (61)$$

При $\tau \rightarrow 0$, как уже было отмечено, правая часть будет приближаться к $F^*(p)$ — дискретному преобразованию Лапласа решетчатой функции $f(n)$:

$$\begin{aligned} F^*(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p-z) \frac{1}{1 - e^{-z}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z) \frac{1}{1 - e^{-(p-z)}} dz \end{aligned} \quad (62)$$

(последнее равенство написано в силу коммутативности свертки).

¹⁾ Предел правой части равенства (60) можно записать очень компактно, если воспользоваться определением δ -функции, данным в п. 88. Каждое слагаемое под знаком суммы при $\tau \rightarrow 0$ представляет производную сдвинутой единичной функции, т. е. $\delta(t-n)$.

Поэтому $\lim_{\tau \rightarrow 0} f_{\tau}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \delta(t-n)$.

Как указано в п. 94, линия интегрирования разделяет особые точки обоих множителей в подынтегральном выражении.

Функция $\frac{1}{1-e^{-z}}$ имеет бесконечное число особых точек (полюсов первого порядка), лежащих на мнимой оси; это корни уравнения $1 - e^{-z} = 0$, т. е. точки $z_k = 2k\pi i$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если переменную z заменить на $p - z$, где p фиксировано, то корнями будут точки $p + 2k\pi i$ (рис. 124). Пусть, далее, изображение $F(z)$ аналитично при $\operatorname{Re} z > \alpha$; так как $\gamma > \alpha$, то все особые точки $F(z)$ лежат левее линии интегрирования.

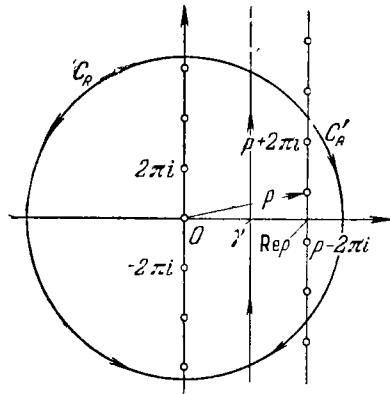


Рис. 124.

Как обычно, вычисление интегралов вида (62) постараемся свести к вычислению интегралов по замкнутым контурам (рис. 124). При такой замене надо уметь вычислять интегралы по дугам окружностей; часто бывает, что эти интегралы стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$ (как это было, например, в лемме Жордана). В нашем случае, если $F(z)$ имеет на бесконечности нуль второго или более высокого порядка, т. е. разложение $F(z)$ в ряд Лорана имеет вид

$$F(z) = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_1}{z} + \dots, \quad (63)$$

то интеграл по дуге C_R радиуса R , расположенной левее прямой $\operatorname{Re} z = \gamma$, стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Доказательство этого совершенно аналогично приведенному в п. 67, нужно только учесть, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \gamma$ второй множитель подынтегрального выражения ограничен.

С дугой C'_R дело обстоит сложнее, так как она может проходить через особые точки подынтегральной функции или приближаться к этим точкам. Однако если выбрать только такие значения R , для которых расстояние особых точек от дуги C'_R превосходит некоторое положительное число,

то можно доказать, что и на C'_R второй множитель подынтегрального выражения ограничен и интеграл также стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. (Именно об этом случае шла речь в замечании на стр. 237; там же указаны книги, в которых сделанные утверждения доказываются.)

Рассмотрим контур, состоящий из прямой $\operatorname{Re} z = \gamma$ и дуги окружности C'_R , выбранной как указано выше. Этот контур обходится по часовой стрелке; вычеты подынтегральной функции в особых точках равны $-F(p + 2k\pi i)$ (производная знаменателя по z при $z = p + 2k\pi i$ равна -1). Применяя основную теорему о вычетах и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем формулу

$$F^*(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(p + 2k\pi i), \quad (64)$$

выражающую дискретное преобразование Лапласа решетчатой функции $f(n)$ через обычное преобразование Лапласа функции $f(t)$.

Из разложения (63) следует, что $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = 0$.

Если бы было $f(0) \neq 0$, то в правой части формулы (64) появилось бы дополнительное слагаемое $\frac{1}{2}f(0)$ — не равный ли теперь нулю предел интегралов по дугам C'_R при $R \rightarrow \infty$.

Интегрирование по контуру, состоящему из прямой и полуокружности C_R и охватывающему особые точки изображения $F(z)$, не приводит к новым результатам: просто получается в несколько ином виде формула обращения для дискретного преобразования Лапласа, в частности, если $F(z)$ — рациональная функция, то формула разложения.

132. Пусть на интервале $[a, b]$ заданы функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, причем функция $f(t)$ на этом интервале непрерывна. Точки t_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$), выбранные так, что $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$, определяют разбиение интервала $[a, b]$ на частичные интервалы $[t_{i-1}, t_i]$. Диаметром разбиения назовем наибольшую из длин этих частичных интервалов: $\max(t_i - t_{i-1}) = \delta$. Выбрав произвольно в каждом частичном интервале $[t_{i-1}, t_i]$ точку τ_i ($t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$), составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^k f(\tau_i) [\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^k f(\tau_i) \Delta \varphi(t_i). \quad (65)$$

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $\delta \rightarrow 0$, называется *интегралом Стильеса* от функции $f(t)$ и обозначается

$$\lim \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta\varphi(t_i) = \int_a^b f(t) d\varphi(t). \quad (66)$$

Функцию $\varphi(t)$ называют *функцией распределения*. Ясно, что интеграл Стильеса с функцией распределения $\varphi(t) = t$ есть обычный определенный интеграл $\int_a^b f(t) dt$. Заметим, что замена $\varphi(t)$ на $\varphi(t) + C$ не влияет на значение интегральной суммы (65), а значит, и на значение интеграла.

До сих пор мы ничего не говорили о свойствах функции распределения $\varphi(t)$, а именно с ними связан вопрос о существовании интеграла Стильеса. Предположим, что существует такая постоянная M , что при любом разбиении интервала $[a, b]$ на частичные соблюдается неравенство $\sum_{i=1}^k |\Delta\varphi(t_i)| < M$. Функции $\varphi(t)$, обладающие таким свойством, называются *функциями с ограниченной вариацией* на интервале $[a, b]$. Например, любая монотонная ограниченная функция $\psi(t)$ (безразлично, непрерывная или нет) будет функцией с ограниченной вариацией; для такой функции $M = |\psi(b) - \psi(a)|$.

Можно доказать, что если $\varphi(t)$ — функция с ограниченной вариацией на интервале $[a, b]$, то для любой непрерывной функции $f(t)$ существует предел интегральной суммы (65) при $\delta \rightarrow 0$, т. е. интеграл Стильеса. Этот предел не зависит ни от способа разбиения интервала на частичные, ни от выбора промежуточных точек τ_i .

Если функция распределения $\varphi(t)$ дифференцируема в интервале $[a, b]$ и ее производная $\varphi'(t)$ ограничена, то интеграл Стильеса сводится к обычному интегралу

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_a^b f(t) \varphi'(t) dt. \quad (67)$$

Однако для существования интеграла Стильеса совсем не обязательно дифференцируемость и даже непрерывность функции $\varphi(t)$ как уже отмечено, функция с ограниченной вариацией может быть и разрывной. Именно поэтому с помощью интеграла Стильеса можно описывать процессы не только непрерывные, но и дискретные. С этим связаны многочисленные применения интеграла Стильеса, в частности, в теории вероятностей.

Предположим, что $\varphi(t)$ является функцией с ограниченной вариацией на интервале $[a, x]$ при любом $x > a$, т. е. что для любого x существует такая величина $M(x)$, что

$$\sum_{i=1}^k |\Delta\varphi(t_i)| < M(x) \quad (68)$$

при любых разбиениях интервала $[a, x]$. Тогда интеграл $\int_a^x f(t) d\varphi(t)$ существует при всех $x > a$. *Несобственный интеграл Стильеса* определяется, как обычно, с помощью предельного перехода

$$\int_a^\infty f(t) d\varphi(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) d\varphi(t). \quad (69)$$

133. Интеграл

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} d\varphi(t), \quad (70)$$

где p — комплексный параметр, называется *интегралом* или *преобразованием Лапласа — Стильеса* ($\varphi(t)$ — *оригинал*, $\Phi(p)$ — *образ*).

Если функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на любом интервале $[0, x]$ и функция $M(x)$, входящая в неравенство (68), такова, что $M(x) < Ce^{\alpha x}$, где C и α — постоянные, то интеграл Лапласа — Стильеса сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и функция $\Phi(p)$ в этой полуплоскости является аналитической. Доказательство этого утверждения мы не приводим, равно как и доказательство того, что преобразование Лапласа — Стильеса обладает многими уже известными нам свойствами обычного и дискретного преобразований Лапласа.

Покажем теперь, что как обычное, так и дискретное преобразование Лапласа являются частными случаями преобразования Лапласа — Стильеса. Пусть сначала функция $\varphi(t)$ дифференцируема и ее производная $\varphi'(t)$ может служить оригиналом для обычного преобразования Лапласа. Тогда из равенства

$$\int_0^\infty e^{-pt} d\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi'(t) dt \quad (71)$$

следует, что в этом случае преобразование Лапласа — Стильеса для функции $\varphi(t)$ превращается в обычное преобразование Лапласа для функции $\varphi'(t)$.

Пусть теперь задана последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условию $|a_n| < Ke^{\alpha n}$. Построим ступенчатую (кусочно-постоянную) функцию $g(t)$, определив ее следующим образом: $g(t) = 0$ при $t \leq 0$, $g(t) = a_0$ при $0 < t \leq 1$, $g(t) = a_0 + a_1$ при $1 < t \leq 2, \dots$, $g(t) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ при $n < t \leq n+1$. Функция $g(t)$ постоянна на каждом из интервалов $(n, n+1]$.

Проверим, что построенная функция $g(t)$ удовлетворяет условию, обеспечивающему сходимость соответствующего ей интеграла Лапласа — Стильеса. Действительно, если m — наибольшее целое число, меньшее, чем x , то при любом разбиении интервала $[0, x]$,

очевидно, справедливо неравенство $\sum \Delta g(t_i) \leq \sum_{n=0}^m |a_n|$. Считая,

что $\alpha > 0$ (при $\alpha \leq 0$ проверка совсем проста), получим

$$\sum_{n=0}^m |u_n| \leq K \sum_{n=0}^m e^{\alpha n} = K \frac{e^{\alpha(m+1)} - 1}{e^{\alpha} - 1} < C e^{\alpha m} \leq C e^{\alpha x}, \quad (72)$$

где $C = K \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - 1}$. Поэтому $\int_0^{\infty} e^{-pt} dg(t)$ сходится при $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Составим для интеграла $\int_0^x e^{-pt} dg(t)$ интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^k e^{-p\tau_i} [g(t_i) - g(t_{i-1})]. \quad (73)$$

Возьмем произвольное разбиение интервала $[0, x]$ с диаметром δ , меньшим единицы, и пусть t_i — точки, определяющие это разбиение. Так как $t_i - t_{i-1} \leq \delta < 1$, то две соседние точки t_{i-1} и t_i либо попадают в один и тот же интервал $(n, n+1]$, где n — некоторое целое число, и тогда соответствующее слагаемое интегральной суммы равно нулю, либо t_{i-1} и t_i принадлежат соседним интервалам $n-1 < t_{i-1} \leq n$ и $n < t_i \leq n+1$, и тогда $g(t_i) - g(t_{i-1}) = a_n$. При этом соответствующее слагаемое интегральной суммы (73) можно считать равным $a_n e^{-p\tau_i}$, положив $\tau_i = n$. При таком выборе τ_i интегральная сумма (73) для любого разбиения с $\delta < 1$ становится

равной $\sum_{n=0}^m a_n e^{-p\tau_n}$, где m — наибольшее целое число, меньшее,

чем x . Поэтому $\int_0^x e^{-pt} dg(t)$ также равен этой сумме и переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-p\tau_n}. \quad (74)$$

Таким образом, преобразование Лапласа — Стильтьеса для построенной функции $g(t)$ совпадает с дискретным преобразованием Лапласа для последовательности $\{a_n\}$. Решетчатая функция, определенная последовательностью $\{a_n\}$, порождается при этом функцией $g(t+1) - g(t)$.

134. Пусть функция распределения $\varphi(t)$ является оригиналом для обычного преобразования Лапласа и $\varphi(0) = 0$. Примем без доказательства, что для интеграла Стильтьеса справедлива формула интегрирования по частям; тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} d\varphi(t) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt \quad (75)$$

(в правой части должно стоять еще слагаемое $e^{-pt} \varphi(t) \Big|_0^{\infty}$, но оно исчезает, так как $\varphi(0) = 0$, а $e^{-pt} \varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Re} p$ достаточно велико).

Если производная $\varphi'(t)$ тоже является оригиналом, то, заменяя интеграл в левой части по формуле (71), мы просто получим частный случай теоремы о дифференцировании оригинала. Поэтому для нас сейчас наиболее интересен случай, когда формула (71) неприменима, т. е. производная $\varphi'(t)$ либо не существует либо не может служить оригиналом.

Применим формулу (75) к кусочно-постоянной функции $g(t)$, построенной выше для последовательности $\{a_n\}$ (легко проверить, что $g(t)$ является оригиналом для обычного преобразования Лапласа). Тогда левая часть равенства (75) совпадает с D -преобразованием последовательности $\{a_n\}$ (см. формулу (74)) и тем самым D -преобразование сведется к преобразованию Лапласа — Карсона от функции $g(t)$ (см. стр. 242).

Убедиться в справедливости сказанного можно и не пользуясь теорией интеграла Стильтьеса. Для этого нужно обычным путем найти преобразование Лапласа от функции $g(t)$; умножив его на p , получим как раз D -преобразование последовательности $\{a_n\}$. Очень рекомендуем читателю выполнить это самостоятельно.

В приложениях встречается и такой случай, когда функция $f(t)$ представляет сумму двух слагаемых: непрерывной и дифференцируемой функции $\varphi(t)$ и кусочно-постоянной функции $g(t)$, построенной для некоторой последовательности $\{a_n\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} d\varphi(t) + \int_0^{\infty} e^{-pt} dg(t) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi'(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-p\tau_n}. \end{aligned} \quad (76)$$

Это значит, что преобразование Лапласа — Стильтьеса функции $f(t)$ свелось к сумме двух преобразований: обычного преобразования Лапласа функции $\varphi'(t)$ и дискретного преобразования последовательности $\{a_n\}$ ¹⁾.

§ 5. Решение разностных уравнений

135. Уравнение вида

$$\Phi[n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)] = 0 \quad (77)$$

или

$$\tilde{\Phi}[n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)] = 0, \quad (78)$$

¹⁾ Читателю, желающему подробно ознакомиться с теорией преобразования Лапласа — Стильтьеса, рекомендуем обратиться к монографии D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton, 1946.

где $f(n)$ — искомая решетчатая функция, называется *разностным уравнением* (или *уравнением в конечных разностях* (см. п. 124)). Шаг разности будем всегда считать равным единице. Разности $\Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)$ можно по формулам (30) выразить через значения $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)$ и свести уравнение вида (78) к уравнению вида (77). Обратно, уравнение вида (77) сводится к уравнению вида (78) при помощи формулы (31).

Мы ограничимся рассмотрением лишь линейных разностных уравнений k -го порядка с постоянными коэффициентами

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n). \quad (79)$$

Здесь $\varphi(n)$ — заданная решетчатая функция (если $\varphi(n) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*), а коэффициент a_k отличен от нуля (если $a_k = 0$, то положив $n+1 = m$, получим уравнение более низкого порядка).

Пусть заданы значения $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$ (*начальные значения*). Применяя к обеим частям уравнения (79) дискретное преобразование Лапласа и пользуясь теоремой опережения (формула (17)), получим уравнение, из которого найдем изображение $F^*(q)$ искомой функции $f(n)$. Далее, пользуясь таблицей или формулами разложения (а в случае необходимости — общей формулой обращения (7)), получим искомую решетчатую функцию $f(n)$. Если начальные значения $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$ не заданы, то, считая их произвольными постоянными, получим *общее решение* уравнения (79).

Если исходное линейное разностное уравнение записано в виде

$$\Delta^k f(n) + b_1 \Delta^{k-1} f(n) + \dots + b_k f(n) = \varphi(n), \quad (80)$$

то метод его решения остается тем же, но для перехода от оригинала к изображению в левой части уравнения вместо теоремы опережения следует воспользоваться теоремой о разности решетчатой функции (формула (34)). При этом должны быть заданы начальные значения $f(0), \Delta f(0), \dots, \Delta^{k-1} f(0)$; если эти значения не заданы, то, считая их, как раньше, произвольными постоянными, получим общее решение.

Указанный метод можно применять и при решении систем разностных уравнений.

Дальнейшие вопросы, связанные с линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, будут рассмотрены в ходе решения примеров.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0 \quad (81)$$

при начальных условиях $f(0) = f_0, f(1) = f_1$.

Перейдем к изображениям, применяя формулу (17),

$$e^{2q} [F^*(q) - f_0 - f_1 e^{-q}] - 5e^q [F^*(q) - f_0] + 6F^*(q) = 0.$$

Отсюда

$$F^*(q) = \frac{f_0 e^{2q} + (f_1 - 5f_0) e^q}{e^{2q} - 5e^q + 6}$$

или после выделения целой части

$$F^*(q) = f_0 + \frac{f_1 e^q - 6f_0}{e^{2q} - 5e^q + 6} = f_0 + \frac{C(z)}{B(z)}$$

$$(z = e^q, \quad C(z) = f_1 z - 6f_0, \quad B(z) = z^2 - 5z + 6).$$

$B(z)$ имеет корни $z_1 = 2, z_2 = 3$; поэтому

$$\frac{C(z)}{B(z)} = \frac{d_1}{z-2} + \frac{d_2}{z-3},$$

$$\text{где } d_1 = \frac{C(2)}{B'(2)} = -2(f_1 - 3f_0), \quad d_2 = \frac{C(3)}{B'(3)} = 3(f_1 - 2f_0).$$

Итак, в соответствии с формулой (48)

$$F^*(q) = f_0 - \frac{2(f_1 - 3f_0)}{e^q - 2} + \frac{3(f_1 - 2f_0)}{e^q - 3},$$

и на основании формулы (51) заключаем, что решение $f(n)$ разностного уравнения (81) при $n \geq 1$ имеет вид

$$f(n) = -2(f_1 - 3f_0) 2^{n-1} + 3(f_1 - 2f_0) 3^{n-1}.$$

При $n=0$ значение $f(n)$ известно — оно равно f_0 (напомним, что оригинал для постоянного слагаемого f_0 равен нулю при всех $n \geq 1$).

Если f_0 и f_1 произвольны, то полученное решение — общее. Его можно записать также в виде $f(n) = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Если бы выкладки, аналогичные приведенным в примере 1, мы проделали в общем виде для однородного разностного уравнения, соответствующего уравнению (79), то, как нетрудно видеть, пришли бы к равенству

$$F^*(q) = f_0 + \frac{C(e^q)}{B(e^q)} = f_0 + \frac{C(z)}{B(z)},$$

где $\frac{C(z)}{B(z)}$ — правильная рациональная дробь и

$$B(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$$

(a_1, \dots, a_k — коэффициенты уравнения (79)). Уравнение $B(z) = 0$ называется *характеристическим уравнением* для соответствующего разностного уравнения.

Решение $f(n)$ однородного разностного уравнения вида (79) представляет собой, в соответствии с результатами § 3, линейную комбинацию показательных функций и произведений степенных функций на показательные. При этом все показательные функции, входящие в решение, имеют вид $e^{n \ln z_k} = z_k^n$, где z_k — корни характеристического уравнения.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\Delta^2 f(n) - 2\Delta f(n) + f(n) = 2$$

при начальных условиях $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 1$.

Здесь уравнение дано в форме (80). Применяя D -преобразование к обеим частям заданного уравнения и пользуясь формулой (34), получим

$$[(e^q - 1)^2 - 2(e^q - 1) + 1] F^*(q) - e^q = \frac{2e^q}{e^q - 1}$$

(в правой части уравнения следовало бы, строго говоря, писать не 2, а $2\eta(n)$, так как всегда предполагается, что оригинал равен нулю при $n < 0$). После простых выкладок найдем

$$F^*(q) = \frac{e^{2q} + e^q}{(e^q - 1)(e^q - 2)^2} = \frac{z^2 + z}{(z - 1)(z - 2)^2}, \text{ где } z = e^q.$$

Разлагая правую часть на простые дроби

$$\frac{z^2 + z}{(z - 1)(z - 2)^2} = \frac{2}{z - 1} - \frac{1}{z - 2} + \frac{6}{(z - 2)^2}$$

и переходя к оригиналам, получим

$$f(n) = 2 - 2^{n-1} + 6(n-1)2^{n-2} = 2 + \left(\frac{3}{2}n - 2\right)2^n.$$

Заметим, что коэффициент при $F^*(q)$ в D -преобразовании левой части уравнения (80) всегда равен

$$(e^q - 1)^k + b_1(e^q - 1)^{k-1} + \dots + b_k.$$

Соответственно, уравнение

$$(z - 1)^k + b_1(z - 1)^{k-1} + \dots + b_k = 0$$

является характеристическим для уравнения (80).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IX

1. Проверить формулы 9, 10, 11, 17—20 таблицы 4.
2. Найти решение разностного уравнения

$$f(n+4) - 16f(n) = 30n + 7$$

при начальных условиях

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -5.$$

3. Найти решение разностного уравнения

$$\Delta^2 f(n) - 6\Delta f(n) + 9f(n) = 0$$

при начальных условиях

$$f(0) = 1, \quad \Delta f(0) = -1.$$

ВВЕДЕНИЕ

В практических задачах, сводящихся к интегрированию дифференциальных уравнений, начальные значения обычно являются результатом измерения и, следовательно, содержат некоторую погрешность.

Поэтому естественно возникает вопрос о влиянии малых изменений начальных значений на искомое решение данного дифференциального уравнения.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных значений способны сильно изменить решение, то решение, определяемое неочными начальными значениями, обычно не будет иметь прикладного значения, так как оно даже приближенно не будет описывать изучаемое явление.

Следовательно, возникает крайне важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых малое изменение начальных значений вызывает малое изменение определяемого этими условиями решения.

Рассмотрим например, дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) = f(t, x). \quad (1)$$

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение этого уравнения, определяемое начальным условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$, а $x = x(t)$ — решение, соответствующее измененному начальному условию $x(t_0) = x_0$. Предполагается, что решения $\varphi(t)$ и $x(t)$ определены для всех $t \geq t_0$.

Решение $\varphi(t)$ называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta(\varepsilon)$$

следует неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

при $t \geq t_0$; это значит, что решения, близкие по начальным значениям, остаются близкими и при всех $t \geq t_0$.

Если решение $\varphi(t)$ устойчиво и существует $\delta_1 > 0$ такое, что из неравенства $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta_1$ следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \varphi(t)] = 0,$$

то решение называется *асимптотически устойчивым*; решения, близкие по начальным значениям к асимптотически устойчивому решению, не только остаются близкими к нему при $t \geq t_0$, но и неограниченно сближаются с ним при возрастании t .

Решение, не обладающее свойством устойчивости, называется *неустойчивым*.

Аналогично определяются понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для решения системы дифференциальных уравнений первого порядка (см. § 2 гл. X).

Другая задача, рассматриваемая теорией устойчивости, связана с изучением влияния на решения уравнения (1) малого изменения функции $f(t, x)$ — правой части уравнения. Этот вопрос также весьма важен для приложений, так как для описания какого-нибудь явления всегда приходится упрощать, идеализировать это явление, учитывая лишь наиболее существенные из влияющих на него факторов и отбрасывая остальные, менее существенные. При этом всегда возникает вопрос, удачно ли выбраны упрощающие предположения. Возможно, что неучтенные факторы сильно влияют на изучаемое явление, значительно изменяя его количественные и даже качественные характеристики.

В конечном счете этот вопрос решается практикой — соответствием или несоответствием полученных теоретических выводов с опытными данными, но все же во многих случаях можно указать условия, при которых некоторые упрощения заведомо недопустимы.

Например, если при сколь угодно малом изменении правой части уравнения (1) решения могут сильно измениться, то упрощающие предположения, сводящиеся к такому

изменению правой части в (1), в большинстве случаев будут недопустимы.

Исследование на устойчивость некоторого решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1) может быть заменой переменных $y = x - \varphi(t)$ сведено к исследованию на устойчивость *нулевого*, или, как часто говорят, *тривиального* решения $y \equiv 0$.

Поэтому в дальнейшем во всех случаях на устойчивость исследуется тривиальное решение уравнений.

Заметим, что уравнение n -го порядка

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (2)$$

с помощью введения новых вспомогательных функций $\dot{x} = x_1$, $\ddot{x} = x_2$, ..., $x^{(n-1)} = x_{n-1}$ может быть преобразовано в систему n уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1} &= f(t, x, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Точно так же можно свести систему дифференциальных уравнений любого порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Поэтому в дальнейшем почти всюду на устойчивость исследуются системы уравнений первого порядка.

Для уравнения (2) устойчивость некоторого решения $\varphi(t)$ будет означать близость при $t \geq t_0$ решений $x(t)$ и $\varphi(t)$ и их производных до порядка $n-1$ включительно, если начальные значения этих решений и их производных до порядка $n-1$ достаточно близки в начальной точке.

В дальнейшем предполагается, что читатель знаком с теорией дифференциальных уравнений (например, в объеме гл. X книги [1]), и мы поэтому лишь напомним некоторые основные сведения.

ГЛАВА X

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Линейные системы с постоянными коэффициентами

136. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с непрерывными коэффициентами

$$x^{(n)} + p_1(t) x^{(n-1)} + \dots + p_n(t) x = 0 \quad (1)$$

имеет вид

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t), \quad (2)$$

где c_i — произвольные постоянные, а $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ — линейно независимые частные решения.

Напомним, что система функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ называется *линейно независимой* на отрезке $a \leq t \leq b$, если тождество

$$\alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0 \quad (3)$$

на отрезке $a \leq t \leq b$ возможно лишь при равенстве нулю всех постоянных α_i .

Если же существуют α_i не все равные нулю, при которых имеет место тождество (3), то функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $a \leq t \leq b$. Другими словами, линейная зависимость означает, что на отрезке $a \leq t \leq b$ хотя бы одну из функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Признаком линейной независимости решений x_1, x_2, \dots, x_n уравнения (1) может служить неравенство нулю *определителя Вронского*:

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Если же $W(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, то решения x_1, x_2, \dots, x_n уравнения (1) линейно зависимы. (Для краткости аргумент функций $x_i(t)$ часто не пишется.) Общее решение линейного неоднородного уравнения n -го порядка с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = f(t) \quad (4)$$

равно сумме общего решения (2) соответствующего однородного уравнения (1) и какого-нибудь частного решения $\bar{x}(t)$ неоднородного уравнения (4):

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + \bar{x}(t).$$

Пример 1. Уравнение $\ddot{x} - x = 0$ имеет очевидные линейно независимые частные решения $x = e^t$ и $x = e^{-t}$. Следовательно, его общим решением является $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Пример 2. Уравнение $\ddot{x} - x = 1 - t$ имеет очевидное частное решение $x = t - 1$, следовательно, его общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t - 1.$$

Нахождение частных решений линейных однородных и неоднородных уравнений является весьма сложной задачей, причем часто приходится искать решения в виде сумм бесконечных рядов того или иного вида, однако для некоторых классов уравнений, например для уравнений с постоянными коэффициентами, эта задача решается сравнительно легко.

137. Частные решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (5)$$

можно искать в виде $x = e^{kt}$. Подставляя $x = e^{kt}$ в уравнение (5) и сокращая на e^{kt} , получим для определения k так называемое *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (6)$$

Если все корни k_1, k_2, \dots, k_n этого уравнения различны, то частные решения $e^{k_1 t}, e^{k_2 t}, \dots, e^{k_n t}$, как нетрудно проверить, линейно независимы и, следовательно, общим решением является

$$x = c_1 e^{k_1 t} + \dots + c_n e^{k_n t}.$$

Если среди корней характеристического уравнения (6) есть кратные, то можно доказать, что корню k кратности r соответствуют r решений вида $e^{kt}, t e^{kt}, \dots, t^{r-1} e^{kt}$. Общее решение уравнения (5) имеет при этом вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^m P_i(t) e^{k_i t}, \quad (7)$$

где m — число различных корней характеристического уравнения (6), а $P_i(t)$ — многочлен с произвольными коэффициентами степени на единицу ниже кратности корня k_i (в частности, если k_i — простой корень, то его кратность $r_i = 1$ и $P_i(t) = c_i$).

Пример 3. Найти общее решение уравнения $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$.

Корнями характеристического уравнения $k^2 - 3k + 2 = 0$ являются $k_1 = 1, k_2 = 2$, следовательно, общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x + x = 0$.

Характеристическое уравнение

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0, \text{ или } (k + 1)^3 = 0,$$

имеет трехкратный корень $k_{1,2,3} = -1$. Следовательно, общим решением является

$$x = (c_1 t^2 + c_2 t + c_3) e^{-t}.$$

Если характеристическое уравнение (6) имеет комплексные корни, то решение можно записывать в прежнем виде (7), но часто удобнее записать его с помощью формул Эйлера в действительной форме.

$$x_1 = x_{1n}(t), \quad x_2 = x_{2n}(t), \quad \dots, \quad x_n = x_{nn}(t),$$

и определитель Вронского этой совокупности решений

$$W = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то общее решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 x_{11}(t) + c_2 x_{12}(t) + \dots + c_n x_{1n}(t), \\ x_2 &= c_1 x_{21}(t) + c_2 x_{22}(t) + \dots + c_n x_{2n}(t), \\ &\dots \\ x_n &= c_1 x_{n1}(t) + c_2 x_{n2}(t) + \dots + c_n x_{nn}(t), \end{aligned}$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — произвольные постоянные.

Систему уравнений (8) удобно записывать в матричной форме

$$\dot{X} = AX, \quad (9)$$

где X и A — матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

(X можно рассматривать и как вектор с координатами x_1, x_2, \dots, x_n).

Общее решение уравнения (9) (или системы (8)) имеет вид

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n,$$

где X_1, X_2, \dots, X_n — линейно независимые частные решения уравнения (9); каждое из них является матрицей-столбцом

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Матрицы (или векторы) X_i называются *линейно зависимыми* на отрезке $a \leq t \leq b$, если существуют такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n \equiv 0 \quad (10)$$

при $a \leq t \leq b$, причем не все α_i равны нулю.

Если же тождество (10) справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то матрицы (векторы) X_i называются *линейно независимыми*.

Заметим, что одно матричное (векторное) равенство (10) эквивалентно n скалярным равенствам:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \dots + \alpha_n x_{1n} = 0, \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_n x_{2n} = 0, \\ \dots \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \dots + \alpha_n x_{nn} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

В случае линейной зависимости матриц X_1, X_2, \dots, X_n система n линейных однородных уравнений (11) с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеет нетривиальное решение (т. е. решение, в котором не все неизвестные α_i равны нулю), что, как известно, возможно лишь в случае обращения определителя системы (11) в нуль.

Итак, необходимым условием линейной зависимости вектор-функций X_1, \dots, X_n является обращение в нуль определителя, составленного из координат этих векторов:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель для решения X_1, \dots, X_n системы уравнений (9) (или (8)) и называется *определителем Вронского* для этой системы. Можно доказать, что для системы (8) с непрерывными коэффициентами в случае линейной независимости решений определитель Вронского W не обращается в нуль ни в одной точке.

Общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (12)$$

(все $a_{ij}(t)$ и $b_i(t)$ непрерывны) равно сумме общего решения соответствующей однородной системы (8) и произвольного частного решения неоднородной системы (12).

Подбор частных решений линейных однородных или неоднородных систем уравнений весьма сложен, но для систем уравнений с постоянными коэффициентами задача значительно упрощается.

Частные решения линейной однородной системы с действительными постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (13)$$

можно искать в виде

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \dots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt}, \quad (14)$$

где α_i и k — постоянные.

Подставляя (14) в (13), сокращая на e^{kt} и перенося все члены в каждом уравнении в одну часть равенства, получим:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Линейная однородная относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ система уравнений (15) всегда имеет нулевое решение: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, которому в силу (14) соответствует нулевое (тривиальное) решение системы дифференциальных уравнений (13)

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = 0.$$

Для того чтобы система (15) имела ненулевое решение, т. е. такое решение, в котором не все α_i равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (15) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Если это уравнение n -й степени относительно k , называемое *характеристическим*, имеет различные корни k_1, k_2, \dots, k_n , то, подставляя в систему (15) по очереди какой-нибудь из

этих корней k_i , находим соответствующие значения $\alpha_1 = \alpha_{1i}, \alpha_2 = \alpha_{2i}, \dots, \alpha_n = \alpha_{ni}$ и тем самым находим решение исходной системы

$$x_{1i} = \alpha_{1i} e^{k_i t}, \quad x_{2i} = \alpha_{2i} e^{k_i t}, \quad \dots, \quad x_{ni} = \alpha_{ni} e^{k_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что в рассматриваемом случае система (15) определяет α_i лишь с точностью до постоянного множителя. Нетрудно доказать линейную независимость этих решений. Следовательно, общее решение системы (13) имеет вид

$$x_1 = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{1i} e^{k_i t}, \quad x_2 = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{2i} e^{k_i t}, \quad \dots, \quad x_n = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_{ni} e^{k_i t}, \quad (17)$$

где все c_i — произвольные постоянные.

Пример 10. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}.$$

Для определения α_1 и α_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - k)\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (-2 - k)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Определяем k из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2 - k & -1 \\ 3 & -2 - k \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $k^2 - 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$.

Следовательно, при $k = 1$ для определения α_1 и α_2 получим

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение является следствием первого, поэтому α_1 остается произвольным, например, можно считать $\alpha_1 = 1$, тогда $\alpha_2 = \alpha_1 = 1$. Следовательно, решением, например, будет:

$$x = e^t, \quad y = e^t.$$

Аналогично при $k = -1$ получим

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

$x_2 = 3\alpha_1$, а α_1 остается произвольным; можно считать, например, $\alpha_1 = 1$, тогда $x_2 = 3$. Следовательно, решением системы, например, является $x = e^{-t}$, $y = 3e^{-t}$. Поэтому общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\y &= c_1 e^t + 3c_2 e^{-t}.\end{aligned}$$

Если характеристическое уравнение имеет некоторый корень k кратности r , то соответствующее ему решение системы (13) можно искать в виде

$$x_1 = P_1(t) e^{kt}, \quad x_2 = P_2(t) e^{kt}, \quad \dots, \quad x_n = P_n(t) e^{kt}, \quad (18)$$

где все $P_i(t)$ — многочлены степени $r-1$ с неопределенными коэффициентами, которые вычисляют путем подстановки (18) в (13); при этом ровно r коэффициентов останутся произвольными постоянными, а остальные выразятся через них. Может случиться, что коэффициенты при старших членах некоторых (или даже всех) многочленов $P_i(t)$ окажутся равными нулю. Тогда степени этих многочленов окажутся ниже, чем $r-1$, и могут даже равняться нулю.

Если среди корней характеристического уравнения есть комплексные, то можно преобразовать решения вида (14) (или (18)) по формулам Эйлера и, взяв действительную и мнимую части в отдельности, получить решения той же системы (13) в действительном виде.

Частные решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами в простейших случаях легко подбираются, а в более сложных случаях находятся операционными методами (см. § 2 гл. VIII) или методом вариации произвольных постоянных.

§ 2. Основные понятия теории устойчивости

139. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (19)$$

Пусть $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ — решение этой системы, определяемое начальными условиями

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_{10}, \quad \varphi_2(t_0) = \varphi_{20}, \dots, \varphi_n(t_0) = \varphi_{n0},$$

а $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ — решение, соответствующее измененным начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \dots, \quad x_n(t_0) = x_{n0},$$

причем все функции $\varphi_i(t)$ и $x_i(t)$ определены при любых $t \geq t_0$.

Решение $x_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) назовем устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из совокупности неравенств

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

следуют неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

при $t \geq t_0$. Это значит, что в случае устойчивости решения, достаточно близкие по начальным значениям, остаются близкими при неограниченном возрастании аргумента t .

Решение $\varphi_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво, и решения $x_i(t)$, достаточно близкие к решению $\varphi_i(t)$ по начальным значениям:

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1,$$

неограниченно сближаются при возрастании t :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_i(t) - \varphi_i(t)] = 0.$$

Решения, не обладающие свойством устойчивости, называются *неустойчивыми*.

Например, решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x} = ax \quad (20)$$

при постоянном a устойчиво, если $a \leq 0$, асимптотически устойчиво, если $a < 0$, и неустойчиво, если $a > 0$.

Действительно, решение уравнения (20), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, имеет вид

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}.$$

При $a \leq 0$ и $t \geq t_0$ справедливо неравенство $e^{a(t-t_0)} \leq 1$, следовательно, $|x| = |x_0| e^{a(t-t_0)} < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, если $|x_0| < \varepsilon$.

Если $a < 0$, то $e^{a(t-t_0)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и при любом x_0 получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Если же $a > 0$, то при любом сколь угодно малом $|x_0|$ (лишь бы $x_0 \neq 0$) решение $x = x_0 e^{a(t-t_0)}$ при больших t не может удовлетворять условию $|x(t)| < \varepsilon$, так как $|x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

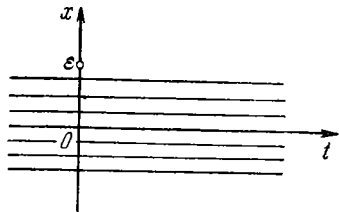


Рис. 125.

На рисунках 125, 126 и 127 изображены семейства интегральных кривых уравнения (20), соответствующие случаям $a = 0$, $a < 0$ и $a > 0$.

В рассмотренном примере при $a < 0$ решения уравнения (20) стремятся при $t \rightarrow \infty$ к решению $x \equiv 0$ со скоростью показательной функции e^{at} . В этом случае иногда говорят, что решение $x \equiv 0$ *асимптотически устойчиво по показательному закону*.

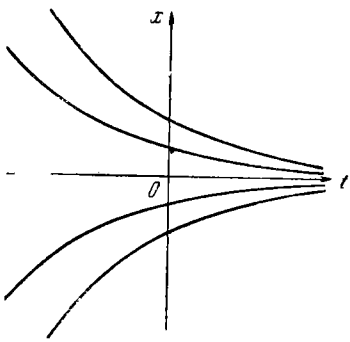


Рис. 126.

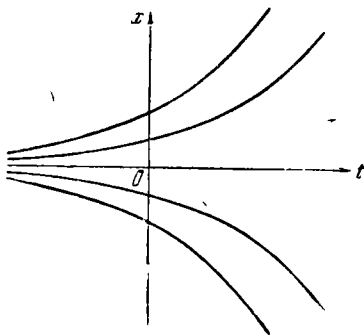


Рис. 127.

Решение $\varphi_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) системы (19) называется *асимптотически устойчивым в целом*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_i(t) - \varphi_i(t)] = 0,$$

где $x_i(t)$ — решение, определяемое любыми начальными значениями $x_i(t_0)$, а не только значениями, близкими к начальным значениям $\varphi_i(t_0)$. Для уравнения (20) при $a < 0$ ре-

шение $x \equiv 0$ является асимптотически устойчивым в целом, так как $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при любых t_0 и x_0 .

140. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

Каждому решению этой системы

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

соответствует интегральная кривая в $(n+1)$ -мерном пространстве переменных t, x_1, \dots, x_n . Часто удобно, независимо от физического смысла переменных, рассматривать x_1, x_2, \dots, x_n как координаты точки в n -мерном пространстве, а t считать временем. Тогда решение (22) можно рассматривать как закон движения в этом пространстве.

Эти же уравнения (22) могут служить параметрическими уравнениями (t — параметр) линии в пространстве переменных x_1, \dots, x_n , называемой *траекторией*.

Если система (21) имеет решение $x_i = x_{i0}$ ($i=1, 2, \dots, n$), где все x_{i0} — постоянные, то траектория сводится к одной точке $M(x_{10}, \dots, x_{n0})$, называемой в этом случае *точкой покоя* системы (21). В частности, тривиальное (нулевое) решение $x_i \equiv 0$ некоторой системы является точкой покоя этой системы, расположенной в начале координат.

Заметим, что при исследовании на устойчивость тривиального решения $\varphi_i(t) \equiv 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) определение устойчивости, данное на стр. 347, принимает вид: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует $|x_i(t)| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Вместо этого определения устойчивости тривиального решения $x_i \equiv 0$ часто берут следующее ему эквивалентное: точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) называется *устойчивой*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из

$$\text{неравенства } \sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta^2(\varepsilon) \text{ следует } \sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2 \text{ при } t \geq t_0,$$

то есть если начальная точка находится внутри шара¹⁾ радиуса δ с центром в начале координат, то при $t \geq t_0$ траектория не выйдет за пределы шара радиуса ε с тем же центром.

¹⁾ Имеется в виду шар в n -мерном пространстве. При $n=3$ это обычный шар, при $n=2$ — круг, при $n=1$ — интервал $(-\delta, \delta)$.

Определение асимптотической устойчивости для тривиального решения $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) сводится к требованию устойчивости и, кроме того, к выполнению условий $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) =$

$= 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при $\sum_{i=1}^n x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\epsilon)$. Это означает, что

траектории, начальные точки которых лежат внутри шара достаточно малого радиуса δ_1 , не только остаются внутри шара радиуса ϵ при $t \geq t_0$, но, кроме того, асимптотически приближаются к центру шара (к началу координат) при $t \rightarrow \infty$.

141. Исследуемое на устойчивость решение $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы уравнений (21) можно преобразовать в тривиальное решение $y_i = 0$ другой системы заменой $y_i = x_i - \varphi_i(t)$. Смысл замены состоит в том, что за новые неизвестные функции принимаются *отклонения* $x_i - \varphi_i(t)$ координат точки траектории, определяемой произвольным решением системы (21), от соответствующих координат точки на траектории, определяемой исследуемым решением $\varphi_i(t)$. Отклонения $x_i - \varphi_i(t)$ также называют *возмущениями*.

При указанной замене система (21) преобразуется к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1 + \varphi_1, y_2 + \varphi_2, \dots, y_n + \varphi_n) - \frac{d\varphi_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

При этом ясно, что исследование устойчивости решения $\varphi_i(t)$ системы (21) сводится к исследованию соответствующего ему тривиального решения $y_i \equiv 0$ системы (23).

Поэтому в дальнейшем всюду будет исследоваться на устойчивость тривиальное решение.

Заметим, что если система уравнений (21) линейна,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (24)$$

то, преобразуя любое его частное решение $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в тривиальное с помощью замены $y_i = x_i - \varphi_i(t)$, получим соответствующую линейную однородную систему уравнений.

Действительно, при этом, как следует из (23), система (24) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [y_j + \varphi_j(t)] + b_i(t) - \frac{d\varphi_i}{dt} = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \varphi_j(t) + b_i(t) - \frac{d\varphi_i}{dt}. \end{aligned}$$

Но так как $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ — решение системы (24), то

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \varphi_j(t) + b_i(t)$$

и, окончательно,

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

Следовательно, все частные решения системы (24) в смысле устойчивости ведут себя одинаково, а именно, так же как тривиальное решение соответствующей однородной системы (25). (Разумеется, это относится и к тому частному случаю, когда все $b_i(t) = 0$, т. е. система (24) однородна.) Например, все решения линейного уравнения

$$\dot{x} - ax = f(t)$$

при постоянном $a < 0$ и непрерывной функции $f(t)$ асимптотически устойчивы, так как при $a < 0$ асимптотически устойчиво тривиальное решение уравнения $\dot{x} - ax = 0$ (см. стр. 347)

Пример 1. Исследовать на устойчивость решения уравнения $\dot{x} + e^t x = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\ln |x| = -e^t + \ln C, \quad x = Ce^{-e^t}.$$

Таким образом, тривиальное решение, а следовательно, и все решения асимптотически устойчивы в целом.

Пример 2. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Интегрируя, получим

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad y = c_1 \sin t - c_2 \cos t.$$

Все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет: для малых c_1 и c_2 модули x и y остаются малыми при любых $t \geq t_0$, но x и y не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пример 3. Уравнение $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ имеет общее решение

$$x = e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Все решения устойчивы в целом; при любых c_1 и c_2 функции x и \dot{x} стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пример 4. Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$x^{IV} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0.$$

Это уравнение имеет очевидное решение e^t , а следовательно, и семейство решений ce^t , которые при любом $c \neq 0$ неограниченно возрастают по абсолютной величине, если $t \rightarrow \infty$. Значит, решение $x \equiv 0$ неустойчиво; поэтому неустойчивы и все другие решения.

§ 3. Условия устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами

142. Условием асимптотической устойчивости решений линейного уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом

$$\dot{x} = ax,$$

как было указано на стр. 347—348, является $a < 0$ или, что то же самое, отрицательность корня характеристического уравнения $k - a = 0$.

Рассмотрим теперь подробнее случай системы двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (26)$$

Согласно сказанному на стр. 344, ищем решение в виде

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26) и сокращая на e^{kt} , получим для определения α_1 и α_2 систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Для того чтобы система (28) имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Из полученного характеристического уравнения определяются значения k .

Итак, решая уравнение (29), определяем два корня: $k = k_1$ и $k = k_2$. Если $k_1 \neq k_2$, то, подставляя эти корни по очереди в систему (28), определяем соответствующие этим корням две пары значений α_1 и α_2 , которые мы обозначим $(\alpha_{11}, \alpha_{21})$ и $(\alpha_{12}, \alpha_{22})$. Заметим, что так как определитель системы (28) равен нулю при $k = k_1$ или $k = k_2$, то одно из уравнений является следствием другого и поэтому α_1 и α_2 определяются лишь с точностью до постоянного множителя. Причина этого вполне понятна: поскольку решения однородных линейных уравнений можно умножать на произвольный постоянный множитель, то, следовательно, в решении вида (27) α_1 и α_2 тоже определены лишь с точностью до постоянного множителя.

В рассматриваемом случае ($k_1 \neq k_2$) общее решение системы (26) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c_1 \alpha_{11} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_{12} e^{k_2 t}, \\ y &= c_1 \alpha_{21} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_{22} e^{k_2 t} \end{aligned} \quad (30)$$

(см. стр. 345), где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Если корни характеристического уравнения комплексные $k_{1,2} = p \pm qi$, то общее решение (30) обычно удобнее записать в действительной форме в виде

$$\begin{aligned} x &= e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt} (\tilde{c}_1 \cos qt + \tilde{c}_2 \sin qt), \end{aligned} \quad (31)$$

где \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 — некоторые линейные комбинации произвольных постоянных c_1 и c_2 .

Рассмотрим следующие случаи:

1) $k_1 \neq k_2$, $k_1 < 0$, $k_2 < 0$.

Точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, как видно из (30), асимптотически устойчива в целом, так как при любых значениях c_1 и c_2 все решения при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

При возрастании t точки на всех траекториях приближаются к точке покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$.

Две траектории, соответствующие значениям произвольных постоянных $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ и $c_2 = 0, c_1 \neq 0$, являются прямыми линиями. В первом случае ($c_1 = 0$) исключение параметра t приводит к уравнению $a_{22}x - a_{12}y = 0$, а во втором ($c_2 = 0$) — к уравнению $a_{21}x - a_{11}y = 0$.

Если $k_1 < k_2$, то отношение $\frac{e^{k_1 t}}{e^{k_2 t}}$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Составляя отношение $\frac{y}{x}$ и деля числитель и знаменатель полученной дроби почленно на $e^{k_2 t}$, замечаем, что если

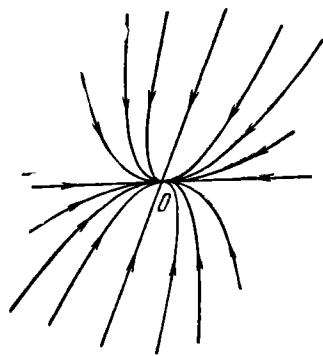


Рис. 128.

$c_2 \neq 0$, то $\frac{y}{x}$ стремится к $\frac{a_{22}}{a_{12}}$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. при стремлении точки (x, y) к началу координат. Это значит, что все траектории (кроме прямой, соответствующей $c_2 = 0$) имеют в начале координат общую касательную, а именно, прямую $a_{22}x - a_{12}y = 0$. Эта прямая тоже является траекторией; для нее $c_1 = 0$. Заметим еще, что если $a_{12} = 0$, то этой прямой будет ось ординат, а при $a_{22} = 0$ — ось абсцисс. Соответствующее этому последнему случаю схематическое расположение траекторий в окрестности точки покоя (начала координат) показано на рис. 128, причем стрелкой указано направление движения точек по траекториям при возрастании t . Точка покоя рассматриваемого типа называется

устойчивым узлом.
2) $k_1 \neq k_2, k_1 > 0, k_2 > 0$.
Траектории не изменяются по сравнению с предыдущим случаем (так как заменой параметра $t = -t_1$ этот случай сводится к предыдущему), но только направление движения по траекториям становится противоположным — с возрастанием t все точки на траекториях удаляются от начала координат (рис. 129).

Точка покоя неустойчива. Она называется *неустойчивым узлом*.

Точка покоя неустойчива. Она называется *неустойчивым узлом*.

Точка покоя неустойчива. Она называется *неустойчивым узлом*.

3) $k_1 > 0, k_2 < 0$.

Из (30) видно, что точка, движущаяся по любой траектории, для которой $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$ (и при $t \rightarrow -\infty$), удаляется от начала координат (рис. 130).

Если $c_1 = 0$, то, как и в случае 1), траекторией является прямая $a_{22}x - a_{12}y = 0$, по которой точки при возрастании t приближаются к началу координат, а если $c_2 = 0$, то прямая $a_{21}x - a_{11}y = 0$, по которой при возрастании t точки удаляются от начала координат.

Точка покоя такого типа называется *седлом*. Она, очевидно, неустойчива.

4) Корни характеристического уравнения чисто мнимы: $k_{1,2} = \pm qi$.

Общее решение (см. (31)) имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 \cos qt + c_2 \sin qt, \\ y = \tilde{c}_1 \cos qt + \tilde{c}_2 \sin qt, \end{cases} \quad (32)$$

где \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 — некоторые линейные комбинации произвольных постоянных c_1 и c_2 .

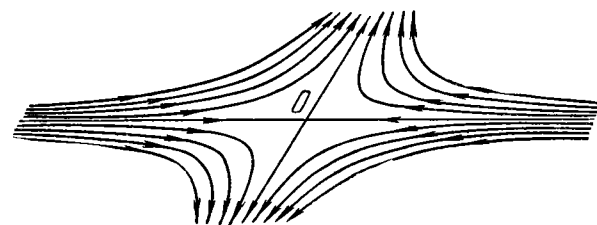


Рис. 130.

Все решения являются периодическими функциями t , и следовательно, траекториями являются замкнутые кривые. Можно показать, что это эллипсы (в частных случаях — окружности) с центром в начале координат (рис. 131).

Очевидно, что точки траекторий, близких по начальным значениям к началу координат, остаются близкими к началу координат при любых $t > t_0$, но асимптотического приближения к началу координат при $t \rightarrow \infty$ нет. Следовательно, рассматриваемая точка покоя, называемая *центром*, устойчива, но не асимптотически.

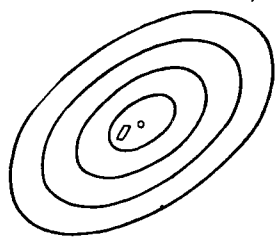


Рис. 131.

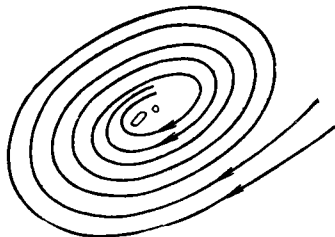


Рис. 132.

5) Корни характеристического уравнения комплексные: $k_{1,2} = p \pm qi$, причем $p < 0$, $q \neq 0$. Тогда из (31) находим, что второй множитель изменяется периодически, а первый с возрастанием t затухает по показательному закону. При изменении t на величину периода второго множителя в (31)

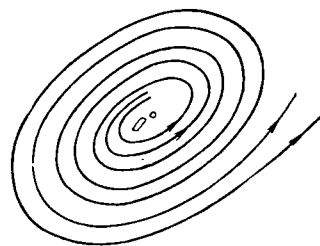


Рис. 133.

траектория после обхода начала координат не замыкается, как в случае центра, а приближается к началу координат. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ точки траекторий по спирали приближаются к началу координат (рис. 132). Точка покоя такого типа называется *устойчивым фокусом*. Она, очевидно, асимптотически устойчива в целом.

6) Если $k_{1,2} = p \pm qi$, $p > 0$, $q \neq 0$, то расположение траекторий не изменяется по сравнению со случаем 5), но движение по ним с возрастанием t происходит в противоположном направлении (рис. 133). Точка покоя такого типа называется *неустойчивым фокусом*. Она, очевидно, неустойчива.

7) $k_1 = k_2 < 0$.

Как указывалось на стр. 346, общее решение в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{k_1 t}, \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{k_1 t}. \end{cases} \quad (33)$$

На рис. 134 изображено расположение траекторий в случае (33) при β_1 и β_2 , не равных нулю одновременно; можно

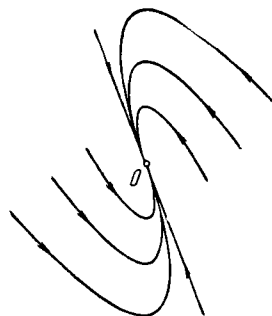


Рис. 134.

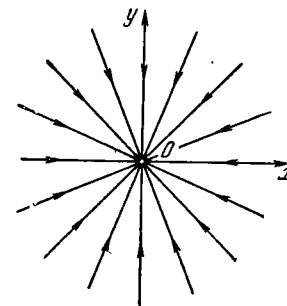


Рис. 135.

заметить, что все без исключения траектории имеют в начале координат общую касательную — прямую $\beta_2 x - \beta_1 y = 0$.

Может случиться (см. стр. 346), что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, и тогда

$$x = \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = \alpha_2 e^{k_1 t}, \quad (34)$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные; траекториями в этом случае являются прямые $\alpha_2 x - \alpha_1 y = 0$ (рис. 135). В обоих случаях точка покоя называется *устойчивым узлом* (в случае (34) устойчивый узел называется *дикритическим*).

Как видно из (33) и (34), обе точки покоя асимптотически устойчивы в целом (как известно, показательная функция $e^{k_1 t}$ при $k_1 < 0$ убывает значительно быстрее, чем возрастает степенная, и $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{k_1 t} = 0$ при любом $k_1 < 0$).

8) $k_1 = k_2 > 0$.

Расположение траекторий такое же, как и в предыдущем случае, но направление движения по траекториям противоположно (рис. 136 и 137). Точка покоя, очевидно, неустойчива.

Она называется *неустойчивым узлом* (в случае, изображенном на рис. 137, *неустойчивым дикритическим узлом*).

9) $k_1 = 0, k_2 < 0$.

Общее решение (30) имеет вид

$$x = c_1 \alpha_{11} + c_2 \alpha_{12} e^{k_2 t}, \quad y = c_1 \alpha_{21} + c_2 \alpha_{22} e^{k_2 t}.$$

При $c_2 = 0$ решениями являются точки покоя $x = c_1 \alpha_{11}$,

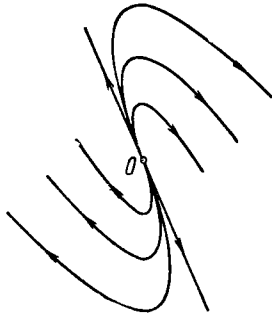


Рис. 136.

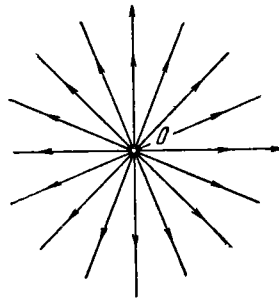


Рис. 137.

$y = c_1 \alpha_{21}$, расположенные на прямой $\alpha_{21}x - \alpha_{11}y = 0$. К этим точкам покоя приближаются при $t \rightarrow \infty$ точки, расположенные на других траекториях ($c_2 \neq 0$), которые, как легко проверить, являются прямыми линиями (рис. 138); их уравнения

$$\alpha_{22}(x - c_1 \alpha_{11}) - \alpha_{12}(y - c_1 \alpha_{21}) = 0.$$

Точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчива, но не асимптотически;

10) $k_1 = 0, k_2 > 0$.

Траектории имеют такой же вид, как и в предыдущем

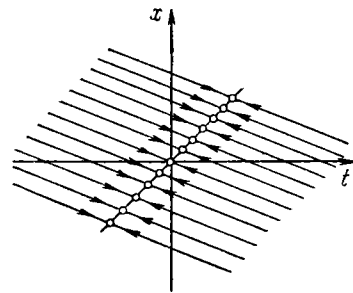


Рис. 138.

случае, но движение по ним при возрастании t происходит в противоположном направлении (рис. 139). Точка покоя неустойчива.

11) $k_1 = k_2 = 0$.

Общее решение имеет вид (см. (33)):

$$x = \alpha_1 + \beta_1 t, \quad y = \alpha_2 + \beta_2 t.$$

Траекториями являются прямые линии, причем при $t \rightarrow \infty$ точки по траекториям неограниченно удаляются от начала координат; точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ неустойчива.

Однако возможно (см. стр. 346), что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, а α_1 и α_2 остаются произвольными. В этом исключительном случае общим решением будет $x = \alpha_1, y = \alpha_2$. Все точки плоскости являются устойчивыми точками покоя, но асимптотической устойчивости нет.

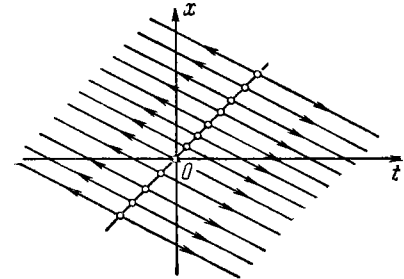


Рис. 139.

143. Мы рассмотрели все возможные случаи для системы двух уравнений. Приведем теперь общее правило для исследования системы n линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

1) Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, то все решения асимптотически устойчивы в целом.

Действительно, в этом случае, как указано на стр. 346, все слагаемые общего решения содержат затухающие по показательному закону при $t \rightarrow \infty$ множители $e^{\text{Re} k_i t}$.

Для системы двух уравнений это случай устойчивого узла ($k_1 < 0, k_2 < 0$), устойчивого фокуса ($k_{1,2} = p \pm qi, p < 0$) и устойчивого узла, соответствующего кратному отрицательному корню ($k_1 = k_2 < 0$).

2) Если хотя бы один корень k характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то все решения системы (35) неустойчивы.

Действительно решения системы уравнений, соответствующие корню k , имеют вид $x_i = c \alpha_i t^m e^{kt}$, если k действительно ($k > 0$), или

$$x_i = c \alpha_i t^m e^{pt} \cos qt \quad \text{и} \quad x_i = c \beta_i t^m e^{pt} \sin qt,$$

если $k = p + iq$, где $p > 0$. (Если корень k простой, то $m = 0$.)

Эти решения при сколь угодно малых, отличных от нуля значениях $|c|$ (что эквивалентно выбору сколь угодно малых начальных значений) с возрастанием t неограниченно возрастают по модулю или колеблются с неограниченно возрастающей амплитудой. Для системы двух уравнений вида (26) этот случай реализуется при 2) $k_1 > 0, k_2 > 0$ (неустойчивый узел), 3) $k_1 > 0, k_2 < 0$ (седло), 6) $k_{1,2} = p \pm qi, p > 0, q \neq 0$ (неустойчивый фокус), 8) $k_1 = k_2 > 0$ (неустойчивый узел, соответствующий кратному положительному корню) и 10) $k_1 = 0, k_2 > 0$.

3) Если характеристическое уравнение имеет простые корни с нулевой действительной частью (т. е. чисто мнимые или равные нулю корни), а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.

Действительно, корням с отрицательной вещественной частью в общем решении системы (35) соответствуют затухающие по показательному закону слагаемые, а чисто мнимым простым корням $\pm qi$ и корню, равному нулю, соответствуют слагаемые вида $c\alpha_i \cos qt$, $c\beta_i \sin qt$ и $c\alpha_i$, которые при малых значениях $|c|$ малы при любых $t \geq t_0$, но не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Для системы двух уравнений (26) этот случай реализуется при 4) $k_{1,2} = \pm qi, q \neq 0$ (центр) и 9) $k_1 = 0, k_2 < 0$.

Остается нерассмотренным еще случай:

4) Характеристическое уравнение имеет кратные корни с нулевой действительной частью, а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть или являются простыми корнями с нулевой действительной частью.

В этом случае все решения обычно неустойчивы, хотя в виде исключения могут появиться случаи устойчивости, но не асимптотической.

Действительно, слагаемые в общем решении системы (35), соответствующие корням $\pm qi$ кратности $\gamma > 1$ с нулевой действительной частью, имеют вид

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{\gamma-1} t^{\gamma-1}) \cos qt + (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_{\gamma-1} t^{\gamma-1}) \sin qt \quad (36)$$

или

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{\gamma-1} t^{\gamma-1}, \quad (37)$$

если характеристическое уравнение имеет нулевой корень кратности γ .

Эти слагаемые при $t \rightarrow \infty$ или неограниченно возрастают по модулю или колеблются с неограниченно возрастающей амплитудой при сколь угодно малых начальных значениях. Следовательно, все решения системы (35) неустойчивы.

Однако может встретиться исключительный случай (см. стр. 346), когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\gamma-1} = 0, \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{\gamma-1} = 0$; тогда слагаемые в (36) и (37) имеют такой же вид, как и в случае простых корней с нулевой действительной частью и, следовательно, как и в случае 3), все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.

Все пункты рассмотренного правила для исследования систем линейных уравнений относятся, разумеется, и к одному линейному дифференциальному уравнению высшего порядка с постоянными коэффициентами, однако для одного уравнения отмеченный в конце п. 4) исключительный случай невозможен.

Рассмотрим несколько примеров, в каждом из которых надо исследовать решения на устойчивость.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = ay, \\ \dot{y} = -bx, \end{cases} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} -k & a \\ -b & -k \end{vmatrix} = 0$

чисто мнимы:

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{ab},$$

следовательно, все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет. Точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ является центром.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 3 & -2-k \end{vmatrix} = 0, \quad k_{1,2} = \pm 1,$$

имеет корень с положительной действительной частью $k_1 = 1$, следовательно, все решения неустойчивы. Так как корни имеют разные знаки, то точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ является седлом.

Пример 3.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0. \quad (A)$$

Это уравнение можно заменить системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2y - 2x. \quad (B)$$

Характеристическое уравнение системы (B) (уравнения (A)) таково:

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \quad k_{1,2} = -1 \pm i.$$

Действительная часть всех корней отрицательна, следовательно, все решения системы (B) (и уравнения (A)) асимптотически устойчивы. Точка покоя системы (B) $x \equiv 0, y \equiv 0$ является устойчивым фокусом.

Пример 4. $\dot{x} = 0, \dot{y} = x$.

Оба корня характеристического уравнения $k^2 = 0$ равны нулю. Общее решение системы имеет вид

$$x = c_1, \quad y = c_1 t + c_2.$$

Очевидно, что точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ неустойчива ($\lim_{t \rightarrow \infty} y = \infty$ при любом $c_1 \neq 0$).

Пример 5. $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$.

Как и в предыдущем примере, характеристическое уравнение имеет вид $k^2 = 0$, следовательно, $k_1 = k_2 = 0$. Однако теперь общее решение

$$x = c_1, \quad y = c_2$$

таково, что точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчива (но не асимптотически). Здесь мы имеем дело именно с тем исключительным случаем, о котором шла речь в п. 4) правила.

§ 4. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена

144. В предыдущем параграфе вопрос об устойчивости решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами был сведен к исследованию знаков действительных частей корней характеристического уравнения.

Если характеристическое уравнение имеет высокую степень, то его решение представляет значительные трудности, поэтому большое значение имеют методы, позволяющие, не решая уравнения, выяснить, будут ли все его корни иметь отрицательную действительную часть или нет.

Докажем сначала следующую теорему: *для того чтобы действительные части всех корней многочлена с действительными коэффициентами были отрицательны, необходимо, чтобы все коэффициенты этого многочлена имели одинаковые знаки.*

Пусть

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа. Предположим для определенности, что $a_0 > 0$ (если $a_0 < 0$, то можно было бы рассмотреть многочлен $-P(z)$). Очевидно, что

$$[z - (\alpha - \beta i)][z - (\alpha + \beta i)] = z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)$$

и при $\alpha < 0$ коэффициенты квадратного трехчлена, стоящего в правой части этого тождества, положительны. Положительны также коэффициенты линейного двучлена $z - \alpha$, если $\alpha < 0$. Поэтому, если разложить многочлен $P(z)$ на множители

$$P(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (38)$$

(z_1, z_2, \dots, z_n — корни многочлена $P(z)$) и объединить попарно множители, соответствующие парам сопряженных комплексных корней, то правая часть (38) будет представлена в виде произведения линейных и квадратичных множителей, все коэффициенты и свободные члены которых положительны, если все корни многочлена $P(z)$ имеют отрицательные действительные части. Но произведение многочленов с положительными коэффициентами также является многочленом с положительными коэффициентами, и теорема доказана.

Легко видеть, что положительность коэффициентов многочлена является необходимым, но отнюдь не достаточным условием отрицательности действительных частей его корней. В самом деле, у многочлена $z^3 + z^2 + 4z + 30$ все коэффициенты положительны, но среди его корней $z_1 = -3, z_{2,3} = 1 \pm 3i$ два имеют положительную действительную часть.

145. Однако для квадратного трехчлена

$$z^2 + a_1 z + a_2 \quad (39)$$

(или $a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, где $a_0 > 0$) условия $a_1 > 0, a_2 > 0$ не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы все его корни имели отрицательные действительные части. Действительно, пусть $a_1 > 0, a_2 > 0$. Если z_1 и z_2 — корни многочлена (39), то $z_1 + z_2 = -a_1$ и $z_1 z_2 = a_2$. Так как $a_2 > 0$, то, если корни действительны, они имеют одинаковые знаки, а так как их сумма $-a_1$ отрицательна, то оба корня отрицательны. Если же корни комплексные, то $z_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, следовательно $-a_1 = z_1 + z_2 = 2\alpha$ и $\alpha < 0$, так как $a_1 > 0$.

Если $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ — характеристическое уравнение для некоторой системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений, то, с учетом доказанного в предыдущем параграфе, можно теперь утверждать следующее:

1) Если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

2) Если $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически (один из корней характеристического уравнения равен нулю, а другой отрицателен).

3) Если $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нулевое решение устойчиво, но также не асимптотически (корни характеристического уравнения — чисто мнимые).

4) Во всех остальных случаях, если хотя бы одно из чисел a_1 и a_2 отлично от нуля, нулевое решение неустойчиво, так как при этом по крайней мере один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть (когда $a_1 = a_2 = 0$, решение также неустойчиво, если только не имеет места исключительный случай, отмеченный ранее; см. пример 5 на стр. 362).

Пример 1. Выяснить, при каких значениях параметра α устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (4 - \alpha^2)x + y, \\ \dot{y} = -(3 + \alpha)x. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4 - \alpha^2 - k & 1 \\ -(3 + \alpha) & -k \end{vmatrix} = 0,$$

или, после упрощений,

$$k^2 + (\alpha^2 - 4)k + (\alpha + 3) = 0.$$

В соответствии с доказанным, нулевое решение асимптотически устойчиво, если

$$a_1 = \alpha^2 - 4 > 0 \text{ и } a_2 = \alpha + 3 > 0.$$

Но $\alpha^2 - 4 > 0$, если $\alpha > 2$ или $\alpha < -2$. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво при $\alpha > 2$ и при $-3 < \alpha < -2$.

При $\alpha = \pm 2$ и $\alpha = -3$ имеет место устойчивость, но не асимптотическая, так как при этом $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ или $a_1 > 0$, $a_2 = 0$. При всех остальных значениях α решение неустойчиво.

Пример 2. При каких α и β (в какой области плоскости параметров α, β) устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta x - \alpha y, \\ \dot{y} = (2\alpha + \beta)x + (2 - \alpha)y \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \beta - k & -\alpha \\ 2\alpha + \beta & 2 - \alpha - k \end{vmatrix} = 0,$$

или, после упрощений,

$$k^2 + (\alpha - \beta - 2)k + 2(\beta + \alpha^2) = 0.$$

Устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы зависит от знаков коэффициентов

$$a_1 = \alpha - \beta - 2, \quad a_2 = 2(\beta + \alpha^2).$$

Так как a_1 и a_2 являются непрерывными функциями от α и β , то знаки a_1 и a_2 могут изменяться лишь там, где a_1 или a_2 обращаются в нуль, т. е. на линиях

$$\alpha - \beta - 2 = 0, \quad \beta + \alpha^2 = 0.$$

Эти линии (прямая $\beta = \alpha - 2$ и парабола $\beta = -\alpha^2$), пересекающиеся в точках $A(-2, -4)$ и $B(1, -1)$, разбивают плоскость (α, β) на пять областей (рис. 140), в каждой из которых знаки a_1 и a_2 неизменны. Взяв поэтому в каждой из этих областей произвольно по одной точке, мы сможем определить знаки коэффициентов a_1 и a_2 в каждой из этих пяти областей.

Так, в области I для точки $\alpha = 0$, $\beta = -3$ получим $a_1 = 1 > 0$, $a_2 = -6 < 0$. В области II выберем точку $\alpha = -3$, $\beta = -6$, тогда $a_1 = 1 > 0$, $a_2 = 6 > 0$. В области III для точки $\alpha = 3$, $\beta = 0$ найдем $a_1 = 1 > 0$, $a_2 = 18 > 0$. В области IV для точки $\alpha = 0$, $\beta = -1$ получим $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = -2 < 0$. В области V для точки $\alpha = 0$, $\beta = 1$ будем иметь $a_1 = -3 < 0$, $a_2 = 2 > 0$.

Итак, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ в областях II и III и только в этих областях, т. е. при $\beta + \alpha^2 > 0$, $\alpha - \beta - 2 > 0$, нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво. Неасимптотическая устойчивость имеет место там, где $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ или $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, т. е. на границах между областями I и II, II и V, I и III, III и V — всюду, кроме точек A и B; в этих точках $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$, поэтому корень $k = 0$ является кратным ($k_1 = k_2 = 0$), и нулевое решение неустойчиво.

В областях I, IV и V и на границах между ними решение неустойчиво.

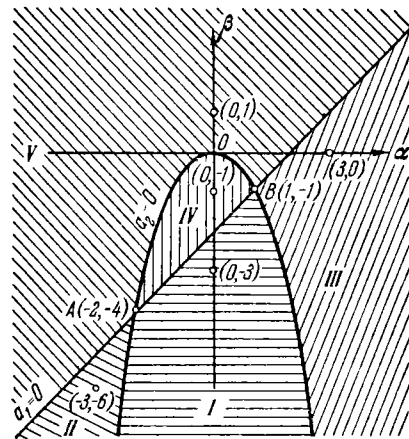


Рис. 140.

146. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых условий отрицательности действительных частей корней многочленов любых степеней. Следующую теорему мы приводим без доказательства.

Теорема Гурвица. *Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена с действительными коэффициентами*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 > 0,$$

является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы Гурвица стоят коэффициенты рассматриваемого многочлена в порядке их нумерации, начиная с a_1 до a_n . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, включая и коэффициент a_0 , причем все недостающие коэффициенты, т. е. коэффициенты с индексами, меньшими нуля или большими n , заменяются нулями.

Элемент b_{ik} матрицы Гурвица, принадлежащий i -й строке и k -му столбцу, можно определить равенством $b_{ik} = a_{2i-k}$, если $0 \leq 2i-k \leq n$, и $b_{ik} = 0$ в остальных случаях.

Обозначим главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что так как $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$, то последнее из условий Гурвица $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$. Из условий Гурвица следует, что если $a_0 > 0$, то и все остальные коэффициенты a_i положительны, но одной положительности всех коэффициентов, конечно, недостаточно для выполнения всех неравенств Гурвица $\Delta_i > 0$; например, минор $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$ может быть отрицательным при положительных a_0, a_1, a_2, a_3 .

Применим теорему Гурвица к многочленам 2, 3, 4-й степени с буквенными коэффициентами.

а) $P(z) = z^2 + a_1 z + a_2$.

Условия Гурвица сводятся к

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

б) $P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$.

Условия Гурвица имеют вид

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

в) $P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$.

Условия Гурвица имеют вид

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0, \quad a_4 > 0.$$

Заметим, что если заранее известно, что все коэффициенты многочлена $P_n(z)$ положительны, то можно доказать следующее: для того чтобы все корни многочлена имели отрицательную действительную часть, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \dots,$$

где n — степень многочлена,

С помощью этого признака соответствующие условия, например для многочлена 4-й степени, примут вид

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0.$$

Рассмотрим несколько примеров исследования на устойчивость решений дифференциальных уравнений с заданными числовыми коэффициентами.

Пример 1. $x^{(v)} + x^{(iv)} - 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 10x = f(t)$

Все решения неустойчивы, так как один из коэффициентов характеристического уравнения отрицателен.

Пример 2. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = f(t)$.

Все решения неустойчивы, так как один из главных диагональных миноров матрицы Гурвица $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ для характеристического уравнения $k^3 + 2k^2 + 3k + 10 = 0$ меньше нуля:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} < 0.$$

Пример 3. $x^{IV} + \ddot{x} + 10\dot{x} + \dot{x} + 2x = f(t)$.

Все решения асимптотически устойчивы, так как все коэффициенты положительны и

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 > 0, \Delta_1 = 1 > 0.$$

147. Критерий Михайлова. С помощью принципа аргумента (см. стр. 156) найдем число корней многочлена

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) \quad (40)$$

с положительной действительной частью.

Предположим, что $P(z)$ не имеет нулей на мнимой оси. Тогда принцип аргумента можно применить к полукругу радиуса R с центром в начале координат, расположенному в правой полуплоскости (рис. 141), границу которого обозначим C_R .

При достаточно большом R все корни многочлена $P(z)$ с положительной действительной частью будут лежать внутри этого полукруга и их число будет равно $\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R} \text{Arg } P(z)$, где $\Delta_{C_R} \text{Arg } P(z)$ — приращение аргумента $P(z)$ при однократном обходе точкой z контура C_R в положительном направлении. При обходе полукруга, входящей в состав контура C_R , аргумент множителя z^n получает приращение $n\pi$, а аргумент множителя $\left(1 + \frac{a_1}{z} + \dots\right)$ получает приращение сколь угодно близкое к нулю, так как этот множитель при $|z| = R$ сколь угодно близок к единице, если R достаточно велико.

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом отрезок мнимой оси, входящий в состав контура C_R , пере-

ходит во всю мнимую ось, проходящую в отрицательном направлении, приходим к выводу, что число N нулей многочлена $P(z)$ с положительной действительной частью равно $\frac{n+k}{2}$, где $k\pi$ — приращение аргумента многочлена $P(z)$ при

прохождении точкой z мнимой оси в отрицательном направлении. В частности, многочлен $P(z)$ не имеет нулей с положительной действительной частью тогда и только тогда, когда $k = -n$.

Если коэффициенты многочлена $P(z)$ действительны, то $P(iy)$ и $P(-iy)$ — сопряженные числа, поэтому образ мнимой оси при отображении $P(z)$ симметричен относительно действительной оси и можно ограничиться вычислением приращения аргумента $P(z)$ лишь при движении по положительной части мнимой оси и удвоить это приращение. Ясно, что при изменении направления движения приращение аргумента меняет знак.

Итак, для многочленов с действительными коэффициентами справедлив следующий критерий (правило) Михайлова. Если многочлен $P(z)$ не имеет нулей на мнимой оси, то для отсутствия у него нулей с положительной действительной частью необходимо и достаточно, чтобы при прохождении точкой z положительной части мнимой оси снизу вверх приращение аргумента $P(z)$ было равно $n\frac{\pi}{2}$.

К критерию Михайлова можно прийти и с помощью несколько иных рассуждений, опирающихся на геометрические представления. Разложим многочлен $P(z)$ на линейные множители

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

и напомним, что, по предположению, среди корней z_1, z_2, \dots, z_n нет лежащих на мнимой оси.

Пусть точка $z = iy$ движется по мнимой оси снизу вверх. Из рис. 142 ясно, что если $\text{Re } z_k < 0$, то при изменении y

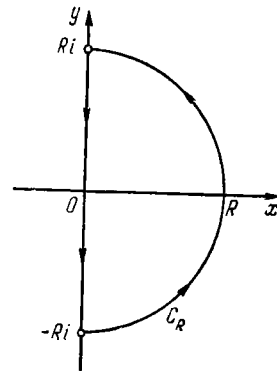


Рис. 141.

от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $z - z_k = iy - z_k$ повернется на угол π против часовой стрелки, и поэтому величина $\arg(z - z_k)$ получит приращение $+\pi$. Поэтому если все корни $P(z)$ имеют отрицательные действительные части, то аргумент многочлена $P(z)$ получит приращение $n\pi$, так как приращение аргумента произведения равно сумме приращений аргументов сомножителей. Если же хотя бы один из корней z_j имеет положительную действительную часть, то приращение аргумента множителя $(z - z_j)$, когда точка z пробегает снизу вверх всю мнимую ось, будет равно $-\pi$ (соответствующий вектор поворачивается по часовой стрелке), и приращение аргумента $P(z)$ будет меньше чем $n\pi$.

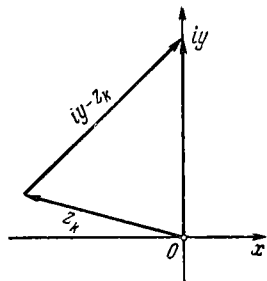


Рис. 142.

Итак, для того чтобы все $\operatorname{Re} z_k$ были меньше нуля, необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента $P(z)$, когда точка z пробегает снизу вверх всю мнимую ось, было равно $n\pi$. Так как коэффициенты многочлена $P(z)$ действительны, то приращение его аргумента при движении точки z только по положительной части мнимой оси будет в два раза меньше ($n\pi/2$), и мы приходим к критерию Михайлова в приведенной выше формулировке.

Проследим за годографом вектора $w = P(iy)$. Если все $\operatorname{Re} z_k < 0$, то коэффициенты многочлена $P(z)$ положительны (см. стр. 362), значит, $P(0) = a_n > 0$, т.е. точка годографа, соответствующая $y = 0$, находится на положительной части действительной оси. При увеличении y от 0 до $+\infty$ вектор $w = P(iy)$ будет все время поворачиваться против часовой стрелки, так как аргумент каждого множителя $(z - z_k)$ монотонно возрастает, и сделает n четверть-оборотов против часовой стрелки. Если же среди корней есть корни с положительной действительной частью, то число оборотов годографа вектора w будет меньше.

Таким образом, если действительные части всех корней многочлена отрицательны (и только в этом случае):

1) при увеличении y от 0 до $+\infty$ вектор $w = P(iy)$ будет все время поворачиваться против часовой стрелки и, сле-

довательно, его годограф будет поочередно пересекать мнимую и действительную оси плоскости w ;

2) общее число таких пересечений (включая пересечение при $y = 0$) будет равно степени многочлена.

Отметим, что годограф вектора w не может проходить через начало координат ($w = 0$), так как тогда при каком-то значении y было бы $P(iy) = 0$, а по условию многочлен $P(z)$ не имеет корней, лежащих на мнимой оси.

Выделим в многочлене

$$P(iy) = (iy)^n + a_1(iy)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(iy) + a_n$$

действительную часть $u = u(y)$ и мнимую часть $v = v(y)$ ¹⁾ (ясно, что многочлен $u(y)$ содержит только четные степени y , а многочлен $v(y)$ — только нечетные и $v(0) = 0$).

Те значения y , при которых годограф вектора $w = P(iy)$ пересекает оси координат, являются действительными корнями уравнений $u(y) = 0$ и $v(y) = 0$; так как $P(iy)$ не может равняться нулю, то общих корней эти уравнения не имеют. Если вектор $w = P(iy)$ поворачивается все время против часовой стрелки, то он по очереди пересекает оси абсцисс и ординат, а это означает, что между двумя любыми соседними корнями одного из уравнений $u = 0$, $v = 0$ находится в точности один корень другого. В таком случае будем говорить, что корни уравнений *перемежаются*.

Точке $w = a_n$ на действительной оси соответствует корень $y = 0$ уравнения $v(y) = 0$. Далее уравнения $u = 0$, $v = 0$ имеют в общей сложности $(n - 1)$ положительных корней (по числу точек пересечения с осями координат), а значит и $(n - 1)$ отрицательных, так как $u(-y) = u(y)$ и $v(-y) = -v(y)$. Таким образом, общее число всех действительных корней обоих уравнений, $u(y) = 0$ и $v(y) = 0$, должно быть равно $2n - 1$, где n — степень многочлена. Так как одно из этих уравнений имеет степень n , а другое — степень $n - 1$, то это и значит, что все их корни действительны.

Проведенное исследование позволяет сформулировать критерий Михайлова в следующем, обычно более удобном для проверки, виде.

¹⁾ $u = u(y)$, $v = v(y)$ — параметрические уравнения годографа вектора $w = P(iy)$.

Если многочлен $P(z)$ не имеет корней на мнимой оси, то для того чтобы все его корни имели отрицательные действительные части (лежали в левой полуплоскости), необходимо и достаточно, чтобы

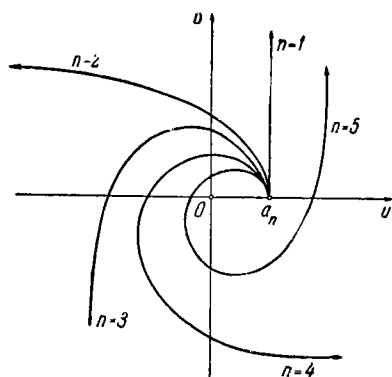


Рис. 143.

изображены типичные годографы вектора $w = P(iy)$, $0 \leq y < \infty$, для многочленов различных степеней: $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Пример 4. Имеет ли многочлен

$$P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

корни с положительными действительными частями?

Полагая $z = iy$, получим

$$P(iy) = -y^6 + 6y^4 - 8y^2 + 1 + i(y^5 - 5y^3 + 4y),$$

$$u = -y^6 + 6y^4 - 8y^2 + 1, \quad v = y^5 - 5y^3 + 4y.$$

При достаточно большом y имеем $u < 0$, $v > 0$, причем $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = 0$, нулями функции $v = y(y^4 - 5y^2 + 4)$ являются

$$y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm 1, \quad y_{4,5} = \pm 2.$$

Вычислим соответствующие значения u :

$$u(0) = 1, \quad u(\pm 1) = -2, \quad u(\pm 2) = 1.$$

Если еще учесть четность функции u и нечетность функции v , то уже можно дать набросок образа мнимой оси при отображении $P(z)$, довольно грубый, но достаточный для вычисления приращения

аргумента $P(iy)$ при y , изменяющемся от $+\infty$ до $-\infty$ (рис. 144). Из него видно, что приращение аргумента равно -6π . Следовательно, число N нулей многочлена $P(z)$ шестой степени, лежащих в правой полуплоскости, равно

$$N = \frac{6\pi - 6\pi}{2\pi} = 0.$$

Пример 5. При помощи критерия Михайлова выяснить, устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнения

$$x^{IV} + \ddot{x} + 10\dot{x} + 4x + 9 = 0.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$P(z) = z^4 + z^3 + 10z^2 + 4z + 9,$$

откуда

$$P(iy) = y^4 - 10y^2 + 9 - i(y^3 - 4y).$$

Все корни уравнений

$$y^4 - 10y^2 + 9 = 0$$

$$(y_{1,2} = \pm 1, \quad y_{3,4} = \pm 3)$$

и

$$y^3 - 4y = 0,$$

$$(y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm 2)$$

действительными перемещаются.

Все условия, указанные на стр. 372, выполнены, следовательно, решение $x = 0$ рассматриваемого уравнения асимптотически устойчиво.

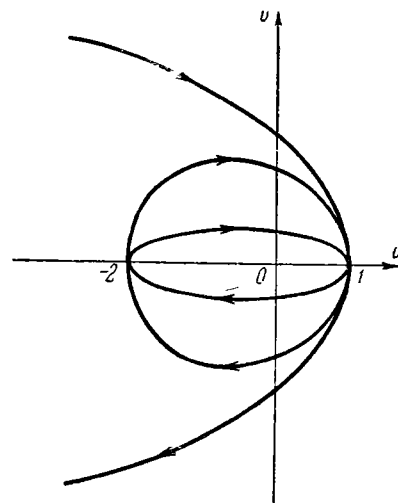


Рис. 144.

148. Метод D-разбиений. Нули многочлена

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

являются непрерывными функциями его коэффициентов. Это означает, что малое изменение коэффициентов многочлена влечет за собой малое же изменение расположения его нулей в комплексной плоскости¹⁾.

Предположим, что коэффициенты многочлена $P(z)$ непрерывно зависят от каких-то двух параметров α и β . Любая

¹⁾ Заметим, что это утверждение становится неверным, если многочлен $P(z)$ взять в виде $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$, но оно остается справедливым, если в этом случае считать, что a_0 не может обратиться в нуль.

пара значений этих параметров определяет некоторую точку в плоскости (α, β) (плоскость параметров). Если при каких-то значениях параметров α и β многочлен $P(z)$ имеет чисто мнимый корень $z = iy$, то $P(iy) = 0$. Таким образом, уравнение $P(iy) = 0$ определяет в плоскости параметров множество точек — одну или несколько линий, соответствующих чисто мнимым корням многочлена (и нулевому корню, который получается при $y = 0$). Линии $P(iy) = 0$ разбивают плоскость параметров на области g_1, g_2, \dots, g_k ; это разбиение называют *D-разбиением*. Всем точкам какой-то одной из этих областей g_s соответствует одинаковое число нулей многочлена $P(z)$, лежащих в правой полуплоскости. Действительно, как уже отмечено, при непрерывном движении точки (α, β) в плоскости параметров корни многочлена изменяются тоже непрерывно. Таким образом, переход корня из правой полуплоскости в левую (или, наоборот, из левой в правую) может произойти лишь после пересечения корнем мнимой оси, что соответствует переходу точки (α, β) из одной области g_s в другую.

В более общем случае коэффициенты многочлена $P(z)$ могут зависеть от любого числа параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Значения этих параметров определяют точку в m -мерном пространстве коэффициентов, а уравнению $P(iy) = 0$ соответствуют некоторые «поверхности» в этом пространстве (гиперповерхности), разбивающие пространство коэффициентов на области, причем опять-таки всем точкам какой-то одной из этих областей соответствует одинаковое число нулей многочлена $P(z)$, лежащих в правой полуплоскости.

Особый интерес для теории устойчивости представляют те области g_s , точкам которых соответствуют многочлены, не имеющие ни одного корня с положительной действительной частью. Такие области g_s будут *областями асимптотической устойчивости* для линейных однородных дифференциальных уравнений, для которых $P(z)$ является характеристическим многочленом.

Подсчитав в произвольно выбранной точке некоторой области g число корней с положительной действительной частью любым методом, например при помощи критерия Михайлова, мы тем самым определяем число таких корней для произвольных значений коэффициентов из этой области.

Пример 6. Для многочлена

$$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \alpha z + \beta \quad (41)$$

определить области плоскости α, β , в которых число нулей этого многочлена, лежащих в правой полуплоскости, постоянно, и найти для каждой области это число N .

Полагая $z = iy$, получим

$$P(iy) = -iy^3 - \alpha y^2 + i\alpha y + \beta.$$

Уравнение $P(iy) = 0$ равносильно системе двух уравнений

$$-y^3 + \alpha y = 0, \quad -\alpha y^2 + \beta = 0$$

или

$$y(\alpha - y^2) = 0, \quad \beta = \alpha y^2.$$

Следовательно, если $P(iy) = 0$, то

$$y = 0, \quad \beta = \alpha y^2 \quad (42)$$

или

$$\alpha - y^2 = 0, \quad \beta = \alpha y^2. \quad (43)$$

Из (42) получим $\beta = 0$ (ось абсцисс в плоскости α, β), а из (43) $\beta = \alpha^2$, причем $\alpha = y^2 > 0$ (правая половина параболы $\beta = \alpha^2$).

Линии $P(iy) = 0$ разбивают всю плоскость параметров на три области g_1, g_2, g_3 , указанные на рис. 145.

Возьмем какую-нибудь точку области g_1 , например, $\alpha = 2, \beta = 1$. Тогда

$$w = P(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1.$$

Если точка z пробегает сверху вниз мнимую ось, то $z = iy$, а y изменяется от $+\infty$ до $-\infty$,

$$w = u + iv = P(iy) = -iy^3 - 2y^2 + 2iy + 1,$$

откуда, отделяя мнимую и действительную части:

$$u = -2y^2 + 1, \quad v = -y^3 + 2y. \quad (44)$$

Если $y \rightarrow +\infty$, то $u \rightarrow -\infty$, $v \rightarrow -\infty$, причем $\frac{v}{u} \rightarrow +\infty$.

Если $y \rightarrow -\infty$, то $u \rightarrow -\infty$, $v \rightarrow +\infty$ и $\frac{v}{u} \rightarrow -\infty$. Если

учесть, наконец, что $v = 0$ при $y = \sqrt{2}$, $y = 0$, $y = -\sqrt{2}$, при этом соответственно $u = -3$, $u = 1$, $u = -3$, то уже можно приблизительно построить кривую (рис. 146).

При этом, как видно из чертежа, аргумент вектора w получает приращение -3π (вектор w делает полтора оборота по часовой стрелке). Итак, $k = -3$, $n = 3$ (многочлен $P(z)$ третьей степени),

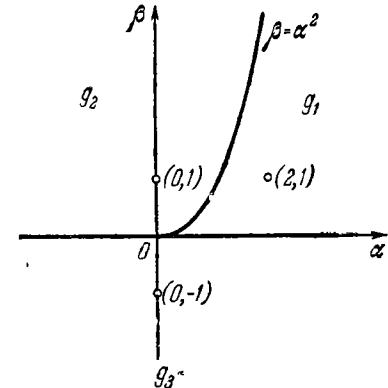


Рис. 145.

следовательно, $N = \frac{k+n}{2} = 0$, т. е. для значений параметров α, β , соответствующих области g_1 , многочлен $P(z)$ не имеет нулей с положительной действительной частью.

В области g_2 возьмем точку $\alpha = 0, \beta = 1$. При этом

$$P(z) = z^3 + 1, \quad w = u + iv = P(iy) = -iy^3 + 1,$$

откуда $u = 1, v = -y^3$.

Очевидно, что когда y изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, точка $w = u + iv$ движется по прямой $u = 1$ от $v = -\infty$ до $v = +\infty$ (рис. 147) и вектор w поворачивается на угол π против часовой стрелки, т. е. $k = 1$, а так как $n = 3$, то $N = \frac{k+n}{2} = 2$, следовательно, для значений параметров, соответствующих точкам области

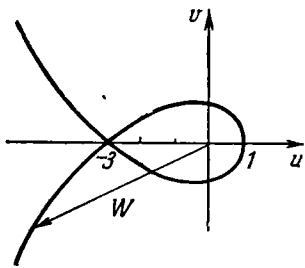


Рис. 146.

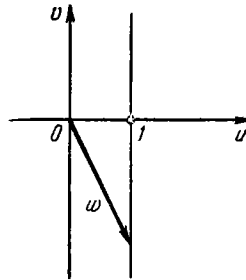


Рис. 147.

g_2 , многочлен $P(z)$ имеет два корня с положительной действительной частью. Еще проще было решить уравнение $z^3 + 1 = 0$.

Возьмем, наконец, в области g_3 точку $\alpha = 0, \beta = -1$. При этом

$$P(z) = z^3 - 1, \\ w = u + iv = P(iy) = -iy^3 - 1,$$

откуда $u = -1, v = -y^3$.

При y , изменяющемся от $+\infty$ до $-\infty$, точка $w = u + iv$ пробегает прямую $u = -1$ снизу вверх и приращение аргумента вектора w при этом равно $-\pi$, т. е. $k = -1$ и $N = \frac{k+n}{2} = 1$. Сле-

довательно, для значений параметров α, β , соответствующих точкам области g_3 , многочлен $P(z)$ имеет один корень с положительной действительной частью (конечно, проще было найти корни уравнения $z^3 - 1 = 0$, но мы хотели еще раз показать читателю, как применяются рассуждения, на которых основан критерий Михайлова).

§ 5. Устойчивость решений разностных уравнений

149. Решение однородного линейного разностного уравнения порядка k с постоянными коэффициентами

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = 0 \quad (45) \\ (a_k \neq 0),$$

где $f(n)$ — искомая функция целочисленного аргумента, удобно искать в виде $f(n) = \lambda^n$. Подстановка этой функции в уравнение (45) приводит к равенству

$$\lambda^n (\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k) = 0.$$

Значение $\lambda = 0$ соответствует тривиальному (нулевому) решению $f(n) \equiv 0$, а корни характеристического уравнения

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (46)$$

определяют нетривиальные частные решения уравнения (45).

Если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ характеристического уравнения различны, то мы находим k частных решений $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ уравнения (45), и можно доказать, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$f(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n,$$

где c_1, c_2, \dots, c_k — произвольные постоянные. Эти постоянные могут быть определены, если заданы начальные условия $f(0) = f_0, f(1) = f_1, \dots, f(k-1) = f_{k-1}$.

Если λ — корень характеристического уравнения кратности r , то ему, как доказывается, соответствует r частных решений вида $\lambda^n, n \lambda^n, \dots, n^{r-1} \lambda^n$. Общее решение уравнения (45) представляет собой линейную комбинацию решений, соответствующих всем корням характеристического уравнения.

Если имеется простой комплексный корень $\lambda = \mu + i\nu = |\lambda| e^{i\varphi}$ характеристического уравнения, то соответствующее ему решение можно преобразовать к виду $\lambda^n = |\lambda|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, где $\varphi = \arg \lambda$.

В случае, когда коэффициенты уравнения (45) — действительные числа, пара сопряженных корней $\mu \pm i\nu$ соответствуют действительные решения $|\lambda|^n \cos(n \arg \lambda), |\lambda|^n \sin(n \arg \lambda)$. Если λ — кратный комплексный корень, то соответствующие ему решения будут содержать также и степенные множители.

Общее решение *неоднородного линейного разностного уравнения*

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = g(n) \quad (47)$$

представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного.

В § 4 гл. IX изложен способ решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на дискретном преобразовании Лапласа. Из него также следуют высказанные утверждения о структуре и методе построения общих решений таких уравнений.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) + 3f(n+1) - 4f(n) = 0, \quad (48)$$

а также частное решение, удовлетворяющее условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 7$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$. Общее решение уравнения (48) имеет вид

$$f(n) = c_1 (-4)^n + c_2 \cdot 3^n.$$

Из начальных условий получаем

$$f(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad f(1) = -4c_1 + 3c_2 = 7,$$

откуда $c_1 = -1$, $c_2 = 1$; следовательно, искомое частное решение таково: $f(n) = (-1)^{n+1} 4^n + 3^n$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 16f(n) = 26n + 9. \quad (49)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 2(1 \pm i\sqrt{3})$. Так как $2|1 \pm i\sqrt{3}| = 4$, $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \pi/3$, то общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $4^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right)$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $f_0(n) = an + b$. Так как $f_0(n+1) = an + a + b$, $f_0(n+2) = an + 2a + b$, то после подстановки в уравнение (49) получим $13an - 2a + 13b = 26n + 9$. Отсюда $a = 2$, $b = 1$, т. е. $f_0(n) = 2n + 1$.

Общее решение уравнения (49) таково:

$$f(n) = 4^n \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right) + 2n + 1.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n) = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, и общее решение данного уравнения имеет вид $f(n) = (c_1 + c_2 n) 2^n$.

150. Пусть $f^*(n)$ — решение разностного уравнения, порядка k , определяемое начальными условиями $f^*(0) = f_0^*, \dots, f^*(k-1) = f_{k-1}^*$, а $f(n)$ — решение того же уравнения при измененных начальных условиях $f(0) = f_0, \dots, f(k-1) = f_{k-1}$. Решение $f^*(n)$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из совокупности неравенств $|f_0 - f_0^*| < \delta, \dots, |f_{k-1} - f_{k-1}^*| < \delta$ следует неравенство $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ при любом $n \geq 0$. Если, кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) - f^*(n)] = 0$, то решение $f^*(n)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Исследование на устойчивость решения $f^*(n)$ неоднородного линейного разностного уравнения (47) сводится с помощью замены $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$ к исследованию устойчивости тривиального (нулевого) решения однородного уравнения

$$\varphi(n+k) + a_1 \varphi(n+k-1) + \dots + a_k \varphi(n) = 0. \quad (50)$$

Коэффициенты этого уравнения те же, что и уравнения (47). Поэтому, как и в случае линейных дифференциальных уравнений, можно ограничиться исследованием устойчивости только тривиальных решений однородных уравнений. Знание структуры общего решения таких уравнений (в случае, когда коэффициенты постоянны) позволяет установить следующее общее правило (оно аналогично правилу, приведенному в п. 143).

1) Если все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то решение асимптотически устойчиво.

Действительно, если $|\lambda| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r \lambda^n = 0$ при любом r .

Поэтому все слагаемые в общем решении стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

2) Если хотя бы один корень λ характеристического уравнения по модулю больше единицы, то решение неустойчиво.

В самом деле, слагаемое в общем решении, соответствующее этому корню, стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

3) Если характеристическое уравнение имеет простые корни с модулями, равными единице, а остальные корни, если они есть, по модулю меньше единицы, то решение устойчиво, но не асимптотически.

Действительно, если λ — простой корень и $|\lambda| = 1$, то соответствующее ему в общем решении слагаемое $c\lambda^n$ имеет

постоянный модуль $|c|$, который будет мал, если малы по абсолютной величине начальные значения. В то же время это слагаемое не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Что же касается слагаемых, соответствующих корням характеристического уравнения, по модулю меньшим единицы, то они, как уже было показано, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

4) Если характеристическое уравнение имеет хотя бы один кратный корень с модулем, равным единице, то решение неустойчиво.

В этом случае среди решений, соответствующих такому корню, имеются решения вида $n^r \lambda^n$, где $|\lambda| = 1$ и $r > 0$, стремящиеся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Как уже отмечено выше, любое частное решение уравнения (47) в смысле устойчивости ведет себя так же, как и тривиальное решение уравнения (50).

151. Приведенное общее правило исследования на устойчивость решений линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами показывает, что все дело сводится к выяснению того, каковы модули корней характеристического уравнения. Покажем, что этот последний вопрос может быть решен на основании уже известных нам признаков отрицательности действительных частей корней многочлена.

Рассмотрим уравнение с действительными коэффициентами

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \quad (51)$$

Если отобразить комплексную плоскость z на комплексную плоскость w с помощью функции $z = \frac{w+1}{w-1}$, то, как легко проверить, внутренность единичного круга плоскости z отображится на левую полуплоскость плоскости w . Поэтому корням уравнения (51), лежащим внутри единичного круга (т.е. по модулю меньшим единицы), будут соответствовать корни преобразованного уравнения

$$a_0 \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^n + a_1 \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

лежащие в левой полуплоскости. Корни последнего уравнения являются корнями многочлена

$$a_0 (w+1)^n + a_1 (w+1)^{n-1} (w-1) + \dots + a_n (w-1)^n \equiv \equiv b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \dots + b_n. \quad (52)$$

Коэффициенты b_k выражаются через коэффициенты a_k по довольно громоздким формулам

$$b_k = \sum_{r=0}^n a_r \left[C_{n-r}^k - C_r^1 C_{n-r}^{k-1} + C_r^2 C_{n-r}^{k-2} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k-1} C_r^{k-1} C_{n-r}^1 + (-1)^k C_r^k \right], \quad 0 \leq k \leq n,$$

где $C_\alpha^\beta = \frac{a!}{\alpha! (\beta - \alpha)!}$ — биномиальные коэффициенты, причем считается, что $C_\alpha^0 = 1$ и $C_\alpha^\beta = 0$, если $\alpha < \beta$ или если $\beta < 0$. В частности,

$$b_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ b_n = a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n.$$

После того как многочлен (52) будет построен, останется применить к нему либо теорему Гурвица либо критерий Михайлова.

Для случая $n=2$, т.е. для характеристического уравнения

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0, \quad a_0 > 0,$$

коэффициенты b_k равны

$$b_0 = a_0 + a_1 + a_2, \quad b_1 = 2(a_0 - a_2), \quad b_2 = a_0 - a_1 + a_2,$$

и условия Гурвица приводят к неравенствам

$$a_0 + a_1 + a_2 > 0, \quad a_0 - a_2 > 0, \quad a_0 - a_1 + a_2 > 0.$$

Предоставляем читателю проверить, что для $n=3$ условия устойчивости запишутся в виде

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \\ 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0, \\ 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0, \\ a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ X

1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x=0$, $y=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x=0$, $y=0$, $z=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y - 3z, \\ \dot{z} = x - 5y - 3z. \end{cases}$$

3. При каких значениях a точка покоя $x=0$, $y=0$, $z=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = ay - z, \\ \dot{z} = az - x \end{cases}$$

устойчива?

4. Какого типа точку покоя имеет система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y? \end{cases}$$

5. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнений

$$\text{а) } \ddot{x} + 5\dot{x} + 2x + 20x = 0; \text{ б) } \ddot{x} + 5\dot{x} + 6x + x = 0; \text{ в) } x^{IV} + \ddot{x} + \dot{x} - 3x + 4x = 0?$$

6. Какого типа точку покоя $x=0$, $y=0$ имеет система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 5x - y? \end{cases}$$

7. Найти периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$$

и исследовать его на устойчивость.

8. Устойчивы ли решения уравнения

$$x^{IV} + \ddot{x} + 12\dot{x} + \dot{x} + x = f(t)?$$

9. Устойчиво ли решение $x \equiv 0$ уравнения:

$$\text{а) } \ddot{x} + 3\dot{x} + 3\dot{x} + x = 0; \text{ б) } x^{IV} + 2\dot{x} + x = 0.$$

10. Найти области плоскости параметров α , β , в которых устойчиво решение $x=0$, $y=0$ системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y, \\ \dot{y} = x - \beta y; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta^2)x + (\beta + \alpha + 1)y, \\ \dot{y} = (\beta - \alpha + 1)x - y. \end{cases}$$

11. Определить области плоскости α , β , в которых число корней соответствующего многочлена $P(z)$, имеющих положительную действительную часть, постоянно; найти для каждой области это число N :

$$\text{а) } P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 1; \text{ б) } P(z) = z^3 + (\alpha + \beta)z^2 + (\alpha - \beta)z + \alpha.$$

12. Найти область плоскости параметров α , β , в которой устойчиво нулевое решение разностного уравнения

$$\text{а) } f(n+2) + \alpha f(n+1) + \beta f(n) = 0,$$

$$\text{б) } f(n+2) + \alpha^2 f(n+1) + (2\alpha + \beta) f(n) = 0.$$

ГЛАВА XI

ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

§ 1. Основные теоремы второго метода Ляпунова

152. Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце XIX века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

получивший в дальнейшем название *второго метода Ляпунова*. Будем считать (см. п. 141), что система (1) имеет тривиальное решение $x_i \equiv 0$; это значит, что $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$ при любом t .

Прежде чем давать точные формулировки, кратко изложим идею метода.

Предположим, что на устойчивость исследуется точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) системы (1). Если бы с возрастанием t точки всех траекторий приближались к началу координат или хотя бы не удалялись от него, то, очевидно, рассматриваемая точка покоя была бы устойчивой.

Проверка выполнения этого условия не требует знания решений системы (1). Действительно, если ρ — расстояние от точки траектории $x_i = x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) до начала координат, $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)}$, то

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Правая часть в (2) является известной функцией t, x_1, x_2, \dots, x_n , и, следовательно, можно исследовать ее знак. Если окажется, что $\frac{d\rho}{dt} \leq 0$, то точки на всех траекториях не удаляются от начала координат при возрастании t и точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) устойчива.

Вместо $\frac{d\rho}{dt}$ обычно вычисляют для упрощения дифференцирования производную $\frac{d(\rho^2)}{dt} = 2\rho \frac{d\rho}{dt}$, знак которой совпадает со знаком $\frac{d\rho}{dt}$.

Пример 1. Дана система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - tx^3, \\ \dot{y} &= x - ty^3. \end{aligned}$$

Обозначим $v = \rho^2 = x^2 + y^2$; тогда производная \dot{v} будет иметь вид

$$\dot{v} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-y - tx^3) + 2y(x - ty^3) = -2t(x^4 + y^4).$$

При всех x и y и при $t \geq 0$ справедливо неравенство $\dot{v} \leq 0$. Следовательно, точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчива.

Однако точка покоя может быть устойчивой и даже асимптотически устойчивой и при немонотонном приближении к ней точек траекторий с возрастанием t ; чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на изображение центра или устойчивого фокуса на стр. 356. Поэтому вместо функции ρ или ρ^2 А. М. Ляпунов ввел в рассмотрение функции $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, некоторые свойства которых схожи со свойствами расстояния от точки траектории до начала координат — точки покоя. Эти функции, применяющиеся для исследования вопроса об устойчивости, получили название *функций Ляпунова*. В дальнейшем всегда предполагается, что функции Ляпунова непрерывны и непрерывно дифференцируемы в некоторой h -окрестности начала координат, т. е. в точках (x_1, x_2, \dots, x_n) , для которых $\sum x_i^2 < h^2$ и при всех $t \geq t_0$. Полная производная по t функции $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленная в силу системы (1) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Эта производная показывает характер изменения функции v , когда точка (x_1, x_2, \dots, x_n) движется по траектории в сторону возрастания t : если $\dot{v} > 0$, то функция v возрастает, а если $\dot{v} < 0$, то убывает.

Особенно важным для приложений является случай, когда в правые части системы дифференциальных уравнений (1) не входит независимая переменная t . Такие системы называются *автономными* или *стационарными*. Они имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Для таких систем траектория движения полностью определяется начальной точкой и не зависит от начального момента времени (см. [1], п. 177).

При исследовании на устойчивость автономных систем можно ограничиться рассмотрением только таких функций Ляпунова, которые явно от t не зависят, т. е. имеют вид $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Производная по t от такой функции, вычисленная в силу системы (4) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5)$$

и также явно не зависит от t . Это обстоятельство во многом упрощает исследование на устойчивость автономных систем.

Иногда и в случае неавтономных систем их исследование на устойчивость удается провести при помощи функций Ляпунова, не зависящих явно от t (как в примере 1), однако теперь полная производная $\frac{dv}{dt}$ будет явно зависеть от t . Это видно из формулы (3).

153. Введем важные для дальнейшего определения.

Функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *определенно положительной* в h -окрестности начала координат, если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0, \\ v(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Сказанное означает, что функция v имеет строгий минимум в начале координат. Если в этом определении неравенство $v > 0$ заменить неравенством $v < 0$, то функция v будет называться *определенно отрицательной* (ясно, что в этом случае функция $-v$ будет определено положительно).

Например, расстояние ρ до начала координат есть функция определено положительная. Определенно положительными функциями двух переменных являются функции $v = ax^2 + by^2$ и $v = ax^4 + by^4$ при $a > 0$ и $b > 0$.

Подчеркнем разницу между определено положительной функцией и функцией неотрицательной. Неотрицательная функция хотя и сохраняет постоянный знак, но может обращаться в нуль не только в одной точке. Например, функция $v = (x - y)^2$ будет неотрицательной, но не будет определено положительной ни в какой h -окрестности начала координат, так как $v = 0$ при $y = x$.

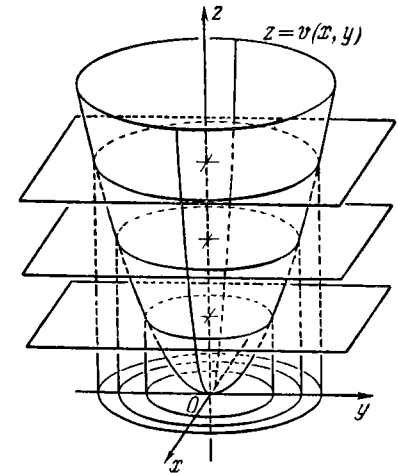


Рис. 148.

Если функция v принимает как положительные, так и отрицательные значения, то говорят, что она *знакопеременная*.

Если $n=2$, то поверхность $z = v(x, y)$, где v — определено положительная функция, в окрестности начала координат обычно имеет вид, изображенный на рис. 148. На этом рисунке линии уровня функции $v(x, y)$ представляют замкнутые кривые, охватывающие начало координат.

Следует отметить, что поверхность $z = v(x, y)$ и семейство линий уровня функции $v(x, y)$ могут иметь гораздо более сложную структуру.

Определенные выше понятия вводят и для функций, зависящих от t . Функция $v(t, x_1, \dots, x_n)$ называется определено положительной в h -окрестности начала координат и

при $t \geq t_0$, если существует такая не зависящая от t определенно положительная функция $\varpi(x_1, \dots, x_n)$, что $v(t, x_1, \dots, x_n) \geq \varpi(x_1, \dots, x_n)$ при всех указанных значениях аргументов и $v(t, 0, \dots, 0) = 0$.

154. Теорема Ляпунова об устойчивости. Если система дифференциальных уравнений (1) такова, что существует функция Ляпунова $v(t, x_1, \dots, x_n)$, определенно положительная при $t \geq t_0$ в некоторой h -окрестности начала координат, производная которой, вычисленная в силу системы (1), неположительна ($\dot{v} \leq 0$), то точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) устойчива.

Мы докажем эту теорему в том частном случае, когда функцию Ляпунова можно выбрать не зависящей от t , т. е. в виде $v(x_1, \dots, x_n)$.

Возьмем произвольное положительное число ε (меньшее, чем h) и обозначим через C_ε границу ε -окрестности начала координат (при $n=3$ это поверхность шара радиуса ε , при $n=2$ — окружность), а через m — наименьшее значение, которое функция v принимает в точках границы C_ε ; так как функция v определенно положительна, то $m > 0$. Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, чтобы в δ -окрестности начала координат функция v была меньше m ; это возможно, так как функция v непрерывна и в начале координат равна нулю.

Пусть x_{10}, \dots, x_{n0} — произвольная точка выбранной δ -окрестности и $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — решение, определенное начальными условиями $x_i(t_0) = x_{i0}$. В начальной точке траектории¹⁾ $v(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) < m$. При увеличении t , т. е. при движении точки по траектории, функция v не может возрастать, так как ее производная $\dot{v} \leq 0$ и поэтому при всех $t \geq t_0$ будет $v(x_1(t), \dots, x_n(t)) < m$. Отсюда следует, что траектория при $t \geq t_0$ не может выйти за пределы ε -окрестности, так как в противном случае она пересекла бы границу C_ε , а в точке пересечения функция $v \geq m$ (m — наименьшее значение v на C_ε).

Таким образом, если начальная точка траектории находится в δ -окрестности начала координат, то траектория не может выйти за пределы взятой ε -окрестности. Так как ε произвольно, то это и значит, что точка покоя устойчива.

¹⁾ Если система автономна, то траектория зависит только от начальной точки и не зависит от начального момента времени.

Приведенное доказательство можно очень наглядно иллюстрировать при помощи рис. 149. На этом рисунке C_ε -окрестность радиуса ε с центром в начале координат, P — точка, в которой функция $v(x, y)$ принимает наименьшее значение на C_ε , Γ — линия уровня $v(x, y) = m$, проходящая через точку P ¹⁾, C_δ — окружность, ограничивающая δ -окрестность начала координат, в которой $v < m$; ясно, что C_δ лежит внутри Γ . Если (x_0, y_0) — любая точка, лежащая внутри C_δ , то $v(x_0, y_0) < m$, и траектория, начинающаяся в этой точке, не может пересечь окружность C_ε и даже, более того, линию Γ .

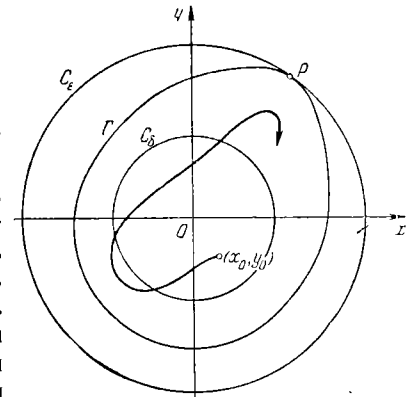


Рис. 149.

Пример 2. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y - 2x^3, \\ \dot{y} = -3x - 5y^3. \end{cases}$$

Ищем функцию Ляпунова в виде $v = \alpha x^2 + \beta y^2$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ постоянные; тогда

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 2\alpha x \frac{dx}{dt} + 2\beta y \frac{dy}{dt} = 2\alpha x (5y - 2x^3) + 2\beta y (-3x - 5y^3) = \\ &= -2[(3\beta - 5\alpha)xy + 2\alpha x^4 + 5\beta y^4]. \end{aligned}$$

Если выбрать α и β так, чтобы $3\beta - 5\alpha = 0$ (например, считать $\alpha = 3$, $\beta = 5$), то все условия теоремы Ляпунова об устойчивости будут выполнены, следовательно, решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво.

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y + 6xy^2, \\ \dot{y} = 7x - 14x^2y. \end{cases}$$

¹⁾ Так как P — точка условного экстремума функции $v(x, y)$ на окружности C_ε , то линия уровня Γ и окружность C_ε , как правило, касаются друг друга (см. [1], п. 124).

Подбирая, как и в предыдущем примере, функцию Ляпунова в виде $v = \alpha x^2 + \beta y^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, получим

$$v = 7x^2 + 3y^2, \quad \frac{dv}{dt} = 14x(-3y + 6xy^2) + 6y(7x - 14x^2y) \equiv 0.$$

Условия теоремы Ляпунова выполнены, следовательно, точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчива.

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + kb(t)y, \\ \dot{y} = -b(t)x + c(t)y, \\ a(t) \leq 0, \quad c(t) \leq 0, \text{ постоянная } k > 0. \end{cases}$$

Выбрав функцию Ляпунова $v = x^2 + ky^2$, находим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 2x[a(t)x + kb(t)y] + 2ky[-b(t)x + c(t)y] = \\ &= 2[a(t)x^2 + kc(t)y^2] \leq 0. \end{aligned}$$

Условия теоремы Ляпунова выполнены, точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчива.

Приведем несколько более сложных примеров. Они интересны также тем, что в исследуемые уравнения входят произвольные функции и поэтому полученные результаты можно будет применять ко многим конкретным задачам.

Пример 5. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x} = -f(x), \quad f(0) = 0,$$

где функция $f(x)$ непрерывна и в некоторой окрестности точки $x = 0$ имеет тот же знак, что и x , т. е. $xf(x) > 0$.

Возьмем функцию Ляпунова в виде $v(x) = \int_0^x f(x) dx$; она определена положительно в указанной окрестности. При $x > 0$ очевидно, что $v > 0$; если же $x < 0$, то запишем, что $v(x) = -\int_x^0 f(x) dx$, и так как в интервале $(x, 0)$ функция $f(x) < 0$, то интеграл отрицателен, а v положительна. Далее,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x)(-f(x)) = -f^2(x) < 0.$$

Значит, точка покоя устойчива, так как все условия теоремы Ляпунова выполнены.

Совершенно аналогично можно доказать устойчивость точки покоя $x_i \equiv 0$ системы уравнений $\dot{x}_i = -f_i(x_i)$, $f_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

где все функции f_i таковы, что $xf_i(x) > 0$ в некоторой окрестности начала координат. Функция Ляпунова v выбирается теперь в виде суммы

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} f_i(x) dx.$$

Например, для системы $\dot{x} = 3x^2 - 2x$, $\dot{y} = -\sin y$ функцией Ляпунова может служить $v(x, y) = x^2 - x^3 + 1 - \cos y$.

Пример 6. Докажем устойчивость нулевого решения уравнения

$$\dot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0, \quad f(0) = 0,$$

где $a \geq 0$, а функция $f(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в примере 5.

Заменим уравнение системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ay - f(x)$$

и возьмем функцию Ляпунова в виде

$$v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx.$$

Ясно, что она определенно положительная; ее производная

$$\dot{v} = f(x)y + y(-ay - f(x)) = -ay^2 \leq 0.$$

Поэтому нулевое решение заданного уравнения устойчиво.

Можно рассмотреть более общее уравнение

$$\dot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0,$$

где $g(x) \geq 0$, а функция $f(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям. И здесь, переходя к системе уравнений первого порядка

и принимая за функцию Ляпунова $v = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx$, легко доказать устойчивость нулевого решения.

Пример 7. Докажем устойчивость нулевого решения уравнения

$$\dot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad f(0) = 0,$$

где функции φ и f в некоторой окрестности начала координат непрерывны и удовлетворяют условиям $\xi\varphi(\xi) > 0$, $\xi f(\xi) > 0$. Полагая $\dot{x} = y$, получаем систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x) - \varphi(y),$$

для которой функцию Ляпунова можно взять такой же, как и в

примере 6, т. е. $v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx$. Тогда

$$\dot{v} = f(x)y + y(-f(x) - \varphi(y)) = -y\varphi(y) \leq 0.$$

Таким образом, и в этом примере нулевое решение устойчиво.

Пример 8. Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет строгий максимум в начале координат. Так как в точке максимума все частные производные функции u равны нулю, то начало координат является точкой покоя рассматриваемой системы. Докажем, что эта точка покоя устойчива. Для этого возьмем функцию

$$v = u(0, 0, \dots, 0) - u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая, очевидно, равна нулю в начале координат и имеет в нем строгий минимум. Производная

$$\frac{dv}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \leq 0.$$

Следовательно, начало координат является устойчивой точкой покоя рассматриваемой системы.

Приведенные примеры показывают, что подбор функции Ляпунова является весьма и весьма сложной задачей. Можно доказать, что если точка покоя системы (1) устойчива, то функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы об устойчивости, всегда существует; неизвестно, однако, в каком виде ее следует искать.

155. В дальнейшем для простоты изложения мы будем рассматривать главным образом автономные системы уравнений, т. е. системы вида (4) и, соответственно, функции Ляпунова выбирать не зависящими явно от t .

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если система дифференциальных уравнений (4) такова, что существует функция Ляпунова $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенно положительная в некоторой h -окрестности начала координат, производная которой \dot{v} , вычисленная в силу системы (4), определенно отрицательна, то точка покоя $x_i \equiv 0$ асимптотически устойчива.

Так как условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены, то точка покоя устойчива; это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h$) найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что траектория с начальной точкой (соответствующей $t = t_0$) в δ -окрестности начала координат не выходит при $t \geq t_0$ за пределы ε -окрестности. Вдоль такой траектории при увеличении t функция v убывает ($\dot{v} < 0$), оставаясь ограниченной снизу: $v \geq 0$. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ она имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \alpha \geq 0.$$

Если $\alpha = 0$, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$, так как функция v непрерывна и обращается в нуль только при $x_i = 0$; это и значит, что точка покоя асимптотически устойчива.

Поэтому осталось доказать лишь, что случай $\alpha > 0$ невозможен. Допустим, вопреки доказываемому, что $\alpha > 0$; тогда при всех $t \geq t_0$ траектория находится в той области, где $v \geq \alpha > 0$, и, следовательно, вне некоторой ρ -окрестности начала координат. Рассмотрим кольцевую область, лежащую вне этой ρ -окрестности и внутри ранее выбранной ε -окрестности начала координат. В этой области и на ее границах всюду $\dot{v} < 0$, а $|\dot{v}| > 0$. Пусть $\beta > 0$ — наименьшее значение $|\dot{v}|$ в рассматриваемой кольцевой области; тогда

$$\frac{dv}{dt} \leq -\beta. \quad (6)$$

Интегрируя полученное неравенство в пределах от t_0 до t , получим

$$v(x_1(t), \dots, x_n(t)) - v(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \leq -\beta(t - t_0),$$

или

$$v(x_1(t), \dots, x_n(t)) \leq -\beta(t - t_0) + v(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)). \quad (7)$$

При достаточно большом t правая часть в (7) отрицательна, а следовательно, и $v(x_1(t), \dots, x_n(t)) < 0$, что противоречит условию теоремы.

Итак, возможен лишь случай $\alpha = 0$. Теорема доказана.

В примере 2 (стр. 389) все условия теоремы об асимптотической устойчивости выполнены; следовательно, исследуемая

точка покоя не только устойчива, но и асимптотически устойчива. В примере 3 (стр. 389) производная \dot{v} не является отрицательно определенной, она тождественно равна нулю. Так как теорема дает лишь достаточные условия асимптотической устойчивости, то из того, что $v \equiv 0$, конечно, нельзя еще делать вывод, что точка покоя устойчива не асимптотически. Впрочем, небольшое дополнительное рассуждение уже позволяет сделать такое заключение. Действительно, в этом примере $v = 7x^2 + 3y^2$, а вдоль интегральных кривых $\dot{v} \equiv 0$ и, следовательно, $v = c$. Таким образом, координаты точек любой траектории удовлетворяют уравнению $7x^2 + 3y^2 = c$, где c — постоянная; семейство интегральных кривых образуют эллипсы. Точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ является центром; она устойчива, но асимптотической устойчивости нет: траектории не приближаются к началу координат при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 9. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - bx^{2n+1}, \\ \dot{y} = cx - dy^{2m+1}, \end{cases}$$

где постоянные a, b, c, d положительны, а m, n — целые неотрицательные числа.

Легко проверить, что функция $v = cx^2 + ay^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (ее производная $\dot{v} = -2[bcx^{2n+2} + ady^{2m+2}]$ определенно отрицательна). Следовательно, точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ асимптотически устойчива.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости может быть дополнена следующим утверждением, которое мы приводим без доказательства.

Если функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена во всем пространстве, всюду удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости и, кроме того, v стремится к бесконечности при $\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \infty$, то решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) асимптотически устойчиво в целом.

Так, в примере 9 функция $v = cx^2 + ay^2$ удовлетворяет всем указанным условиям, следовательно, точка покоя асимптотически устойчива в целом.

156. Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть для системы дифференциальных уравнений (4) в некоторой h -окрестности начала координат существует функция Ляпунова $v(x_1, \dots, x_n)$ и область G , удовлетворяющие следующим условиям:

1) в области G функция v и ее производная \dot{v} , вычисленная в силу системы (4), положительны: $v > 0, \dot{v} > 0$;

2) в любой ρ -окрестности начала координат ($\rho \leq h$) имеется область G_ρ , принадлежащая области G , причем $v = 0$ на той части границы G_ρ , которая лежит внутри ρ -окрестности начала координат; само начало координат находится либо внутри области G_ρ , либо на ее границе.

Тогда точка покоя $x_i \equiv 0$ неустойчива.

На рис. 150 для функции $v = x^2 - y^2$ изображены области, в которых $v > 0$ и $v < 0$. Читателю рекомендуется

построить такие области для функций $v = x^4 - y^4$ и $v = (x - y) \times (x - 2y)(x - 3y)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое положительное число $\rho < h$. Внутри области G_ρ выберем точку $A(x_{10}, \dots, x_{n0})$, лежащую сколь угодно близко к началу координат (это возможно, так как начало координат лежит либо внутри, либо на границе G_ρ). Пусть $v(x_{10}, \dots, x_{n0}) = \alpha$; ясно, что $\alpha > 0$.

Возьмем решение системы (4), определяемое начальными условиями $x_i(t_0) = x_{i0}$, и рассмотрим соответствующую траекторию, выходящую из точки A (рис. 151). Пока эта

траектория находится в области G_ρ , вдоль нее $\dot{v} > 0$, и, следовательно, функция v возрастает. Поэтому траектория не может выйти за пределы области G_ρ , пересекая ее границу там,

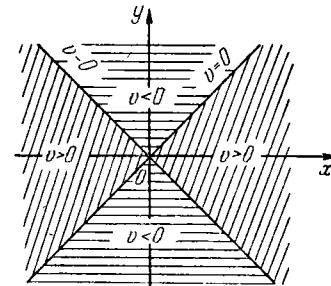


Рис. 150

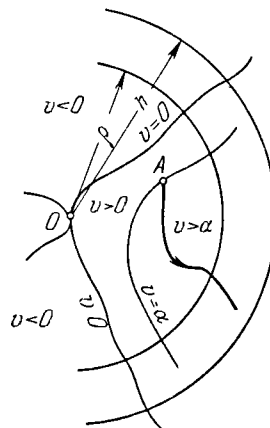


Рис. 151.

где $v=0$, т. е. внутри ρ -окрестности начала координат. Остаются две возможности:

- 1) траектория все время остается внутри G_ρ ;
- 2) траектория покидает область G_ρ , выходя одновременно из фиксированной ρ -окрестности начала координат.

Покажем, что первая из этих возможностей на самом деле неосуществима. Действительно, если траектория остается в области G_ρ , то вдоль нее $v \geq \alpha$, так как v возрастает. Поэтому траектория остается в той части области G_ρ , где $v \geq \alpha$. Эта часть G_ρ лежит строго внутри области G , и производная \dot{v} имеет в ней положительный минимум (так как $\dot{v} > 0$ в G): $\dot{v} \geq \beta$. Интегрируя это неравенство в пределах от t_0 до t , получим

$$v(x_1(t), \dots, x_n(t)) - v(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \geq \beta(t - t_0),$$

или

$$v(x_1(t), \dots, x_n(t)) \geq \alpha + \beta(t - t_0). \quad (8)$$

При $t \rightarrow \infty$ правая часть (8) стремится к бесконечности. Значит, и $v(x_1(t), \dots, x_n(t)) \rightarrow \infty$, что невозможно, так как функция v ограничена в области G_ρ (v непрерывна во всей h -окрестности начала координат).

Итак, необходимо имеет место вторая возможность, т. е. как бы близко к началу координат ни была расположена начальная точка A , траектория, начинающаяся в этой точке, покидает фиксированную ρ -окрестность начала координат. Это и означает, что точка покоя неустойчива.

Заметим, что если в некоторой окрестности начала координат функция v и ее производная \dot{v} , вычисленная вдоль интегральных кривых, обе определенно положительны, то все условия теоремы Четаева выполнены. В этом частном случае теорема была ранее доказана А. М. Ляпуновым.

Пример 10. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = -ay + x^3, \quad \dot{y} = bx + y^3, \quad a > 0, b > 0.$$

Функция $v = bx^2 + ay^2$ определенно положительна; ее производная вдоль интегральных кривых $\dot{v} = 2(bx^4 + ay^4)$ также определенно положительна. Следовательно, выполнены все условия теоремы Четаева и даже ее частного случая — теоремы Ляпунова; точка покоя рассматриваемой системы неустойчива.

Пример 11. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = y^3 + x^5, \quad \dot{y} = x^3 + y^5.$$

Выберем $v = x^4 - y^4$; тогда $v > 0$ в области $|x| > |y|$.

В этой же области $\dot{v} = 4(x^3 - y^3) > 0$. Все условия теоремы Четаева выполнены, следовательно, точка покоя неустойчива.

В заключение заметим, что если мы исследуем на устойчивость вторым методом Ляпунова нулевое решение системы дифференциальных уравнений, то следует попытаться подобрать функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям одной из приведенных теорем, так как заранее неизвестно, устойчиво или нет исследуемое решение.

§ 2. Устойчивость по первому приближению

157: Предположим, что на устойчивость исследуется тривиальное решение системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (f_i(0, 0, \dots, 0) = 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Предположим также, что все f_i дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат. Выделяя в правой части уравнений (9) линейную часть (что возможно в силу дифференцируемости функций f_i), получим

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10)$$

где $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0$ — значение соответствующей частной производной в начале координат. Функции $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при стремлении точки (x_1, x_2, \dots, x_n) к началу координат имеют порядок малости выше, чем $\rho = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (это следует из определения полного дифференциала; см. [1] п. 110).

Обозначив $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 = a_{ij}$, перепишем (10) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (11)$$

Так как в окрестности точки покоя, т. е. при малых $|x_i|$, главными членами в правой части (11) являются линейные члены, то естественно ожидать, что во многих случаях при исследовании на устойчивость тривиального решения можно в (11) пренебречь членами R_i , заменив тем самым систему (11) более простой линейной системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

называемой *системой первого приближения* для системы (9).

Если исследование на устойчивость решения $x_i \equiv 0$ системы (11) заменяется исследованием на устойчивость решения линейной системы (12), то говорят, что система (11) исследуется на устойчивость по первому приближению.

Условия возможности такого исследования по первому приближению были изучены А. М. Ляпуновым, доказавшим следующие утверждения:

Систему (11) можно исследовать на устойчивость по первому приближению, если:

1) *все корни характеристического уравнения для уравнения первого приближения имеют отрицательные действительные части; в этом случае точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) уравнения (11) асимптотически устойчива;*

2) *хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть; в этом случае точка покоя $x_i \equiv 0$ системы (10) неустойчива.*

Указанные в теореме А. М. Ляпунова случаи 1) и 2) не охватывают лишь так называемого *критического* случая:

3) *существуют корни характеристического уравнения с нулевой действительной частью, а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть.*

В критическом случае исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно: на устойчивость начинают влиять нелинейные члены R_i .

Например, точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = -ay - x^3, \quad \dot{y} = bx - y^3, \quad (13)$$

где $a > 0, b > 0$, асимптотически устойчива, так как функция Ляпунова $v = bx^2 + ay^2$ удовлетворяет условиям теоремы

об асимптотической устойчивости ($\dot{v} = -2(bx^4 + ay^4)$ определено отрицательно).

В то же время точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = -ay + x^3, \quad \dot{y} = bx + y^3, \quad (14)$$

имеющей ту же самую линейную часть, неустойчива (см. пример 10 на стр. 396).

Для рассматриваемых систем (13) и (14) характеристическое уравнение для системы первого приближения

$$\dot{x} = -ay, \quad \dot{y} = bx \quad (15)$$

имеет чисто мнимые корни. Следовательно, для уравнений (13) и (14) мы имеем дело с критическим случаем — действительные части корней характеристического уравнения равны нулю. Для системы первого приближения (15) начало координат является центром (см. стр. 356). Добавление к линейной части нелинейных членов в (13) и (14) приводит в окрестности начала координат к малому изменению определяемого системой (15) поля направлений касательных к траекториям.

Однако даже малое изменение поля направлений приводит к тому, что траектории, ранее замкнутые, после обхода начала координат уже не замыкаются, а превращаются в спирали в случае (13), приближающиеся к началу координат и образующие в точке $x=0, y=0$ устойчивый фокус, а в случае (14) — удаляющиеся от начала координат и образующие в начале координат неустойчивый фокус.

Итак, в критическом случае нелинейные члены могут влиять на устойчивость точки покоя.

Приведем несколько примеров исследования на устойчивость по первому приближению точки покоя в начале координат.

Пример 1. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2 \sin x = 0$.

Это уравнение можно заменить системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2y - 2 \sin x,$$

но в этом нет необходимости. Выделяем линейную часть непосредственно в данном уравнении, разложив $\sin x$ по степеням x :

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) = 0.$$

Уравнением первого приближения является

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0. \quad (16)$$

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = -1 \pm i$ имеют отрицательную действительную часть, следовательно, решение $x \equiv 0$ уравнения (16), а значит и данного, асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x + e^x = 1. \quad (17)$$

Разлагая e^x по степеням x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

и выделяя линейную часть, получим

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x + x = 0. \quad (18)$$

В силу признака Гурвица (см. стр. 366) все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, следовательно, решение $x \equiv 0$ уравнений (18) и (17) асимптотически устойчиво.

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^y - \cos y, \\ \dot{y} = 3x - y - \sin y - x^3. \end{cases} \quad (19)$$

Для характеристического уравнения системы первого приближения

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 3x - 2y \quad (20)$$

один из корней положительный ($k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$), следовательно, точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ систем (20) и (19) неустойчива.

§ 3. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

158. Составляя систему дифференциальных уравнений, описывающую какой-нибудь процесс, мы всегда вынуждены учитывать лишь основные влияющие на этот процесс факторы, отбрасывая остальные, менее существенные. Такая идеализация часто вызывается желанием упростить задачу, а кроме того, мы почти никогда не знаем всех воздействующих на данный процесс факторов, но имеем основания считать влияние некоторых из них незначительным. Однако даже незначительные влияющие на рассматриваемый процесс факторы при длительном действии могут оказать на него заметное влияние.

Выяснению влияния таких малых постоянно действующих возмущений и посвящен этот параграф.

Рассмотрим наряду с системой

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (21)$$

систему

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + Q_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (22)$$

где функции Q_i , называемые *постоянно действующими возмущениями*, неизвестны, но известно, что они малы по модулю и таковы, что *возмущенная система* (22), так же как и система (21), имеет единственное решение, определяемое условиями

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Как уже упоминалось выше (см. стр. 350), исследуемое решение введением новых неизвестных функций может быть преобразовано в нулевое, поэтому мы предположим, что на устойчивость при постоянно действующих возмущениях исследуется нулевое решение уравнения (21).

Определение. Пусть для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что каковы бы ни были функции $Q_i(t, x_1, \dots, x_n)$, лишь бы

$$|Q_i(t, x_1, \dots, x_n)| < \eta$$

когда $t \geq t_0$ и $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \varepsilon^2$, решение $x_i(t)$ возмущенной системы (22), определяемое начальными условиями $x_i(t_0) = x_{i0}$, где $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \delta^2$, удовлетворяет при всех $t \geq t_0$ неравенству

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2.$$

Тогда нулевое решение системы (21) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*.

Иными словами, решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если малые, но постоянно действующие возмущения вызывают лишь малые изменения решения при сколь угодно больших значениях t .

159. Мы приведем теорему И. Г. Малкина, содержащую достаточные условия устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Для простоты сформулируем и докажем

эту теорему лишь в том частном случае, когда невозмущенная система (21) автономна, т. е. имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n). \quad (23)$$

При этом возмущенной системой будет

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) + Q_i(t, x_1, \dots, x_n). \quad (24)$$

Теорема Малкина. Пусть для системы (23) существует функция Ляпунова $v(x_1, \dots, x_n)$, определенно положительная в некоторой h -окрестности начала координат, производная которой \dot{v} , вычисленная в силу системы (23), определенно отрицательна. Тогда нулевое решение системы (21) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Заметим, что условия приведенной теоремы совпадают с условиями теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости для автономных систем.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h$) и обозначим через m наименьшее значение функции $v(x_1, \dots, x_n)$

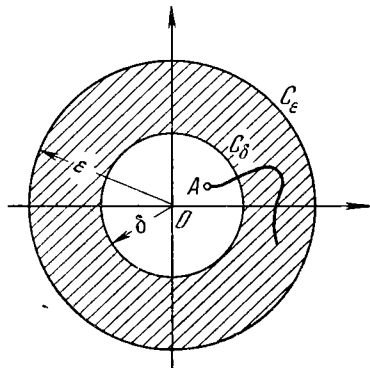


Рис. 152.

на границе ε -окрестности начала координат — сфере C_ε (см. рис. 152 для $n=2$). Выберем, далее, какое-либо положительное число $l < m$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы в δ -окрестности начала координат и на ее границе C_δ имело место неравенство $v(x_1, \dots, x_n) < l$. Это возможно, так как $v(0, \dots, 0) = 0$ и функция v непрерывна. Очевидно, что $\delta < \varepsilon$.

В кольцевой области между сферами C_δ и C_ε и на ее границах (на рис. 152 эта область заштрихована) производная функции v , вычисленная в силу системы (23), удовлетворяет, будучи определенно отрицательной, неравенству

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leq -k, \quad (25)$$

где k — некоторая положительная постоянная.

Ввиду того, что величины $\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|$ в ε -окрестности начала координат ограничены, можно выбрать столь малое $\eta > 0$, что для всех функций $Q_i(t, x_1, \dots, x_n)$, для которых в ε -окрестности начала координат и при $t \geq t_0$ имеют место неравенства $|Q_i| < \eta$, справедливо также (при тех же t, x_1, \dots, x_n) неравенство

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} Q_i \right| < \frac{k}{2}. \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует, что в рассматриваемом кольце (включая его границы) производная функции v , вычисленная уже в силу возмущенной системы (24), удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} (f_i + Q_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} Q_i \leq -\frac{k}{2} < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Для завершения доказательства выберем точку A с координатами $x_i(t_0) = x_{i0}$ в δ -окрестности начала координат и рассмотрим траекторию возмущенной системы (24), которая определяется этой начальной точкой; она не может выйти за пределы сферы C_ε . Действительно, во всей δ -окрестности (в частности, и в точке A) $v \leq l < m$. Чтобы выйти за пределы сферы C_ε , траектория должна сначала войти в кольцо между C_δ и C_ε . Но в этом кольце вдоль траектории $\dot{v} < 0$, и поэтому функция v убывает; значит, траектория не может пересечь сферу C_ε , так как во всех точках этой сферы $v \geq m > l$.

Ввиду того, что ε было выбрано произвольно, теорема доказана.

Пример 1. Исследовать на устойчивость при постоянно действующих возмущениях тривиальное решение системы

$$\dot{x} = ax - by^3, \quad \dot{y} = cy - dx^3,$$

где a, b, c, d — положительные постоянные. Точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчива при постоянно действующих возмущениях, так как функция $v = cx^2 + ay^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Малкина.

160. Мы предполагали, что возмущения действуют постоянно, т. е. $Q_i(t, x_1, \dots, x_n)$ могут быть отличными от нуля при любом $t \geq t_0$.

Естественно возникает вопрос, как влияют малые кратковременные возмущения, т. е. как влияют в (22) малые по модулю функции $Q_i(t, x_1, \dots, x_n)$, отличные от нуля лишь на небольшом интервале изменения t , $t_1 \leq t \leq t_2$. В силу малости модулей Q_i можно утверждать, что их влияние сведется к тому, что точка M в момент t_2 будет находиться где-то вблизи рассматриваемой траектории системы (21) (рис. 153).

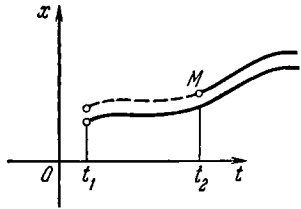


Рис. 153.

Для значений $t \geq t_2$ $Q_i \equiv 0$ и, следовательно, надо рассматривать опять решение системы (21), но с несколько смещенными начальными значениями, т. е. возникает уже рассмотренная задача о нахождении условий устойчивости по Ляпунову — устойчивости по отношению к возмущениям начальных значений.

При этом возмущения начальных значений происходят не в точке t_1 , а в точке t_2 , однако легко видеть, что если решения уравнения определены при всех $t \geq t_1$ и непрерывно зависят от начальных значений, то при исследовании на устойчивость безразлично, в какой точке происходят возмущения. Действительно, решения, определяемые возмущенными начальными значениями в точке t_1 , могут быть продолжены до точки t_2 (или, наоборот, от точки t_2 до t_1) и в силу непрерывной зависимости решения от начальных значений малые возмущения начальных значений в точке t_1 будут вызывать малые возмущения, определяющие то же самое решение, в точке t_2 (рис. 153).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ XI

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \dot{x} = -x \sin^2 t + e^t y, \\ \dot{y} = -e^t x - y \cos^2 t; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \dot{x} = 3y - x^4, \\ \dot{y} = -2x - y^2. \end{cases} \end{aligned}$$

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax - x^3, \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

имеет устойчивую точку покоя $x = 0, y = 0$?

3. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2 \sin y - y^3, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^y - \cos y, \\ \dot{y} = 3x - y - \sin y. \end{cases}$$

5. Устойчиво ли по отношению к постоянно действующим возмущениям решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^5, \\ \dot{y} = 5x - y^3. \end{cases}$$

6. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнений:

- а) $x''' + 5x'' + 3x' + \sin x = 0$;
- б) $x''' + 4x'' + 5x' + 3e^x = 3$;
- в) $x''' + \sin x'' + \sin x' + 5x + x^3 + 1 - \cos x = 0$.

ЧАСТЬ I

Глава I

1. а) $3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $2(\cos 0 + i \sin 0)$; г) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$; д) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$; ж) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; з) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; и) $\sqrt{29}\left(\cos \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{5}{2}\right)$; к) $\sqrt{29}\left[\cos\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{2}\right) + i \sin\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{2}\right)\right]$; л) $\sqrt{29} \times \left[\cos\left(-\operatorname{arctg} \frac{5}{2}\right) + i \sin\left(-\operatorname{arctg} \frac{5}{2}\right)\right]$; м) $\sqrt{29}\left[\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{5}{2} - \pi\right) + i \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{5}{2} - \pi\right)\right]$.

2. а) Вне круга радиуса 5 с центром в начале координат; б) внутри круга радиуса 3 с центром в точке i ; в) вне круга радиуса 2 с центром в точке $-2i$ и на окружности этого круга; г) на окружности круга радиуса 5 с центром в точке $3+4i$; д) справа от прямой $x=3$; е) ниже прямой $y=2$ и на самой этой прямой; ж) на эллипсе с фокусами в точках -2 и 2 и большой полуосью $\frac{5}{2}$; з) внутри левой ветви гиперболы с фокусами в точках -2 и 2 и действительной полуосью $\frac{3}{2}$; и) на лемнискате $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = a^4$; к) на гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$; л) на перпендикуляре к отрезку, соединяющему точки i и $-\frac{5}{2}$, восстановленному из середины этого отрезка; м) на прямой $x = \frac{5}{2}$ и слева от нее; н) внутри угла между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, выходящими из начала координат; о) на луче, выходящем из точки i под углом $\frac{\pi}{4}$ к положительному направлению действительной оси; п) внутри угла между

лучами, выходящими из точки $-2i$ и образующими с положительным направлением действительной оси углы, разные соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$.

4. а) $-i$; б) $-i$; в) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; г) $-16(\sqrt{3} + i)$; д) -8 ;

5. а) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $-i$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$, $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$; в) 1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, i , $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, -1 , $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; г) $\sqrt[4]{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \frac{7\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$; д) $2 + i$, $-2 - i$; е) $\sqrt{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$.

6. а) $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$; б) $u^2 + v^2 = 1$; в) $v = -u$; г) $v = 0$; д) $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$; е) $u = \frac{1}{2}$.

7. а) Прямая $y = x$; б) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) гипербола $y = \frac{1}{x}$; г) ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$, лежащая в первой четверти ($x > 0$, $y > 0$).

8. а) $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$; б) $-\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$; в) $\ln 5 - i \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + (2k + 1)\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Указание. Главное значение аргумента числа $-3 + 4i$ равно $\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

9. а) $-i$; б) $-ei$; в) $e^3(\cos 1 + i \sin 1)$; г) $ie^{(2k - \frac{1}{2})\pi}$; д) $e^{(2k - \frac{1}{4})\pi} \left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2}\right)$; е) $e^{2k\pi}(\cos \ln 3 + i \sin \ln 3)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

11. а) $\frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$; б) $\frac{1}{2}\left[\left(e + \frac{1}{e}\right)\cos 1 - i\left(e - \frac{1}{e}\right)\sin 1\right]$; в) $\frac{\sin 4 - i \operatorname{sh} 2}{2(\cos^2 1 - \operatorname{sh}^2 1)}$; г) $\cos 1$; д) $i \sin 1 \operatorname{ch} 2 - \cos 1 \operatorname{sh} 2$;

е) $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$ или $\operatorname{ch} y \sin x + i \operatorname{sh} y \cos x$;
 ж) $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$ или $\operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x$.

13. а) $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2})$; б) $2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$,
 $(2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$; в) $2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt[4]{2} - i[\ln(1 + \sqrt[4]{2}) +$
 $+\frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})]$, $(2k + 1)\pi - \operatorname{arctg} \sqrt[4]{2} - i[\ln(\sqrt[4]{2} - 1) +$
 $+\frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})]$; г) $k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$; д) $k\pi + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{i}{4} \ln 5$;
 е) $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)i$; ж) $(2k + 1)\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Глава II

2. а) $z^3 + Ci$; б) $z^2 + 2z + Ci$; в) $\frac{1}{z} + Ci$; г) $\frac{1}{z} + 2iz + Ci$;
 д) $-2ie^z + Ci$.
 3. а) $\frac{1}{z+1} + C$; б) $z^2 + 3iz + C$; в) $\ln z + C$; г) $ze^z +$
 $+(1+i)z + C$.
 4. а) Углы поворота 0 и 0, коэффициенты растяжения 2 и 3;
 б) углы поворота 0 и 0, коэффициенты растяжения 1 и $\frac{3}{4}$; в) углы
 поворота $\frac{\pi}{2}$ и 0, коэффициенты растяжения $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{16}$; г) углы пово-
 рота $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, коэффициенты растяжения $2\sqrt{2}$ и 6; д) углы пово-
 рота $-\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{5\pi}{6}$, коэффициенты растяжения 4 и 12.

5. а) Сжимается внутренность круга $|z| < \frac{1}{2}$, растягивается
 внешность круга $|z| > \frac{1}{2}$; б) сжимается внешность круга $|z| > 1$,
 растягивается внутренность круга $|z| < 1$; в) сжимается внутрен-
 ность круга $|z+1| < \frac{1}{2}$; растягивается внешность круга $|z+1| >$
 $> \frac{1}{2}$; г) сжимается левая полуплоскость $x < 0$, растягивается пра-
 вая полуплоскость $x > 0$; д) сжимается внешность круга $|z-1| > 1$,
 растягивается внутренность круга $|z-1| < 1$.

6. а) $\frac{2+i}{2}$; б) $2 + \frac{i}{2}$.

7. а) 1; б) 2.

8. а) $-8\pi i$; б) 0. 9. $\pi\left(e - \frac{1}{e}\right) = 2\pi \operatorname{sh} 1$.

10. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{3}$. 11. а) $\frac{\pi}{54}$; б) $-\frac{\pi}{54}$. 12. $\frac{\pi i}{3e^2}$. 13. а) $\frac{3\pi i}{8}$;
 б) $-\frac{3\pi i}{8}$; в) 0.

Глава III

1. $w = \frac{i-z}{z+i}$. 2. а) $w = \frac{2z-1}{2-z}$; б) $w = i \frac{2z-1}{2-z}$; в) $w = -iz$.
 3¹. а) $w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$; б) $w = \left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$;
 в) $w = i \left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}$ для области I, $w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3$
 для области II, $w = \left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3$ для области III, $w =$
 $= -\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}$ для области IV; г) $w = \left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$;
 д) $w = -\left(\frac{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}{z^{2/3}-\sqrt[3]{4}}\right)^2$; е) $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$; ж) $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{z+1+i}}$;
 з) $w = \sqrt{z^2+a^2}$; и) $w = \sqrt{1-\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2}$; к) $w = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$;
 л) $w = e^{\frac{2\pi i z}{z-2}}$; м) $w = e^{\frac{2}{3}\pi i \frac{z-4}{z-2}}$; н) $w = e^{\frac{\pi i(z-a)}{b-a}}$;
 о) $w = \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}}-1}{e^{\frac{\pi z}{a}}+1}\right)^2$; п) $w = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$;
 р) $w = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$.

4. На верхнюю полуплоскость.

5. На внутренность единичного круга.

6. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h}{\cos 2z + 1}}$.

¹) В ответах к задачам 3 и 6 указана лишь одна функция, удовлетворяющая условиям соответствующей задачи.

Глава IV

2. $e^{\frac{2k\pi i}{m}} \left[1 + \frac{1}{m} (z-1) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \times \right.$
 $\times \left. \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \frac{(z-1)^3}{3!} + \dots \right]$, где $k=0, 1, 2, \dots, m-1$. Радиус сходимости равен 1.

3. $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots; z + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 5 \cdot 2!} z^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 7 \cdot 3!} z^7 + \dots$. Радиус сходимости равен 1 в обоих случаях.

4. а) $e \left(1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \dots \right)$, $r=1$; б) $\sin 1 + \cos 1 \cdot z +$
 $+ \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1 \right) z^2 + \left(\frac{5}{6} \cos 1 - \sin 1 \right) z^3 + \dots; r=1$; в) $\ln 2 + \frac{z}{2} +$
 $+ \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \dots; r=\pi$.

5. а) $z = \pm 3i$ — нули 1-го порядка, $z = \pm 2i$ — нули 5-го порядка;
 б) $z = 2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 1-го порядка; $z = \pm 2$ — нули 3-го порядка; в) $z=0$ — нуль 2-го порядка, $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 1-го порядка; г) $z=0$ — нуль 2-го порядка, $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 3-го порядка.

6. а) $\frac{1}{(a-b)b} \left(1 + \frac{z}{b} + \frac{z^2}{b^2} + \dots \right) + \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \dots \right)$;

б) $\frac{1}{z^2} + \frac{a^2 - b^2}{(a-b)z^3} + \frac{a^3 - b^3}{(a-b)z^4} + \dots + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{(a-b)z^n} + \dots$;

в) $-\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{z-a}{(a-b)^3} - \frac{(z-a)^2}{(a-b)^4} + \dots + \frac{1}{(a-b)(z-a)}$.

7. а) $\frac{1}{2} + z + z^2 + \frac{1}{3!} z + \frac{1}{4!} z^2 + \dots + \frac{1}{(n+2)! z^n} + \dots$;

б) $\cos 1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)! (z-2)^{4k}} + \sin 1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$
 $\times \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)! (z-2)^{4k+3}}$.

8. $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6z^3} - \frac{1}{2z^4} - \dots$, область сходимости $|z| > 1$.

9. а) Полюсы 1-го порядка $z=0$ и $z=-1$; полюс 3-го порядка $z=1$; б) полюсы 3-го порядка $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$; в) полюсы 1-го порядка $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); г) полюсы 2-го порядка $z = \frac{2k+1}{2} \pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); д) существенно особая точка $z=2i$; е) существенно особая точка $z=-i$; ж) полюсы 1-го по-

рядка $z = 1 + \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $z=1$ — предельная точка для полюсов (неизолированная особая точка); з) $z = \frac{2k+1}{2} \pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюсы 1-го порядка ($z=1$ — правильная точка); и) особых точек в конечной части плоскости нет; к) $z=0$ — полюс 3-го порядка; л) $z = \ln 2 + 2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюсы 1-го порядка.

10. а) $z=\infty$ — правильная точка, $f(\infty)=1$; б) $z=\infty$ — полюс 3-го порядка; в) $z=\infty$ — правильная точка (нуль 3-го порядка); г) $z=\infty$ — существенно особая точка; д) $z=\infty$ — существенно особая точка; е) $z=\infty$ — полюс 2-го порядка; ж) $z=\infty$ — правильная точка, $f(\infty)=1$; з) $z=\infty$ — правильная точка, $f(\infty)=1$; и) $z=\infty$ — существенно особая точка.

11. а) Нет; б) да. 12. а) Да; б) нет.

Глава V

1. а) 5; б) -1 ; в) $-\frac{3i}{16}$ (относительно точки i) и $\frac{3i}{16}$ (относительно точки $-i$); г) $(-1)^n + \frac{(n+2)(n+3) \dots (2n-1)2n}{(n-1)!}$; д) $-\frac{i}{4}$ (относительно точки i) и $\frac{i}{4}$ (относительно точки $-i$); е) 1 (относительно точки 0) и $-\frac{1}{2}$ (относительно каждой из точек ± 1); ж) $\frac{4}{3} \sin 2i$;
 з) -1 (относительно каждой из точек $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); и) 0 (относительно каждой из точек $k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); к) -1 (относительно каждой из точек $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)).

2. а) 1; б) 0; в) 1. 3. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 4. $-\frac{\pi i}{2}$. 5. а) 0; б) $(-1)^{n-1} \times$
 $\times \frac{2\pi(2n-2)! i}{[(n-1)!]^2 (a-b)^{2n-1}}$; в) 0. 6. а) $\pi \sqrt{2}$; б) $-\frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}$;
 в) $\frac{\pi}{2a}$; г) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$; д) $\frac{\pi}{3e^3}$; е) $\frac{\pi}{4e^4}$ ($4 \cos 2 + 2 \sin 2$). 7. а) В каждом квадранте по одному нулю; б) во втором и третьем квадрантах по два нуля.

Глава VI

Модуль вектора в точке z :

$$1. 2|z|. 2. \frac{|z^2-1|}{|z|^2}. 3. \frac{\sqrt{2}}{|z|}. 4. \frac{1}{2\sqrt{|z-a|}}.$$

Угол между вектором в точке z и положительным направлением действительной оси:

1. — $\text{Arg } z$. 2. $2 \text{ Arg } z - \text{Arg } (z' - 1)$. 3. $\text{Arg } z - \frac{\pi}{4}$.

4. $\frac{1}{2} \text{ Arg } (z - a)$. Уравнения линий тока:

1. $xy = C$. 2. $y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C$, в полярных координатах $\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi = C$. 3. $\rho = Ce^{-\varphi}$.

4. $\rho = \frac{c}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$, если полярная система координат выбрана так,

что $z = a$ — полюс, а направление полярной оси совпадает с положительным направлением действительной оси.

Уравнения линий уровня потенциальной функции:

1. $x^2 - y^2 = c$. 2. $x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = c$, в полярных координатах $\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi = c$. 3. $\rho = ce^{\varphi}$. 4. $\rho = \frac{c}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$, если полярная система

координат выбрана так же, как при определении линий тока (см. выше).

5. Семейство линий тока — пучок окружностей, проходящих через точки $z = 0$, $z = 1$. Линии уровня потенциальной функции — окружности $(x - c)^2 + y^2 = c(c - 1)$. Точка $z = 0$ — источник обильности 2π , точка $z = 1$ — сток обильности -2π .

6. Семейство линий тока — окружности $(x - c)^2 + y^2 = c(c - 1)$, семейство линий уровня потенциальной функции — пучок окружностей, проходящих через точки $z = 0$, $z = 1$; $z = 0$ — вихревая точка интенсивности -2π , $z = 1$ — вихревая точка интенсивности 2π .

Глава VII

1. а) $\frac{2}{p(p^2 + 4)}$; б) $\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$; в) $\frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}$;
 г) $\frac{1}{8} \left(\frac{3}{p} + \frac{4p}{p^2 + 4} + \frac{p}{p^2 + 16} \right) = \frac{p^4 + 16p^2 + 24}{p(p^2 + 4)(p^2 + 16)}$.
 2. а) $\frac{16p}{(p^2 + 4)(p^2 + 36)}$; б) $\frac{p^2 - 8}{(p^2 + 4)(p^2 + 16)}$;
 в) $\frac{1}{2} \left(\frac{p}{p^2 + 36} + \frac{p}{p^2 + 4} \right)$.
 3. а) $\frac{16(p + 1)}{[(p + 1)^2 + 4][(p + 1)^2 + 36]}$; б) $\frac{p + 2}{(p + 2)^2 - 9}$;
 в) $\frac{p^2 - 3p}{p^4 - 6p^2 + 25}$; г) $\frac{\omega}{2} \left[\frac{1}{(p - a)^2 + \omega^2} - \frac{1}{(p + a)^2 + \omega^2} \right] =$

$$= \frac{2a\omega p}{(p^2 + a^2 + \omega^2)^2 - 4a^2 p^2}.$$

4. а) $\text{arccotg } \frac{p}{4}$; б) $\frac{2(p^3 - 3p)}{(p^2 + 1)^3}$; в) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p}$;
 г) $\frac{2(p^3 + 3pa^2)}{(p^2 - a^2)^3}$.
 5. а) $\frac{(1 - e^{-ap})^2}{p}$; б) $\frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2}$; в) $\frac{e^{-ap} - e^{bp}}{p^2}$.
 7. а) $\left(1 + 2t + \frac{t^2}{2} \right) e^t$; б) $\cos 2t - t \sin 2t$; в) $\frac{1}{2a} (\text{sh } at + at \text{ ch } at)$;
 г) $\frac{a^2 \text{ ch } at - b^2 \text{ ch } bt}{a^2 - b^2}$.

Глава VIII

1. а) $x = \frac{t^2 e^t}{12}$; б) $x = t^3 e^{-t}$; в) $x = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}$; г) $x =$
 $= \sin t + \sin 2t - 2 \cos 3t$; д) $x = -2 \sin t - \cos 2t$.
 2. а) $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$; б) $x = -\frac{1}{2} - \frac{11}{34} e^{4t} + e^t - \frac{3}{17} \cos t +$
 $+\frac{5}{17} \sin t$, $y = \frac{22}{51} e^{4t} - \frac{2}{3} e^t + \frac{4}{17} \cos t - \frac{1}{17} \sin t$; в) $x = -e^{-t}$,
 $y = e^{-t}$, $z = 0$; г) $x = 17 - 17 \text{ ch } t + 7t \text{ sh } t$, $y = -12 + 12 \text{ ch } t -$
 $-\frac{7}{2} t \text{ sh } t$.

Глава IX

2. $f(n) = 2^n \left[1 + (-1)^n 2 - \cos \frac{n\pi}{2} \right] - 2n - 1$.
 3. $f(n) = (1 - n) 4^n$.

Глава X

1. Точка покоя асимптотически устойчива. 2. Точка покоя неустойчива. 3. При $a < -\frac{1}{2}$ точка покоя асимптотически устойчива, при $a = -\frac{1}{2}$ устойчива, при $a > -\frac{1}{2}$ неустойчива. 4. Центр. 5. а) Точка покоя неустойчива, б) точка покоя асимптотически устойчива, в) точка покоя неустойчива. 6. Седло. 7. Периодическое решение $x = \frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t$ асимптотически устойчиво. 8. Все решения асимптотически устойчивы. 9. а) Неустойчиво, б) неустойчиво.

10. а) Решение устойчиво асимптотически в заштрихованной на рис. 154 области между прямой $\beta = \alpha$ и «верхней» ветвью гиперболы $\beta(\alpha - 1) = -1$, на всей границе этой области решение

устойчиво, но не асимптотически; б) решение устойчиво в заштрихованной на рис. 155 области, лежащей под прямой $\beta = -\frac{1}{2}$ и

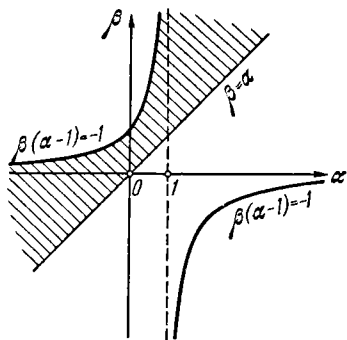


Рис. 154.

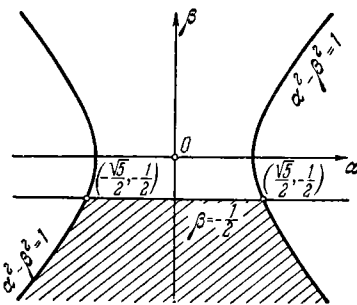


Рис. 155.

между ветвями гиперболы $\alpha^2 - \beta^2 = 1$; решение устойчиво (но не асимптотически) во всех точках границы этой области, кроме точек $(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2})$.

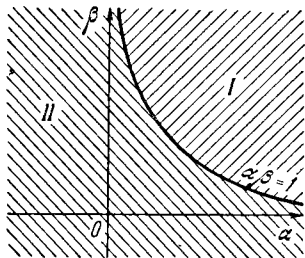


Рис. 156.

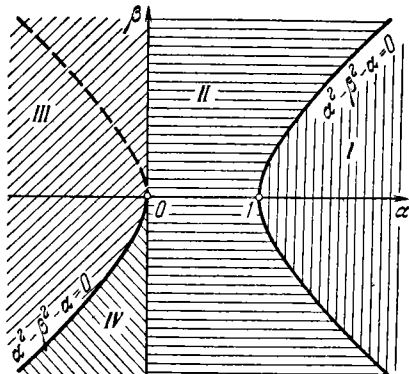


Рис. 157.

11. а) В области $\alpha > 0, \beta > \frac{1}{\alpha}$ (область I на рис. 156) $N=0$, в остальной части плоскости (область II) $N=2$; б) в области $\alpha > \frac{1}{2} + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}$ (область I на рис. 157) $N=0$, в области

$0 < \alpha < \frac{1}{2} + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}$ (область II) $N=2$, в области, где $\alpha < \frac{1}{2} - \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}$ или $\frac{1}{2} - \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}} \leq \alpha < 0, \beta > 0$ (область III), $N=1$; в области $\frac{1}{2} - \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}} < \alpha < 0, \beta < 0$ (область IV) $N=3$.

12. а) Решение асимптотически устойчиво в области $|\alpha| - 1 < \beta < 1$ (треугольник, заштрихованный на рис. 158). Во всех точках

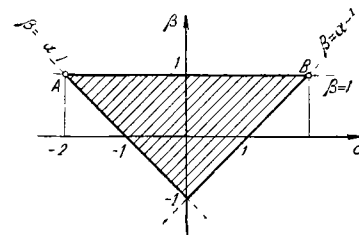


Рис. 158.

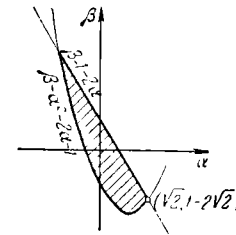


Рис. 159.

границы, кроме точек A и B, решение устойчиво, но не асимптотически. б) Решение асимптотически устойчиво в заштрихованной на рис. 159 области $\alpha^2 - 2\alpha - 1 < \beta < 1 - 2\alpha$. Во всех точках границы, кроме точки $(\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$, решение устойчиво, но не асимптотически.

Глава XI

1. а) Решение устойчиво; б) Решение асимптотически устойчиво. У к а з а н и е. Можно подобрать функцию Ляпунова вида $\alpha x^2 + \beta y^2$.

2. При $\alpha \leq 0$ точка покоя асимптотически устойчива, при $\alpha > 0$ неустойчива. 3. Точка покоя неустойчива. 4. Точка покоя неустойчива. 5. Точка покоя устойчива по отношению к постоянно действующим возмущениям. 6. а) Решение асимптотически устойчиво; б) решение асимптотически устойчиво; в) решение неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Бермант и И. Г. Араманович, Краткий курс математического анализа, «Наука», 1967.
2. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, Физматгиз, 1958.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

3. А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, «Наука», 1964.
4. И. Г. Араманович и В. И. Левин, Уравнения математической физики, «Наука», 1964.
5. Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.
6. Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, «Наука», 1965.
7. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1965.
8. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, «Наука», 1966.
9. А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, «Наука», 1966.
10. П. И. Романовский, Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, «Наука», 1964.

ЗАДАЧНИКИ

11. Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц и И. Г. Араманович, Сборник задач по теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.
 12. Н. И. Кожевников, Т. И. Краснощекова и Н. Е. Шишкин, Ряды и интеграл Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, «Наука», 1964.
 13. М. Л. Краснов и Г. И. Макаренко, Операционное исчисление. Устойчивость движения, «Наука», 1964.
-