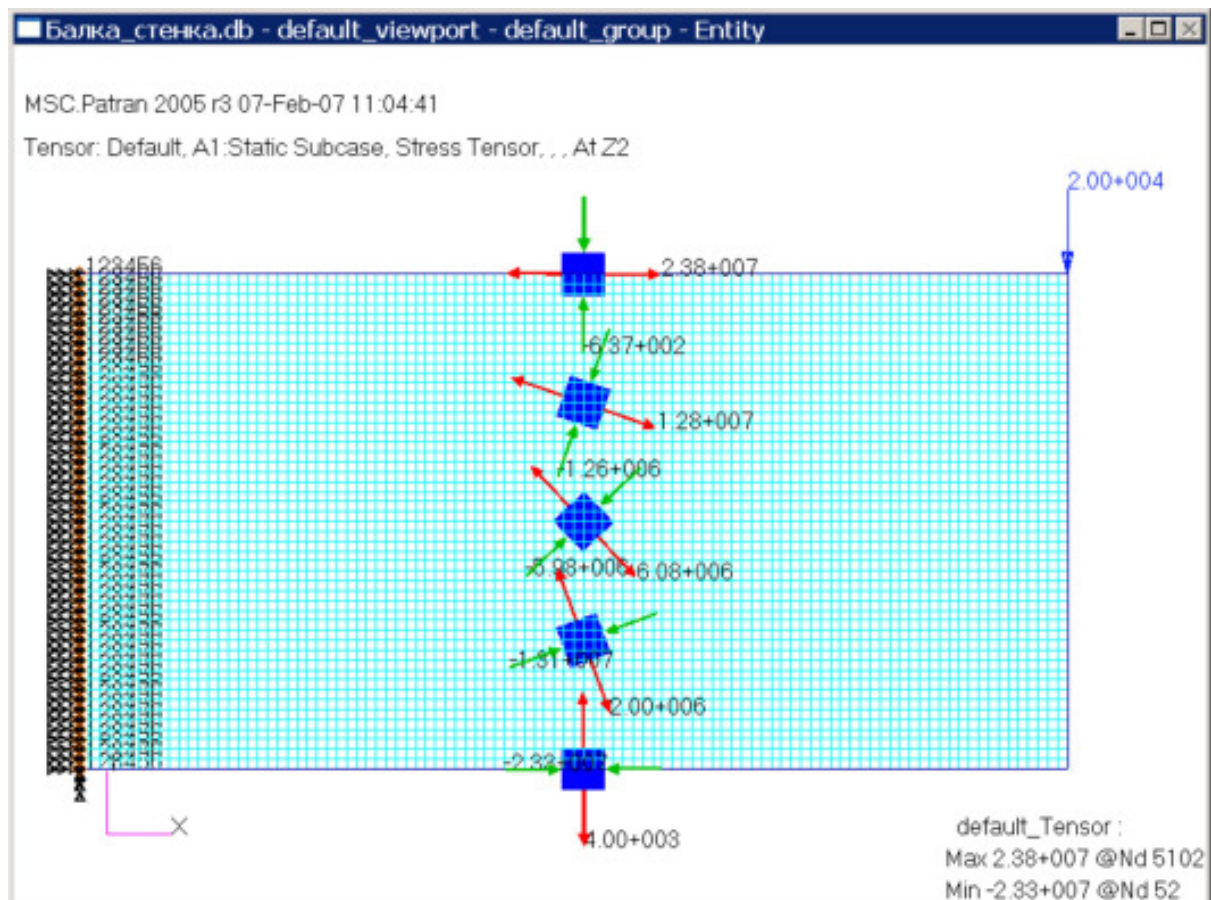


В.А. ЖИЛКИН

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СЕЛЬХОЗМАШИН

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММ MATHCAD, SCAD И MSC.PATRAN-NASTRAN 2005



Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГОУ ВПО «Челябинский государственный агроинженерный университет»

В.А. ЖИЛКИН

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СЕЛЬХОЗМАШИН

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММ MATHCAD, SCAD
И MSC.PATRAN-NASTRAN 2005**

Учебное пособие

Для студентов специальности 190206
Сельскохозяйственные машины и оборудование

Челябинск 2007

Жилкин В.А. Элементы прикладной и строительной механики сельхозмашин. Применение программ MathCAD, SCAD и MSC.Patran-Nastran 2005. Учеб. пособие. - Челябинск: ЧГАУ, 2007. - 349.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов» инженерной подготовки по специальности **190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование»** направления **190200** – «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы». В нём описываются интерфейсы программных продуктов **SCAD** и **MSC.Patran-Nastran 2005**, изучение которых не предусмотрено учебными планами подготовки дипломированных специалистов по этой специальности, и излагаются методики создания стержневых, плоских и объёмных расчетных моделей тел и систем тел.

На примере программ **SCAD** и **MSC.Patran-Nastran 2005** реализуется идея использования уже на младших курсах на факультетах сельскохозяйственного машиностроения современных проектно-вычислительных комплексов, применяемых в инженерной практике для расчетов и проектирования строительных и машиностроительных конструкций. Приведены инструкции по использованию программ **SCAD** и **MSC.Patran-Nastran 2005** при решении задач строительной механики стержневых систем и плоских задач теории упругости.

Учебное пособие предназначено для студентов всех курсов специальности 190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», аспирантов и инженерно-технических работников АПК.

Рецензенты

Рахимов Р.С. – доктор техн. наук, проф. (ЧГАУ)
Сапожников С.Б. – доктор техн. наук, проф. (ЮУрГУ)

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЧГАУ

ISBN

© Челябинский государственный агроинженерный университет, 2007

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Сельскохозяйственной машине, как и всякому инженерному сооружению, при её постройке должна быть обеспечена способность противостоять внешним усилиям, которые могут на неё действовать в различных условиях её эксплуатации, без вреда для её целостности. Обеспечение прочности сельскохозяйственной машины в течение всего запланированного срока её службы является одной из основных задач проектировщика.

Наряду с этим сельскохозяйственной машине должна быть обеспечена необходимая жёсткость, т.е. способность противостоять действию внешних сил без недопустимых изменений формы элементов её корпуса.

Науку, имеющую своей целью дать конструктору рациональную базу для суждения о том, в какой мере будут обеспечены проектируемому сооружению необходимые прочность и жёсткость, принято называть строительной механикой. Те разделы строительной механики, в которых рассматриваются прочность и жесткость именно сельскохозяйственной машины как инженерного сооружения, составляют в своей совокупности строительную механику сельхозмашин, которая должна дать ответ на следующие три основных вопроса:

1) *какие усилия могут действовать на данную машину в нормальных условиях её эксплуатации* и при всех тех случайных нагрузках, которым сельхозмашина неизбежно подвергается в процессе её эксплуатации (**проблемой внешних сил**);

2) *какие напряжения и изменения формы вызываются в сельскохозяйственной машине заданными внешними силами* из числа тех, которые могут действовать на неё по условиям её эксплуатации (**проблемой внутренних сил**);

3) *какие напряжения и деформации сельскохозяйственной машины могут быть допущены без вреда для её прочности и жёсткости* (**проблема допускаемых напряжений и перемещений**).

Эти задачи строительной механики сельхозмашин в той или иной последовательности приходится рассматривать инженеру-проектировщику в своей практической деятельности.

Данное пособие рассчитано на студентов младших курсов, и поэтому естественно начать изучение курса строительной механики сельхозмашин с задач, которые наиболее хорошо разработаны, допускают наиболее строгие решения, больше всего по своей методике подходят к наукам, уже пройденным. Из трёх основных проблем строительной механики сельскохозяйственных машин такой является проблема внутренних сил. Рассмотрение её в основном и будет предметом нашего курса. В конце курса будет рассмотрена одна из задач земледельческой механики, относящаяся к первой проблеме и до сих пор не имеющая строгого аналитического решения – проблема взаимодействия орудий сельхозмашин с почвой.

С точки зрения строительной механики корпус сельскохозяйственных машин является весьма сложным сооружением. Почти ни одна его часть не несёт строго разграниченных функций, а участвует одновременно в выполнении ряда функций. Чтобы обеспечить корпусу сельхозмашины при неизбежных случайных аварийных ситуациях использование скрытых запасов прочности, приходится сознательно идти на использование конструкций, многократно статически неопределимых. Разобраться в полном объёме всех функций различных частей сельскохозяйственной машины при этих условиях довольно трудно.

Не имея возможности сразу охватить все условия работы конструкции сельхозмашин в целом, начнём изучение этих условий с изучения поведения отдельных схематизированных типичных простейших конструкций, которые можно мысленно выделить из состава корпуса сельскохозяйственной машины. Овладев основными методами

расчёта таких схематизированных конструкций, сначала статическими, а потом динамическими, следует научиться выделять для проверочных расчётов из состава заданной реальной сельскохозяйственной машины те типовые схематизированные простейшие детали, расчет которых уже известен; научиться определять внешние силы, которые на каждую из этих деталей могут действовать, и научиться, наконец, решать вопрос о том, допустимы или нет получающиеся в данной детали суммарные напряжения, возникающие в результате выполнения машиной всех её функций. Имея навык таких проверочных расчётов прочности сельхозмашин заданной конструкции, естественно будет поставить перед собою вопрос: каким должен быть алгоритм проектирования конструкции сельскохозяйственных машин, чтобы они, обладая надлежащей жёсткостью и прочностью, были достаточно лёгкими и простыми в исполнении. Но эта конечная цель не может быть рассмотрена в рамках данного учебного пособия, так как на первых курсах студенты не имеют достаточных знаний оптимального проектирования конструкций. Попутно с решением иных проблем мы должны накапливать материал и для разрешения этой конечной задачи.

Что касается методов решения отдельных задач, которые будут рассматриваться, то решить все задачи строительной механики сельхозмашин с той строгостью, которая характерна для математической теории упругости или математической теории пластичности, к сожалению, невозможно. Поэтому в строительной механике сельхозмашин (как и в теории сопротивления материалов) при выводе тех или иных зависимостей используют гипотезы, например, гипотезу плоских сечений в теории изгиба стержней и аналогичную ей гипотезу прямых нормалей в теории изгиба пластин.

В теории упругости можно уклониться от дачи какого бы то ни было ответа на вопросы, которые мы не умеем решить точно. Математик может сказать: я этого вопроса решить не могу, используйте решения, которые я знаю. Инженер так рассуждать не может. На всякий практический вопрос он должен дать ответ если не абсолютно точный, то хотя бы в максимальной мере гарантирующий от неверных решений. Строительная механика - не математическая, а инженерная дисциплина. Отсюда отличие её методов от методов теории упругости.

Отдельные выводы теории упругости используются в строительной механике:

- для формулировки тех условий, при соблюдении которых можно относиться с доверием к расчётным результатам, базирующимся на упомянутых выше гипотезах;
- для оценки точности таких расчётов;
- для освещения отдельных сторон той сложной картины явлений, изучение которой является нашей целью при проектировании корпуса сельхозмашины;
- для приближённого решения частных задач.

В целом строительная механика базируется на выводах теории упругости, но ставит своей задачей получить для каждого частного вопроса решение, не обязательно возможно более точное, а лишь достаточно точное для практических целей. Если имеется строгое решение, мы предпочтём его решению приближённому. Но вообще на всякий вопрос, возникший в процессе изучения строительной механики сельскохозяйственных машин, мы должны дать хотя бы не вполне точный ответ, поскольку решение этого вопроса необходимо для принятия определённого практического решения. Неточность ответов придётся покрывать вводимым в расчёт коэффициентом безопасности, являющимся по существу коэффициентом нашего незнания или нашей неуверенности в правильности того или иного вывода или положения. В этом отношении задачи и методы строительной механики сельхозмашин приближаются к задачам и методам теории сопротивления материалов.

От теории сопротивления материалов строительная механика отличается не столько методом решения своих задач, сколько степенью сложности последних. В сопротивлении материалов изучаются простейшие деформации тел простейшей формы.

В строительной механике при помощи тех же в сущности методов изучается работа отдельных типичных частей сооружения и всей их совокупности в целом применительно к определенному классу инженерных сооружений.

В пособии мы часто будем использовать материал книги¹ и поэтому перемещения, деформации и напряжения будем обозначать теми же самыми символами.

В настоящее время при проектировании машин и механизмов в конструкторских бюро значительная часть кинематических и прочностных расчетов выполняется на ЭВМ. Подготовка инженеров-конструкторов сельскохозяйственной техники должна учитывать это обстоятельство и включать в себя обучение методам компьютерного проектирования сельскохозяйственных машин и оборудования с использованием тех систем автоматизированного проектирования (**САПР**), которые доступны для внедрения в учебный процесс.

Принято считать, что система автоматизированного проектирования машиностроительной продукции состоит из ряда систем:

- **CAD**-систем (*Computers-Aided Design*), предназначенных для проектирования конструкций;
- **CAE**-систем (*Computer-Aided Engineering*), предназначенных для инженерных расчетов;
- **CAM**-систем (*Computers-Aided Manufacturing*), предназначенных для проектирования и моделирования технологических процессов обработки материалов;
- **PDM**-систем (*Product Data Management*), предназначенных для управления процессом разработки проектов.

Потребность конструкторских бюро, научно-исследовательских организаций и промышленности в универсальных, быстрых, надежных и удобных для пользователя программах, реализующих широкий спектр расчетов (статических, динамических, тепловых и др.), послужила импульсом к разработке различными фирмами пакетов прикладных программ конечно-элементного анализа.

Метод конечных элементов (**МКЭ**) является в настоящее время фактически мировым стандартом для прочностных и других видов расчетов конструкции. Основой этого служит универсальность **МКЭ**, позволяющая единым способом рассчитывать конструкции с разными свойствами материалов. Многовариантность способов моделирования конструкции **МКЭ** влечет за собой большую вероятность появления скрытых ошибок, то есть ситуаций, когда результат анализа либо недостижим, либо абсурден, либо, что самое опасное и распространенное, правдоподобен, но неверен. Поэтому применение **CAE**-систем, в отличие от **CAD/CAM**-систем, требует от расчетчика профессиональной подготовки в области механики твердого деформируемого тела. Чтобы с большой вероятностью получить достоверный результат, от пользователя пакета конечно-элементного анализа требуется знание принципов и методов реализации этого метода, глубокое понимание механики поведения конструкций в используемой области анализа и, наконец, владение методами выявления формальных и фактических ошибок.

Изучение теоретических основ **МКЭ** предполагает знание хотя бы элементарных сведений из учебных курсов «Теория упругости» и «Строительная механика машин». Учебный план подготовки дипломированных специалистов по направлению **190200** – «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», специальность **190206** «Сельскохозяйственные машины и оборудование» не предусматривает изучение основополагающих курсов прочностного расчета элементов машин и механизмов, таких, как «Теория упругости», «Теория пластичности», «Механика машин», «Теория колебаний» и т.п. дисциплины. Поэтому молодому специалисту приходится самостоя-

¹ Жилкин В.А. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. Часть I. Теоретические основы проектирования элементов сельхозмашин. Учебное пособие. Челябинский агроинженерный университет. – Челябинск, 2005. -427 с.

тельно постигать основы перечисленных дисциплин и осваивать внедренную на предприятии **САПР**.

Учитывая объективную реальность, кафедра «Сопротивление материалов» ЧГАУ предлагает осваивать конечно-элементные программы постепенно, начиная с первого курса, в таких дисциплинах, как «Информатика» и «Теоретическая механика», и заканчивая на пятом курсе в дисциплине «Теоретические основы проектирования сельхозмашин и САПР». На первом курсе студенты знакомятся с интерфейсом программных комплексов и выполняют элементарные расчеты по определению реакций связи и анализу напряженно-деформированного состояния плоских элементов конструкций. На втором курсе, параллельно с изучением курса «Сопротивление материалов», они могут в рамках факультативных курсов решать плоские и пространственные задачи теории упругости с помощью конечно-элементных программных комплексов.

В настоящее время кафедра имеет программные продукты **APM WinMachine**, **SCAD** (*Structure construction automatic design*), **MSC.Patran-Nastran 2005**, **MSC.Marc 2005**, **MSC.Adams 2005**. Так как на первом курсе изучается только раздел «Статика» курса «Теоретическая механика», то в учебном процессе, при выполнении домашних заданий применяются только программные комплексы **SCAD** и **MSC.Patran-Nastran 2005**.

Во втором семестре по разделу «Статика» студенты выполняют следующие расчетные работы по сборнику заданий для курсовых работ по теоретической механике:

- определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы;
- определение реакций опор твердого тела (плоская система сил);
- определение реакций опор составной конструкции (система двух тел);
- приведение системы сил к простейшему виду;
- определение реакций опор твердого тела (пространственная система сил);
- центр тяжести.

Для лучшего понимания методики расчетов все задания сначала выполняются вручную с составлением уравнений равновесия, с построением силовых многоугольников и расчетных схем для рассматриваемых элементов конструкции, и только затем для проверки правильности решения задачи студенты используют программы SCAD и MSC.Patran-Nastran 2005. Решение уравнений равновесия выполняется в системе MathCAD, рисунки выполняются в графическом редакторе «CorelDraw», текст набирается в текстовом редакторе «Word». При этом достигаются две положительные цели. Во-первых, студент получает возможность самому проверить результаты своих ручных расчетов, что повышает его самостоятельность. Во-вторых, он постепенно (на примере решения простых задач) осваивает программные комплексы, которые в дальнейшем будут необходимы ему для решения более сложных задач.

Расчеты на ЭВМ выполняются в учебном компьютерном классе как в учебное время в виде лабораторных работ, так и в специально выделенное время для самостоятельной работы. Для облегчения задачи внедрения **САПР** в учебный процесс в пособии приводятся некоторые первоначальные сведения о **МКЭ** и процедуре расчета по программам **SCAD** и **MSC.Patran-Nastran 2005** на уровне начинающего пользователя.

Затруднением в использовании конечно-элементных программ на первом курсе является то, что студент еще не знает не только **МКЭ**, но и курса сопротивления материалов, на основе которых построены эти программы. Однако задерживать внедрение **САПР** в учебный процесс, с точки зрения автора, нежелательно. Поэтому вначале студентов знакомят с этими программными комплексами как с некоторыми новыми для них «**калькуляторами**», позволяющими вычислять те или иные силовые или геометрические характеристики конструкции.

На втором курсе при изучении курса «Сопротивление материалов» студенты продолжают осваивать эти программы при выполнении курсовых и студенческих научных работ.

Автор благодарит А.В. Клименко, сотрудника фирмы НП ЦВТМ, за помощь и обсуждение многих разделов представленной работы, рецензентов пособия, взявших на себя труд прочесть работу и сделать ряд ценных замечаний.

Автор надеется, что учебное пособие будет полезно студентам, аспирантам, инженерам-механикам, разрабатывающим технологические процессы и проектирующим отдельные узлы сельскохозяйственной техники. Он будет благодарен за отзывы об успехах и неудачах в использовании предлагаемого материала и просит направлять замечания на **кафедру сопротивления материалов ЧГАУ** по адресу: 454080, Челябинск, проспект Ленина, 75.

В. Жилкин

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МКЭ КОМПЛЕКСЫ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ

2.1. РОЛЬ ЭВМ В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В деятельности инженера ничто, пожалуй, не вызывает такого удовлетворения, как успешное решение задач, возникающих в процессе проектирования. Инженер всегда стремился ускорить и автоматизировать механические операции, чтобы высвободить время для творчества. Потому естественно его обращение к ЭВМ, позволяющим выполнять стандартные математические операции с исключительно быстро и точно. Однако новые возможности всегда связаны с дополнительной ответственностью - там, где появляются пути резкого повышения производительности труда, при неумелом обращении с новой техникой могут быть допущены ошибки, снижающие ее эффективность. Многие трудности, связанные с применением ЭВМ в работе инженера, обусловлены не недостатками компьютера, а неумением правильно выбрать и применить алгоритм, пригодный для решения данной задачи².

В работе инженера, проектирующего новое изделие или технологический процесс для удовлетворения нужд потребителей, органически сочетаются наука и искусство. Отличительная черта его работы в том, что он не просто изучает достижения науки и искусства, а стремится использовать их для нужд практики. Процесс инженерного творчества начинается обычно с осознания потребности в новом изделии или технологическом процессе. Задача инженера - найти подходящее решение и представить его в таком виде, чтобы можно было приступить к производству. Этапы процесса проектирования показаны на *рис.1*.



Рис.1

Проектирование начинается с тщательного изучения возможных решений. Затем собирается информация, позволяющая построить модель разрабатываемого изделия или процесса, чтобы оценить и проверить правильность принятого решения. Необходимость этого этапа обусловлена экономическими соображениями, так как практическая проверка решения почти всегда обходится очень дорого, отнимает много времени и требует слишком больших материальных и энергетических затрат. Как правило,

² Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. – М.: Мир, 1982.-238 с.;
Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. – 600 с.

разрабатывается математическая модель или используется сочетание простого прототипа и математической модели. Построив модель, приступают к изучению ее свойств, стремясь выяснить, в какой мере разрабатываемое изделие соответствует своему назначению. Обычно с первой попытки не удастся найти удовлетворительное решение, однако приобретенный опыт позволяет наметить пути его совершенствования. Этапы построения модели и изучения ее свойств повторяются до тех пор, пока не появится уверенность, что найдено наилучшее из возможных решений. Вслед за этим проект передается в производство.

Для процесса проектирования весьма характерна итерационная цикличность, причем на некоторых этапах приходится выполнять большие объемы вычислений. Здесь при правильном использовании большую помощь оказывает ЭВМ. Надо только следить, чтобы на компьютер возлагались рутинные, многократно повторяемые вычисления и не делалось бы попыток решать с его помощью задач, требующих творческого осмысления абстрактных концепций. Таким образом, использование ЭВМ неэффективно на ранних стадиях проектирования, но может быть очень эффективным на поздних стадиях.

2.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ³

По геометрическим соображениям все объекты, встречающиеся в машинах, механизмах, строительных конструкциях, разделяют на три типа:

- **массивное тело** (*массив*) - элемент конструкций, все основные размеры которого одного и того же порядка; к числу таких тел относятся фундаменты, сферические тела (например, шарики в подшипниках), детали машин (шестерни, водила планетарных редукторов и т. п.), сплошные опоры мостов и т. п.;
- **оболочка** - тело, два размера которого (ширина и длина) во много раз больше третьего (толщины), а внешние контуры образованы криволинейными поверхностями (например, емкости для хранения жидкости, зерна, трубопроводы и т. д.). Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединой поверхностью*. Частным случаем оболочки является **пластина** - оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость (например, крышка стола, плиты перекрытий, элементы кабины трактора и т. п.);
- **брус** (*стержень*) - тело, один размер (длина) которого во много раз больше двух других размеров поперечного сечения. Брус можно представить себе как тело, образованное плоской фигурой, центр тяжести которой движется вдоль некоторой кривой, причем нормаль к плоской фигуре всегда совпадает с касательной к этой кривой. В этом случае кривая называется осью бруса, а плоская фигура — поперечным сечением. **Ось бруса** - линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений. **Поперечное сечение** - сечение бруса, образованное плоскостью, проведенной перпендикулярно оси стержня. Ось бруса может быть прямолинейной (ось вала, цилиндрическая шпилька и т. п.) и криволинейной. Брусья могут иметь постоянное или переменное сечения. Среди брусьев различают балки, колонны, стойки и т. п. Эти названия брусьев определяются той ролью, которую они играют в конструкциях. Например, понятие «балка» употребляется для брусьев, работающих на из-

³ Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.; Строительная механика корабля и теория упругости. В 2 т. – Л.: Судостроение, 1987. Т.1: Постнов В.А., Суслов В.П. Теория упругости и численные методы решения задач строительной механики корабля. – 288с.; Математическое моделирование при расчетах и исследованиях строительных конструкций/ Горев В.В., Филиппов В.В., Тезиков Н.Ю. – М.: Высш. шк., 2002.- 206 с.

гиб, понятия «колонна» и «стойка» - для брусьев, расположенных вертикально и работающих в основном на сжатие, и т. д.

В разделе «Статика» курса «Теоретическая механика» и в курсе «Сопrotивление материалов» основное внимание уделяется изучению брусьев, являющихся наиболее распространенными элементами многих конструкций.

Элементы конструкций разрушаются из-за чрезмерно больших внутренних усилий, приходящихся на единицу площади. Усилия, приходящиеся на единицу площади, называются **напряжениями**. При проектировании конструкций перед инженером-проектировщиком стоит задача нахождения распределения напряжений, или поля напряжений. Иногда, чтобы узнать, не нарушаются ли заданные зазоры между деталями конструкции, инженеру требуется вычислить перемещение лишь в определенных точках системы. Если нагрузки и поведение конструкции зависят от времени, проектировщику необходимо подсчитать полное распределение перемещений, или поле перемещений.

В любом упругом теле, если принять во внимание его молекулярную структуру, действительное число внутренних связей бесконечно. Это приводит к известным трудностям при получении численных решений. Метод конечных элементов позволяет преодолеть эти трудности. Он основан на мысленном представлении сплошного тела (континуума) в виде совокупности отдельных конечных элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек. В этих точках к каждому конечному элементу прикладываются некоторые фиктивные усилия взаимодействия, характеризующие действие распределенных внутренних напряжений, приложенных вдоль реальных границ стыковки смежных элементов. Если такая идеализация тела (конструкции) возможна, то проблема сводится к расчету системы с конечным числом степеней свободы.

Замена исходной конструкции совокупностью дискретных элементов подразумевает равенство энергий конструкции и ее дискретной модели. Для некоторых конструкций соблюдение энергетического баланса ведет к получению дискретной модели, точно описывающей поведение исходной конструкции. Это характерно для конструкций, которые уже состоят из отдельных элементов с дискретным сочленением их между собой. В качестве примера можно привести фермы, рамы, стержневые перекрытия.

Плоская ферма состоит из прямолинейных шарнирно сочлененных между собой стержней. Каждый стержень работает лишь на растяжение - сжатие. Если за элементы принять отдельные стержни, то дискретная модель будет точной копией реальной конструкции. В узловых точках вводятся определенные усилия взаимодействия между отдельными стержнями. Для определения этих усилий составляется необходимое число уравнений равновесия узловых точек.

Плоская пластина произвольного очертания с помощью сечений, параллельных осям **x** и **y**, может быть представлена в виде совокупности прямоугольных и треугольных конечных элементов. Именно эти две формы конечных элементов широко используются при решении плоской задачи теории упругости.

При определении напряженного состояния трехмерных тел идеализация осуществляется уже с помощью объемных конечных элементов - параллелепипедов, тетраэдров и т. п., шарнирно скрепленных в узловых точках. При такой идеализации к каждой вершине конечного элемента прикладываются по координатным осям три составляющие усилия взаимодействия со смежными элементами.

Если же элементы реальной конструкции имеют вдоль своей границы непрерывные связи со смежными элементами, то при построении дискретной модели мы вынуждены делать некоторые априорные предположения о характере силового или кинематического взаимодействия между смежными элементами. В этом случае дискретная модель будет лишь приближенно отражать поведение исходной конструкции. Очень важно выбрать характер взаимодействия между элементами таковым, чтобы

уменьшение размеров конечных элементов привело к получению решения, стремящегося к точному.

Разбиение области на конечные элементы является первой операцией метода конечных элементов. Эта операция весьма ответственна. Здесь многое зависит от имеющихся инженерных навыков. Несовершенное разбиение приведёт к значительным погрешностям расчета, если даже все остальные операции метода выполнены с достаточной точностью.

Использование более мелких конечных элементов хотя, как правило, и повышает точность, но приводит к увеличению общей трудоемкости расчета. В районах области, где ожидается резкое изменение напряжений, деформаций, следует использовать более мелкую разбивку на элементы. Там же, где ожидаемый результат изменяется по области сравнительно слабо, можно использовать при дискретизации более крупные элементы.

Описание методик применения конечно-элементных комплексов **SCAD** и **MSC.Patran-Nastran 2005** будем иллюстрировать на примерах решения простейших задач теоретической механики и сопротивления материалов. Одной из таких задач является расчет бруса на прямой поперечный изгиб.

Если мысленно рассечь некоторую нагруженную балку (стержневую систему) (рис.2, а), находящуюся в равновесии, на две части, одну часть отбросить, а действие отброшенной части заменить реакциями связи - напряжениями, то оставшаяся часть балки будет также находиться в равновесии. Инженера интересуют максимальные напряжения в этом сечении. Но непосредственно из уравнений равновесия их нельзя.

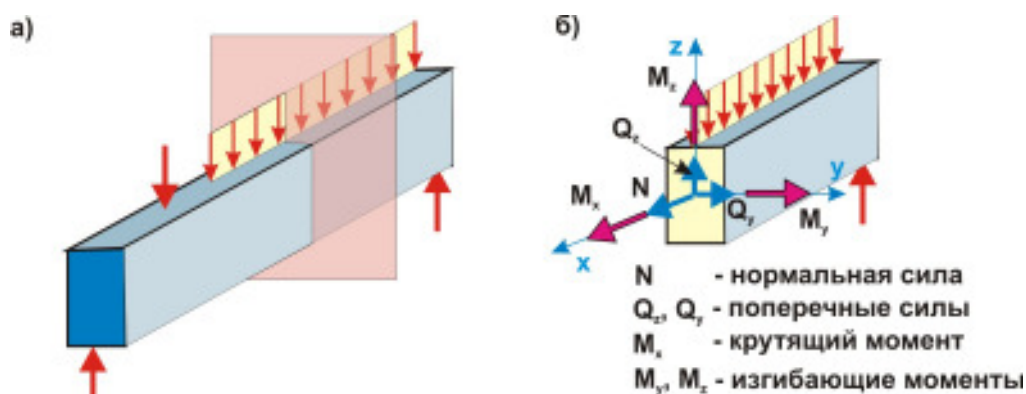


Рис.2

На помощь приходят

- гипотезы о характере распределения напряжений по сечению бруса, основанные на многочисленных результатах опытных испытаний брусков и особенностях их геометрического строения;
- теорема Пуансо: *всякую пространственную систему сил (напряжения в сечении балки) в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела (центре приведения – центре тяжести поперечного сечения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту всех сил относительно выбранного центра приведения.*

Поэтому при расчете стержневых систем инженер прежде всего пытается определить компоненты главного вектора: N - нормальную силу (сила, перпендикулярная плоскости сечения), Q_y, Q_z - поперечные силы (силы, лежащие в плоскости сечения), и компоненты главного момента: M_x - крутящий момент, M_y, M_z - изгибающие моменты (рис.2,б). **Графики изменения внутренних усилий вдоль оси бруса называ-**

ются эпюрами. Величины N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z на эпюрах в опорных узлах соответствуют опорным реакциям.

В качестве тестовой задачи для рассматриваемых далее конечно-элементных программ выберем построение эпюр в балке⁴, изображенной на рис.3, а.

Изображаем расчетную схему балки (рис.3, б). Для этого балку (объект равновесия) отсоединяем от связей, а действие связей заменяем реакциями связей. При определении опорных реакций распределенную нагрузку можно заменить ее равнодействующей $Q = 3q$. Такая замена возможна только при определении опорных реакций!

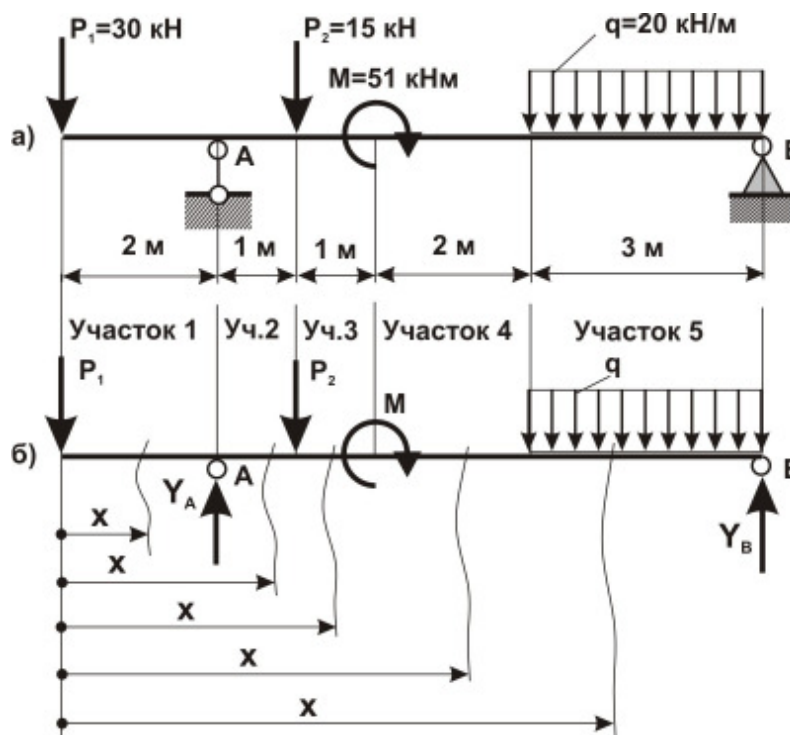


Рис.3

Длины участков обозначим соответственно a , b , c , d и e . Длину с первого до $(i + 1)$ -го участка включительно обозначим L_{ii} ($i = 2, 3, 4$), длину балки - L .

Введём исходные данные.

Дано: $a := 2$ $b := 1$ $c := 1$ $d := 2$ $e := 3$

$L_{12} := a + b$ $L_{13} := L_{12} + c$ $L_{14} := L_{13} + d$ $L_{15} := L_{14} + e$

$P_1 := 30$ $P_2 := 15$ $M := 51$ $q := 20$

Определяем опорные реакции.

$Y_A := 1$ $Y_B := 1$

Given $P_1 \cdot a - P_2 \cdot b - M - q \cdot e \cdot \left(L_{14} - a + \frac{e}{2} \right) + Y_B \cdot (L - a) = 0$

$P_1 \cdot L + P_2 \cdot (L - a - b) - M + q \cdot e \cdot \frac{e}{2} - Y_A \cdot (L - a) = 0$

$\begin{pmatrix} Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_A, Y_B)$ $Y_A = 57$ $Y_B = 48$

⁴ Жилкин В.А. Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. – Челябинск: Часть 1. MathCAD, 2000.- 72 с.; Часть 2. Теоретическая механика – статика. -, 2001. – 100 с.

Определяем внутренние силовые факторы на каждом из участков, рассматривая равновесие отсеченной левой части бруса (рис.4, 5).

Например, выражения на первом и втором участках бруса имеют вид, приведенный ниже.

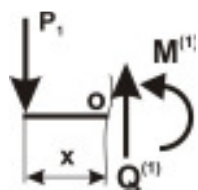


Рис.4

Участок 1. $0 \leq x < a$

$$\sum Z = 0; \quad -P_1 + Q^1 = 0;$$

$$\sum M_o = 0; \quad -P_1 \cdot x - M^1 = 0.$$

Отсюда

$$Q^1 = P_1;$$

$$M^1 = -P_1 \cdot x.$$

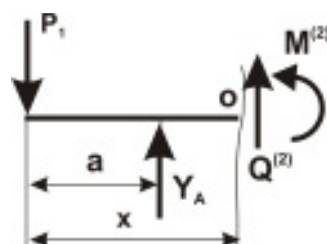


Рис.5

Участок 2. $a \leq x < L_{12}$

$$\sum Z = 0; \quad -P_1 + Y_A + Q^2 = 0;$$

$$\sum M_o = 0; \quad -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) - M^2 = 0.$$

Отсюда

$$Q^{(2)} = P_1 - Y_A;$$

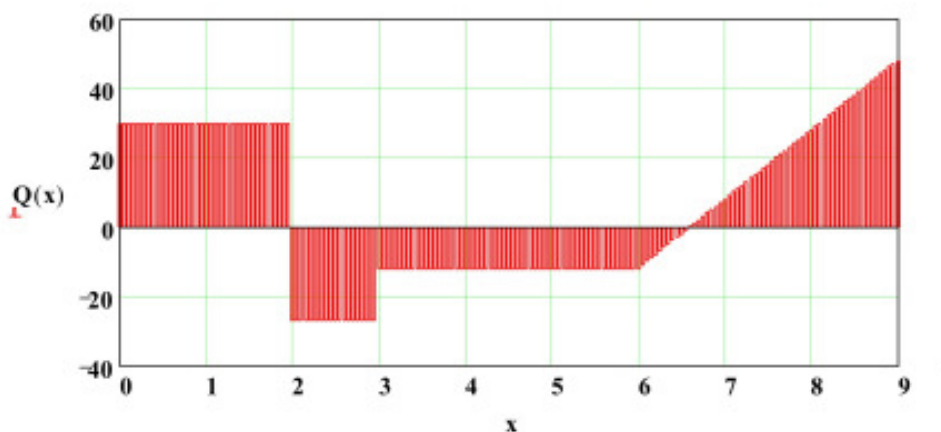
$$M^{(2)} = -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a).$$

Аналогично определяются выражения для внутренних силовых факторов и на остальных участках бруса.

В **MathCAD** эти вычисления выглядят так:

$$Q(x) := \begin{cases} P_1 & \text{if } 0 \leq x < a \\ P_1 - Y_A & \text{if } a \leq x < L_{12} \\ P_1 - Y_A + P_2 & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ P_1 - Y_A + P_2 & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ P_1 - Y_A + P_2 + q \cdot (x - L_{14}) & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.05 \dots L$$

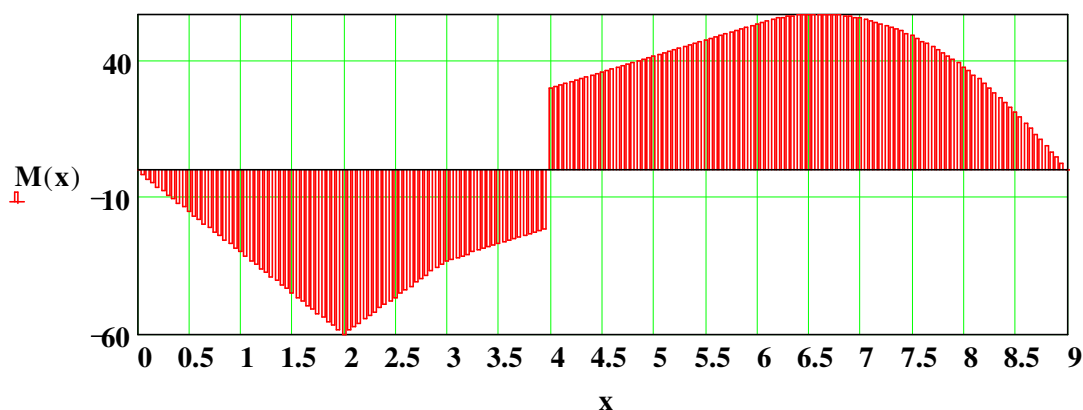


Так как $Q = -(dM / dx)$, то в тех сечениях, где $Q = 0$, изгибающий момент достигает экстремальных значений. В нашем случае при $x = 6.6$ $Q = 0$, $M = 57,6$ кНм.

$$M(x) := \begin{cases} -P_1 \cdot x & \text{if } 0 \leq x < a \\ -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x < L_{12} \\ -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) - P_2 \cdot (x - L_{12}) & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) - P_2 \cdot (x - L_{12}) + M & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) - P_2 \cdot (x - L_{12}) + M - \frac{q \cdot (x - L_{14})^2}{2} & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$

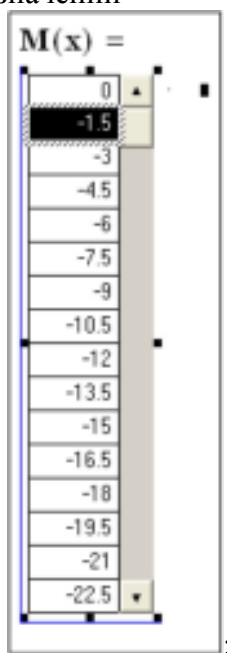
$$M(2) = -60$$

$$M(6.6) = 57.6$$

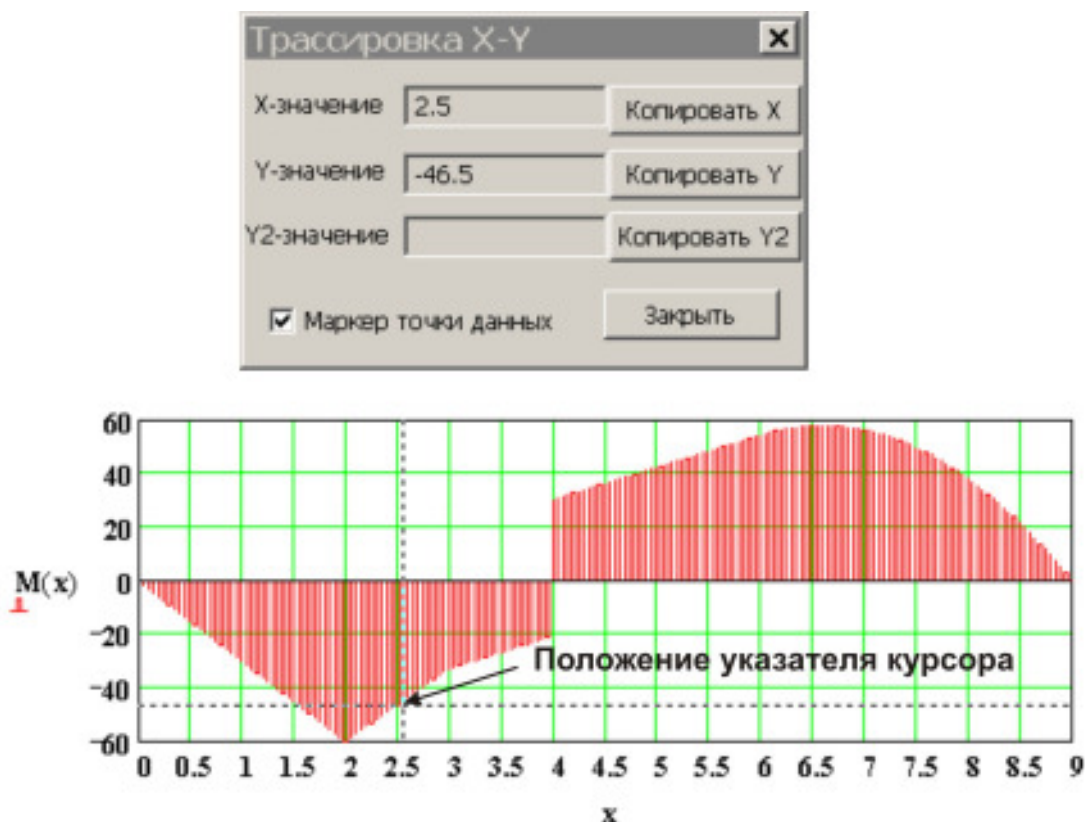


Для определения численных значений внутренних силовых факторов в системе **MathCAD** имеется несколько возможностей:

- можно набрать функцию с заданным аргументом $Q(2) = -27$, $M(2) = -60$;
- можно вывести таблицу всех значений



- можно использовать команду **Трассировка...** (команда находится в меню, вызываемом нажатием правой клавиши мыши; указатель мыши должен совпадать с одной из точек графика функции); в появившейся панели **Трассировка X-Y** указаны координаты выделенной точки графика (в нашем случае для $x = 2,5$ м $y = -46,5$ м).



2.3. SCAD⁵

Проектно-вычислительный комплекс **Structure CAD for Windows (SCAD)** реализован как интегрированная система прочностного анализа и проектирования конструкций на основе метода конечных элементов; он позволяет определить напряженно-деформированное состояние конструкций от статических и динамических воздействий, а также выполнить ряд функций проектирования элементов конструкций.

В основу комплекса положена система функциональных модулей, связанных между собой единой информационной средой. Эта среда называется проектом и содержит полную информацию о расчетной схеме, представленную во внутренних форматах комплекса. В процессе формирования расчетной схемы проект наполняется информацией и сохраняется на диске в файле (с расширением **.SPR**). Имя проекта и имя файла, в котором он сохраняется, задаются при создании новой схемы.

Функциональные модули **SCAD** делятся на четыре группы: в первую группу входят модули, обеспечивающие ввод исходных данных в интерактивном графическом режиме (графический препроцессор) и графический анализ результатов расчета (графический постпроцессор). Модули второй группы служат для выполнения статического и динамического расчета (процессор), а также вычисления расчетных сочетаний усилий, комбинаций нагрузок, главных и эквивалентных напряжений, реакций, на-

⁵ Вычислительный комплекс SCAD / Карпиловский В.С., Крикунов Э.З., Маляренко А.А. и др. – М.: Издательство АСВ, 2004. -592 с.

грузок на фрагмент схемы, расчет устойчивости (эти модули условно называются расчетными постпроцессорами). Документирование результатов расчета выполняется модулями третьей группы. В четвертую группу включаются проектирующие модули (проектирующие постпроцессоры), которые служат для подбора арматуры в элементах железобетонных конструкций, расчета и проектирования узлов металлоконструкций и др.

Базовая конфигурация комплекса включает высокопроизводительный вычислительный модуль для расчета на статические и динамические нагрузки и воздействия, развитую библиотеку конечных элементов, графические средства создания расчетных схем стержневых, пластинчатых, твердотельных и комбинированных конструкций, а также графические средства отображения и документирования результатов расчетов. Функциональные возможности могут быть расширены путем подключения расчетных и проектирующих постпроцессоров.

Все функциональные модули комплекса реализованы в единой графической среде. Интерфейс, сценарии взаимодействия пользователя с системой, функции контроля исходных данных и анализ результатов полностью типизированы, что обеспечивает минимальное время освоения комплекса и логичную последовательность выполнения операций.

Результаты расчета могут быть представлены в виде схем перемещений и прогибов, эпюр, изолиний и изополей. Одновременно на схему могут выводиться и числовые значения факторов. Для статических и динамических загружений предусмотрена возможность анимации процесса деформирования схемы и записи этого процесса в формате видеоклипа AVI. Любая графическая информация может выводиться на печать или сохраняться в виде метафайла (WMF).

Модули документирования результатов расчета позволяют сформировать таблицы с исходными данными и результатами в текстовом или графическом формате, а также экспортировать их в **MS Word** или **MS Excel**. Формирование таблиц выполняется с учетом групп узлов и элементов, таблицы можно дополнить комментариями и включить в них графическую информацию. Таким образом, отчетный документ может редактироваться средствами Windows и приобретать удобную для конкретного пользователя форму (например, в соответствии с принятым в его фирме стандартом), а экспорт в **MS Excel** дает возможность последующей нестандартной обработки результатов применительно к конкретным обстоятельствам использования.

2.3.1. Загрузка комплекса SCAD Office



В зависимости от места установки ярлыка **SCAD** (в главном меню или на рабочем столе) возможны два способа запуска системы **SCAD**.

Первый способ. Найти на рабочем столе ярлык **SCAD**, подвести к нему указатель мыши и щелкнуть по левой клавише мыши один или два раза.

Второй способ. Нажать на клавишу **Пуск**, выбрать в главном меню раздел **Все программы** и в нём папку **SCAD Office**. При этом появится всплывающее меню с названиями функциональных модулей вычислительного комплекса, в котором выбираем команду **SCAD** (рис.6).

После загрузки программы появится пока ещё пустое окно (рис.7), на панели инструментов которого нажмем кнопку **Создание нового проекта**, что приведет к появлению панели **Новый проект** (рис.8), в поля ввода которого введем наименование проекта, например - **Эпюры**, и название объекта, например - **Балка**.

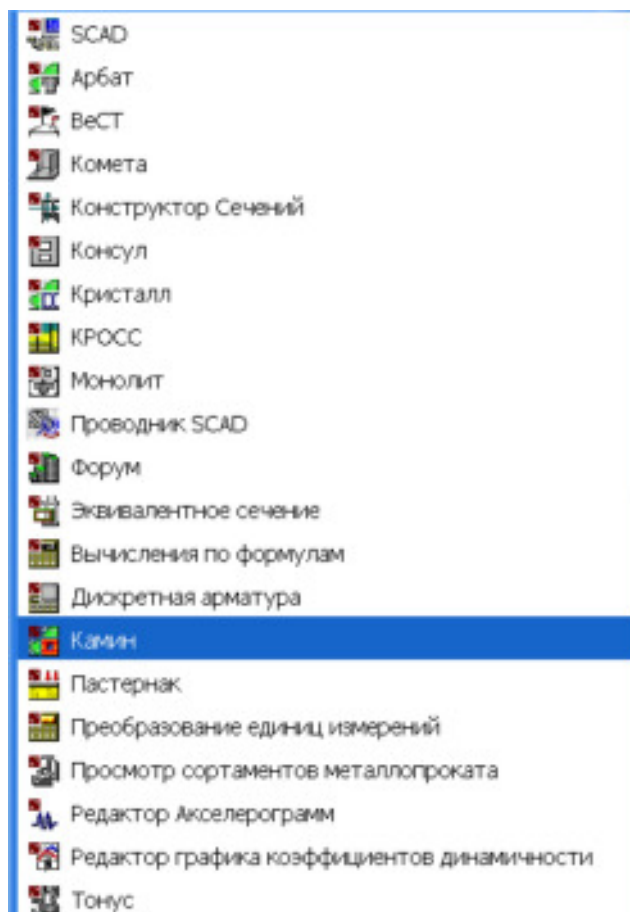


Рис.6

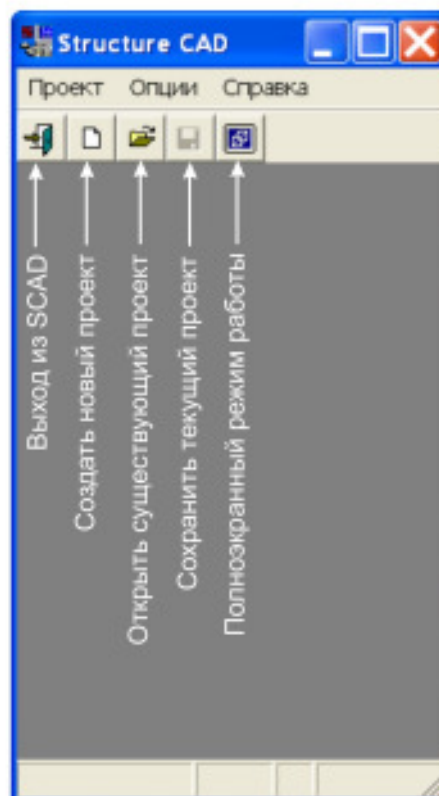


Рис.7

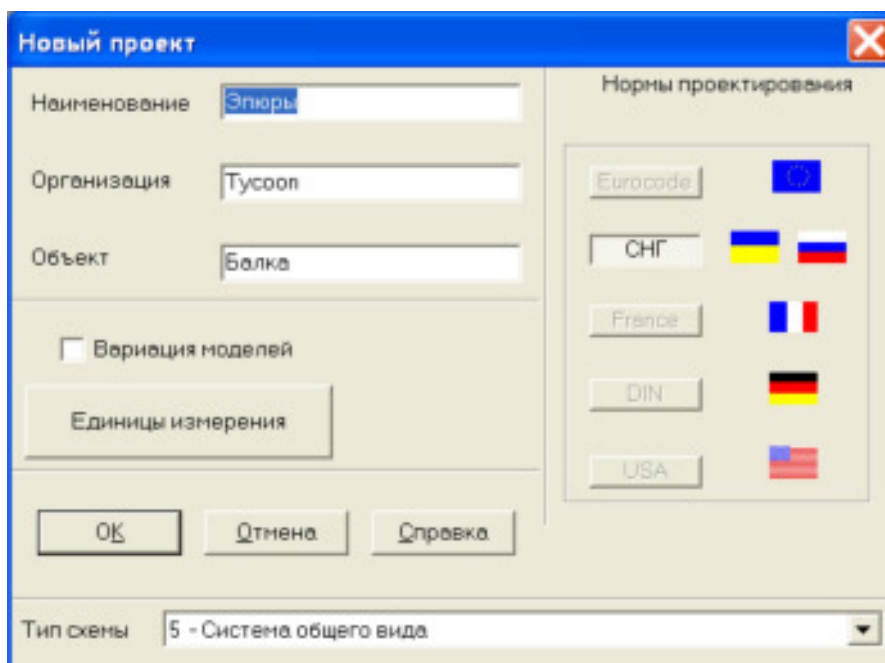


Рис.8

Из списка **Тип схемы** выберем **Система общего вида** и щелкнем по кнопке **Единицы измерения**. Появится одноименная панель, в полях ввода которой зададим единицы измерения геометрических и силовых параметров расчета, а также с помощью кнопок - число значащих цифр после запятой (рис.9).

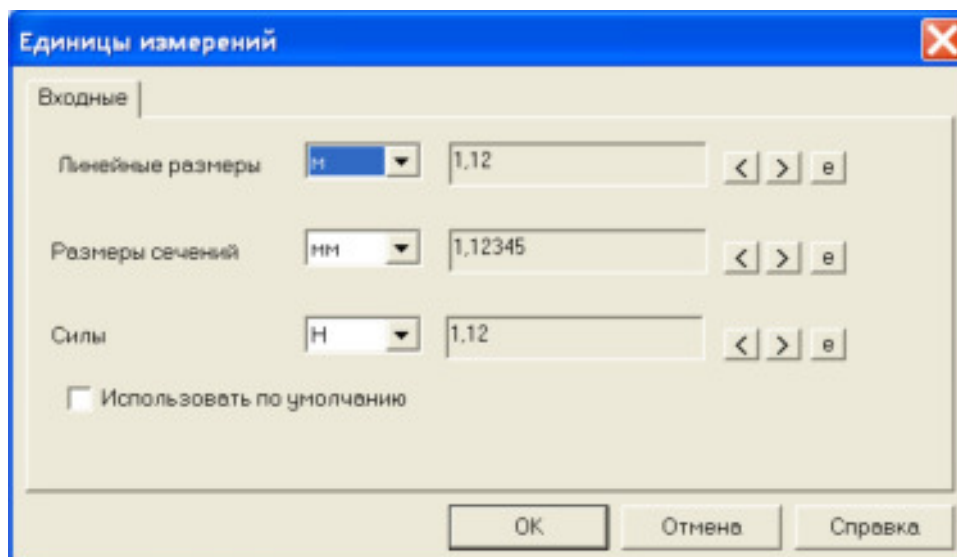




Рис.9

Кнопка **e** позволяет задать числа в экспоненциальной форме. Щелчком по кнопке **ОК** окна **Единицы измерения** и по кнопке **ОК** окна **Новый проект**. Далее программа потребует сохранить новый проект в некотором файле. После выполнения этих операций открывается главное окно конечно-элементного пакета **SCAD**, интерфейс которого приведен на *рис.10*.

2.3.2. Создание нового проекта


Создание нового проекта начинается с формирования расчетной схемы. Для этого устанавливают курсор на раздел **Расчетная схема** дерева и нажимают левую кнопку мыши. Управление передается графическому препроцессору, с помощью функций которого и выполняется синтез расчетной схемы. Инструментальная панель препроцессора включает различные функции создания геометрии схемы, назначения граничных условий, нагрузок и др. После старта препроцессора в инструментальной панели активен раздел **Управление** (*рис.11*).


Кроме четырех ранее описанных кнопок, на этой панели имеется ещё ряд дополнительных кнопок. При решении данной задачи нам потребуются только две из

них: **Выйти в экран управления проектом** , **Сохранить образ экрана** .

А пока займемся созданием конечно-элементной модели балки, изображенной на *рис.3*.

Активизируем на инструментальной панели раздел **Узлы и элементы**. Это приведет к появлению кнопок **Узлы** и **Элементы** (*рис.12, а*).

После нажатия на одну из них в разделе раскрывается набор кнопок, управляющих работой с узлами или элементами. Так как ввести элементы, не привязывая их к узлам, невозможно, то начнем с ввода узлов. Щелчком по кнопке **узлы** , откроется панель кнопок, используемых при работе с узлами (*рис.12, б*).

Для создания расчетной схемы балки необходимо ввести узлы, соответствующие правому и левому торцам балки. Для выполнения этой операции воспользуемся кнопкой **Ввод узлов** –  и зададим узлы со следующими координатами: $(0,0,0)$, $(9,0,0)$ м.

Щелчком по кнопке **Ввод узлов**. В правом верхнем углу рабочего поля открывается диалоговое окно **Ввод узлов** (*рис.13*).

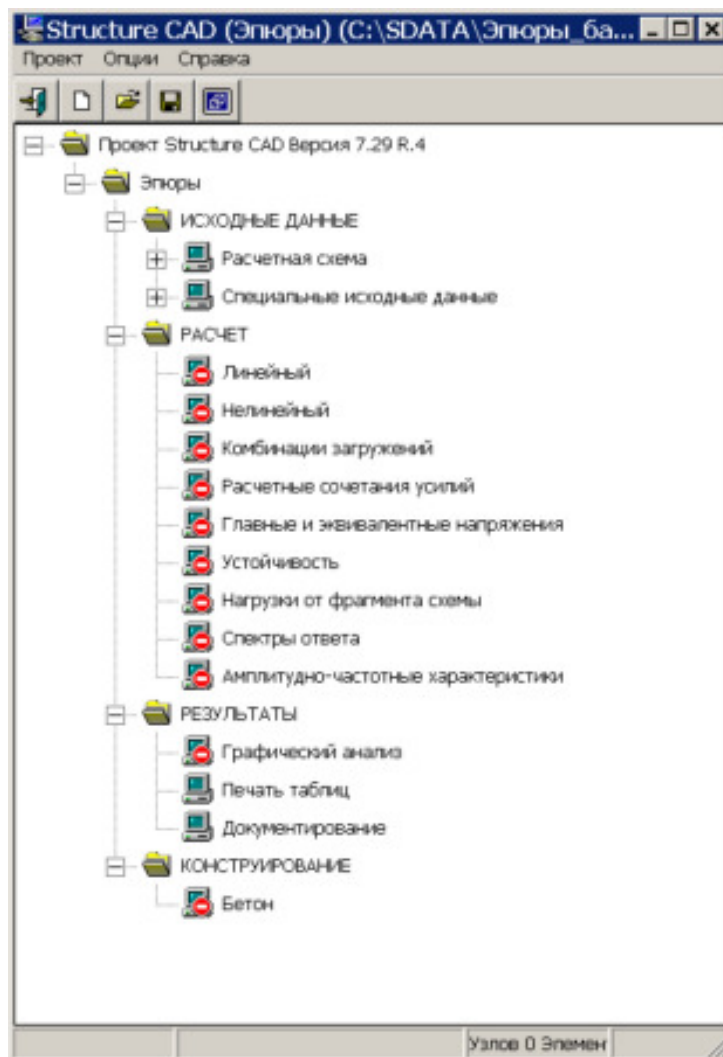


Рис.10

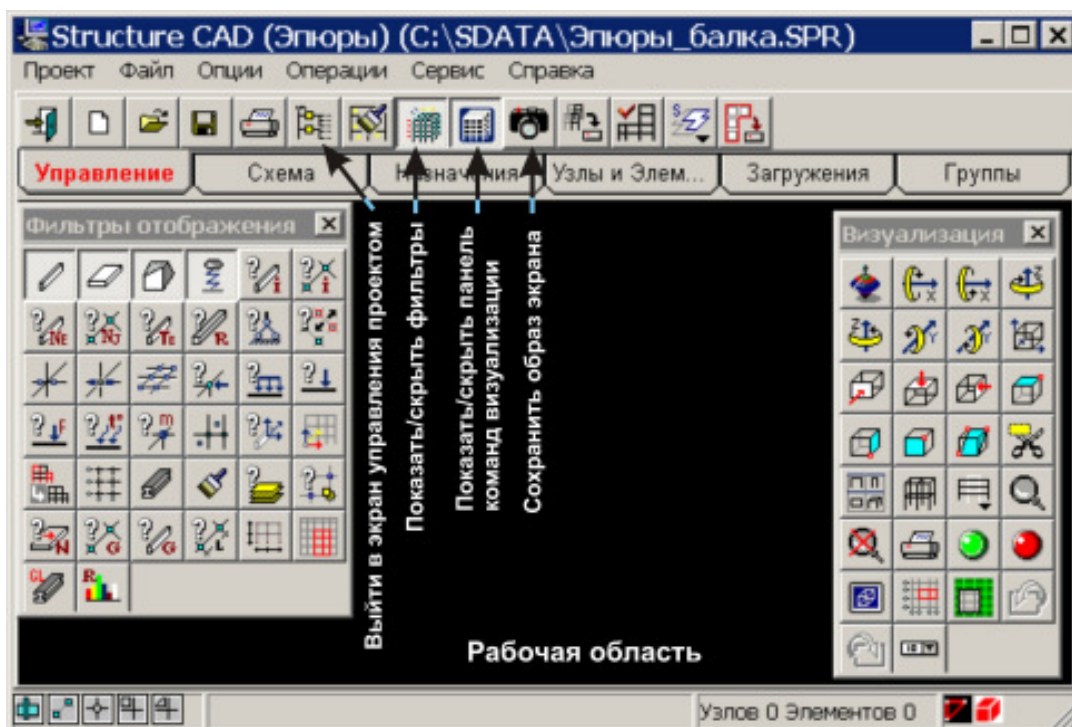


Рис.11

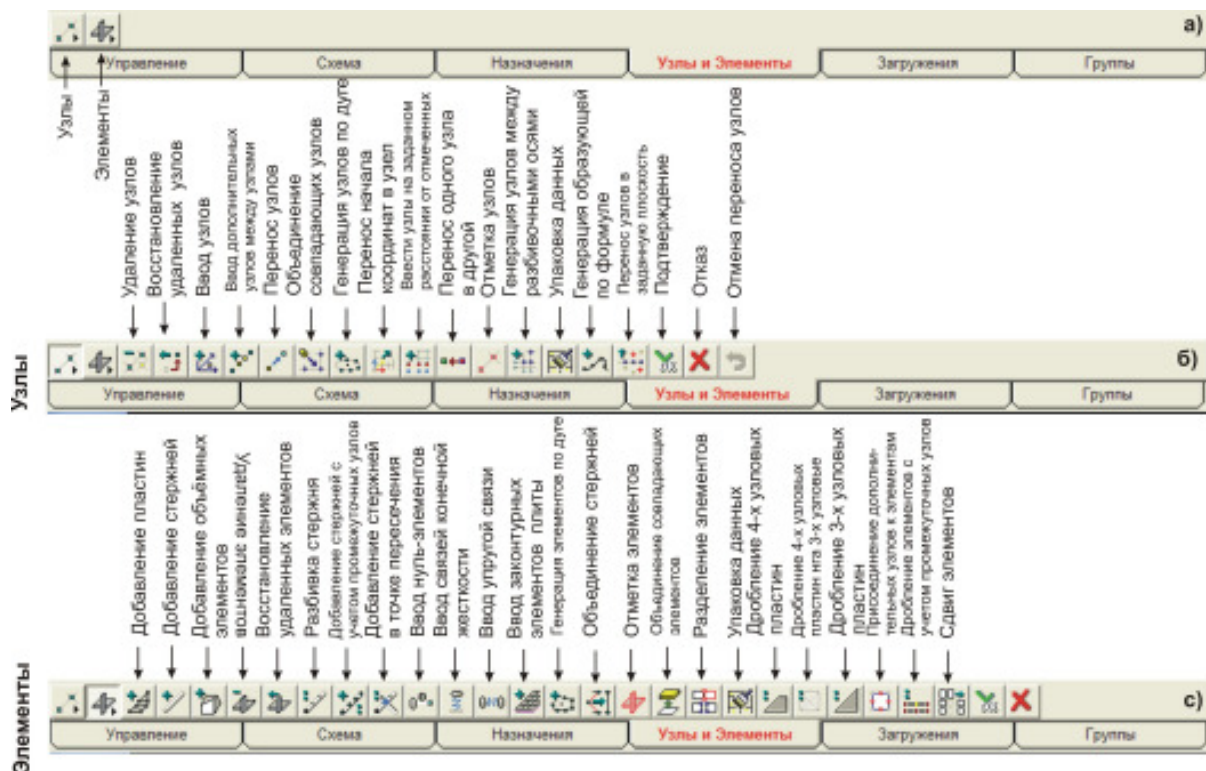


Рис.12

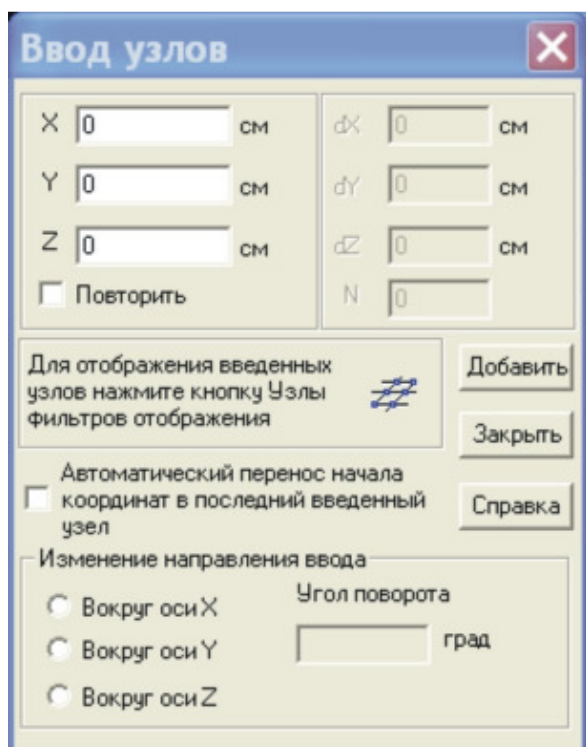



Рис.13

С помощью функций этого окна можно ввести один узел или группу узлов, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, т.е. с заданным шагом повторения. Для ввода одного узла достаточно задать его координаты в полях левой части окна и нажать кнопку **Добавить**.

Для отображения на экране вводимых узлов необходимо активизировать фильтр  **Узлы** (в противном случае они не будут отображаться на экране). Теперь после каждого нажатия на кнопку **Добавить** на экране будет появляться новый узел.

Наличие повторителя позволяет вводить сразу группу узлов. Для ввода группы узлов следует:

- в полях ввода левой части окна установить координаты первого узла группы (x, y, z);
- активизировать режим **Повторить** (щелкнуть левой клавишей мыши

в поле ввода **Повторить**);

- в полях ввода правой части окна ввести значения шага повторения в одном или нескольких направлениях (dx, dy, dz);
- ввести количество повторений в поле N ;
- нажать кнопку **Добавить**.

Так как диалоговое окно занимает часть экрана, то в процессе ввода узлов рабочее поле экрана несколько уменьшается, что исключает попадание новых узлов под диалоговое окно. После завершения операций ввода следует нажать кнопку **Заккрыть**. Диалоговое окно закроется и изображение будет вновь занимать все рабочее поле. Нет ограничений на количество обращений к функции **Ввод узлов**. Если операцию надо повторить, следует опять нажать кнопку ввода узлов в инструментальной панели.

Положение и номера введенных узлов показаны на *рис.14*.

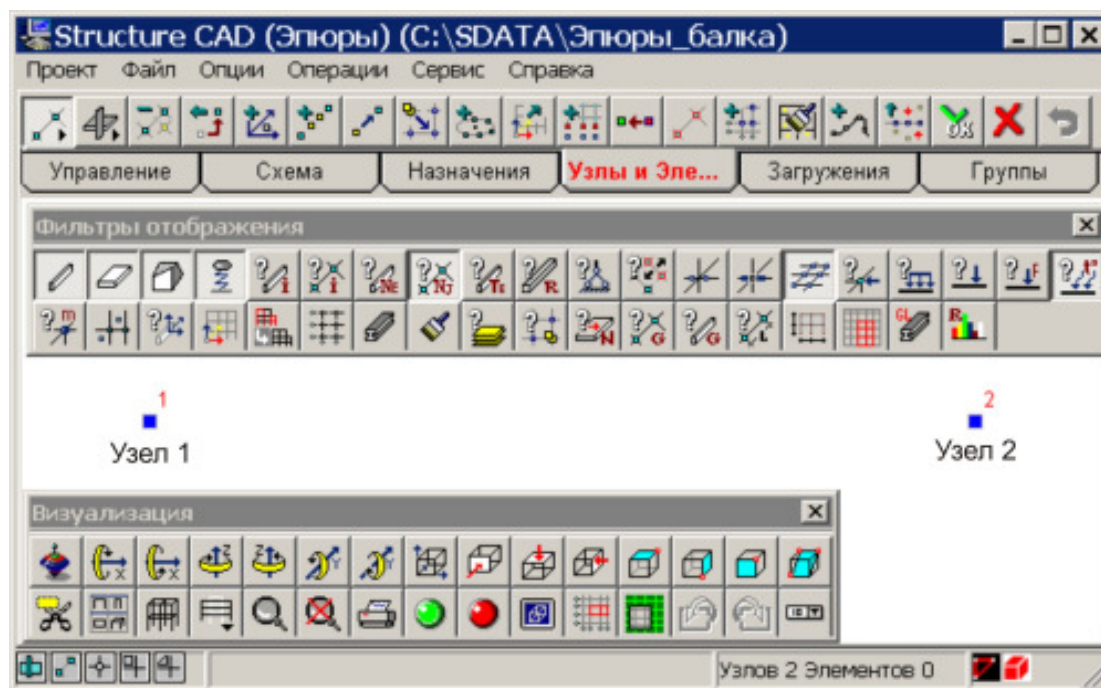


Рис.14

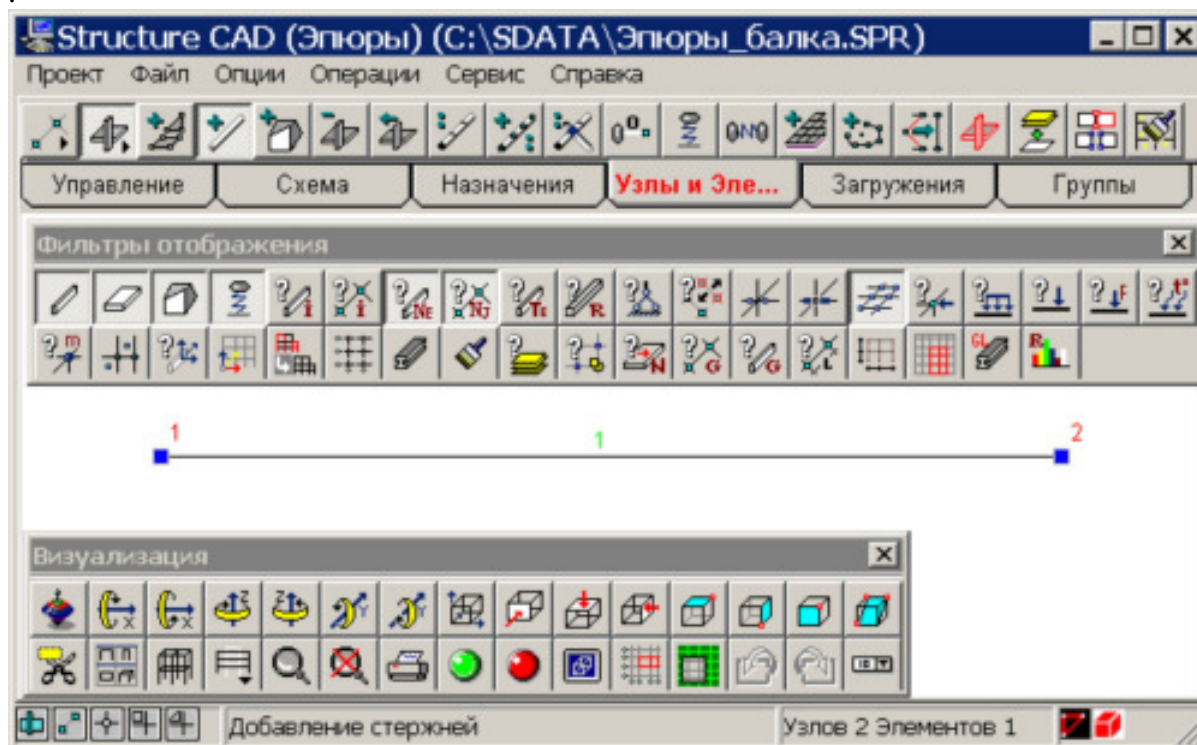






Рис.15

Активизируем кнопку  **Элементы**. Откроется набор кнопок, приведенный на рис.12, с. Щелкаем левой клавишей мыши по кнопке  **Добавление стержней** и затем последовательно по узлам **1** и **2**. В результате этих операций узлы **1** и **2** будут соединены прямой линией

Если на панели **Фильтры отображения** нажать на кнопку  **Номера элементов**, то над прямой линией (элементом) появится цифра **1** (рис.15).

Разобьем стержень на **18** конечных элементов. Щелкнем по кнопке  **Разбивка стержня**. Появится одноименное окно, в поле ввода которого вводим цифру **18** (рис.16).

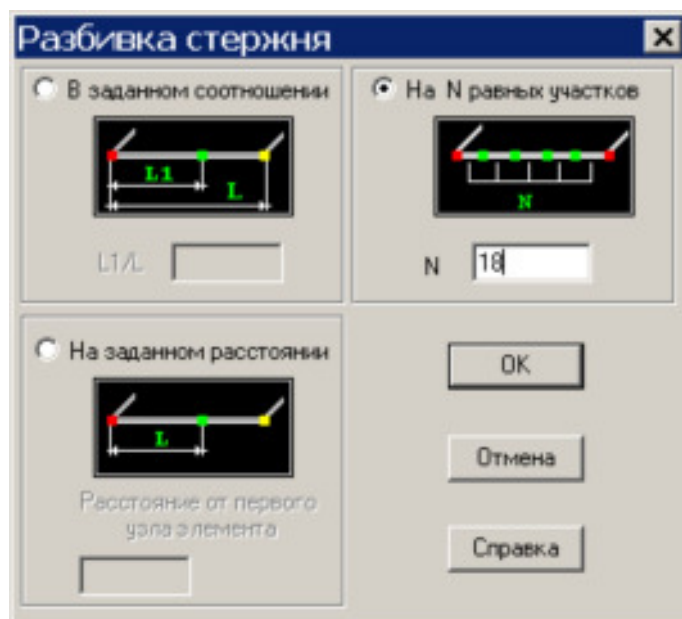




Рис.16


Подводим указатель курсора к стержню и щелкаем левой клавишей мыши (стержень окрасится в красный цвет). Нажимаем в главном меню клавишу  **Подтверждение**. В результате исходный стержень будет разбит на **18** стержней (рис.17).

Для конечно-элементного расчета балки мы обязаны задать её жесткость. Какую – пока неважно; при построении эпюр внутренних силовых факторов можно задать произвольную жесткость.

Физико-механические характеристики элементов расчетной схемы задаются в разделе «**Назначения**» (рис.18). Назначение жесткостных характеристик выполняется в зависимости от вида элементов. Предусмотрены специальные функции для ввода параметров и назначения жесткостей для стержневых, пластинчатых (рис.18) и объёмных конечных элементов.

Будем считать, что нам задана балка двутаврового профиля **№30**.

Активируем кнопку  **Назначение жесткости стержням**. Появится окно **Жесткости стержневых элементов**, в котором отмечаем способ задания сечения **Профили металлопроката** (рис.19) и активируем одноименную вкладку (рис.20).

В окне вкладки появится список профилей по различным стандартам. Выбираем двутавр с уклоном полок по ГОСТ 8239-89 и щелкаем по знаку . Раскроется список двутавров, из которого выбираем двутавр **№30** и щелкаем по кнопке **ОК** (рис.21). Все вспомогательные окна закроются.

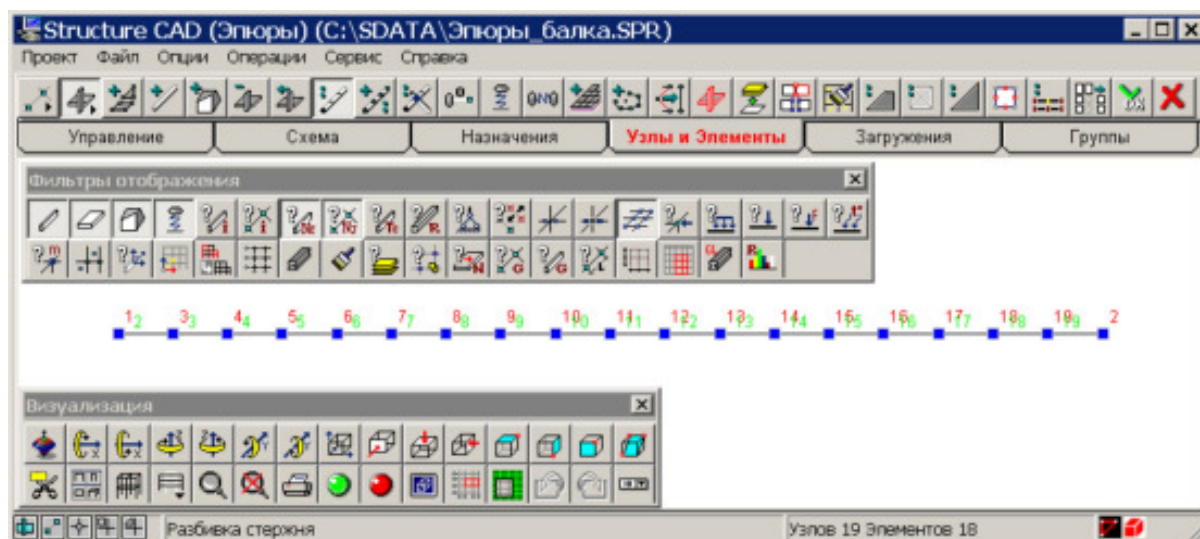


Рис.17

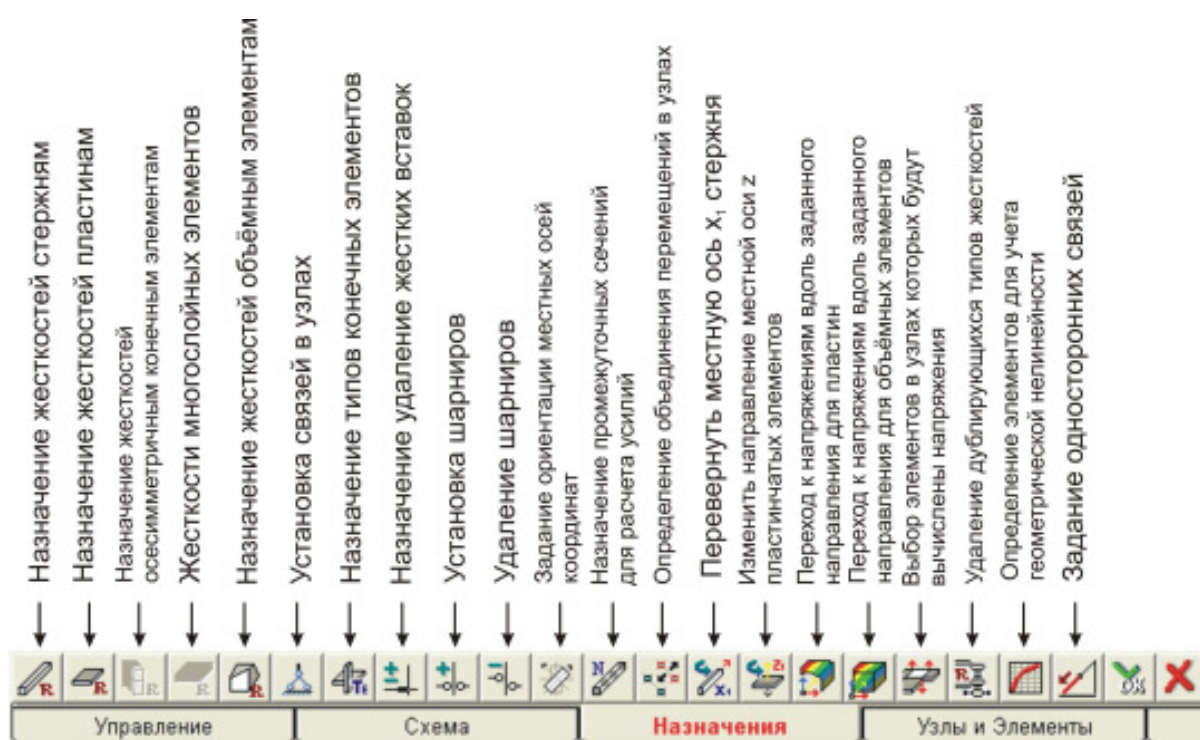





Рис.18

Устанавливаем указатель курсора в произвольной точке рабочего окна, нажимаем правую кнопку мыши. Появляется панель **Выбор узлов и элементов**, на которой выбираем вид курсора – **Прямоугольник** (рис.22). Выделяем все элементы балки, щелкаем левой клавишей мыши, выделенные элементы окрашиваются в красный цвет (рис.23), и подтверждаем наш выбор нажатием на кнопку .

Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра , а для отображения общей системы координат – по кнопке фильтра .

В соответствии с расчетной схемой запретим: перемещение узла **6** (шарнирно подвижная опора **A**, рис.3) в направлении осей **y** и **z**, повороты вокруг осей **x** и **z**, в узле **2** (шарнирно неподвижная опора **B**, рис.3) перемещения в направлении осей **x**, **y** и **z** и повороты вокруг осей **x** и **z**.

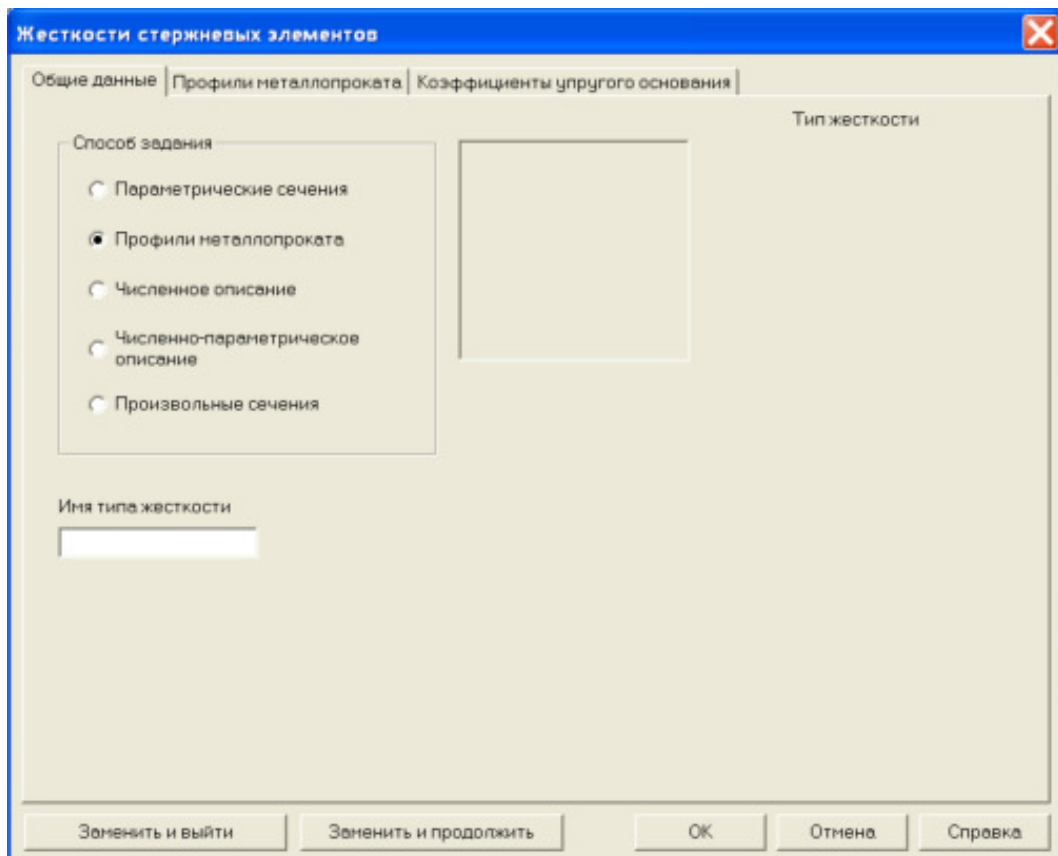


Рис.19

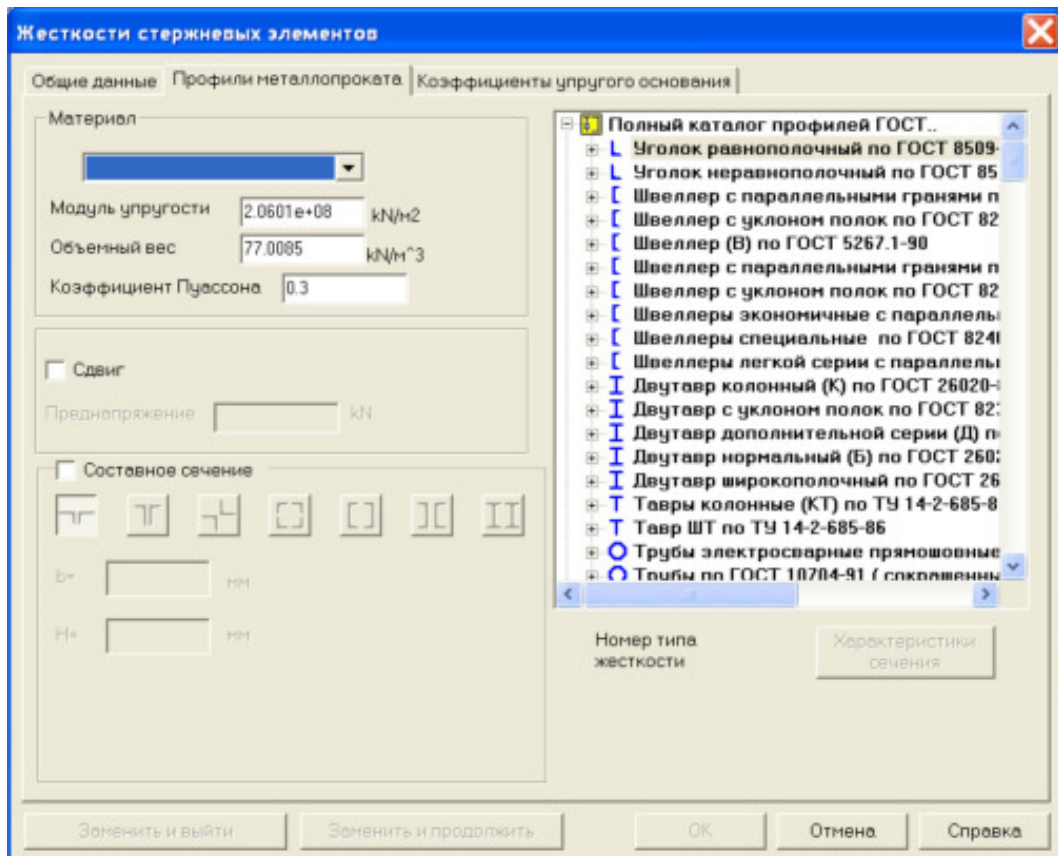


Рис.20

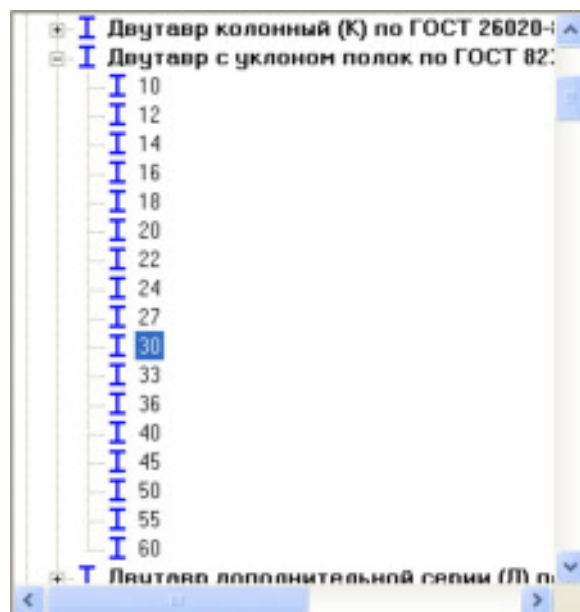


Рис.21

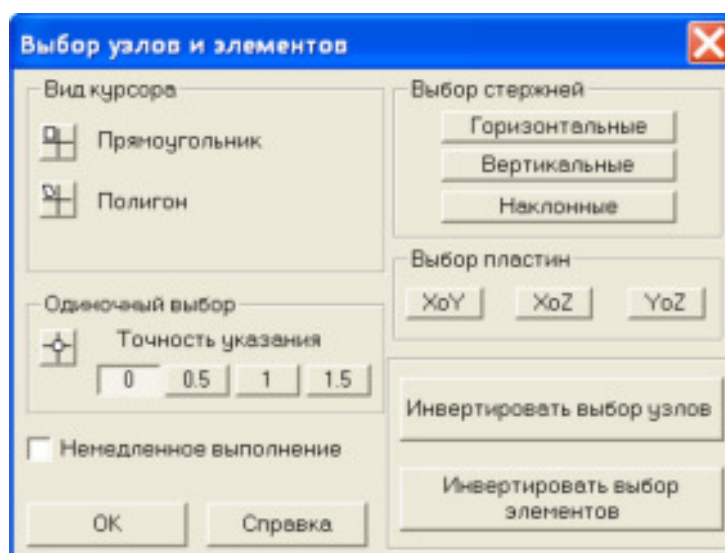


Рис.22

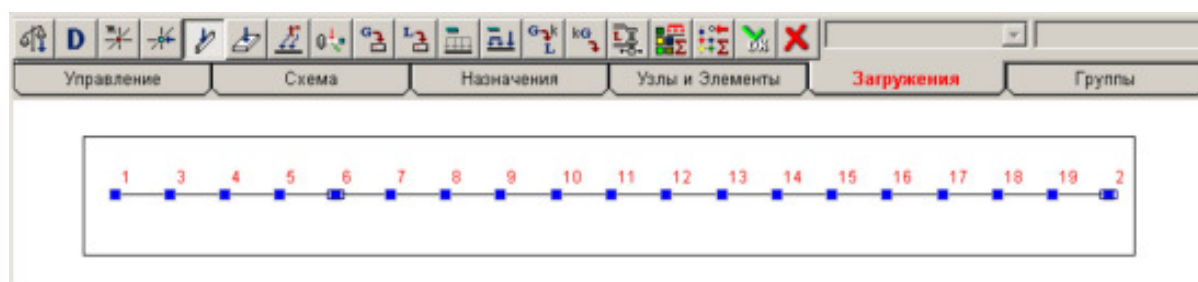




Рис.23

Нажимаем кнопку  в разделе **Назначение** и в появившейся панели **Связи** задаём направление связей для опоры *A* (рис.24). Нажимаем на клавишу **ОК**. В основном рабочем окне (рис.17) щелкаем по узлу *6* и подтверждаем наш выбор, нажимая клавишу  в разделе **Назначение**. Вокруг *6*-го узла появится рамка. Аналогичные операции повторяем для *2*-го узла (рис.24). Расчетная схема примет вид, приведенный на рис.25.

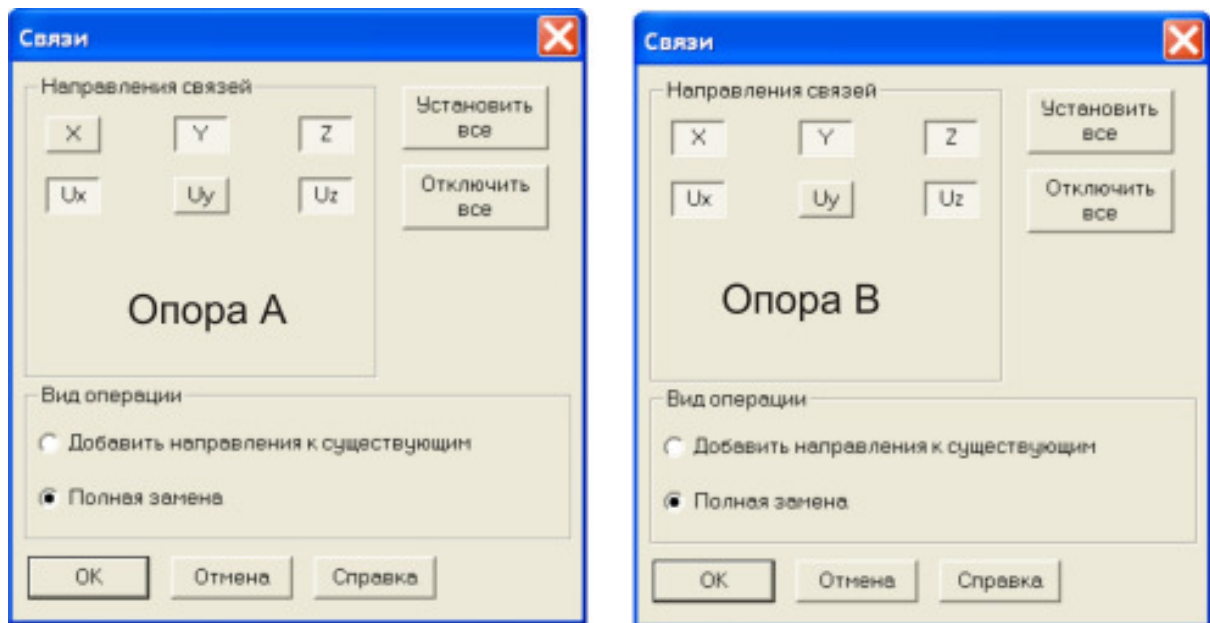


Рис.24

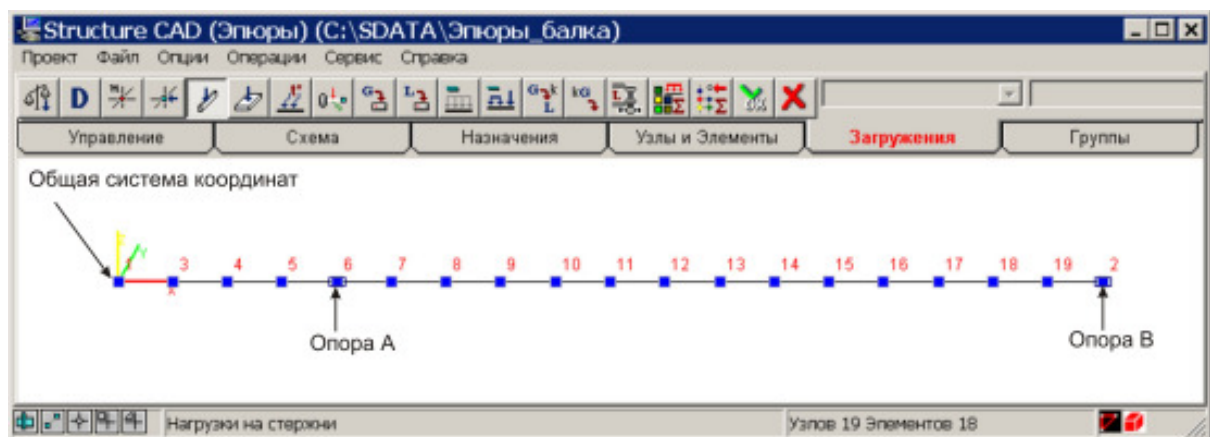






Рис.25

Нагрузка на балку задается в разделе «**Загружения**» (рис.26). Контроль и фиксация введенной информации о загрузке выполняется нажатием на кнопку **ОК** в нижней части диалогового окна. При этом, если введенная информация корректна, то группа окон закрывается, и управление передается главному окну препроцессора. В противном случае на экран выводятся окна предупреждений, в которых содержится информация об ошибке и указывается номер загрузки, в характеристиках которого допущена ошибка.

Для отображения величин введенных нагрузок активизируем кнопку фильтра , для отображения общей системы координат – кнопку фильтра .

Активизируем кнопку **Узловые нагрузки** . Появится панель **Узловые нагрузки**, в полях ввода которой задаем направление и величину нагрузки в узлах конечно-элементной сетки и нажимаем клавишу **ОК** (рис.27).

Для задания распределенной нагрузки активизируем кнопку  **Нагрузка на стержень**. Появится панель **Задание нагрузок на стержневые элементы**, в по-

лях ввода которой задаем направление и величину нагрузки и нажимаем клавишу **ОК** (рис.28).

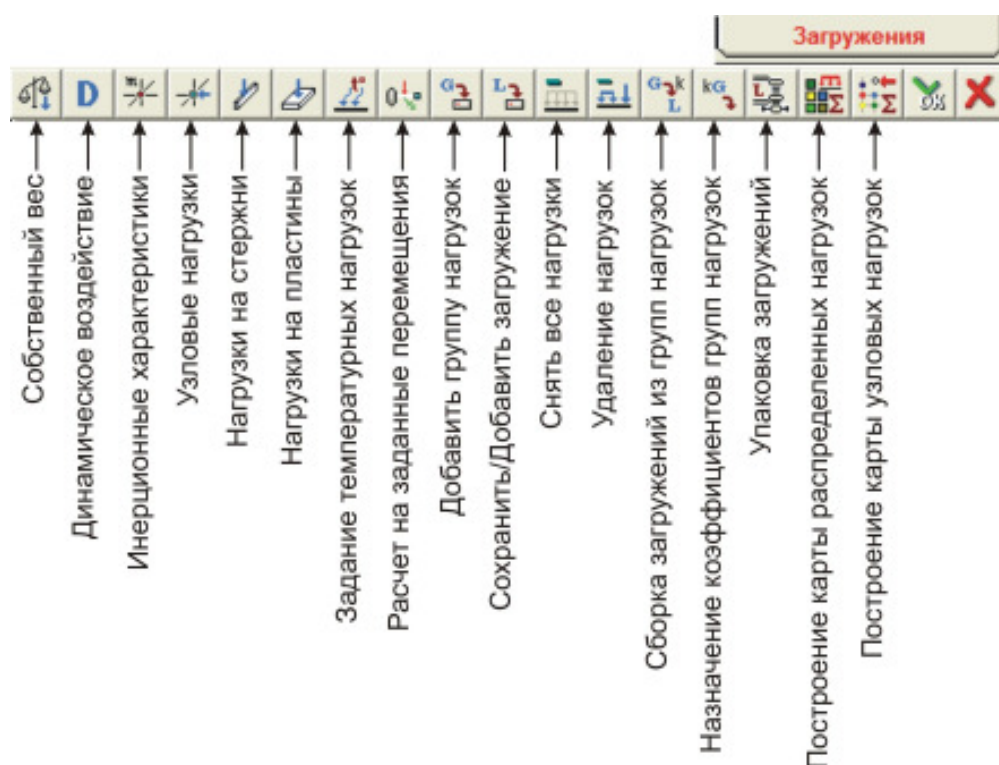


Рис.26

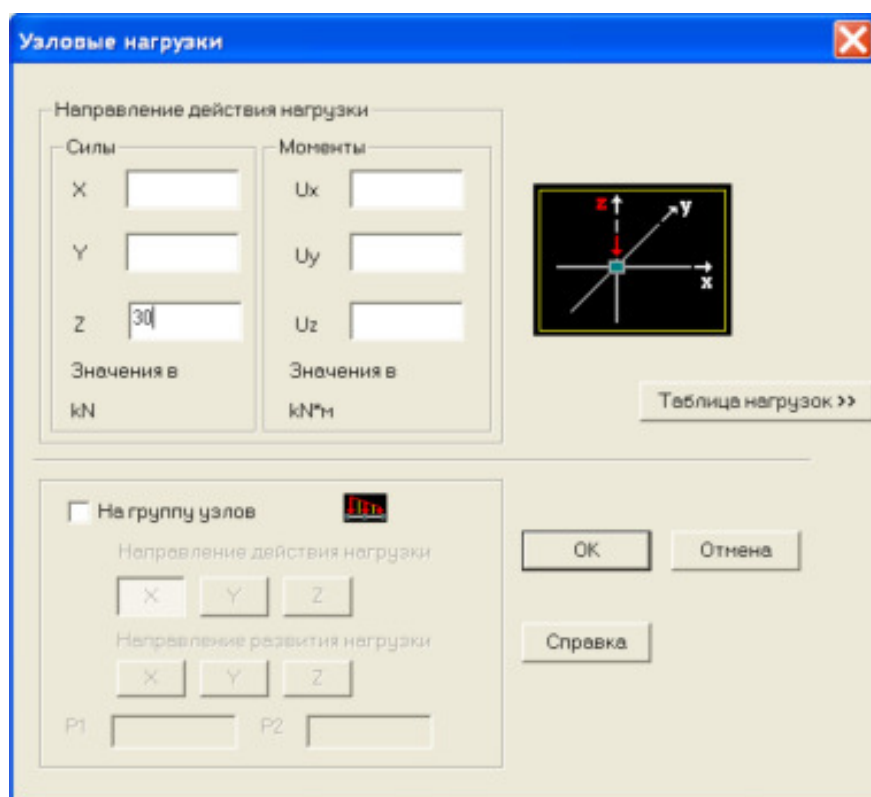


Рис.27

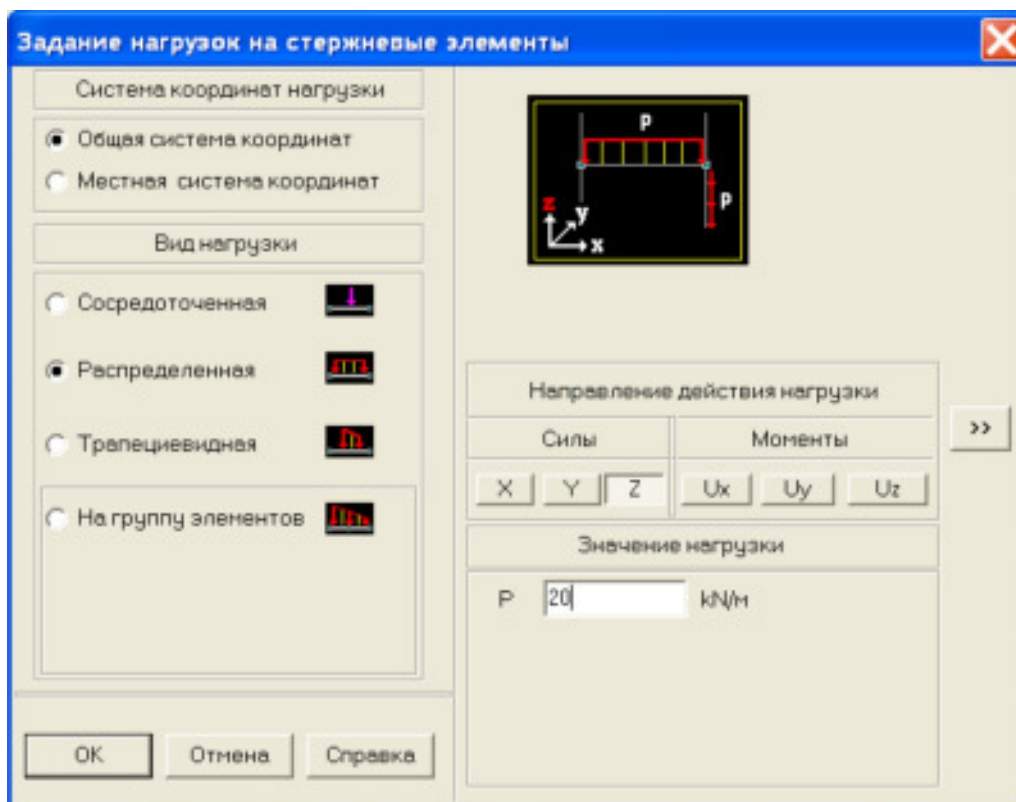


Рис.28

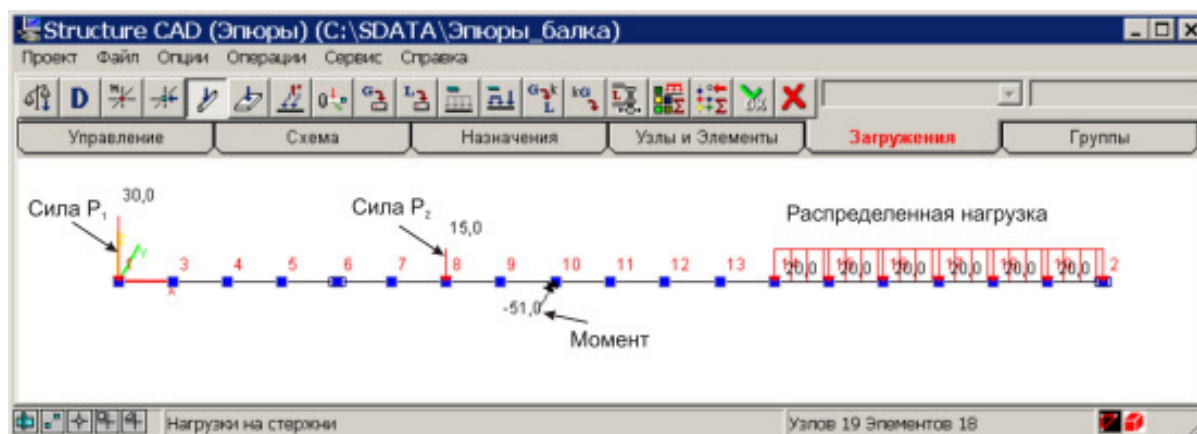





Рис.29

В результате выполненных операций расчетная схема примет вид, приведенный на рис.29.

После выполнения всех этих операций переходим в раздел **Управление** и нажимаем кнопку  **Выйти в экран управления проектом**. Открывается главное окно конечно-элементного пакета SCAD (рис.10). В разделе **Расчетная схема** щелкаем по значку . Откроется список элементов расчетной схемы (рис.30). Если после значка  не стоит знак вопроса (за исключением **Условия примыкания**), можно приступить к расчету.

Щелкаем по кнопке **Линейный** и через несколько секунд после выполнения расчета появится окно с информацией о результатах расчета (рис.31). Нажимаем на клавишу **Выход**.

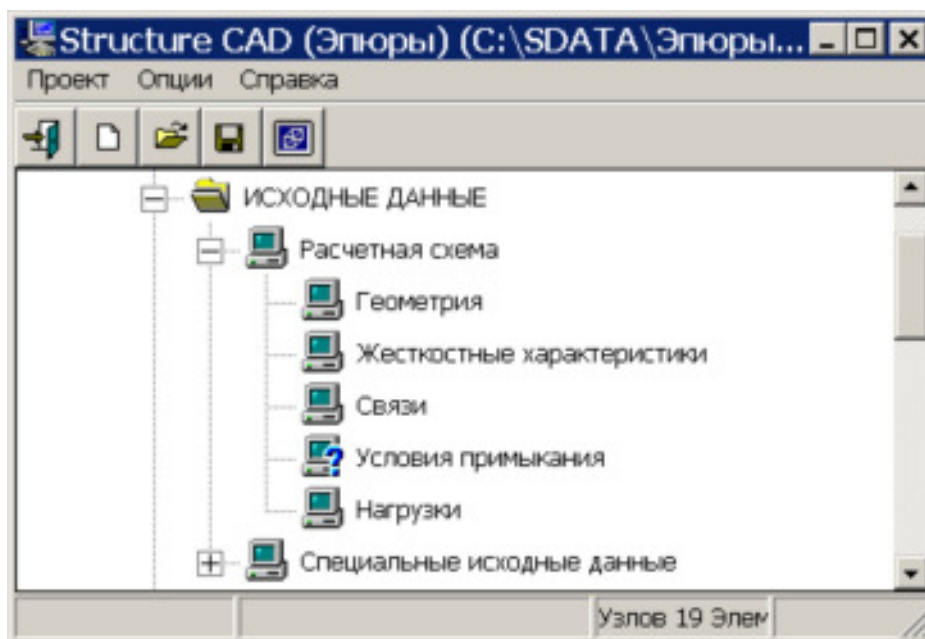





Рис.30

Результаты расчета можно посмотреть в разделе **Графический анализ**. Щелчок по значку  **Графический анализ** открывает рабочее окно **SCAD**, имеющее разделы: **Управление**, **Деформации**, **Эпюры усилий**, **Поля напряжений**, **Постпроцессоры** и **Группы**, которые позволяют проанализировать напряженное и деформированное состояние балки (рис.32).

Открываем раздел **Эпюры усилий**. Активируем кнопку  **Эпюры усилий**, в окне **Выбор вида усилий** выбираем из списка внутренних усилий в поперечных сечениях балки поперечную силу Q_z . В окне **Установка коэффициента масштабирования эпюр** выбираем цифру 2. В итоге в рабочем поле окна **SCAD** эпюра Q_z примет вид, приведенный на рис. 33.

Выбирая в окне **Выбор вида усилий** из списка внутренних усилий в поперечных сечениях балки изгибающий момент M_y получим эпюру M_y (рис.34). В программном продукте **SCAD** эпюра моментов строится на растянутых волокнах балки. Для отображения на эпюре величин изгибающего момента в поперечных сечениях балки надо активизировать фильтр  **Оцифровка изополей/изолиний**. Значения выводимых изолиний соответствуют максимальной величине внутреннего силового фактора на данном элементе. На рис.34 это два одинаковых значения $-6,12$, соответствующие точке перелома эпюры моментов.

Полученные величины Q и M_y отличаются от найденных стандартным методом сечений в курсе сопротивления материалов и вычисленных в системе MathCAD. Погрешность численных расчетов зависит от числа элементов, на которые была разделена балка. Увеличение числа элементов в разумных пределах обычно приводит к уменьшению этой погрешности.

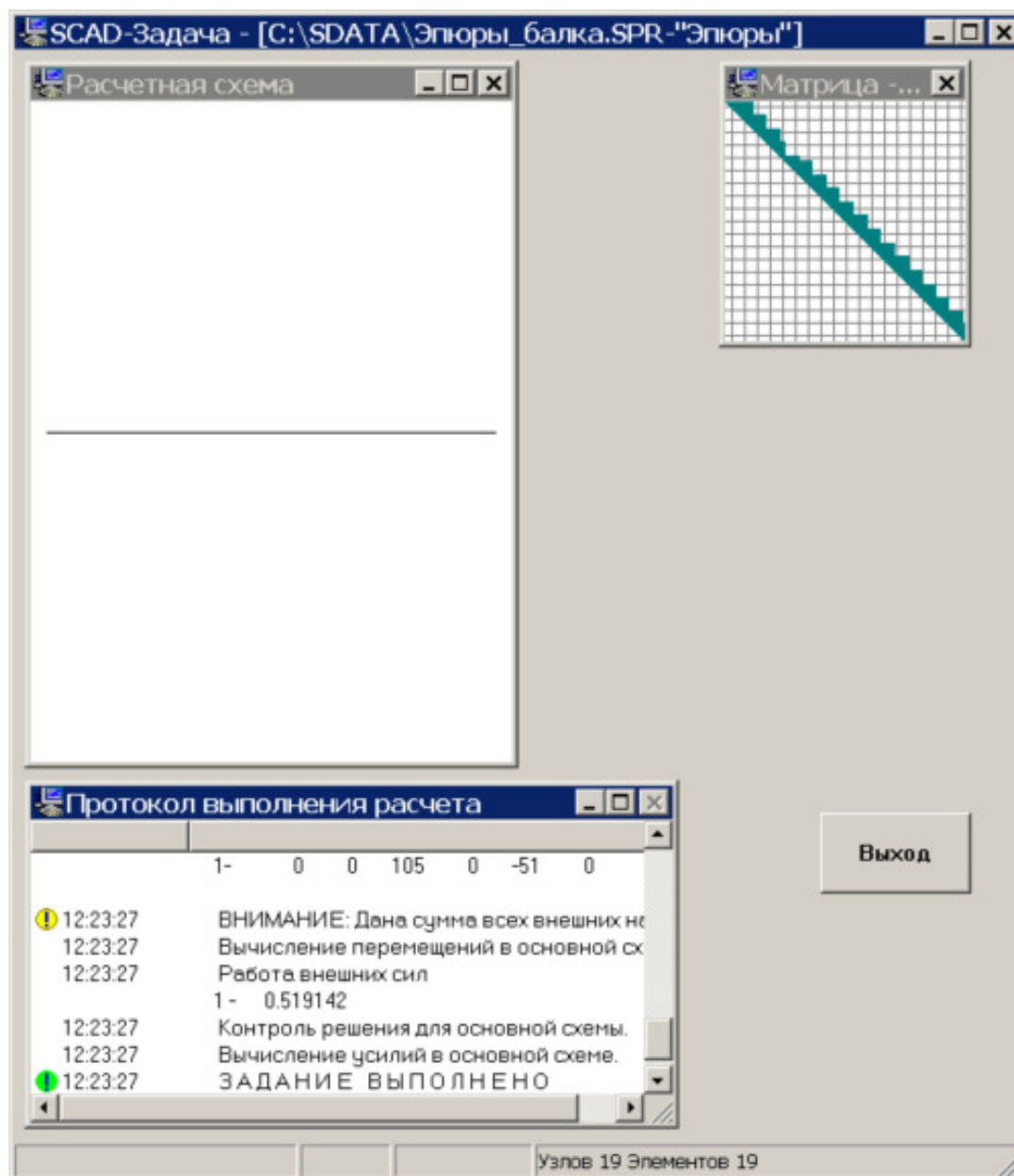


Рис.31

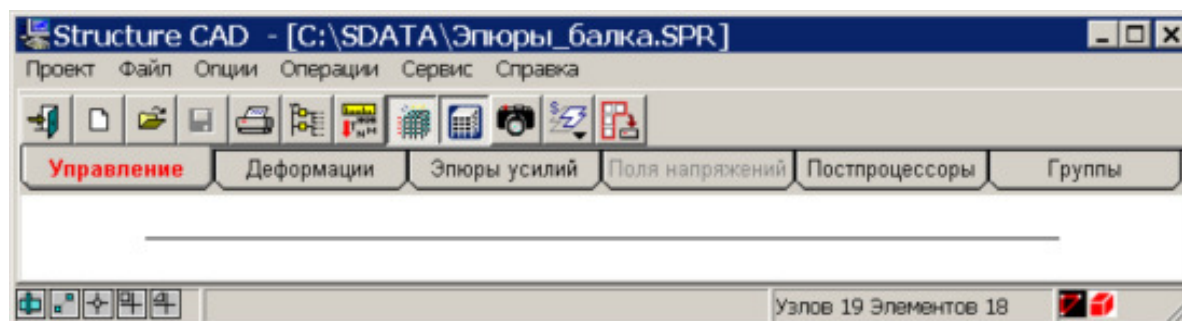


Рис.32

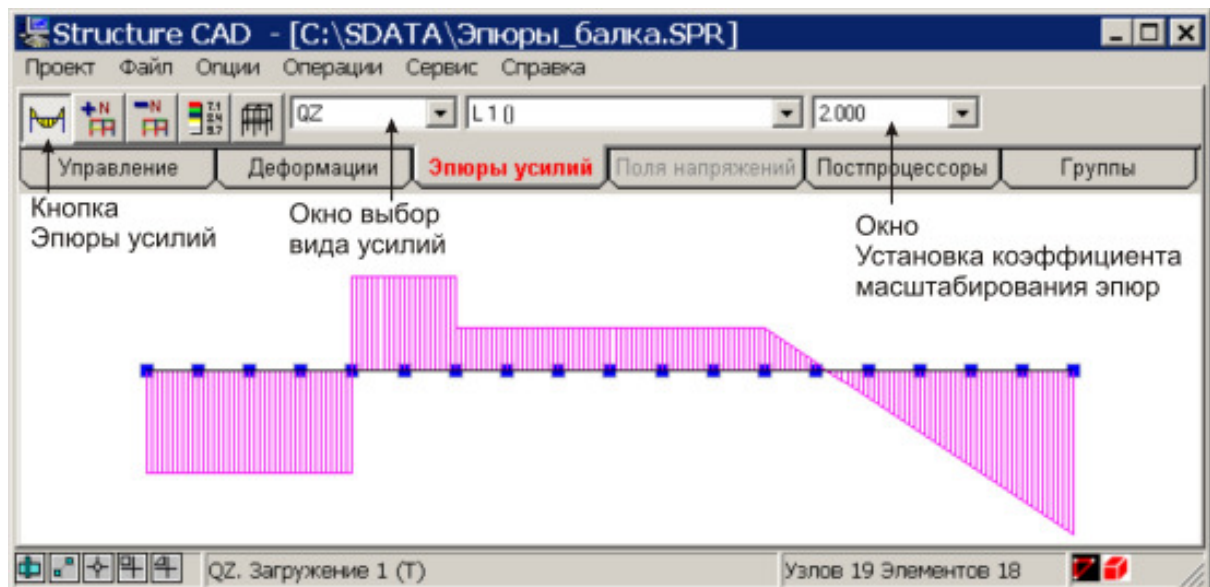



Рис.33



Рис.34

Величины внутренних усилий можно оценить по информации, получаемой с помощью фильтра  **Информация об элементе**. Щелчок по этой кнопке на панели **Фильтры отображения** приведет к открытию одноименной панели. Выделив элемент на расчетной схеме балки, получим всю необходимую информацию о данном элементе. Внешний вид панели для выделенного на *рис.34* шестого элемента приведен на *рис.35*.

Нажимая на клавишу **Эпюры усилий**, можно открыть окно, в котором будут представлены эпюры для всех шести внутренних силовых факторов.

Для документирования исходных данных и результатов расчета **SCAD** предоставляет генератор таблиц в текстовом формате (результаты его работы отображаются в указанном текстовом редакторе) или специальную подсистему – **Документатор**, с помощью которой таблицы формируются и выводятся на печать в графическом формате или экспортируются в **MS Word** или **MS Excel**.

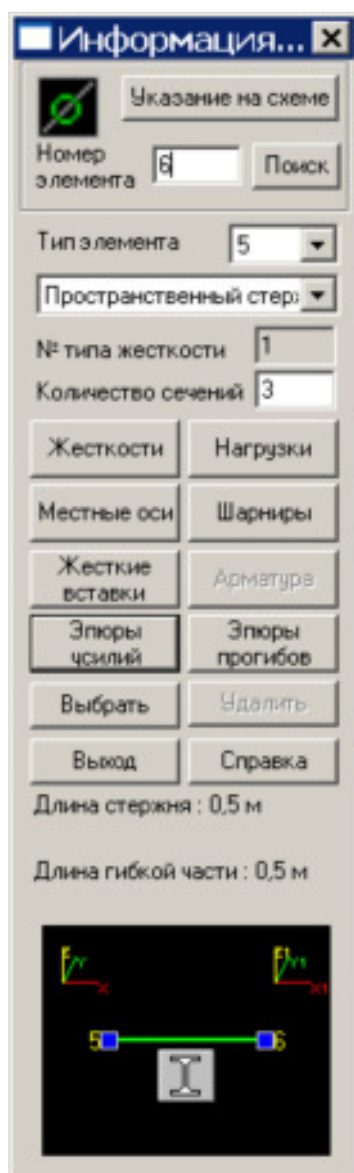


Рис.35

Общее управление генерацией таблиц осуществляется в диалоговом окне **Оформление результатов расчета**, которое вызывается из раздела **Печать таблиц** группы **Результаты** в **Дереве проекта** (рис.10).

Эпюры внутренних силовых факторов можно распечатать, если воспользоваться кнопкой печать раздела **Управление** (рис.36, а) или командой **Печать** из всплывающего меню, открывающегося после нажатия клавиши **Файл** главного меню (рис.36, б). Пример распечатки эпюры моментов (рис.34) приведен на рис.37.

2.4. MSC.PATRAN-NASTRAN 2005⁶

MacNeal-Schwendler Software (MSC) - мировой лидер в области разработки программного обеспечения автоматизации проектирования на основе конечно-элементного анализа. Основанная более 30 лет назад, MSC разработала и постоянно развивает уникальную, всемирно известную систему **MSC.NASTRAN**, истоком которой является система **NASTRAN**, созданная по заказу NASA при прямом финансировании правительства США. **MSC.NASTRAN** - это высоконадежный программный продукт с более чем с 25-летним опытом развития и сопровождения. Решения, полученные с помощью **MSC.NASTRAN**, признаются большинством экспертов в области конечно-элементного анализа как наилучшие среди многих других. Решения **MSC.NASTRAN** обычно принимаются за стандартные решения при проверке качества других конечно-элементных программ.

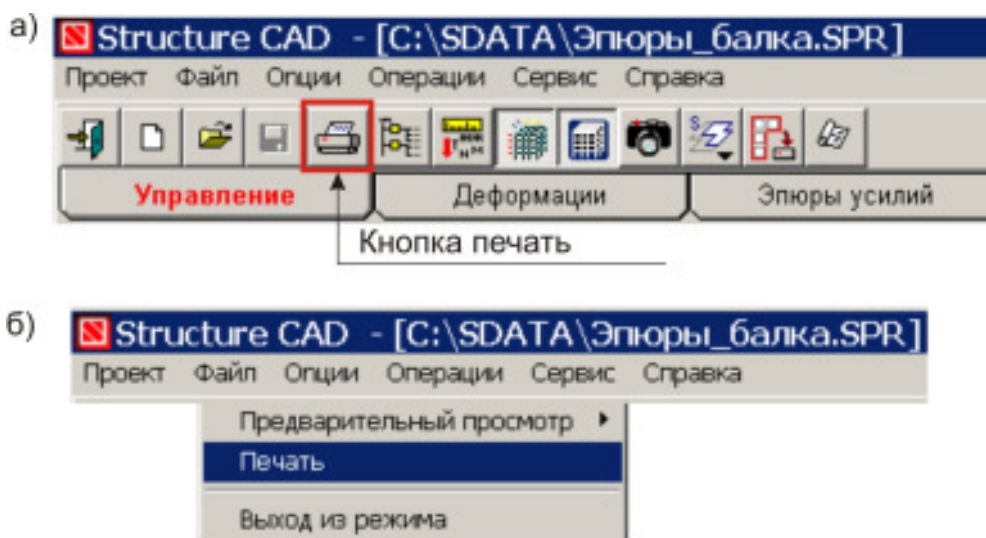


Рис.36

⁶ Рыбников Е.К., Володин С.В., Соболев Р.Ю. Инженерные расчеты механических конструкций в системе MSC/Nastran. – М.: Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 2003. ч.I. - 130 с.; ч.II. – 174 с.

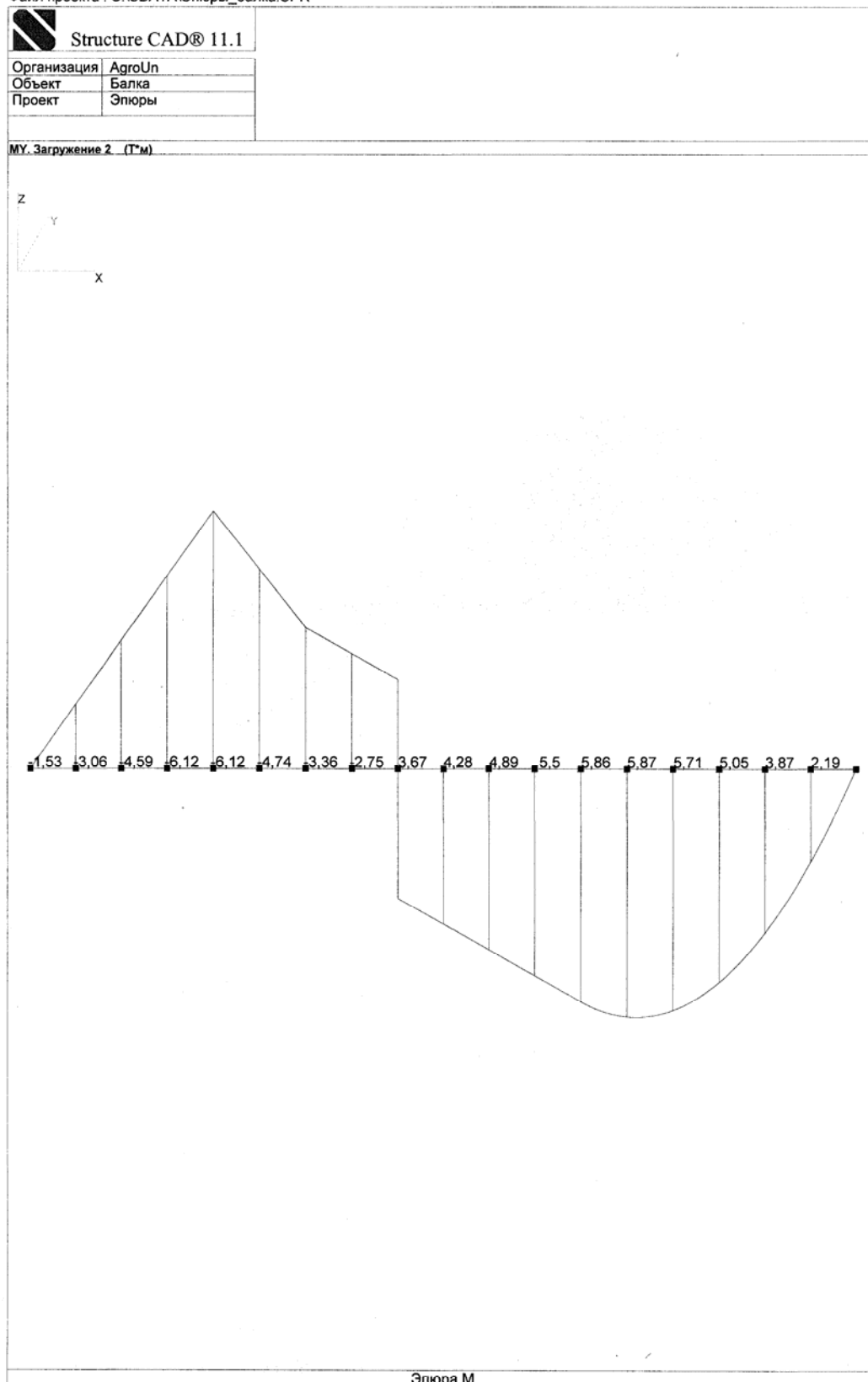


Рис.37

К настоящему времени фирмой выпущен широкий набор программных продуктов конечно-элементного анализа:

- **MSC.NASTRAN** - базовая программа;
 - **MSC.PATRAN** (дополнение к **NASTRAN**) - интегрированная среда моделирования, анализа и проектирования на основе современного графического интерфейса;
 - **MSC.FATIGUE** - расчеты долговечности, усталости, трещиностойкости, оптимизация конструкций по критерию долговечности;
 - **MSC.DYTRAN** - анализ высоконелинейных быстротекущих динамических процессов; **MSC.NASTRAN for Windows** - реализация широких возможностей **MSC.NASTRAN** на персональном компьютере в среде Windows;
 - **MSC.MARC** – решение высоконелинейных инженерных задач,
- а также другие специализированные программы.

MSC.NASTRAN работает на разнообразных типах компьютеров с различными операционными системами, от небольших рабочих станций до суперкомпьютеров. Независимо от вычислительной платформы **MSC.NASTRAN** оптимизирован так, что расчеты проходят наиболее эффективно и результаты получаются идентичными для всех систем.

Программа конечно-элементного анализа конструкций **MSC.NASTRAN** - это программа общего назначения; она применима при решении широкого спектра инженерных задач (статических задач, динамических процессов, нелинейного поведения конструкций, задач теплопроводности, а также оптимизации), если сравнивать со специальными программами, ориентированными на определенные типы анализа.

С помощью **MSC.NASTRAN** решаются следующие задачи:

1. Линейный статический анализ (*Linear static analysis*).
2. Анализ устойчивости (*Buckling analysis*).
3. Анализ собственных форм и частот колебаний (*Normal mode Analysis*).
4. Нелинейная статика (*Nonlinear static*).
5. Динамический анализ (*Dynamic analysis*).
6. Решение задач теплопередачи (*Heat transfer analysis*).
7. Анализ взаимодействия конструкции с жидкостью/газом (*Fluid-structural effect analysis*).
8. Анализ чувствительности при проектировании конструкций (*Design sensitivity*).
9. Задачи оптимизации при проектировании конструкций.
10. Расчет деталей из слоистых композитных материалов.

MSC.Patran – это программный продукт, относящийся к **CAE**-системам, которые позволяют использовать компьютер для конструирования модели объекта, затем моделировать поведение объекта в условиях действия комплекса нагрузок при заданных граничных условиях, которые отражают условия работы объекта в сложной конструкции и визуализировать результаты расчета. Конечно-элементный расчет созданной модели выполняется той вычислительной системой, которая используется в данной задаче (это могут быть **NASTRAN**, **MARC**, **DYTRAN** и т.п.).

Модули приложения **MSC.Patran** осуществляют большие специализированные задачи, часто вне системы, помогая сопровождать конечно-элементный анализ и интерпретацию результатов. Важной особенностью инфраструктуры **MSC.Patran** является интегрированная база данных. Вся информация о модели и её анализе сосредоточена в базе данных, и таким образом можно всегда сравнивать варианты, изменять их, добавлять и изучать конструктивные изменения объекта.

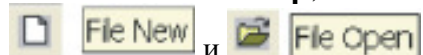
MSC.Patran имеет открытую архитектуру. Это позволяет обмениваться данными с различными программными продуктами, включая CAD-системы, конечно-элементные объектные коды других моделирующих программ, базы данных по характеристикам материалов. Базы данных и модели, созданные в одной программной сис-

теме, могут быть просто перенесены в MSC.Patran с минимальными затратами по времени и без потерь данных при конвертировании кодов.

MSC.Patran воспринимает модели объектов, созданных в таких мощных CAE-системах, как Unigraphics, CATIA, CAD-системах среднего и малого уровня: SolidWorks, SolidEdge, КОМПАС, T-flex, ARIES и др.

2.4.1. Запуск и выход из системы Patran 2005

Запуск системы **MSC.Patran** можно осуществить, используя значок на рабочем столе Windows или последовательность: **Пуск ► MSC.Software ► MSC.Patran 2005 ► MSC.Patran 2005** (рис.38). На экране дисплея появится графическое окно системы MSC.Patran (рис. 39), в котором доступными будут только две команды главного меню: **File** и **Help**, а также две кнопки панели инструментов:



Значок системы
MSC.Patran

При старте графическое окно не содержит никакой информации о модели. Выше и ниже этого окна расположены строка меню, панель инструментов, кнопки приложений, командная строка и строка истории сообщений (history). Остальные меню становятся активными только после открытия новой (рис.40) или уже существующей базы данных (рис.41).

File New – установка новой базы данных (можно открыть старую базу данных как новую, если необходимо сохранить имя базы и удалить её содержимое). В открывшейся форме **New Database** задают имя новой базы данных. Если вы попытаетесь задать уже существующее имя, то вас спросят, хотите ли вы перезаписать старую базу данных и создать новую. В окне «Папка» выберите директорию, в которую запишется база данных. В поле «Имя файла» введите имя базы данных. **MSC.Patran** автоматически добавит расширение **.db**. После нажатия **OK** должно появиться рабочее окно **MSC.Patran**.

File Open – открытие старой базы данных. Открывает существующую базу данных. В открывшейся форме **Open Database** (рис.41) дважды нажмите на имя базы данных.

Меню **File** отвечает за работу с различными файлами **MSC.Patran**, управляет файлами базы данных, импортирует и экспортирует файлы, создает копии файлов, осуществляет выход из сессии и т.д. Это меню содержит стандартный набор команд, который имеется во всех пакетах, предназначенных для работы с Windows (рис.42).

Меню **Help** представлено на рис.43. Используя команду **On Help**, можно получить справочную информацию о программном продукте (правда, на английском языке) (рис.44). Система **Help** содержит описание каждой формы, подформы, опции, каждого параметра модели.

Помимо простого описания средств и инструментов работы, **Help** показывает, как их использовать для проведения анализа. Также в системе находится информация по кодам анализа, типам элементов, **CAD** системам, пересекающимся с **MSC.Patran** и т.д.

Если при работе с формами у вас возникают какие-то вопросы, нажимайте на клавишу **F1**. После этого **Help** автоматически выведет информацию по данной конкретной форме. Передвигаясь по библиотеке, можно получить любую другую информацию.

Выход из системы **MSC.Patran** можно осуществить из меню **File** командой **Quit** или одновременным нажатием кнопок **Ctrl+Q** на клавиатуре. **MSC.Patran** при выходе автоматически сохраняет все изменения, внесенные в базу данных.

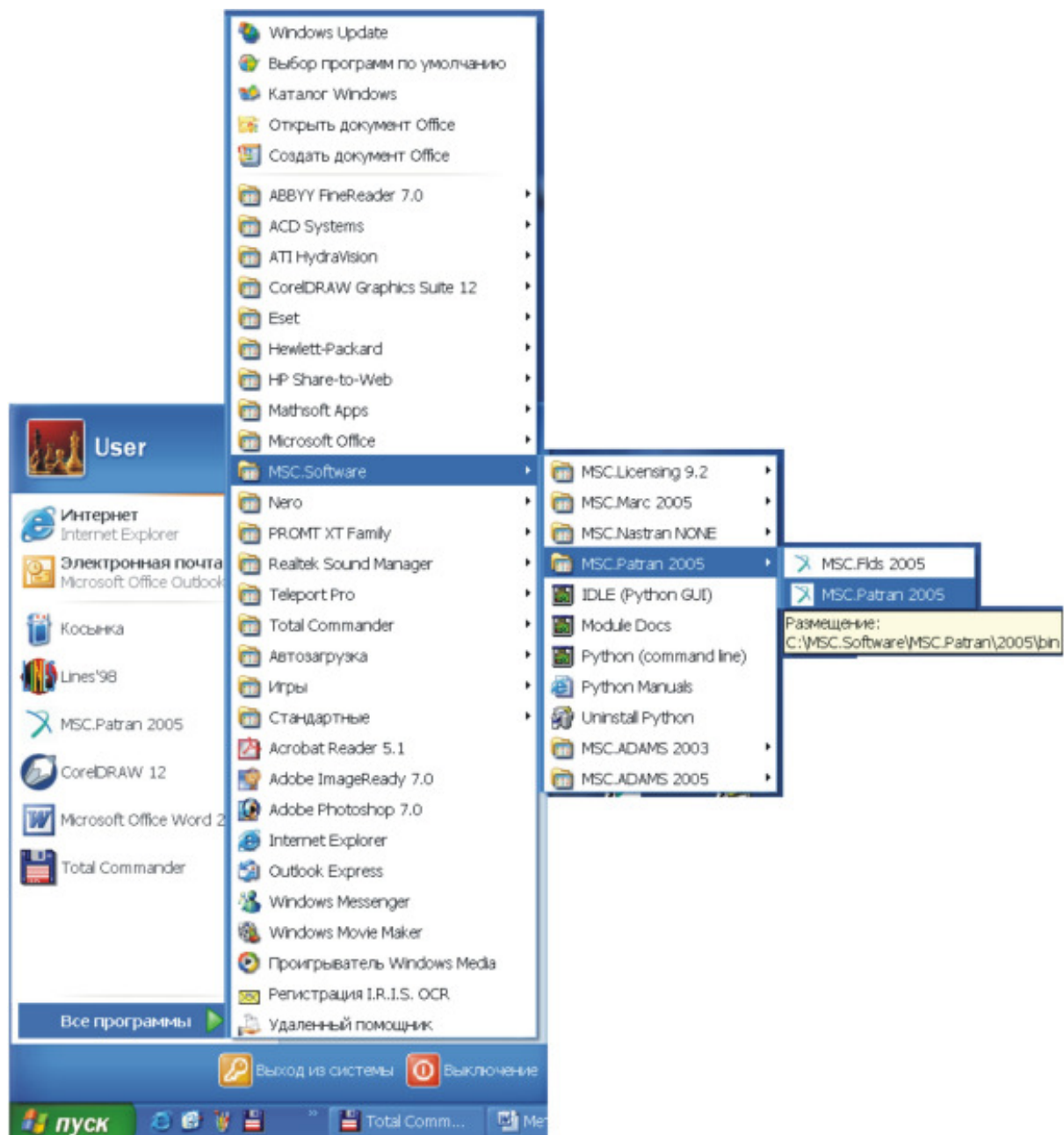


Рис.38

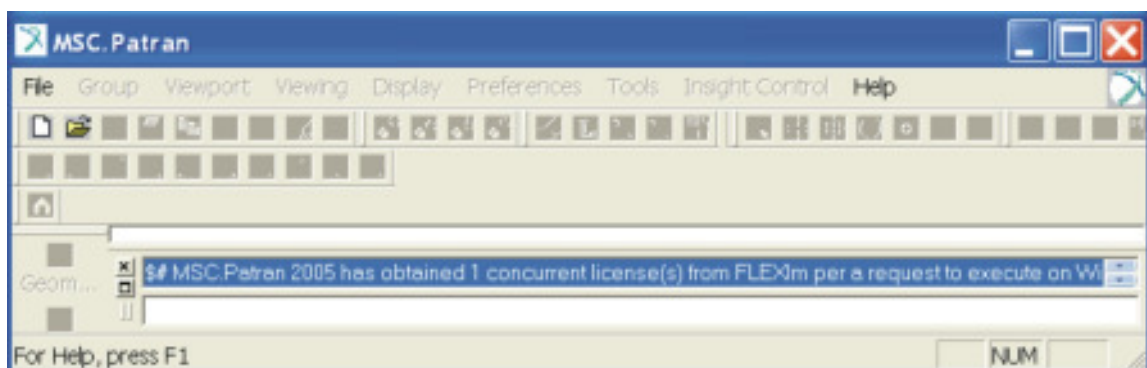


Рис.39

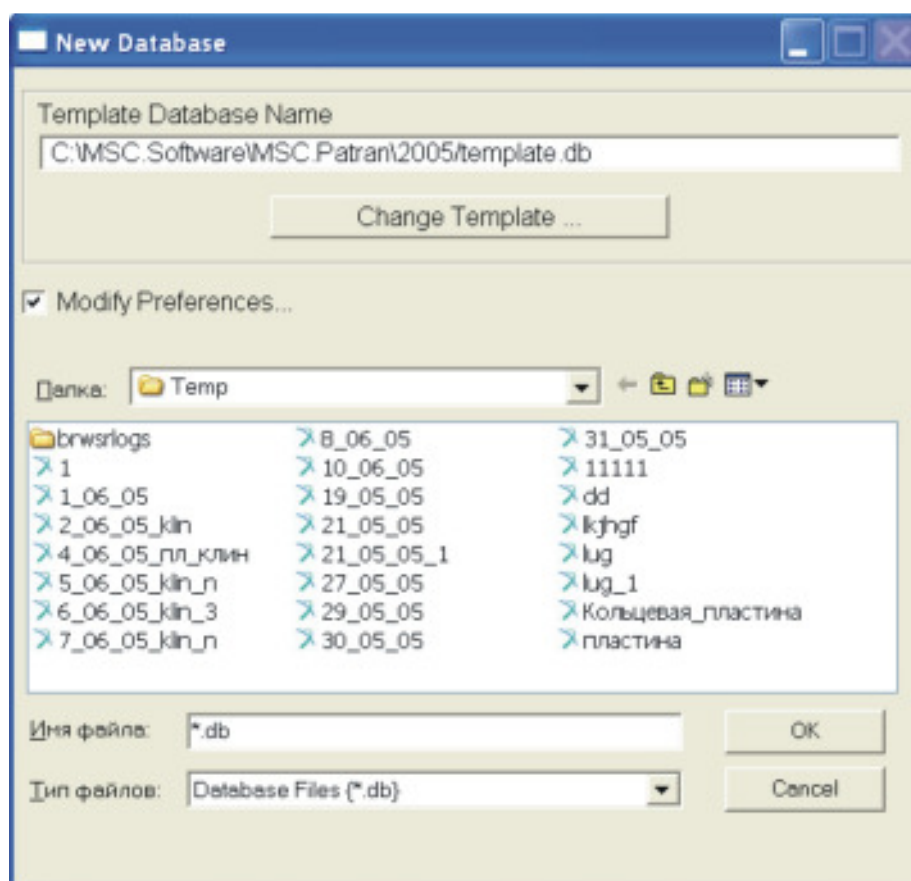


Рис.40

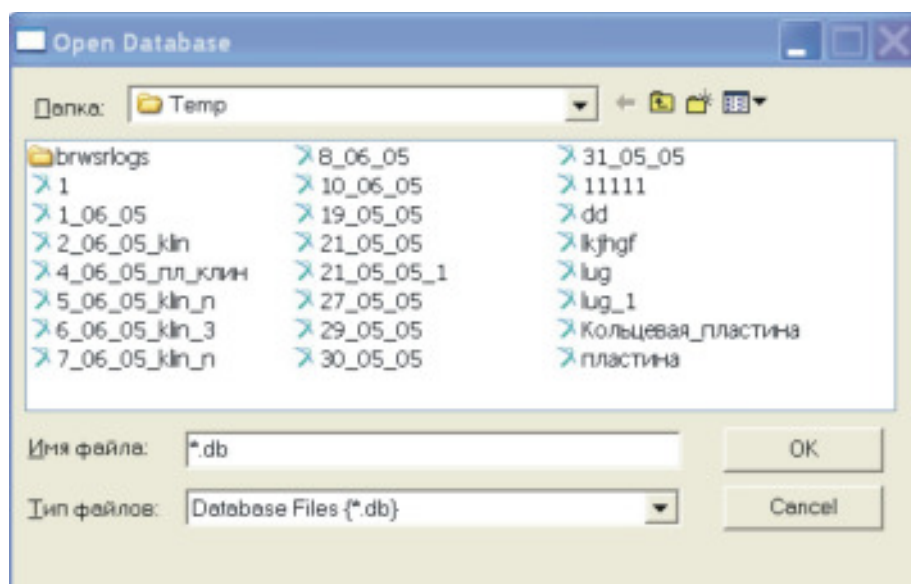


Рис.41

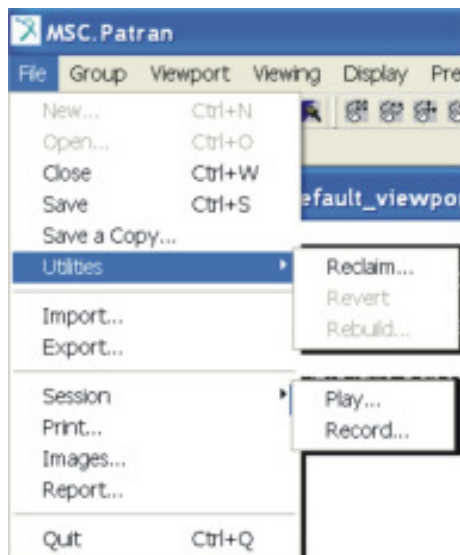


Рис.42

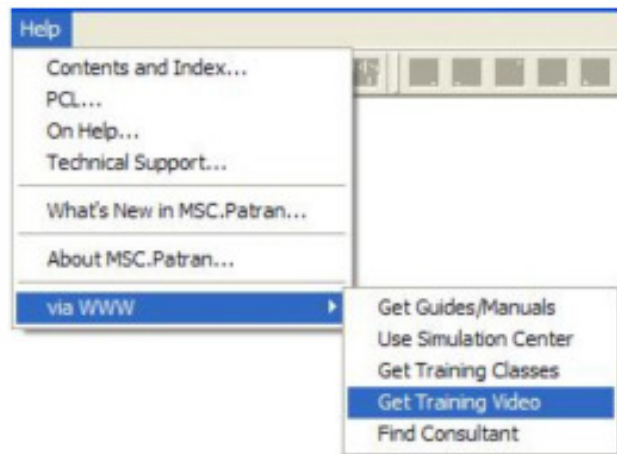


Рис.43

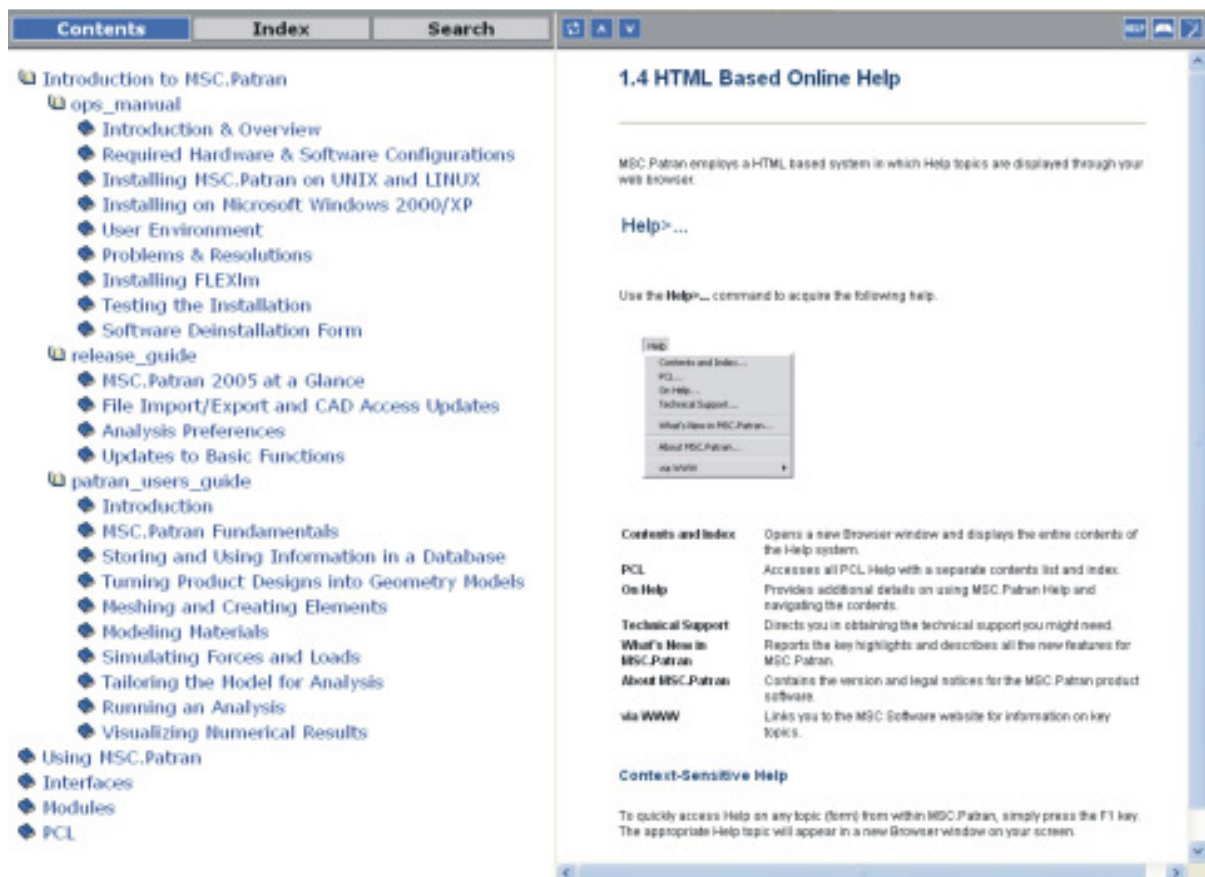


Рис.44

2.4.2. Интерфейс MSC.Patran

В центре рабочее окно имеет пустое графическое поле, в котором конструируется геометрическая модель объекта (рис.45). В графическом окне отображается вся модель или какая-то ее часть. В верхней части окна отображаются имя базы данных (в данном случае **05-07-2005-test_3beam.db**), имя графического окна (**default_viewport** - область просмотра значения по умолчанию), имя текущей группы

(**default_group** - группа значения по умолчанию) и режим отображения модели (**Entity** - объект).

Графические окна в **MSC.Patran** можно передвигать и изменять их размер.

Для передвижения графического окна:

- Поместите курсор на заглавную строку окна.
- Нажмите левую кнопку мышки и переместите окно на новое положение.

Для изменения размера графического окна:

- Поместите курсор на границу или в угол окна.
- После появления двухсторонней стрелочки нажмите на мышку и измените размер окна до желаемого размера.

В **MSC.Patran** нет ограничений на количество создаваемых графических окон.

Выше и ниже графического поля расположены строка меню, панель инструментов, кнопки приложений, командная строка и строка истории сообщений (history). Справа от графического окна располагаются формы приложений, используемые в процессе создании модели (рис.45).

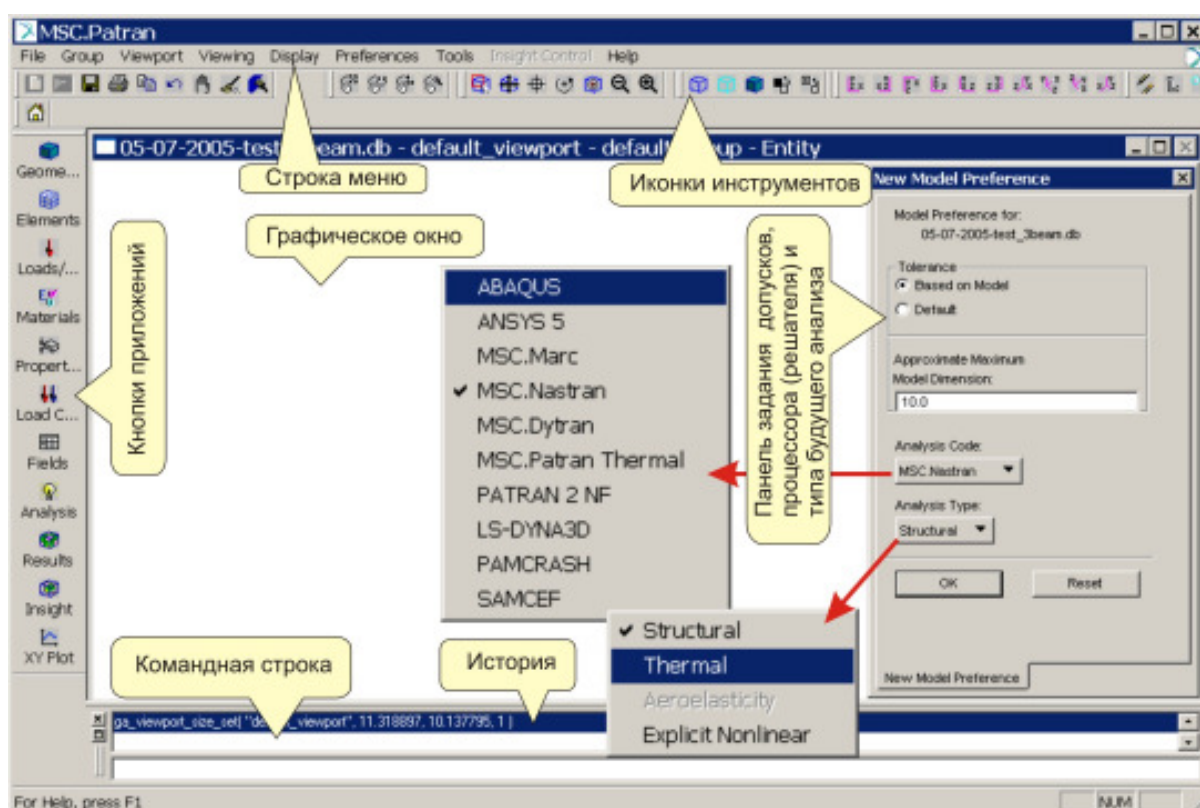


Рис.45

Строка меню, панель инструментов и кнопки приложений, показанные ниже, образуют главную панель управления. Работа с ними осуществляется при помощи ниспадающих меню, нажимаемых кнопок и всевозможных иконок. Также они показывают, что именно **MSC.Patran** делает сейчас и, в случае прерывания операции, сообщают о причинах прерывания.

2.4.3. Строка меню

Строка меню расположена прямо под заглавной строкой **MSC.Patran** каждая часть меню содержит ниспадающее подменю с дополнительными командами (рис.46).

Команды меню **File** и **Help** приведены на рис.42 и 43.

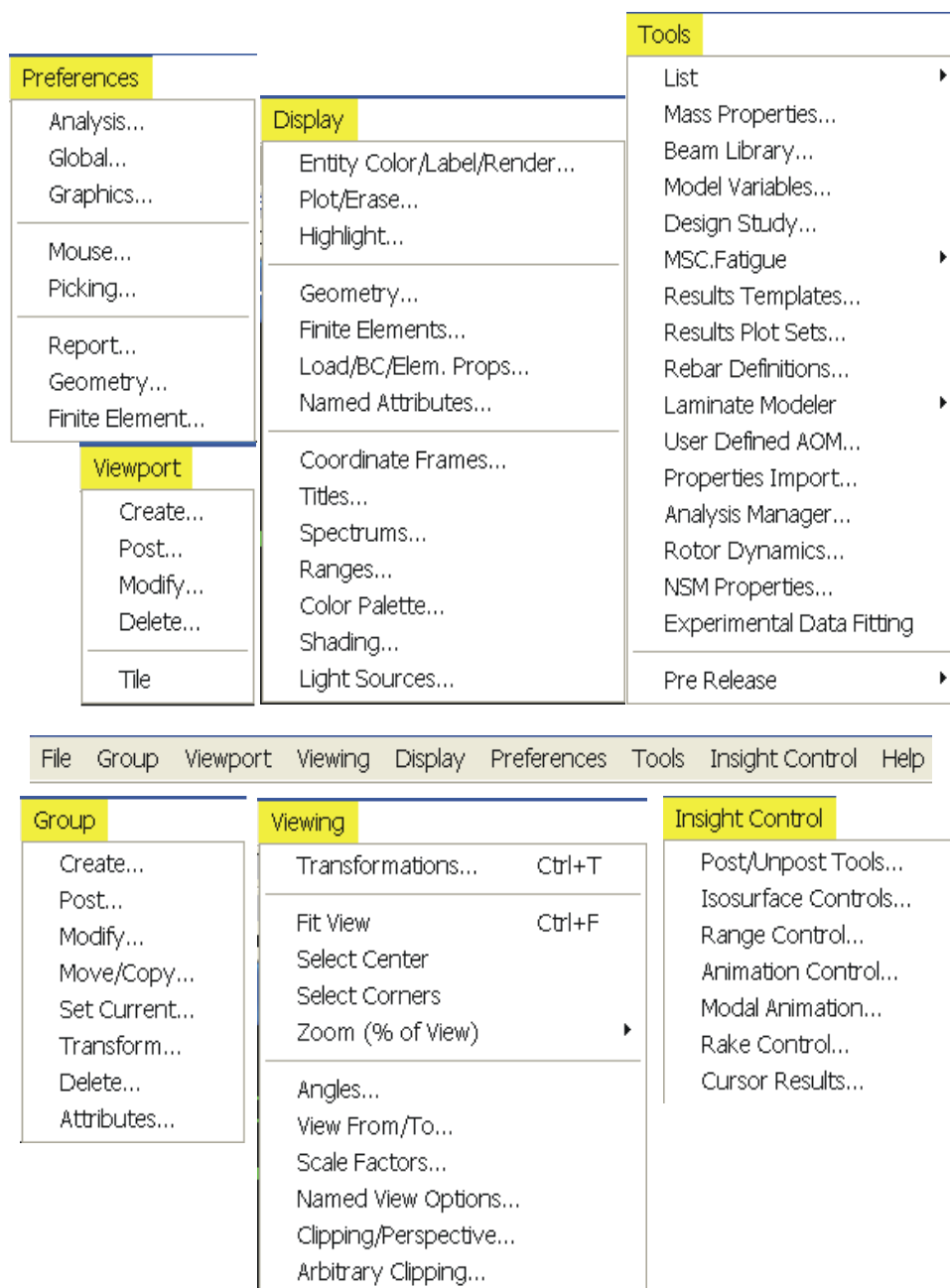


Рис.46

Меню **Group** содержит опции по объединению геометрических (точки, кривые, поверхности, тела) и конечно-элементных (узлы, элементы, MPC) примитивов модели в группы. Содержимое этих групп можно домоделировать и обрабатывать. Например, можно объединить в одну группу конечные элементы из различных материалов. Или в целях просмотра результатов можно создать отдельные группы для отображения полей температур и напряжений в одной модели одновременно.

Демонстрационные окна **Viewport** используются для вывода частей модели или всей модели целиком. Каждое окно предоставляет свой независимый вид стационарной модели, который определяет заданный набор параметров. Меню **Viewport** используется для создания, редактирования, перемещения и организации демонстрационных окон.

Меню **Viewing** содержит опции по управлению размером и ориентацией модели в графическом окне. Модель можно вращать, изменять ее размер, положение, тип проекции, масштабные множители и режущие плоскости (clipping planes). Также по

желанию можно менять плоскость обзора, позицию наблюдателя, центр окна и фокальную точку. Изменение вида никак не отражается на самой модели.

По мере построения модели **MSC.Patran** автоматически изменяет размер графического окна при добавлении примитива, выходящего за пределы текущего поля обзора. Окно изменяется так, чтобы в него попадали все примитивы текущей группы.

По мере построения модели база данных постепенно переполняется геометрическими и конечно-элементными примитивами. Меню **Display** помогает организовать их удобное взаимное отображение на экране. В нем определяется, какие примитивы вывести на экран и как их вывести. Меню **Display** также содержит дополнительные визуализационные средства, такие как, отрисовка и стирание примитивов, подсветка и отображение меток. Средства меню **Display** никак не влияют на основные операции **MSC.Patran**. Они просто повышают степень удобства отображения модели.

В меню **Preferences** устанавливаются параметры, управляющие процессом построения модели. В нем определяются глобальные параметры, значение которых может быть изменено в отдельных приложениях. Например, при проведении операции выравнивания можно установить локальное значение параметра Global model tolerance. Однако вне данного приложения будет использоваться глобальное значение параметра. Поменять preference можно только внутри формы **Preferences**.

Меню **Tools** исполняет необязательные приложения и выполняет операции, на которые есть лицензия (сюда не включаются операции выхода из **MSC.Patran**). Здесь также содержатся новые добавленные средства **MSC.Patran**, которые используются при условии оплаты поставщику программного продукта их стоимости. Если на какой-то модуль приложения нет лицензии, то соответствующая опция в меню **Tools** будет затемнена; это означает, что ее нельзя выбрать.

Меню **Insight Control** активизируется только после нажатия кнопки приложения **Insight**, которое позволяет визуализировать сложное трехмерное поведение модели. Это приложение располагает множеством методов отображения результатов. В настоящее время **Insight** является отдельной возможностью **MSC.Patran** со своим собственным экраном и своими выходными данными. Чтобы открыть это приложение, нужно нажать на кнопку **Insight**. Чтобы выключить его, необходимо нажать на эту кнопку повторно.

2.4.4. Геометрическое моделирование ферм, балок и рам в системе **MSC.Patran-Nasran**

Для моделирования поведения стержней и балок под действием какой-либо нагрузки используются одномерные элементы (линейные элементы): стержневые и балочные. Стержневые элементы **CROD** воспринимают осевое растяжение-сжатие и кручение относительно продольной оси. Балочные элементы: **CBAR** и **CBEAM**, воспринимают также изгиб. В **MSC.NASTRAN** существует определенное различие между «простыми» и «сложными» балками. Простые балки моделируются элементами **CBAR**, жесткостные характеристики которых не могут варьироваться по длине. Сложные балки моделируются элементами **CBEAM**, которые в дополнение к свойствам элемента **CBAR** имеют возможность моделировать переменность характеристик по длине и ряд других геометрических характеристик сечения.

Для решения задач нам потребуются только элементы **CROD** и **CBAR**.

Элемент CROD

Одномерный двухузловой элемент **CROD**, работающий на растяжение-сжатие и кручение, имеет только две степени свободы в узле (u - поступательное перемещение вдоль оси x , ϕ - поворот вокруг оси x). Внешний вид элемента, нагруженного внут-

ренными усилиями: продольной силой P и моментом T в узловых точках G_1 и G_2 - показан на *рис.47*. При определении свойств элемента задаются материал и площадь его поперечного сечения. Все остальные геометрические характеристики вычисляются автоматически.

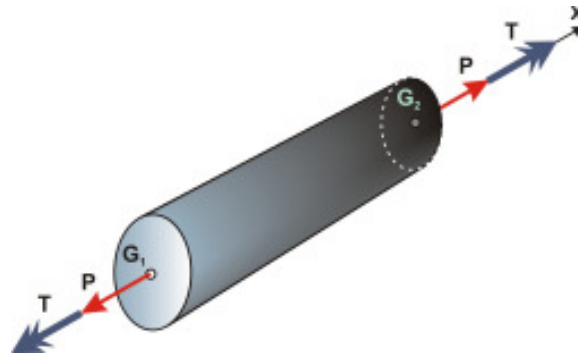


Рис.47

При выборе элемента **CROD** в системе **Patran** должны быть установлены следующие опции (*табл. 2.1*):

Таблица 2.1

Action (Действие)	Dimension (Измерение)	Type (Тип)	Option(s) (Выбор)	Topologies (Топология)
Create	1D	Rod	General Section Standard General Section CONROD Pipe Section	Bar 2

Внешний вид панели свойств элемента **Input Properties** показан на *рис.48*. Опции, заключенные в прямоугольные скобки, задавать не обязательно.

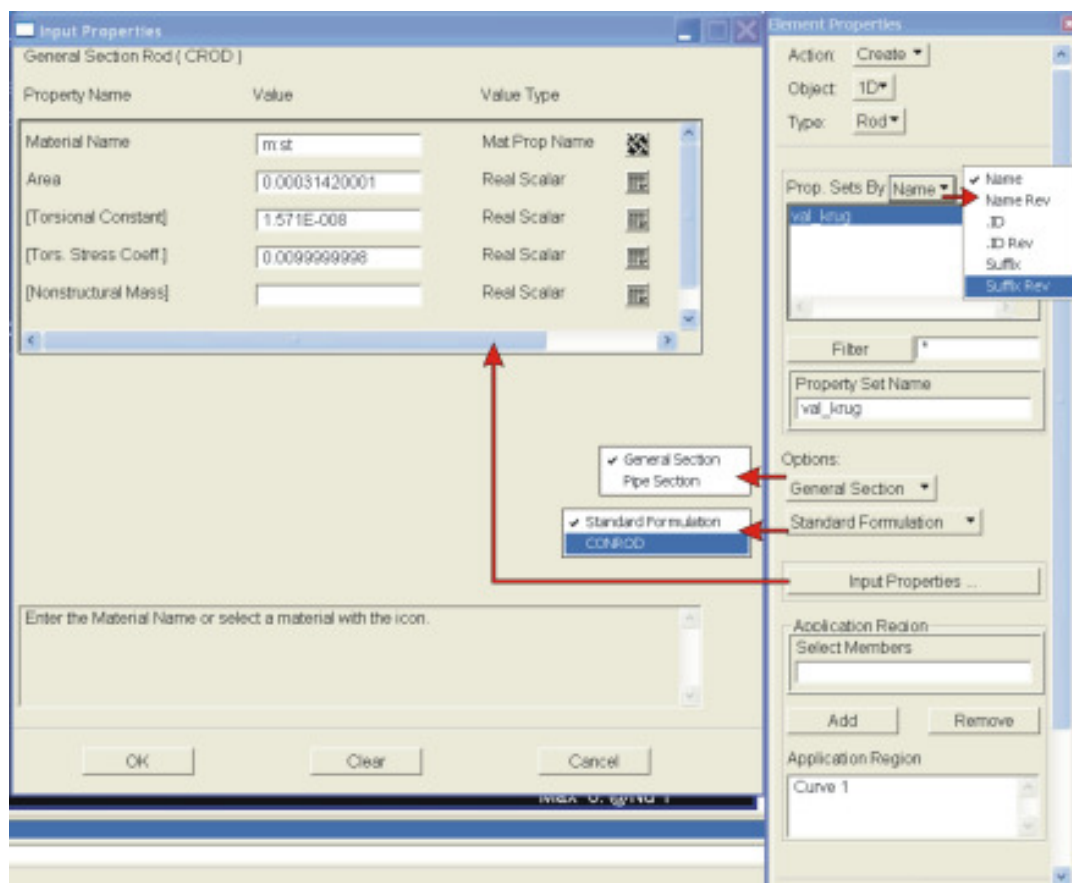


Рис.48

Элемент **CBAR**

Элемент **CBAR** - элемент общего назначения. Работает на растяжение-сжатие, кручение и поперечный изгиб в двух перпендикулярных плоскостях. Может обладать жесткостью по всем шести степеням свободы в каждой узловой точке. Компонентами перемещений в узловой точке элемента являются три поступательных и три вращательных степени свободы.

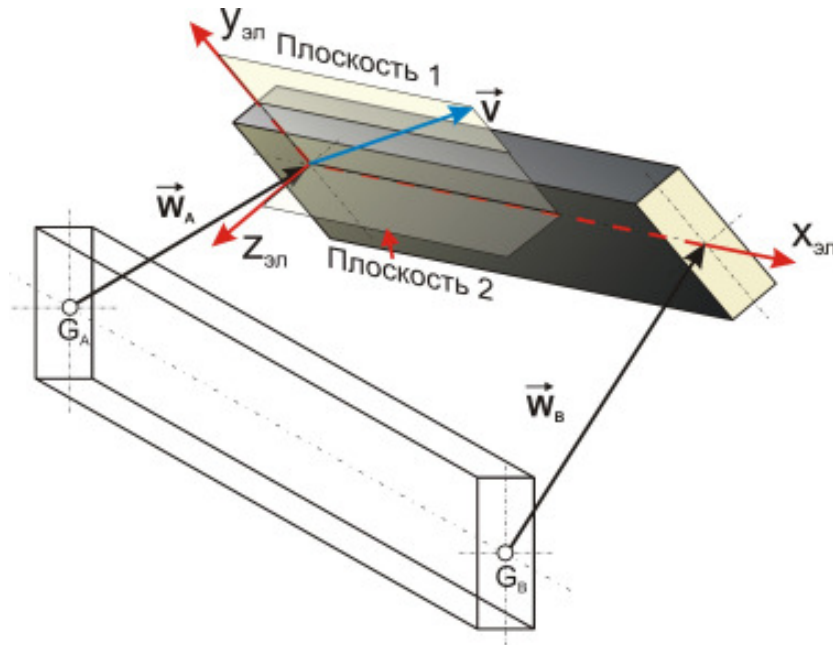


Рис.49

Элемент задаётся номерами узловых точек G_A (**Grid Point A**) и G_B (**Grid Point B**), координатами точки $A(X_1, X_2, X_3)$ в глобальной системе координат, векторами $\vec{W}_A(W_{A1}, W_{A2}, W_{A3})$ и $\vec{W}_B(W_{B1}, W_{B2}, W_{B3})$ смещения центров тяжести поперечных сечений элемента в точках A и B в координатной системе перемещений, узловыми кинематическими условиями PA и PB , используемыми для освобождения от связей между узловой точкой и некоторыми степенями свободы балки (степени свободы определяются в системе координат элемента), и вектором ориентации \vec{V} сечения балки относительно остальной модели (рис.49). Ось x элемента автоматически определяется как направление от G_A к G_B .

Направление \vec{V} относительно сечения может быть произвольным, но обычно располагается вдоль одной из главных осей инерции. Поворот сечения вокруг оси x осуществляется заданием компонент вектора \vec{V} . Плоскость, определяемая осью $x_{эл}$ элемента и вектором ориентации \vec{V} , называется плоскостью 1 . Ось $y_{эл}$ лежит в этой плоскости и перпендикулярна $x_{эл}$. Плоскость 2 перпендикулярна плоскости 1 , ось $z_{эл}$ определяется как результат векторного произведения осей $x_{эл}$ и $y_{эл}$. Плоскость 2 содержит оси элемента $x_{эл}$ и $z_{эл}$.

Имеется альтернативный метод определения ориентирующего вектора \vec{V} с использованием точки G_O ; вектор \vec{V} направлен от G_A к G_O (рис.50).

Жесткостные характеристики сечения обычно задаются в системе координат **CBAR**.

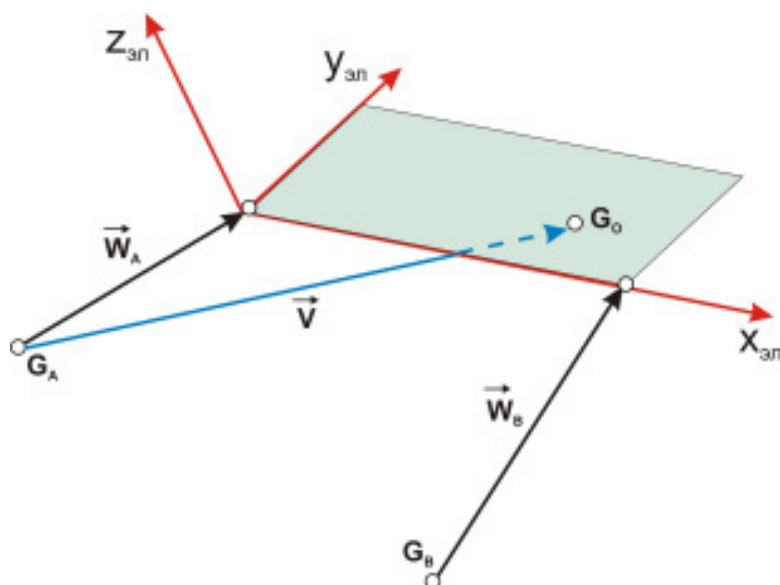


Рис.50

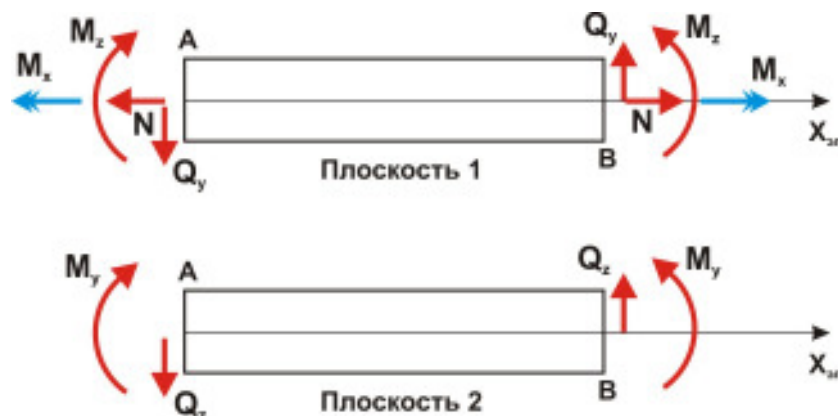


Рис.51

Положительные направления сил и моментов в **CBAR** соответствуют знакам, принятым в курсе «Теория упругости»⁷ (рис.51).

При выборе элемента **CBAR** в системе **MSC.Patran** должны быть установлены следующие опции (табл. 2.2):

Таблица 2.2

Action (Действие)	Dimension (Измерение)	Type (Тип)	Option(s) (Выбор)	Elem Type (Тип элемента)	Input Data (Вводимые данные)
Create	1D	Beam	General Section	CBAR	Материал Площадь

Внешний вид панели свойств элемента показан на рис.52. Там же указаны поля ввода координат векторов \vec{V} , \vec{W}_A и \vec{W}_B , а также кинематических условий **PA** и **PB**. Опции, заключенные в прямоугольные скобки, задавать не обязательно.

⁷ В.А. Жилкин. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. Часть I. Теоретические основы проектирования элементов сельхозмашин. Челябинск, ЧГАУ, 2005. – 427 с.

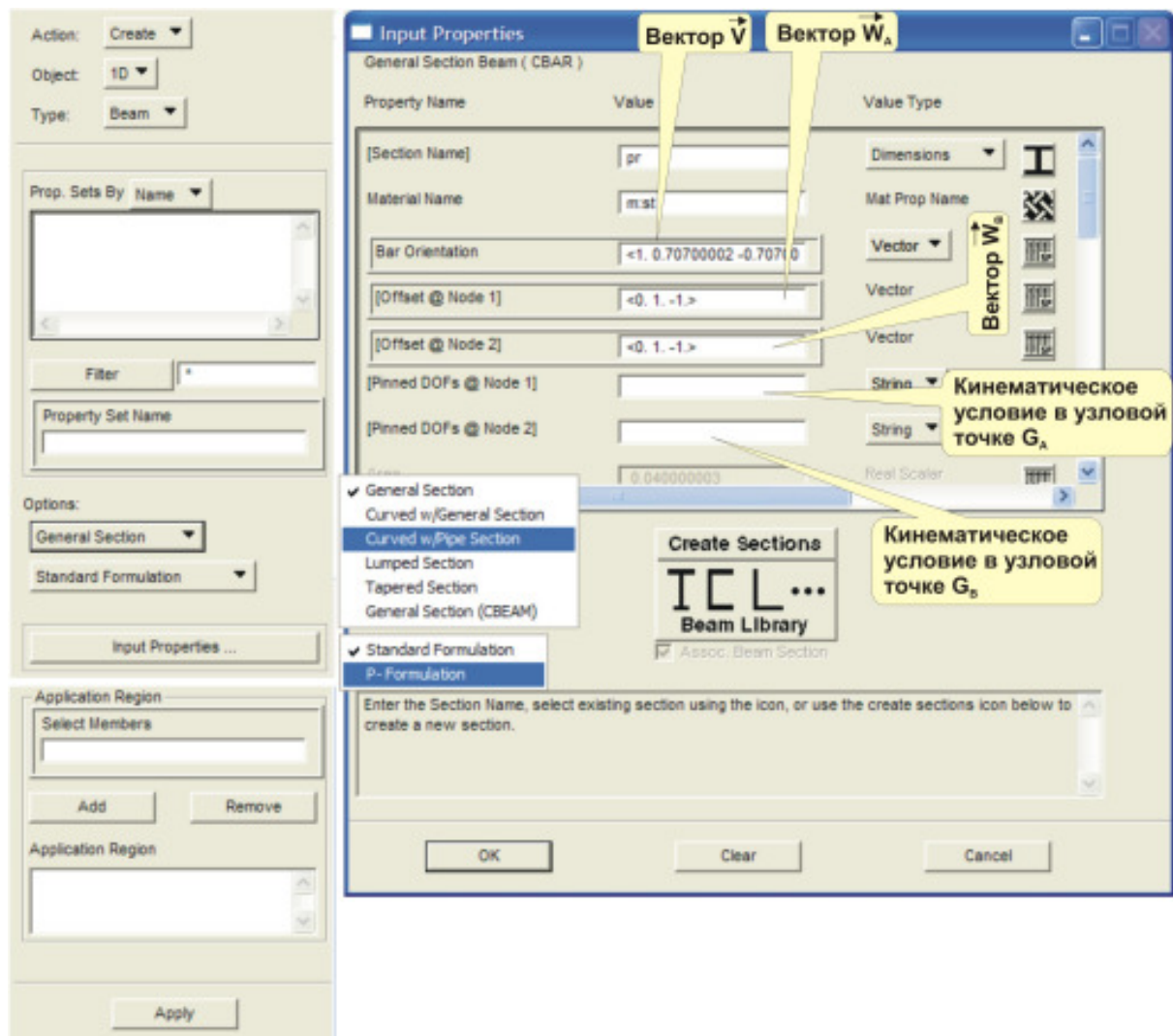


Рис.52

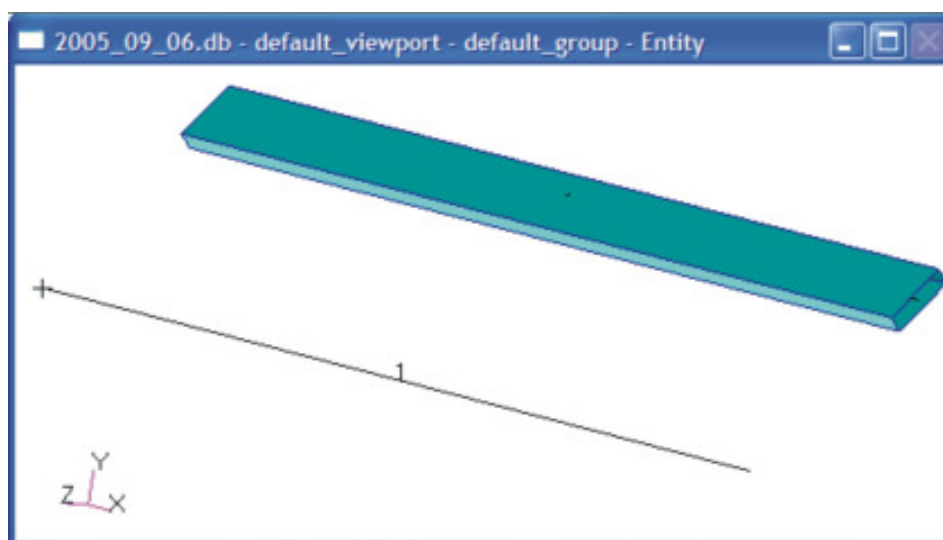


Рис.53

На рис.53 приведен вид элемента, соответствующий векторам \vec{V} , \vec{W}_A , \vec{W}_B , заданным на рис.52.

Для визуализации внешнего вида поперечного сечения элемента необходимо в меню **Display** активизировать команду **Load/BC/Elem.Props...**. Откроется одно-

именная панель, на которой в разделе **Beam Display** следует нажать на клавишу **1D:Line** и из появившегося списка команд выбрать **3D: FullSpan+Offsets** (рис.54).

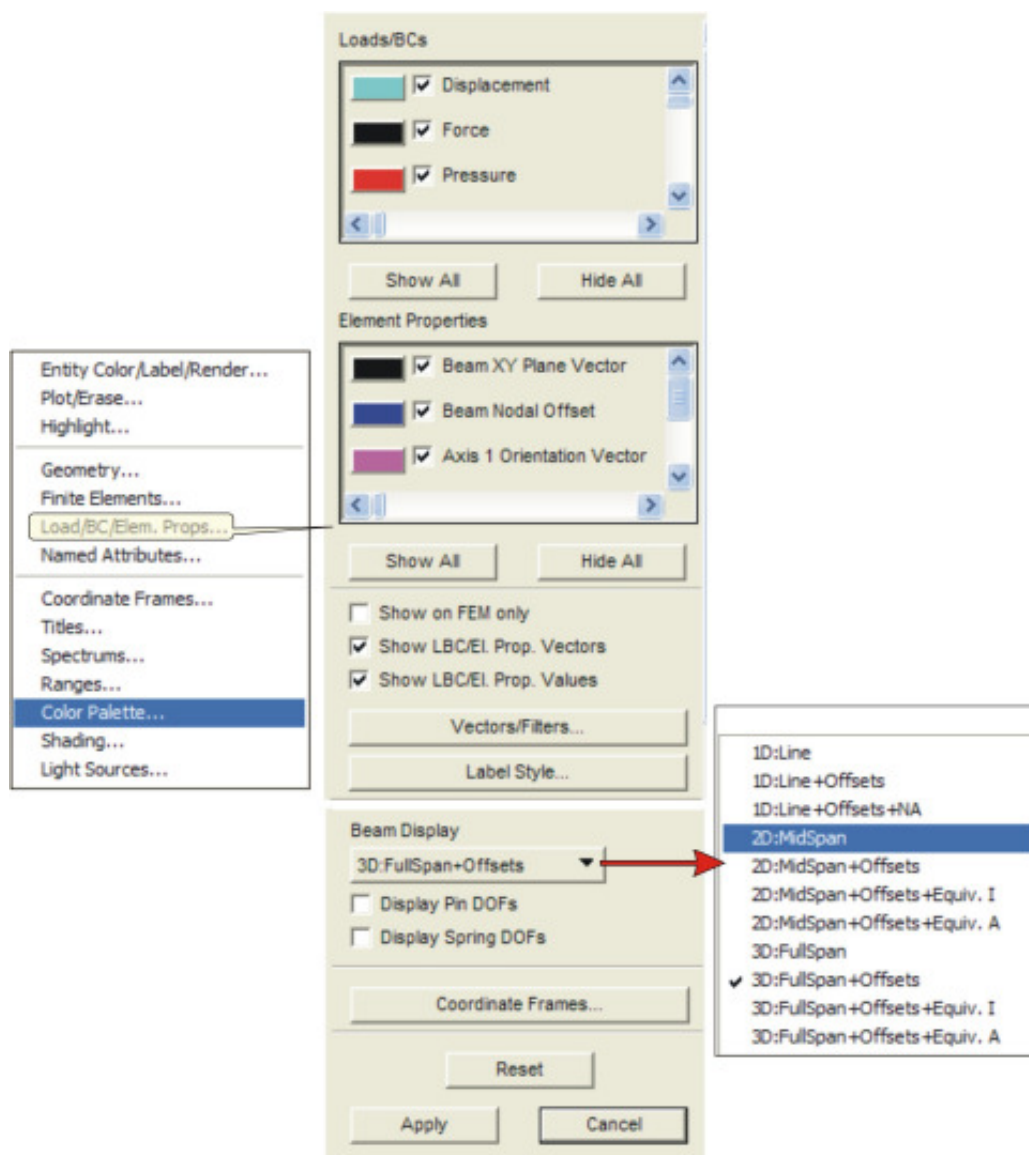


Рис.54



Рис.55

Поворот поперечного сечения балки реализуется ориентацией вектора \vec{V} , координаты которого $\langle \cos(\vec{V}, x), \cos(\vec{V}, y), \cos(\vec{V}, z) \rangle$ задаются в строке **Bar Orientation**

панели **Input Properties** (рис.52). Примеры задания этого вектора и ориентация сечения элемента **CBAR** приведены на рис.55.

2.4.4.1. Алгоритм создания конечно-элементной модели фермы

Алгоритм создания конечно-элементной модели, основанной на использовании элементов **CROD**, продемонстрируем на примере определения опорных реакций и усилий в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на неё силами на рис.56.⁸

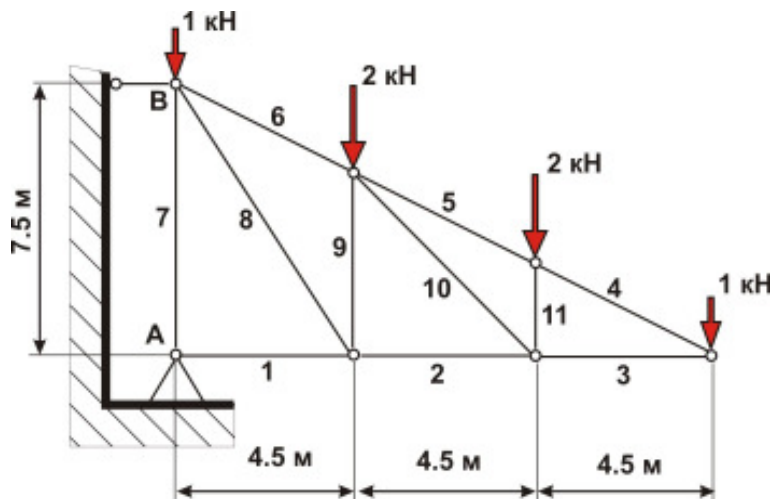


Рис.56

Алгоритм создания конечно-элементной модели:

A. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry** (рис.57).

B. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action► Create
Object► Point
Method► XYZ.

C. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты первого узла и нажимаем клавишу **Apply**. Для того чтобы контролировать положения введенных точек, активизируем кнопку  **Положение точек**. Операцию повторяем до тех пор, пока не будут введены координаты всех узлов. На рис.58 приведен вид графического окна после выполнения описанных операций.

D. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**. Панель **Geometry** примет вид, изображенный на рис.59.

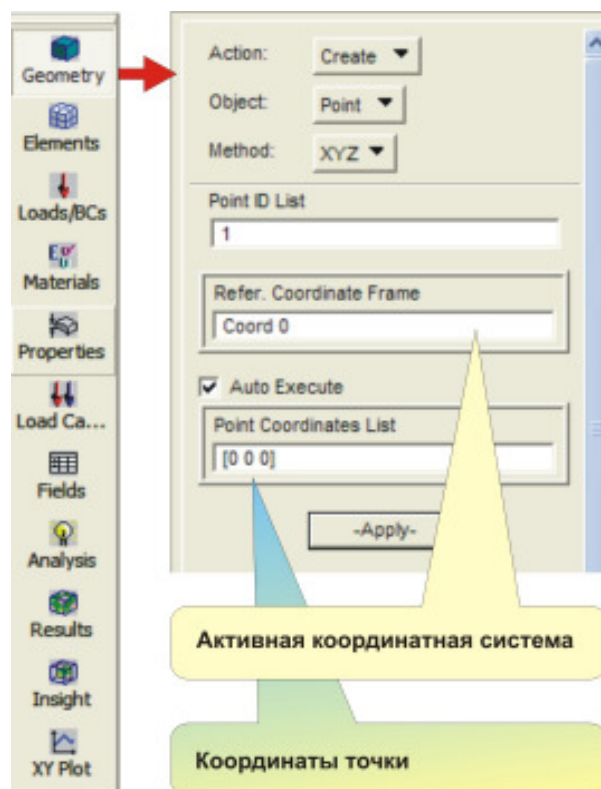


Рис.57

⁸ Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 448 с.

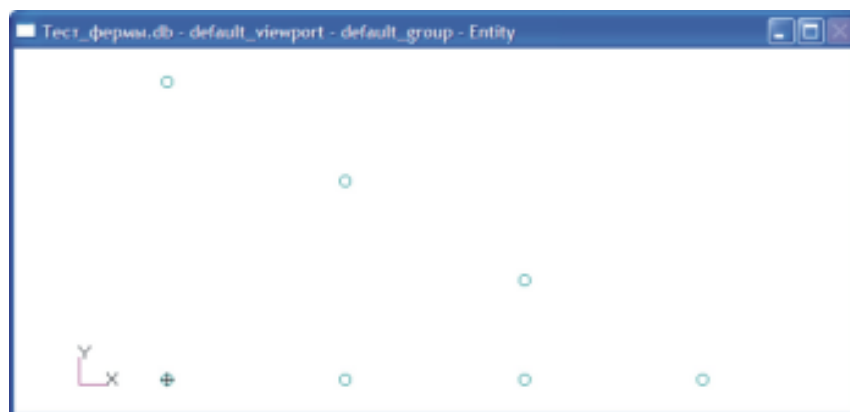


Рис.58

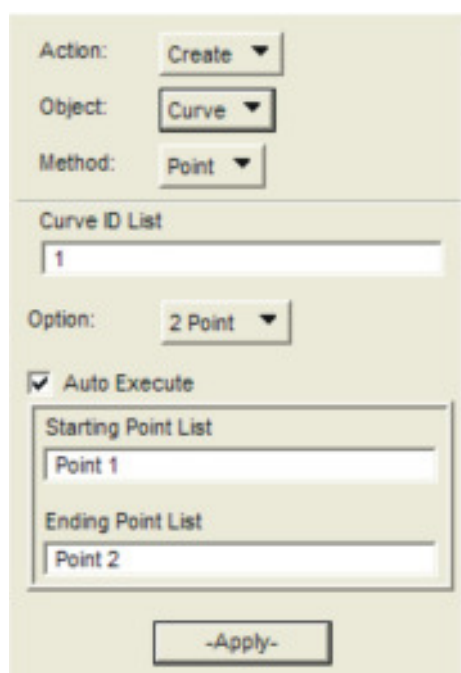



Рис.59


Е. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам. В результате получим изображение геометрии фермы (рис.60).

Ф. Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели (рис.61).

Г. Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели фермы. В поле Number задаем число элементов на кривой (в нашем случае **1**). Для визуализации выполняе-

мых действий нажмем на кнопку . В результате этого действия на геометрии фермы будут проставлены номера узлов и элементов (рис.55).

Н. Переходим к созданию сетки. Активируем команду **Object►Mesh**. Панель **Finite Elements** примет вид (рис.56).

И. С помощью кнопки **Polygon Pick**  (полигональный выбор), обычно расположенной слева от графического окна, выделяем всю ферму. В окне **Curve List** появится запись **Curve 1:11**, означающая, что выбраны кривые с **1** по **11**. Нажимаем на кнопку **Apply**. На изображении фермы появятся номера элементов и узлов.

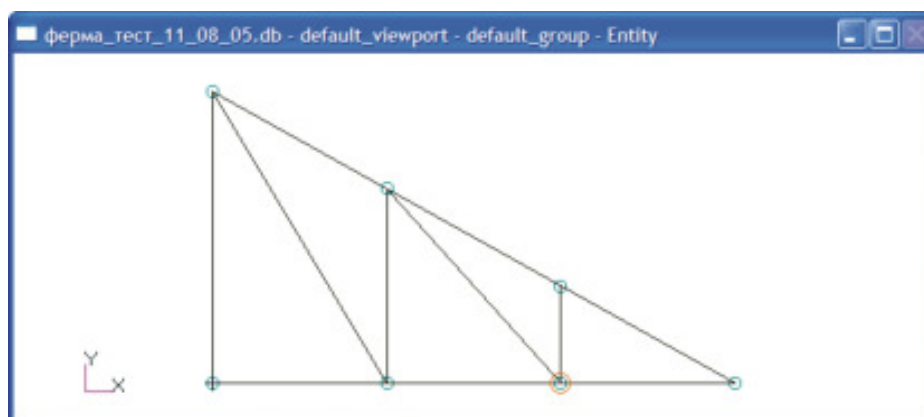


Рис.60

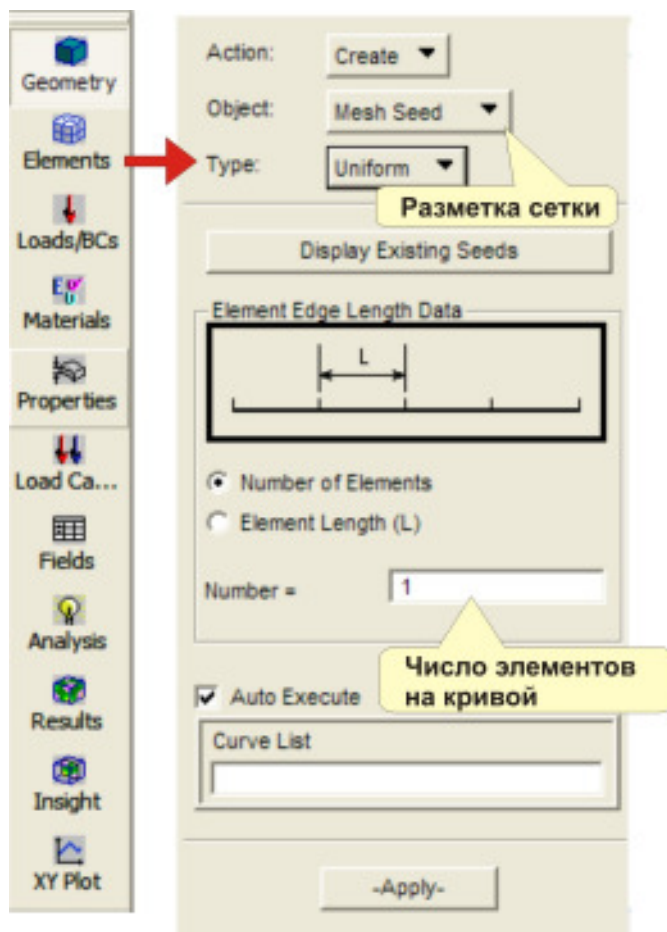


Рис.61

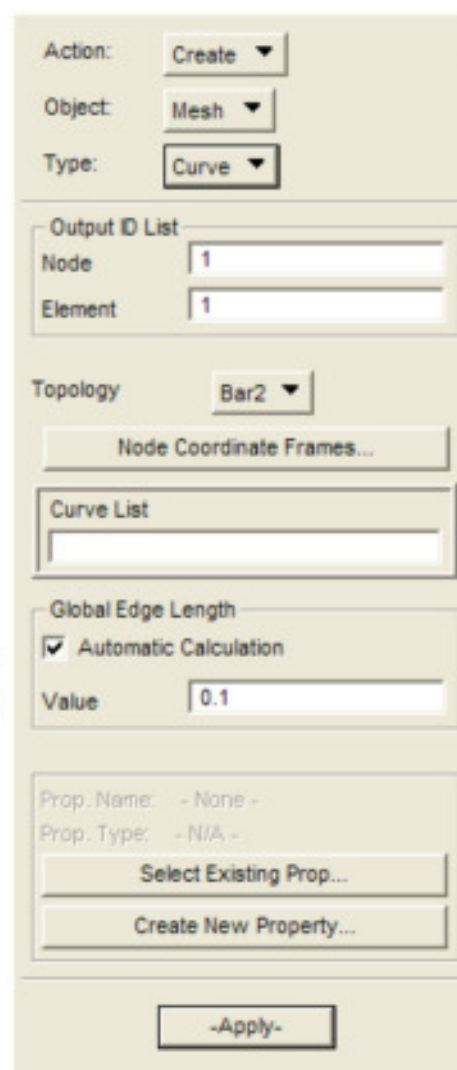


Рис.63

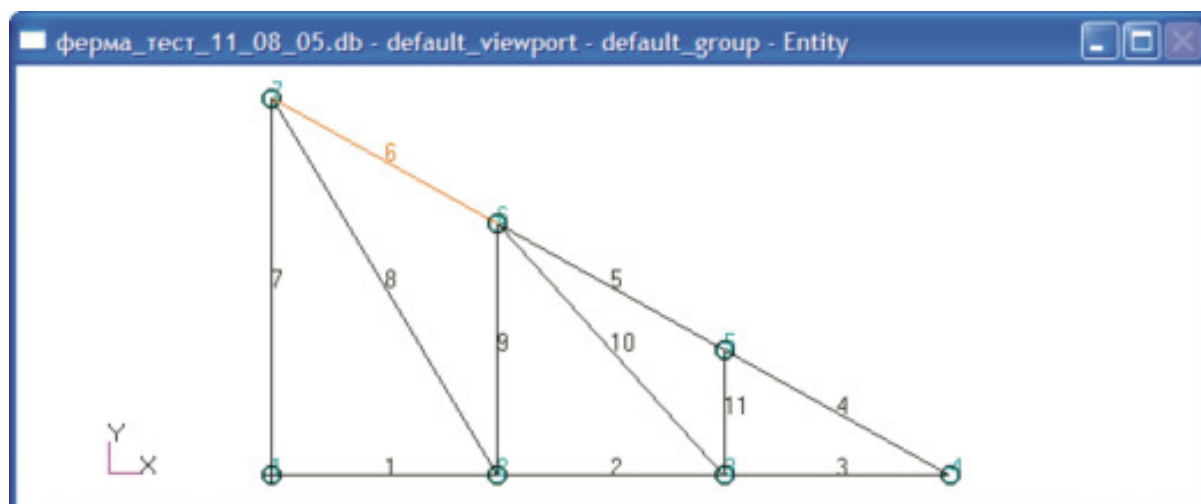


Рис.62

Так как в узлы сходятся несколько стержней, то в каждом геометрическом узле будет находиться несколько конечно-элементных узлов. Так, например, в шестую точку сходятся четыре стержня и поэтому одна геометрическая точка содержит че-

тыре конечно-элементных узла. Для того чтобы удостовериться в этом, активизируем команду **Action►Show**. Панель **Finite Elements** изменит вид и будет выглядеть так, как показано на *рис.64*. Если мы выделим шестой узел, то появится дополнительная панель **Show Node Location Information**, в которой в табличной форме выведена информация об узлах, находящихся в шестой геометрической точке. По умолчанию **MSC.Patran** будет их рассматривать как узлы, относящиеся к разным областям, а потому они не будут деформироваться совместно. При проведении структурного анализа **MSC.Patran** они могут улететь в пространство, а **MSC.Patran** об этом не проинформирует. В результате либо получится неверный результат, либо **MSC.Patran** вообще откажется считать. Поэтому до проведения анализа необходимо выполнить операцию **Equivalence**, находящуюся в форме приложения **Finite Elements**.

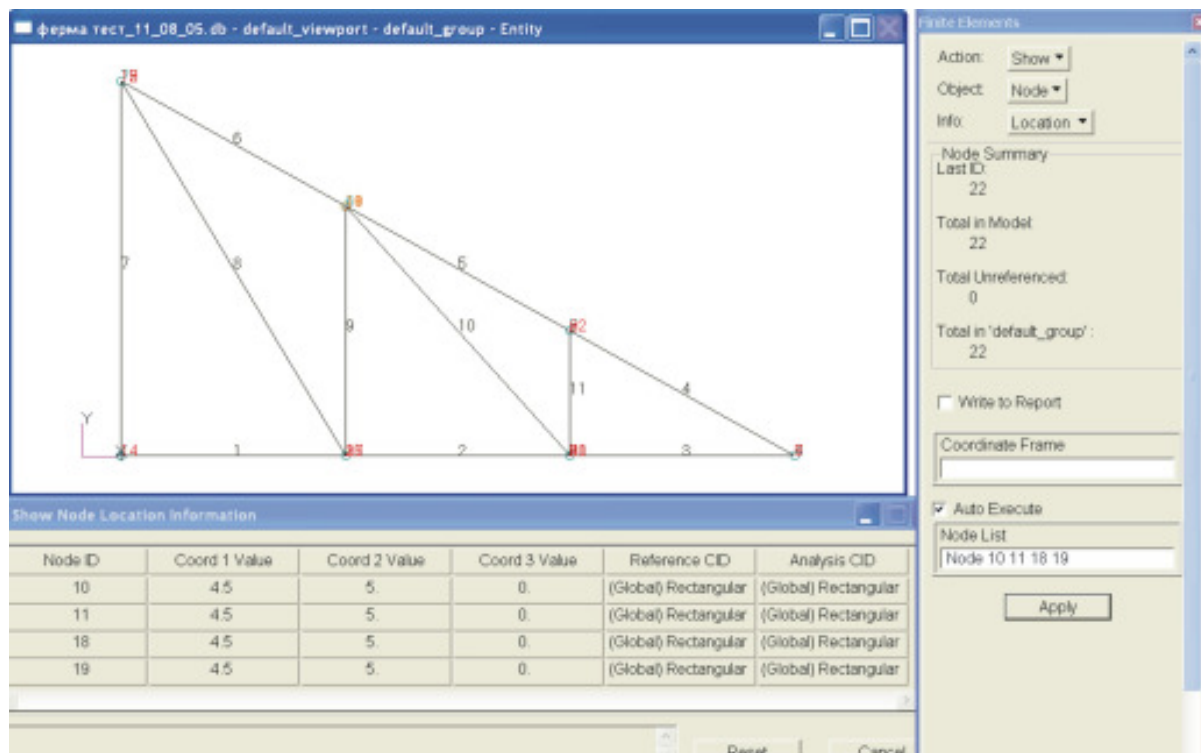



Рис.64

Ж. Активизируем команду **Action►Create►Equivalence**. Панель **Finite Elements** снова изменит свой внешний вид (*рис.65*). Щелчком по кнопке **Apply**. В графическом окне будут отмечены узлы, для которых выполнена операция **Equivalence**, а в информационной панели появится сообщение, о том, что объединено 15 узлов (*рис.65*).

К. Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму прило-

жения **Loads/BCs**, т.е. щелкаем по кнопке . Появляется всплывающая панель **Loads/Boundary Conditions** (*рис.66*). Вначале зададим кинематические граничные условия. Для этого в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** Откроется новая всплывающая панель **Input Data**, в окнах которой задаём граничные условия для крайней нижней левой точки: запрещаем все три поступательных перемещения **u**, **v**, **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**.

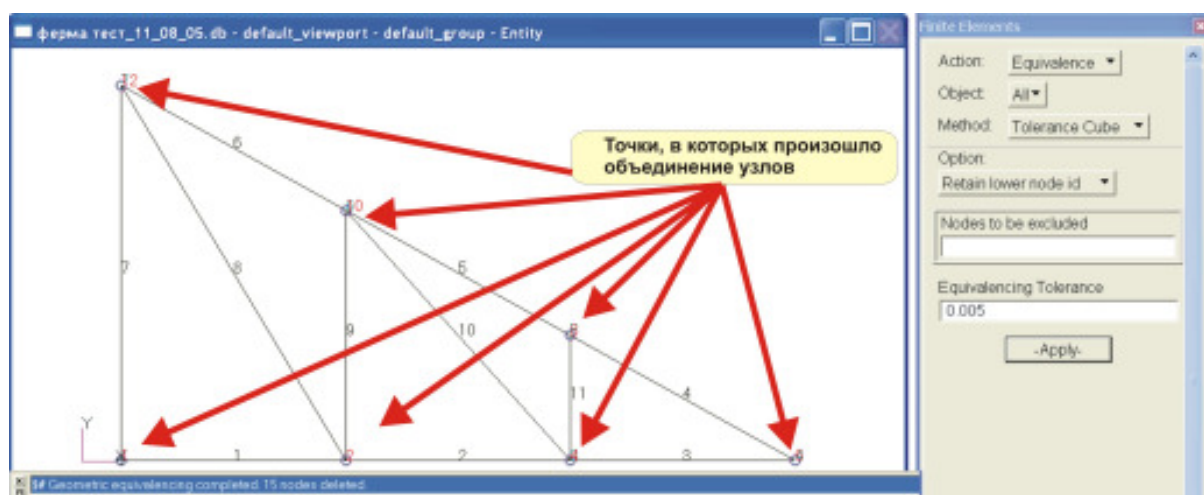


Рис.65

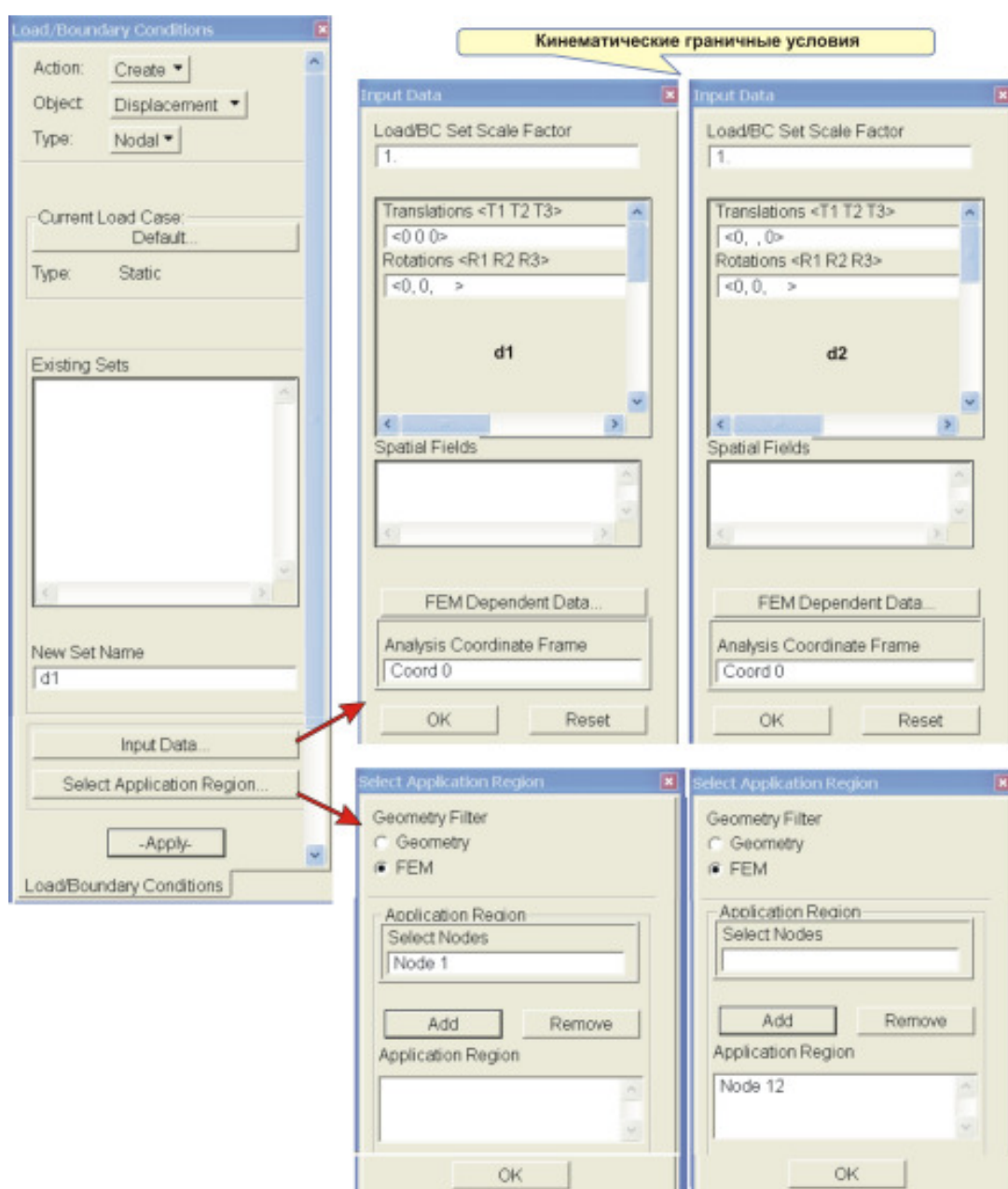


Рис.66

Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне по узлу **1**. В окне «**Select Nodes**» появится информация о том, что выделен этот узел. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется; на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. В графическом окне



появится условное изображение введенной кинематической связи, цифры соответствуют удаленным степеням свободы. Разрешен только поворот относительно оси **z**. Аналогичным образом вводим вторую кинематическую

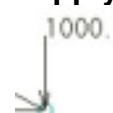


связь **d2** для верхнего крайнего левого узла: запрещены перемещения **u**, **w** и повороты относительно осей **x** и **y**. Для оставшихся узлов потребуем отсутствия перемещений по оси **z**: **w**, и поворотов относительно осей **x** и **y**





(кинематическая связь **d3**:).


Для задания силовых граничных условий активизируем команду **Object►Force**. В окне «**New Set Name**» задаем имя силового условия **f1**. Щелкаем по кнопке **Input Data...** Открывается одноименная панель, в окне которой **Force <F1 F2 F3>** вводим компоненты вектора силы **<0 -1000 0>**, компоненты вектора момента не вводим. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне при нажатой клавише **Shift** по узлам **12** и **7**. В окне «**Select Nodes**» появится информация о том, что выделены эти узлы. Щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется; на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**.



В графическом окне появится условное изображение введенной силы, цифры соответствуют величине силы. Аналогичным образом вводим вторую силу **f2**: **<0 -2000 0>**. Получившаяся конечно-элементная расчетная схема представлена на *рис.67*.

- L.** Открываем форму приложения **Materials**, т.е. щелкаем по кнопке . Вид одноименной панели приведен на *рис.68*, на которой задаём имя материала **st** и, щелкнув левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**, его физико-механические характеристики. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options**, на панели **Materials** - по кнопке **Apply**.

- M.** Открываем форму приложения **Properties**, т.е. щелкаем по кнопке . На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **1D**, тип элементов – **ROD** (*рис.69*). В окне **Property Set Name** задаём имя **fem** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели

задаём имя материала: щелкаем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **st**. Щелчок по имени материала приводит к появлению записи: **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. В окне **Area** задаём площадь поперечного сечения стержня: **0.08 м²**. Закрываем панели **Select Material** и **Input Properties**, щелкая по клавишам **Cancel** и **OK**.

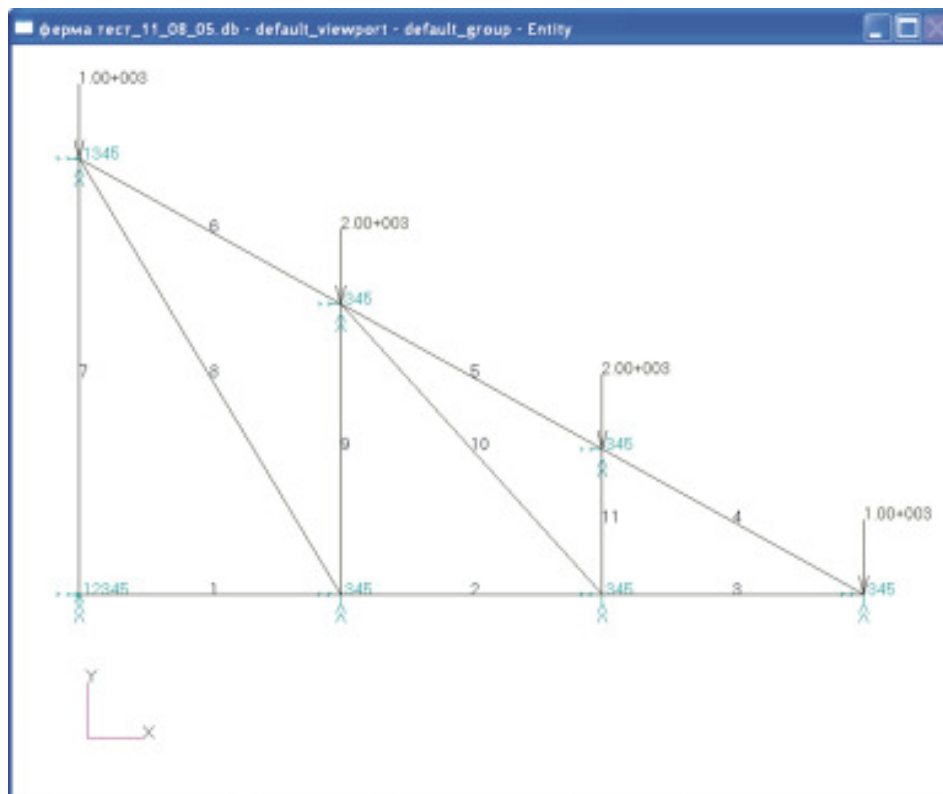


Рис.67

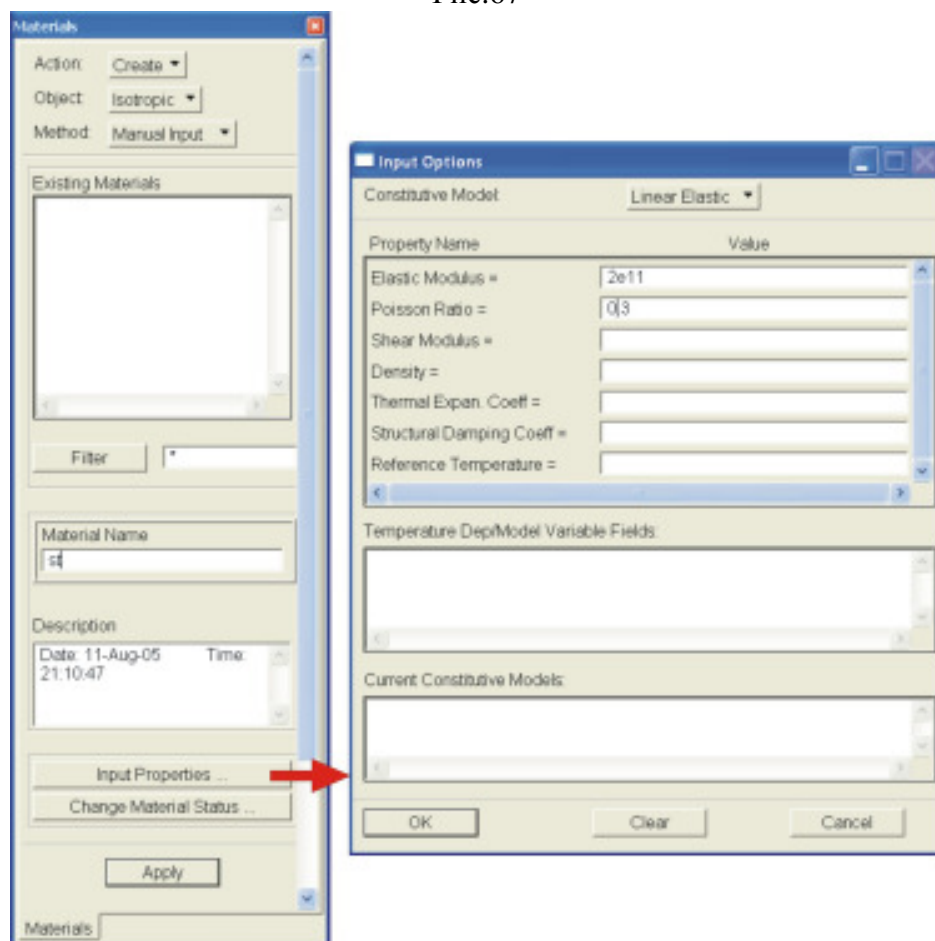


Рис.68

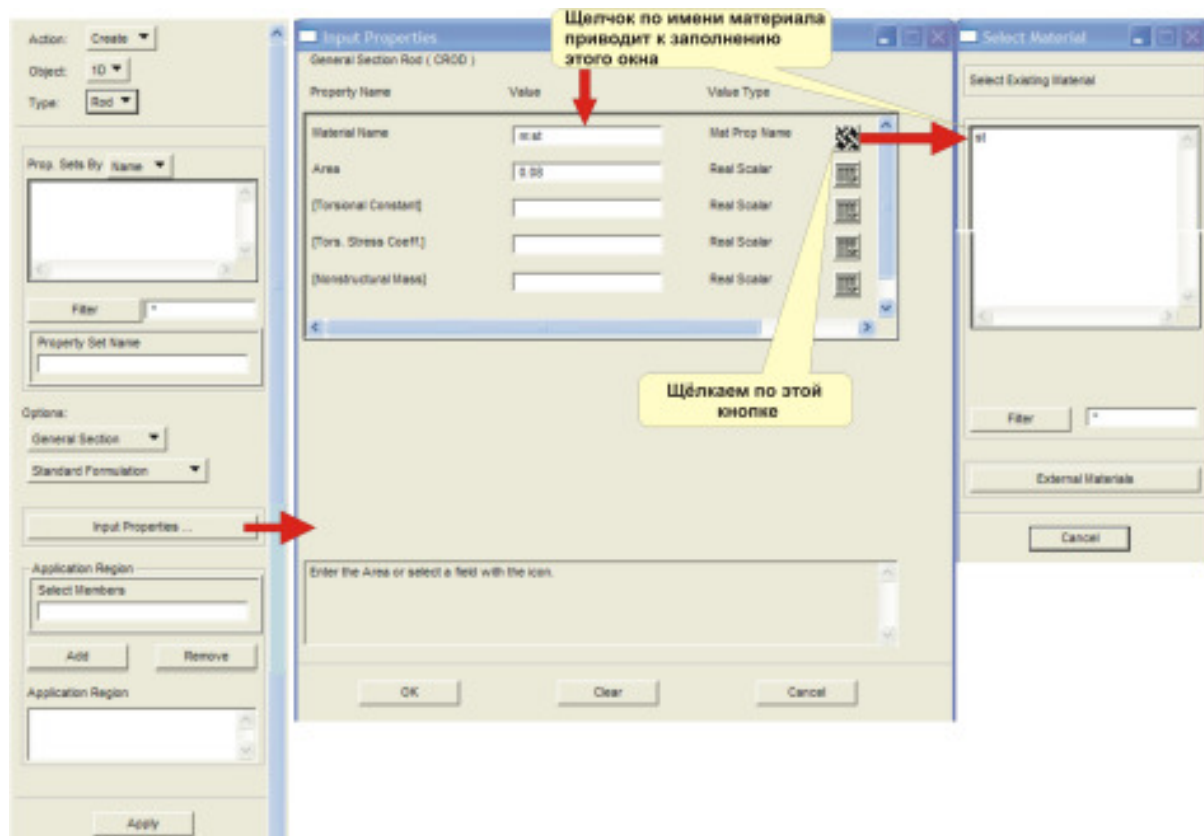

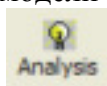



Рис.69

Появляется панель **Element Properties**, на которой в окне **Select Members** задаём имена элементов, которым присваиваются установленные нами свойства. Для задания имен элементов необходимо выделить их в графическом окне (это можно сделать либо непосредственно при нажатой левой клавише мыши, либо с помощью инструмента **Полигональный выбор** (кнопка )). В окне **Select Members** появится сообщение: **Curve 1:11**. Последовательно щелкаем по клавишам **Add** (в окне **Application Region** появится запись: **Curve 1:11**) и **Apply**.

N. Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**, откры-



ваемом щелчком по кнопке . Внешний вид панели **Analysis** приведен на *рис.70*. Раздел **Action** зависит от принятой расчётной программы. При анализе выбирается только **Analysis**. **Object** предназначен для указания, какая часть модели включена в анализ – целая (**Entire Model**) или установленная группа элементов (**Current Group**). В большинстве случаев выбирается целая модель. **Methods** – в этой опции указывается, насколько полно выполняться анализ. Можно указать: **Full Run** (полный анализ), **Check Run** (проверочный запуск), **Analysis Deck** (проверка текста программы), **Model Only** (проверка модели). При выборе **Full Run** выполняется требуемая трансляция и расчётная программа запускается для решения задачи. Для того чтобы изменить такие параметры **Subcase** (подблока), как **Output Request** (запрос на вывод), необходимо войти в форму **Subcase Create**, выбрать **Subcase** и принять соответствующую форму вывода, т.е. сделать изменение в **Output Request**. Для того чтобы вывести информацию об усилиях в стержнях фермы, щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команду **Element Force**. Затем последовательно нажимаем кнопки **OK**, **Apply**, **Apply**, чтобы запустить программу. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran** (*рис.71*).

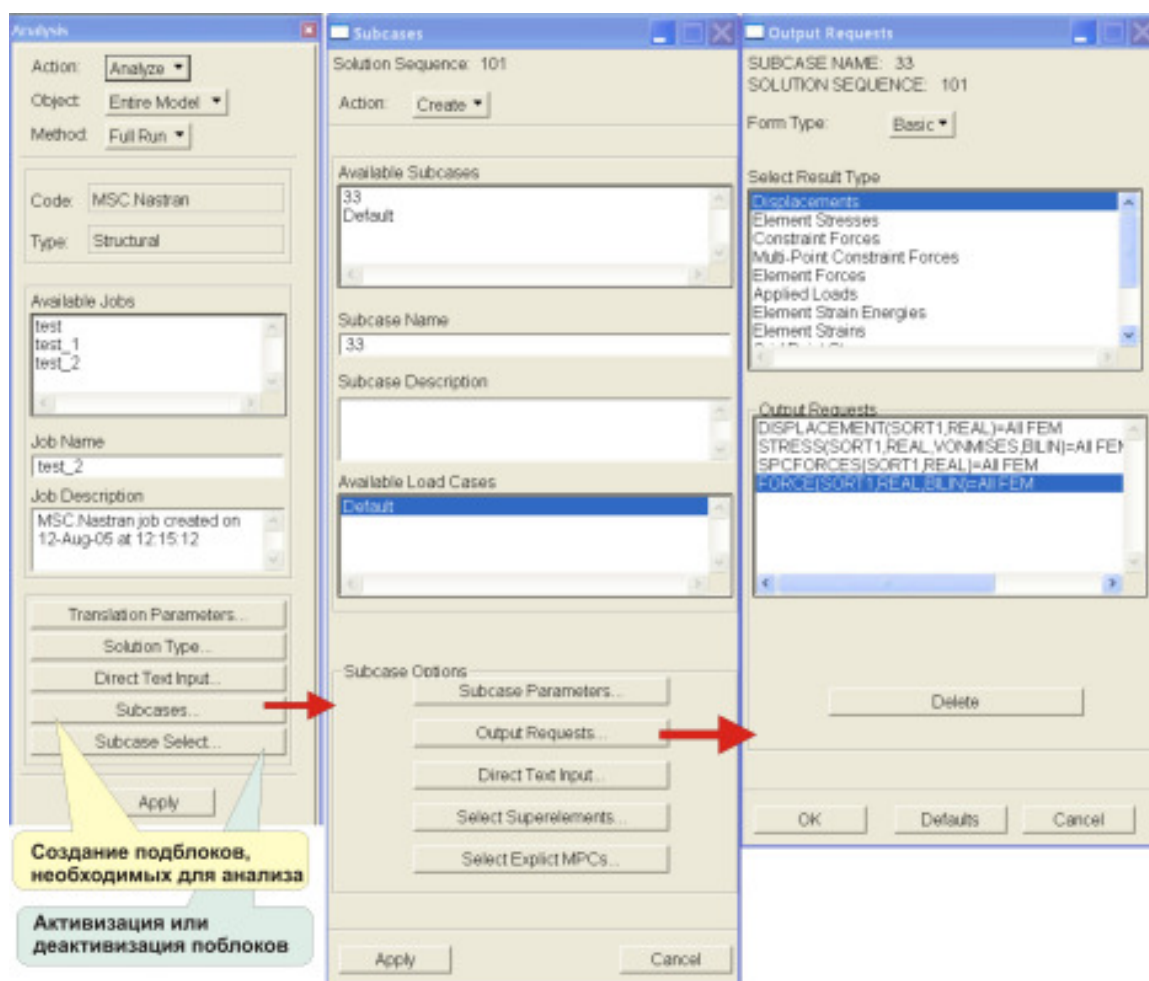


Рис.70

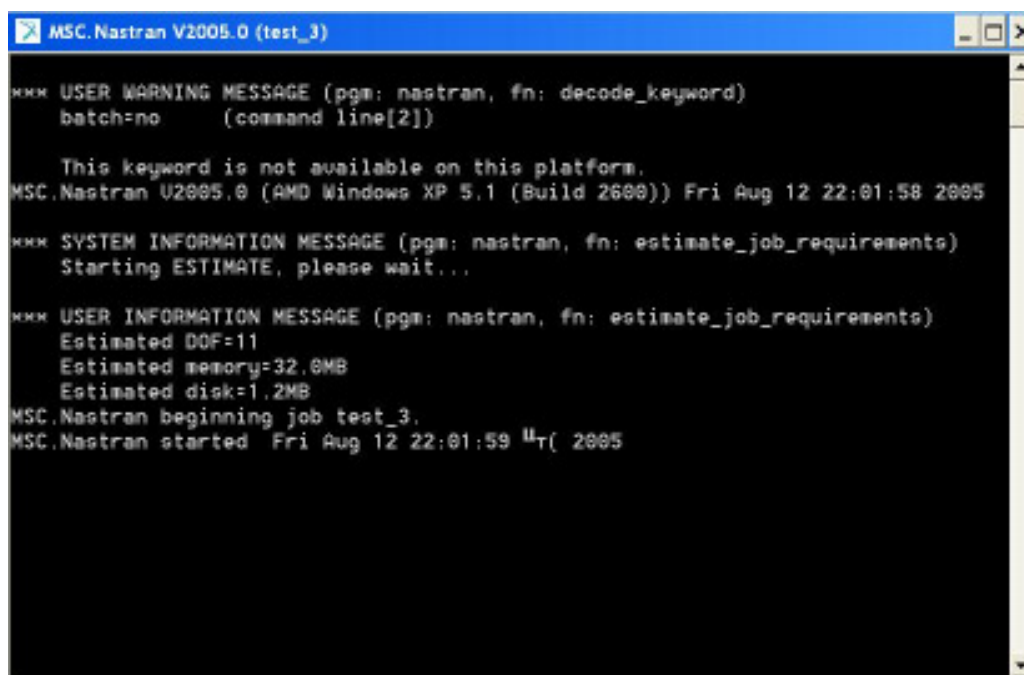




Рис.71

- О. После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной

строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.

Р. Приложение **Results** открывается нажатием на клавишу . В системе **MSC.Patran** панель **Results** (рис.72) позволяет пользователю управлять мощными графическими возможностями для изображения величин результатов различными способами. Результаты могут быть масштабированы, скомбинированы, профильтрованы, вырезаны или удалены. Многие опции, использованные при создании изображений, запускаются с помощью кнопок:

 - **Select Results** позволяет выбрать какие результаты будут изображаться (скалярные, векторные или тензорные) и какие компоненты будут использованы для изображения векторных и тензорных данных;

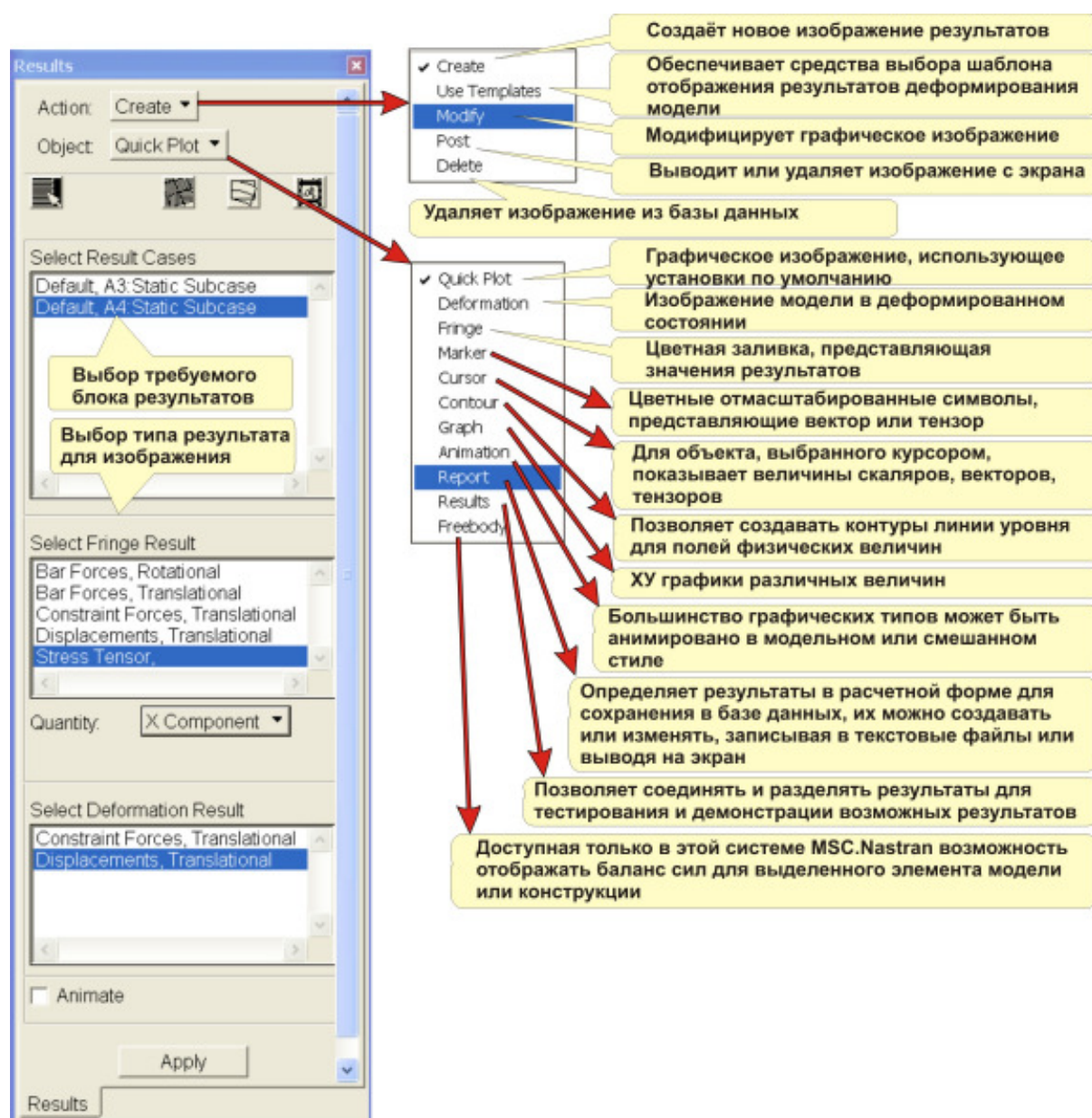



Рис.72

 - **Fringe Attributes** позволяет изменить параметры изображения: ширину линий, стиль, масштабный фактор;



- **Deform Attributes** позволяет управлять параметрами изображения деформированной модели;



- **Animation Options** позволяет управлять атрибутами анимации: количеством кадров, методами межкадровой интерполяции.

Выберем:

Action►Create;

Object►Fringe;

вариант расчета: **A4: Static Subcase,**

тип результата: **Stress Tensor,**
компоненту тензора: **X Component,**

результат деформационного расчета – отобразить раскраску на деформированной поверхности.



Нажмем кнопку **Plot Options**. Действие кнопки зависит от метода набора опций, в данном случае она контролирует, в какой системе координат отображать компоненты векторов и тензоров, как осреднять и экстраполировать результаты. Панель **Results** примет вид, приведенный на *рис.73*; на ней из списка **Domain** выберем **None** и нажмем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение деформированной фермы с раскрашенными стержнями (цвет раскраски соответствует величине усилия в стержне фермы; таблица соответствий цветов и усилий приведена в графическом окне справа) (*рис.74*). Такое представление результатов даёт качественную оценку об усилиях в стержнях. **MSC.Patran** позволяет получить точную информацию об усилиях в стержнях фермы.

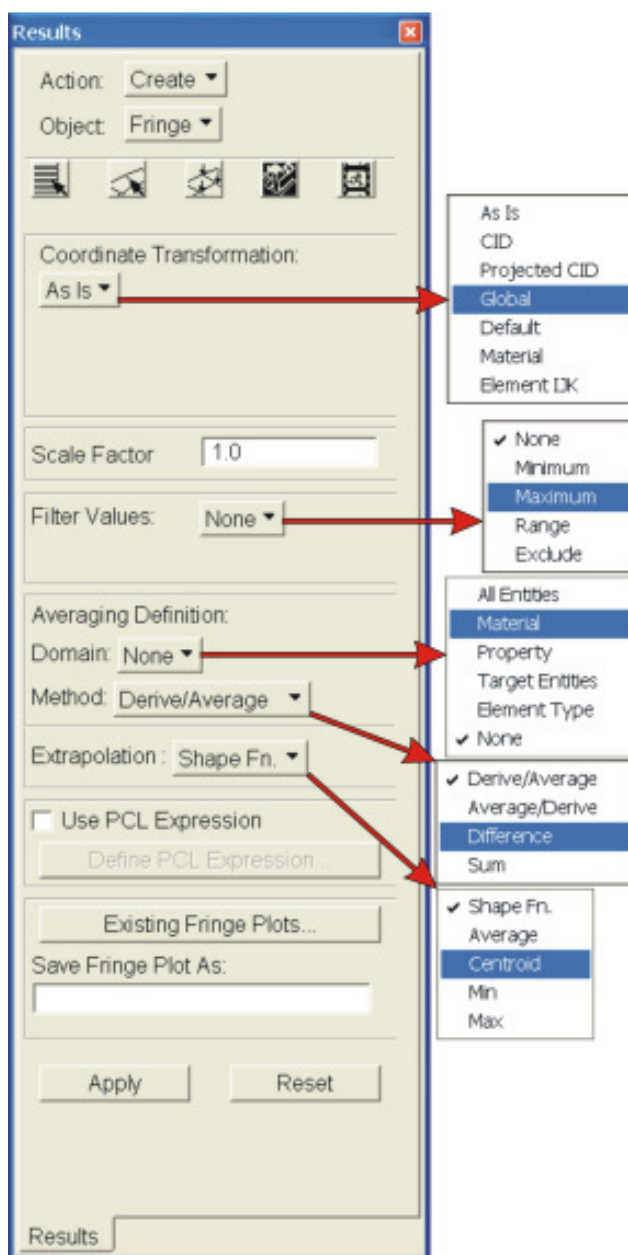


Рис.73

Выберем: **Action►Create; Object►Cursor;**

вариант расчета: **A4: Static Subcase,**

тип результата: **Bar Forces, Translational ,**

Quantity: **X Component,**

Target Entity: **Element.**

Нажмем кнопку **Apply**. Появится новая панель **Cursor Data** (*рис.75*). Щелкая левой клавишей мыши по стержням, получим таблицу значений усилий в стержнях фермы. В графическом окне у элементов фермы так же будут проставлены усилия (*рис.76*).

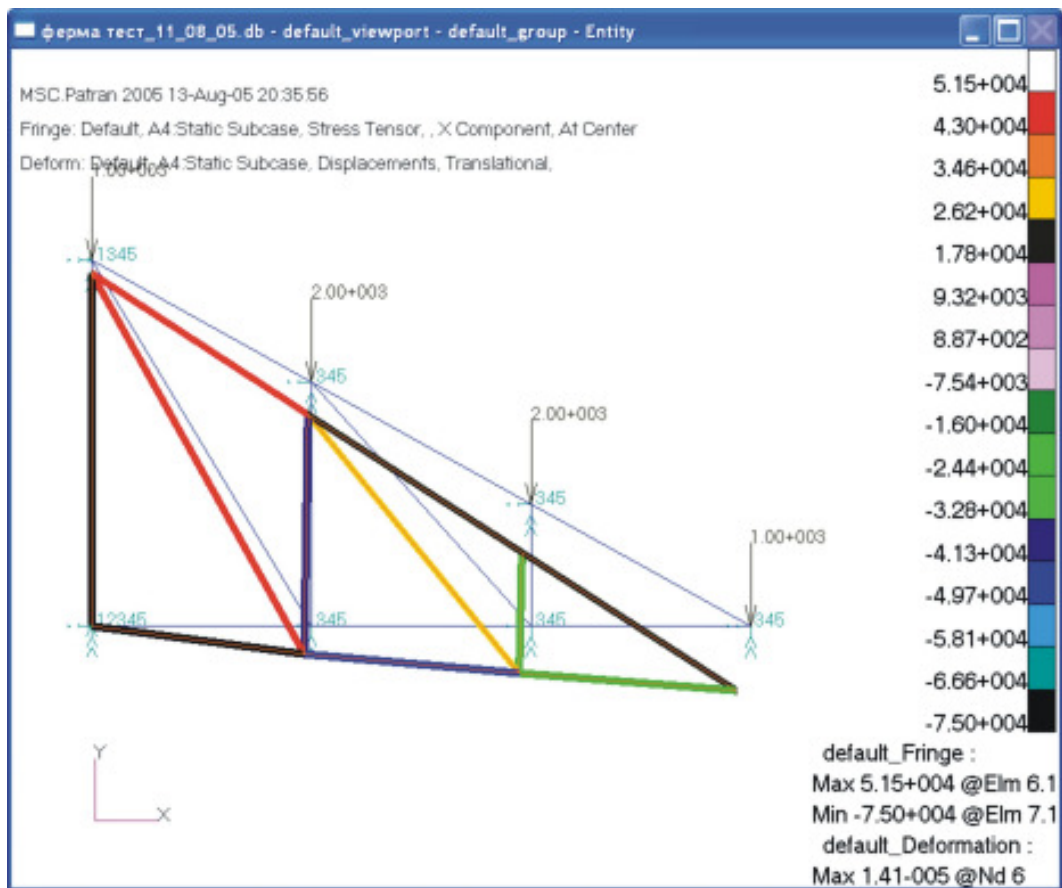


Рис.74

Cursor Data

Summary

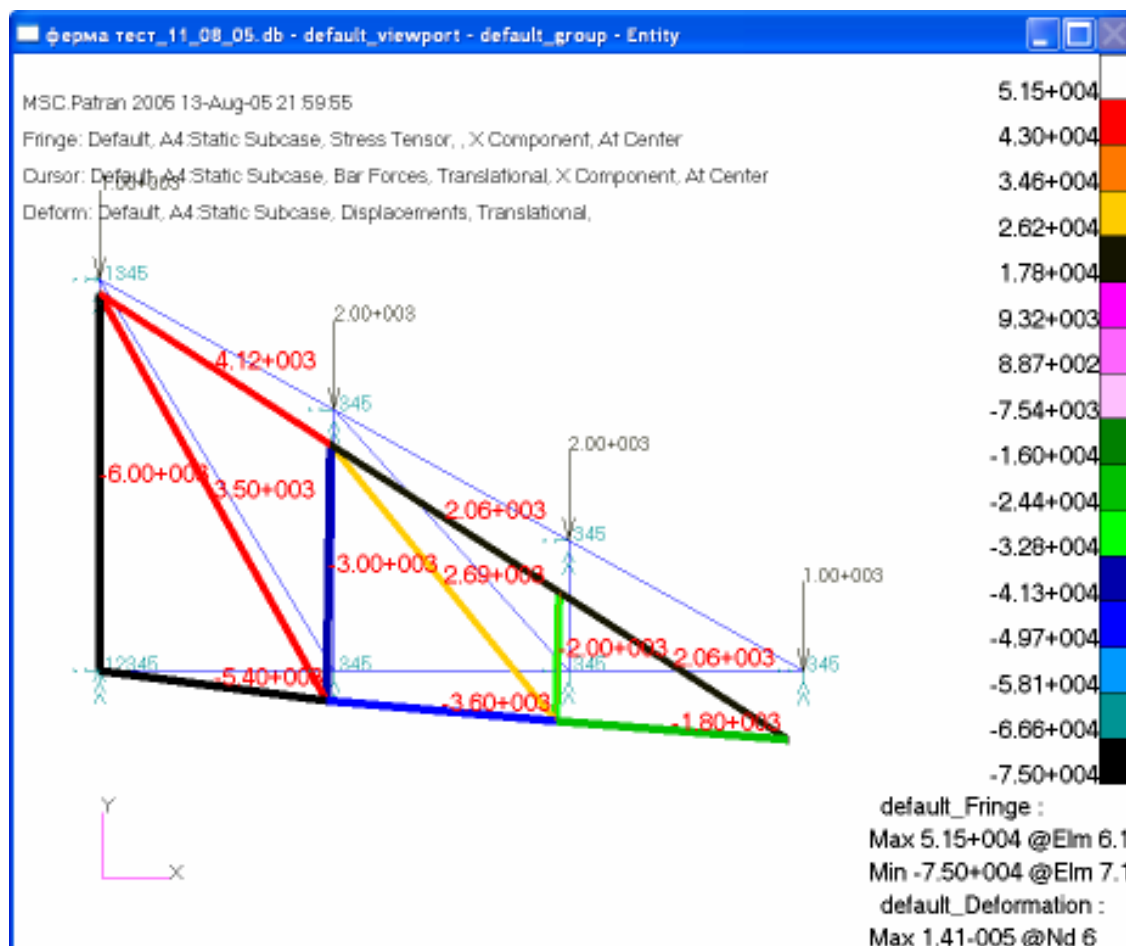
Cursor Name: default_Cursor
MSC.Patran 2005
Analysis Code: MSC.Nastran
Load Case: Default, A4:Static Subcase

Select Elements Elm 11

Entity ID	X Component
1	-5400.
2	-3600.
3	-1800.
4	2059.1
5	2059.1
6	4118.3
7	-6000.

Write Report
Report Setup...
Reset Cancel

Рис.75



2.4.4.2. Алгоритм создания конечно-элементной модели фермы с помощью многоточечных связей (MPC)

В **MSC.Patran** имеется возможность создания расчетной модели ферм с использованием элемента **CROD** и многоточечных связей **Multi Point Constraint (MPC)**.

Продemonстрируем эту возможность на примере определения опорных реакций и усилий в стержнях раскосной фермы, изображенной на *рис.77*.⁹

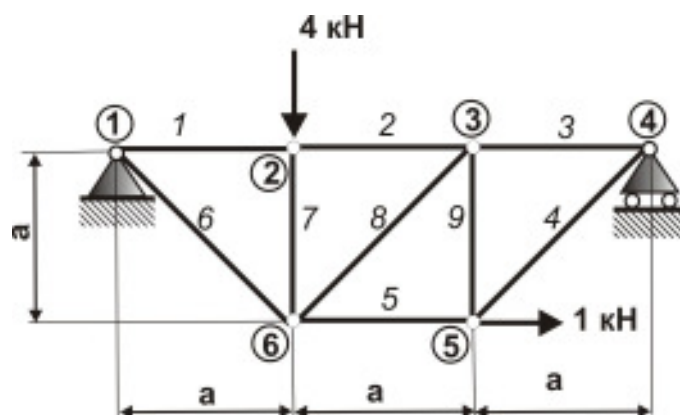


Рис.77

⁹ Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. – 448 с.

В этой задаче нас интересует процесс создания шарниров с помощью многоугольных связей **MPC**, используемых для описания линейных зависимостей между двумя или более степенями свободы, которые выражаются в форме

$$\sum_i R_i U_i = 0,$$

где U_i – какая-либо степень свободы в узле или в точке;

R_i – задаваемый пользователем коэффициент.

Чтобы не путать в дальнейшем узлы фермы с узлами конечно-элементной сетки, первые будем называть шарнирами. Таких шарниров у нас шесть.

Алгоритм создания конечно-элементной модели

1. Открываем приложение **Geometry** (рис.57).
2. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action►Create
Object►Point
Method►XYZ

и вводим координаты шарниров. После завершения этой операции меняем опцию **Object►Point** на **Object►Curve** и соединяем построенные точки линиями.

3. Открываем приложение **Elements** и устанавливаем опцию **Object►Mesh Seed**, в поле Number задаем число элементов на кривой: **1**. Активируем команду **Object►Mesh**. Выбираем все элементы фермы. В окне **Curve List** появится запись **Curve 1:9**. Далее нажимаем на кнопку **Apply**. На изображении фермы появятся номера элементов и узлов (рис.78).

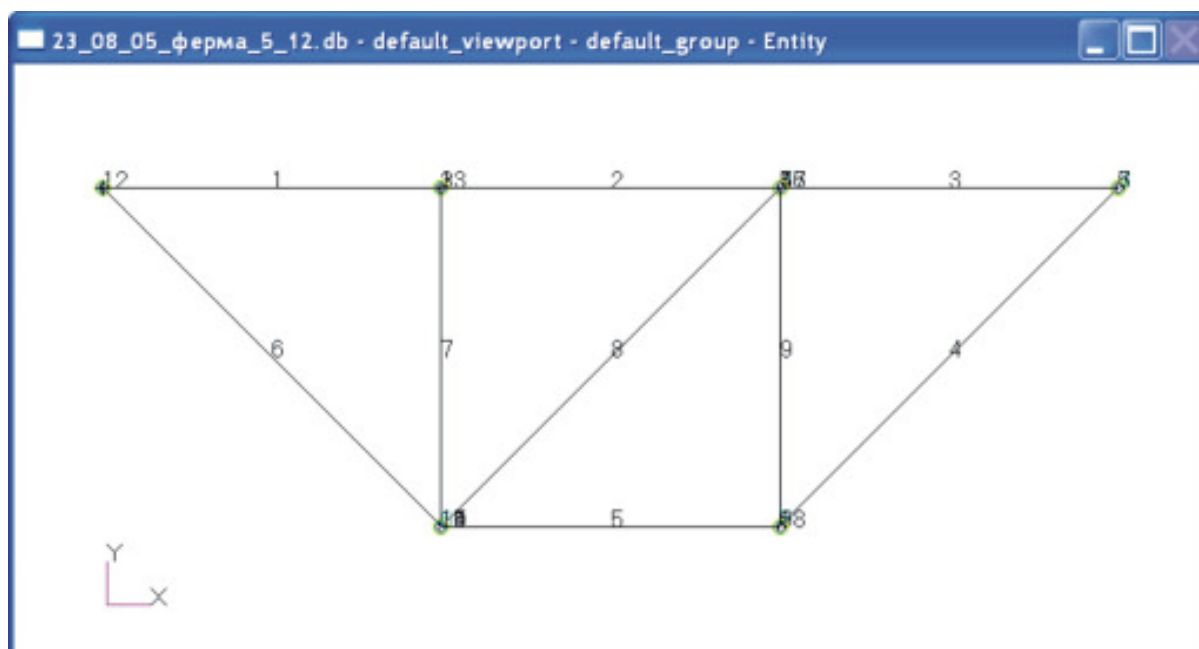


Рис.78

Так как в шарнирах фермы сходятся несколько стержней, то в каждом геометрическом узле находятся несколько конечно-элементных узлов (рис.79).

Шарнир 1					
Show Node Location Information					
Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
1	0.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
12	0.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Шарнир 2					
Show Node Location Information					
Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
2	1.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
3	1.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
13	1.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Шарнир 3					
Show Node Location Information					
Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
4	2.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
5	2.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
16	2.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
17	2.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Шарнир 4					
Show Node Location Information					
Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
6	3.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
7	3.	0.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Шарнир 5					
Show Node Location Information					
Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
8	2.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
9	2.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
18	2.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Шарнир 6					
Show Node Location Information					
Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
10	1.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
11	1.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
14	1.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
15	1.	-1.	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Рис.79

Выполним команду **Equivalence**, находящуюся в форме приложения **Finite Elements** для **1** и **4** шарниров, а узлы, совпадающие с шарнирами **2**, **3**, **5**, **6**, исключим из этой операции (номера этих узлов должны быть указаны в окне **Nodes to be excluded**). В результате выполнения команды в шарнирах **1** и **4** осталось по одному узлу (рис.80).

- Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
Action►Create
Object►Displacement
Type►Nodal

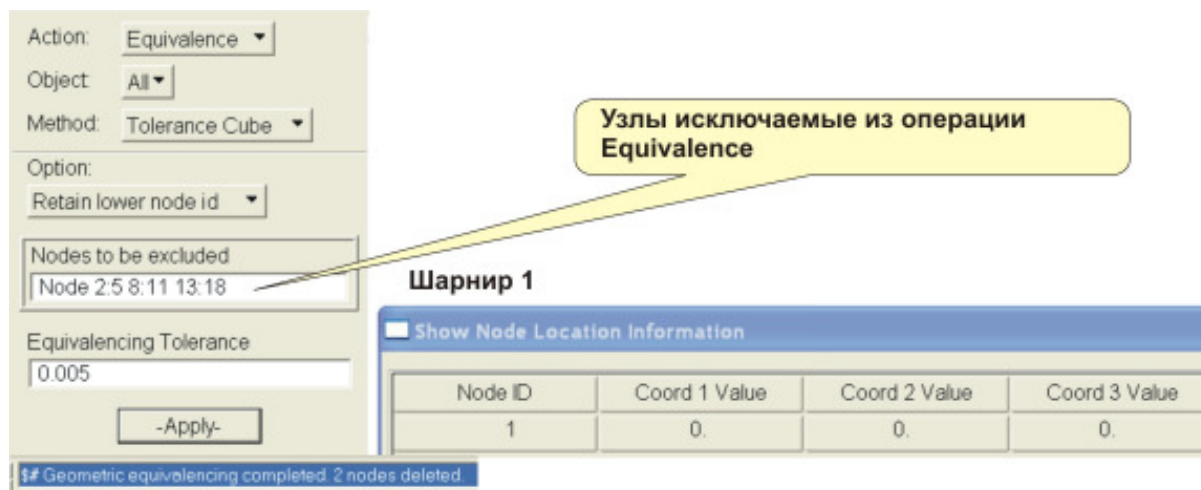


Рис.80

и в окне «**New Set Name**» задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...**. В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия для крайней нижней левой точки. Запрещаем все три поступательных перемещения u , v , w и два вращательных перемещения относительно осей x и y . Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне по узлу **1**. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, а на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенной кинематической связи



. Аналогичным образом вводим вторую кинематическую

связь **d2** для правой шарнирно подвижной опоры : запрещены перемещения v , w и повороты относительно осей x и y . Для оставшихся узлов потребуем отсутствия перемещений по оси z : w и поворотов относительно осей x и y (кинематическая связь **d3**:).



Для задания силовых граничных условий активизируем команду **Object►Force**. В окне **New Set Name** задаем имя силового условия **f1**. Щелкаем по кнопке **Input Data...**. Открывается одноименная панель, в окне которой **Force <F1 F2 F3>** вводим компоненты вектора силы **<0 -4000 0>**; компоненты вектора момента не вводим. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне по шарниру **2**. Так как в этом шарнире находятся три узла, то появится окно выбора **Selection Choices** (рис.81).

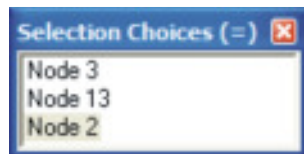


Рис.81

Выберем узел с наименьшим номером. На панели **Select Application Region** щелкаем по кнопке **OK**, на панели **Loads/Boundary Conditions** - по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенной силы. Аналогичным образом вводим вторую силу **f2**: **<1000 0 0>**. Получившаяся конечно-элементная расчетная схема представлена на рис.82.



5. Открываем форму приложения **Materials**, т.е. щелкаем по кнопке **Materials**. Вид одноименной панели приведен на рис.68, на которой задаём имя материала **st** и, щелкнув левой клавишей мыши по кнопке «**Input Properties**», его физико-

механические характеристики. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options**, на панели **Materials** щелкаем по кнопке **Apply**.

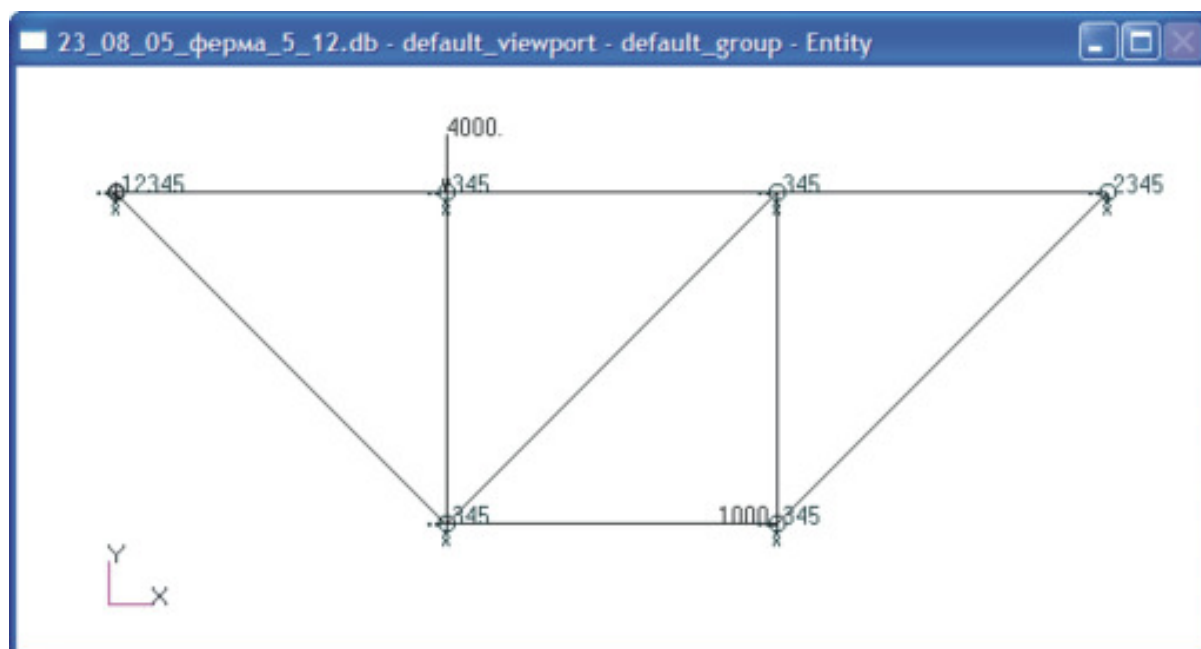



Рис.82

6. Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **1D**, тип элементов – **ROD** (рис.69). В окне **Property Set Name** задаём имя **sterzhen** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала, щёлкая по кнопке . В окне **Area** задаём произвольную площадь поперечного сечения стержня: 0.08 м^2 (этот параметр для нашего расчета не играет никакой роли). Щелкаем по клавишам **Cancel** и **OK**. Снова появляется панель **Element Properties**, на которой в окне **Select Members** задаём имена элементов (**Curve 1:9**), которым присваиваются установленные нами свойства. Последовательно щелкаем по клавишам **Add** (в окне **Application Region** появится запись **Curve 1:9**) и **Apply**.
7. Создаём **MPC** для шарниров **2**, **3**, **5**, **6**. Открываем приложение **Elements** и устанавливаем опции
Action ► Create
Object ► MPC
Type ► Explicit.

Щелкаем по клавише **Define Terms**. Появится одноименная панель (рис.83), на которой таблицы **Dependent Terms** (зависимые от условий задачи величины, может быть задана только одна величина), **Independent Terms** (независимые величины, могут быть заданы несколько величин) и окно **Node List** пока пусты, опция **Create Dependent** – активизирована. В окне **DOFs** указываем, на какие степени свободы будут наложены связи (в нашем случае при нажатой клавише **Shift** щелкаем левой клавишей мыши по **UX UY**). Для шарнира **2** в окно **Node List** вводим **Node 2** и щелкаем по клавише **Apply**. Опция **Create Dependent** автоматически закрывается, а опция **Create Independent** становится активной. В окно **Node List** вводим **Node 3** и щелкаем по клавишам **Apply** на панелях **Define Terms** и **Finite Elements**. На панели в окне **MPC ID** цифра **1** сменится на цифру **2**, на панели **Define Terms** таблицы **Dependent Terms** и **Independent Terms** снова станут пустыми, готовыми для ввода новой информации, в окне **Node List** останется за-

пись **Node 3**. Щелкаем по клавише **Apply**. Теперь узел **Node 3** стал зависимым. В окне **Node List** вводим **Node 13** и щелкаем по клавишам **Apply**, узел **13** станет зависимым.

Итак, для создания шарнира надо последовательно перебирать узлы, совпадающие с данным шарниром в соответствии с диаграммами, приведенными на *рис.83*.

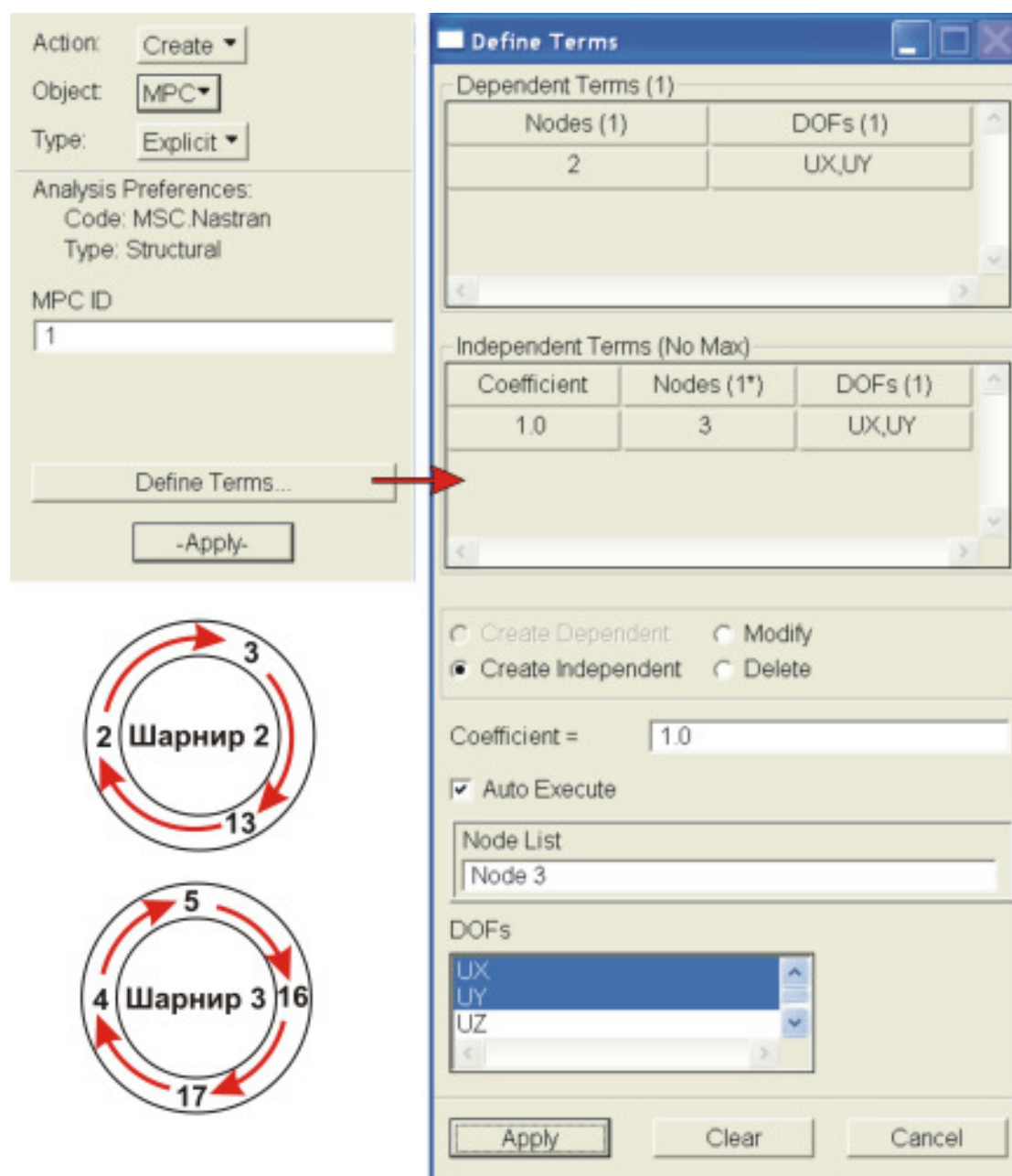


Рис.83

8. Расчет конечно-элементной модели, как обычно, проводится в приложения **Analysis**. Для того чтобы вывести информацию об усилиях в стержнях фермы, щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команду **Element Force**. Затем последовательно нажимаем кнопки **Cancel**, **Apply**, **Apply**, чтобы запустить программу. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran** (*рис.71*).
9. После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, то в информационной

строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.

10. Открываем приложение **Results**. Выберем:

Action►Create;


Object►Fringe;

вариант расчета: **A1: Static Subcase,**

тип результата: **Bar Forces Translational,**

Quantity: **X Component,**

результат деформационного расчета – отобразить раскраску на деформированной поверхности.

Нажмем кнопку  **Plot Options**, из списка **Domain** выберем **None** и нажмем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение деформированной фермы с раскрашенными стержнями (цвет раскраски соответствует величине усилия в стержне фермы; таблица соответствий цветов и усилий приведена в графическом окне справа) (рис.84).

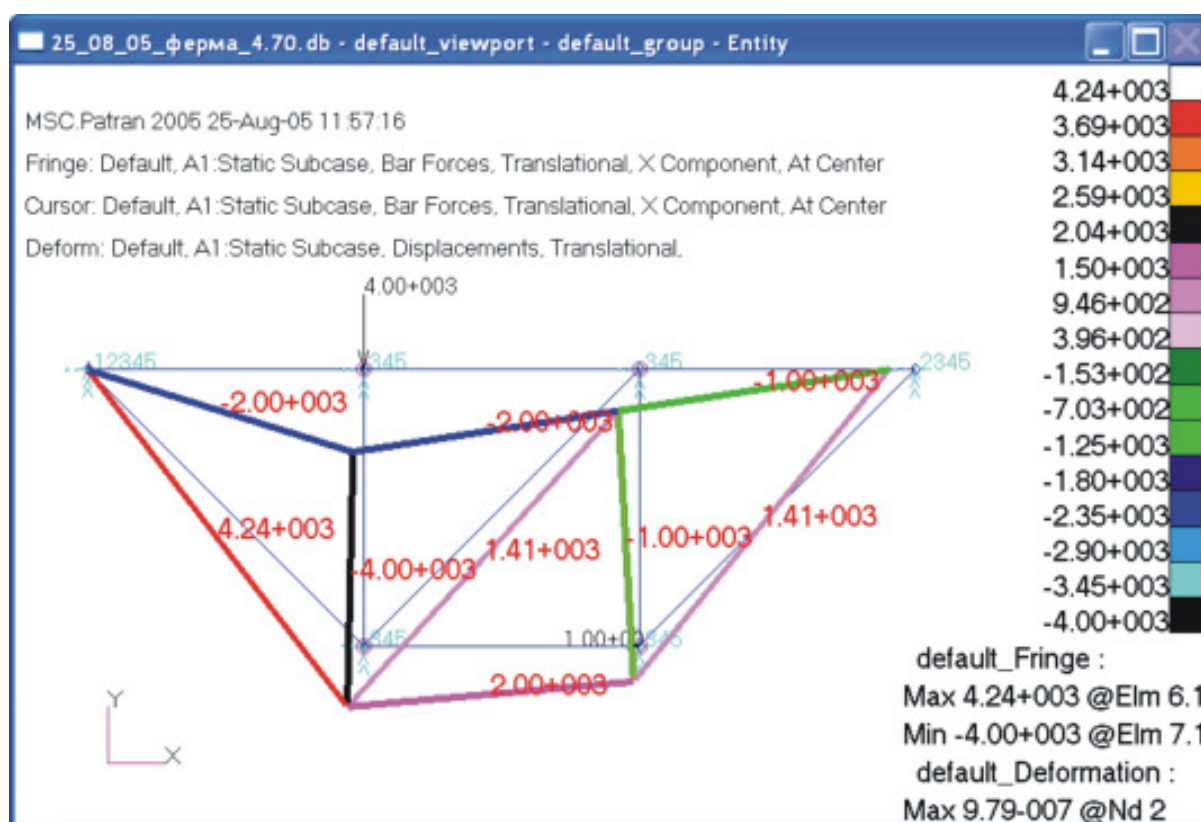


Рис.84

2.4.4.3. Алгоритм определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балок

В качестве примера рассмотрим алгоритм определения внутренних силовых факторов с использованием элемента **CBAR** в балке, изображенной на рис.3.

Алгоритм создания конечно-элементной модели балки

A. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.

B. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action►Create

Object►Point
Method►XYZ.




- C. В поле **Point Coordinates List** после каждого ввода координат точек границ участков балки нажимаем клавишу **Apply**. Для того чтобы контролировать положения введенных точек, активизируем кнопку  «Положение точек». На *рис.85* приведен вид графического окна после выполнения вышеописанных операций.



Рис.85

- D. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**. Панель **Geometry** примет вид, изображенный на *рис.59*.
- E. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам. Для визуализации выполняемых действий нажмем на кнопку . В результате этого действия на расчетной модели балки будут проставлены номера узлов и элементов (*рис.86*).
- F. Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели.
- G. Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели балки. В поле **Number** задаем число элементов на кривой (в нашем случае для участков 1 и 4 - **10**; для участков 2 и 3 - **5**; для участка 5 - **15**) (*рис.87*).
- H. Переходим к созданию сетки. Активируем команду **Object►Mesh**. Панель **Finite Elements** примет вид показанный на *рис.63*.
- I. С помощью кнопки **Polygon Pick**  (полигональный выбор), обычно расположенной слева от графического окна, выделяем всю балку (тот же эффект можно получить выделив балку прямоугольником при нажатой левой клавише мыши). В окне **Curve List** появится запись **Curve 1:5**, означающая, что выбраны кривые с **1** по **5**. Далее нажимаем на кнопку **Apply**. На изображении фермы появятся номера элементов и узлов.

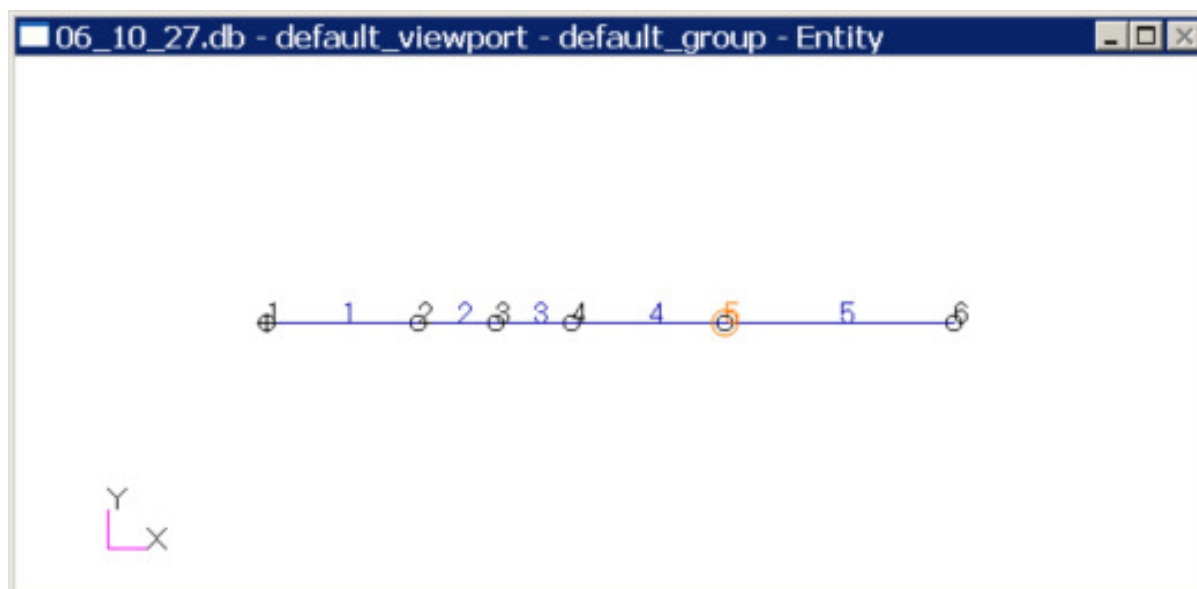


Рис.86

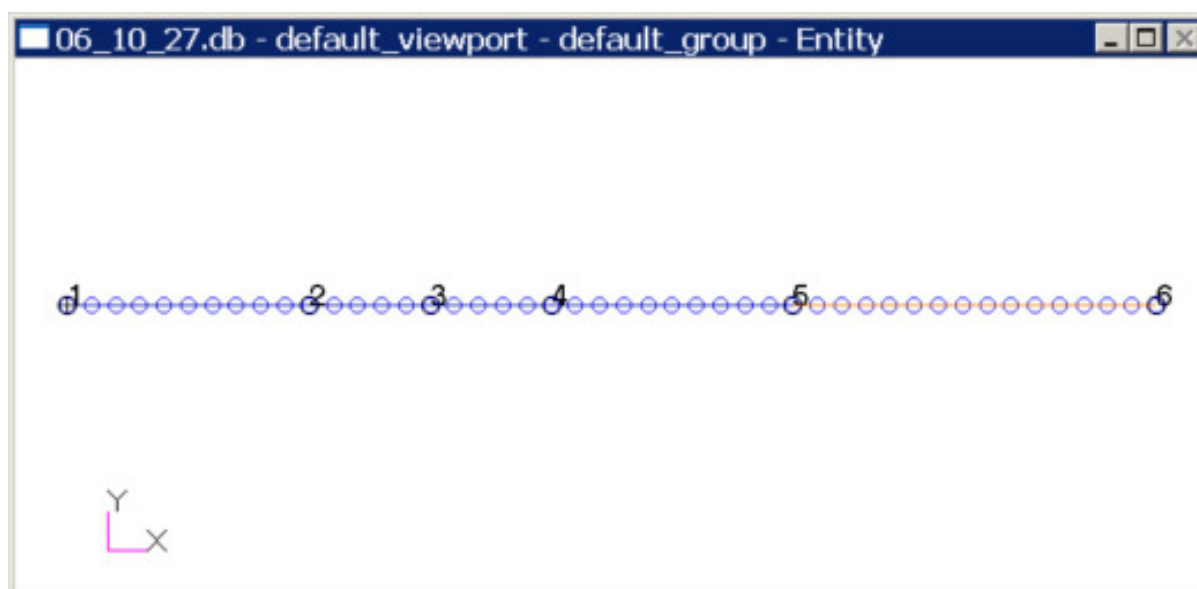
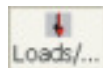


Рис.87

Ж. Активируем команду **Action►Create► Equivalence**. Панель **Finite Elements** снова изменит свой внешний вид (рис.65). Щелчком по кнопке **Apply**. В графическом окне будут отмечены узлы, для которых выполнена операция **Equivalence**, а в информационной панели появится сообщение о том, что объединено 4 узла (рис.88).

К. Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму при-



ложения **Loads/BCs**, т.е. щелкаем по кнопке **Loads/...**. Появится всплывающая панель **Loads/Boundary Conditions** (рис.66). Вначале зададим кинематические граничные условия. Для этого в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** Откроется новая всплывающая панель **Input Data**, в окнах которой задаём граничные условия. Для шарнирно-подвижной опоры **A**: запрещаем поступательные перемещения v , w и два вращательных перемещения относительно осей x и y ; для шарнирно неподвижной опоры **B** запрещаем поступательные перемещения u , v , w и два вращательных перемещения относительно осей x и y . На расчетной

модели балки в первом случае у опоры **A** появится изображение опорной связи с цифрами **2345**, а во втором случае (у опоры **B**) - изображение опорной связи с цифрами **12345** (рис.89).

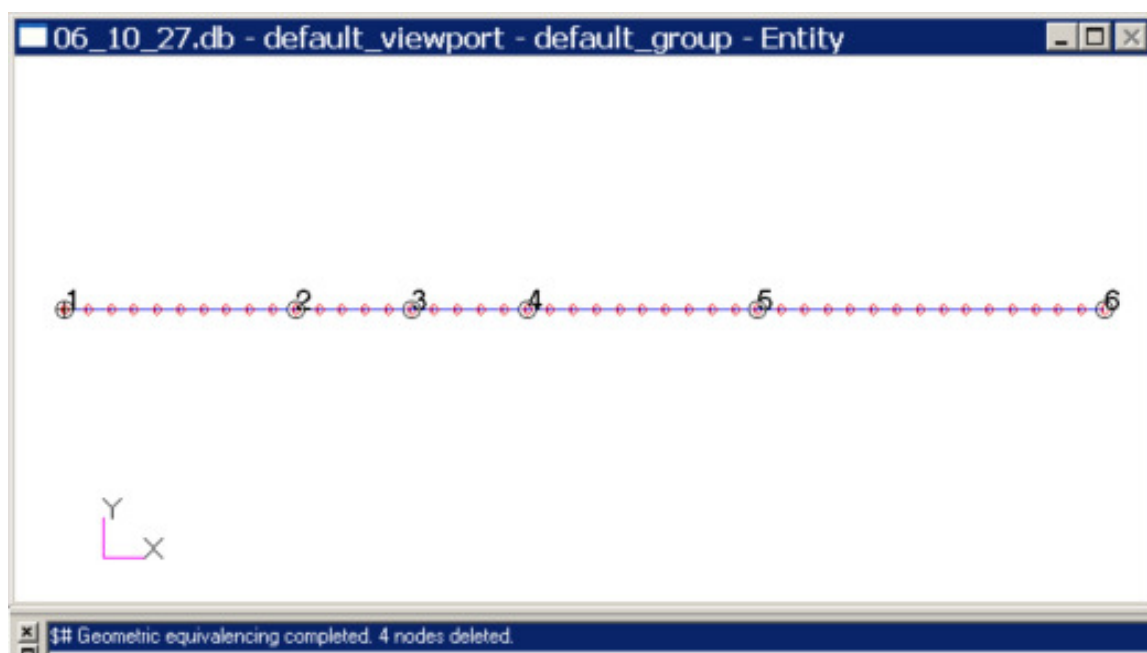


Рис.88

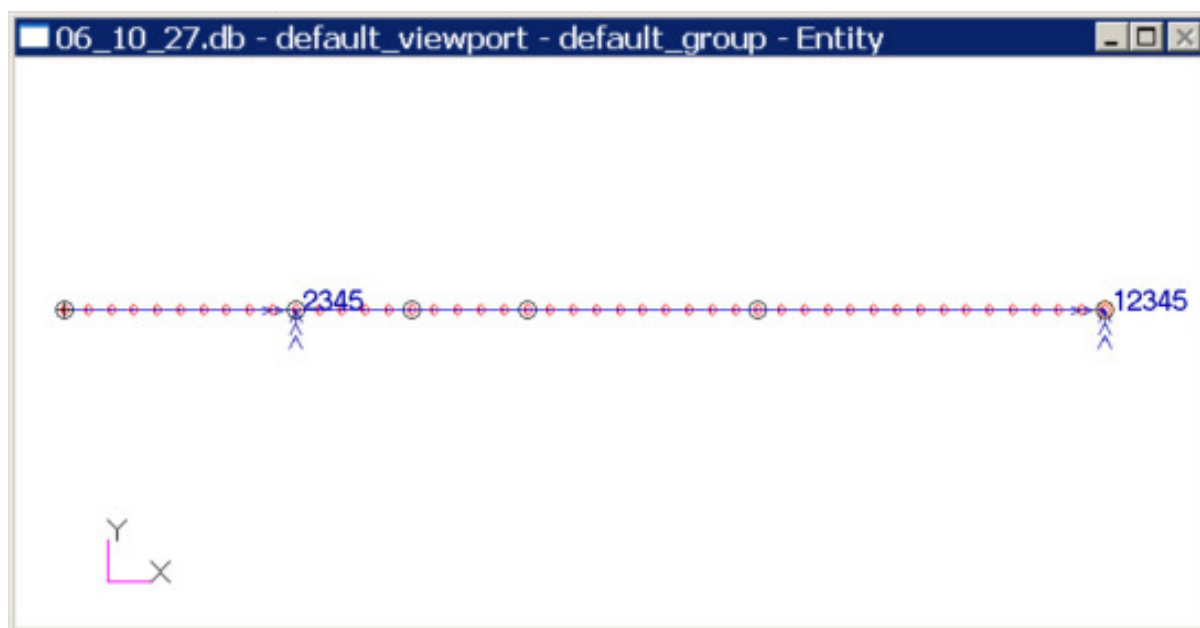


Рис.89


Для оставшихся узлов потребуем отсутствия перемещений по оси z : w , и поворотов относительно осей x и y (кинематическая связь **d2**).

Для задания силовых граничных условий активизируем команду **Object►Force**. В окне **New Set Name** задаем имя силового условия **P1**. Щелкаем по кнопке **Input Data....**. Открывается одноименная панель, в окне которой **Force <F1 F2 F3>** вводим компоненты вектора силы **<0 -30000 0>**, компоненты вектора момента не вводим. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. Щелкаем левой

клавишей мыши в графическом окне по узлу **1**. В окне «**Select Nodes**» появится информация о том, что эти узлы выделены. Щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется; на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенной силы, цифры соответствуют величине силы. Аналогичным образом вводим вторую силу **P2**: **<0 -15000 0>**, приложенную в узле **3**. К узлу **4** прикладываем сосредоточенный момент: **<0, 0, -51000>**. Распределенную нагрузку **q** преобразовываем к узловой нагрузке на пятом участке:

- определяем равнодействующую распределенной нагрузки: $Q = 3q = 60$ кН;
- определяем нагрузку на один узел в пределах 5-го участка: так как на этом участке **15** элементов, то на каждый элемент приходится $60 / 15 = 4$ кН, а каждый элемент имеет два узла, т.е. на каждый узел элемента приходится по **2** кН; итак, к крайним узлам 5-го участка необходимо приложить **2** кН, к остальным узлам - **4** кН, т.к. к ним примыкают два элемента.

В узлах **35** и **49**, как и ранее, задаём узловую нагрузку **2** кН. Для выделения группы узлов **36 : 49** должна быть открыта панель **Select Application**

Region. Щелкаем по кнопке  и, при нажатой левой клавише мыши, в графическом окне выделяем прямоугольником нужные узлы, как показано на рис.90, а. Как только вы отпустите левую клавишу мыши, рамка исчезнет, а вокруг каждого из выделенных узлов появится замкнутый контур (рис.90, б). Номера выделенных узлов изменят цвет.

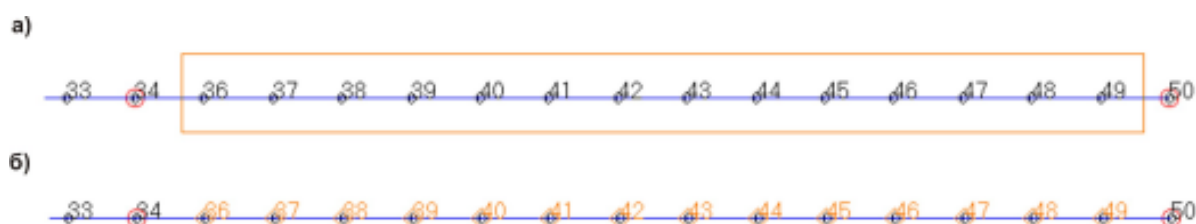






Рис.90

Получившееся нагружение расчетной схемы представлена на рис.91.

- L.** Открываем форму приложения **Materials**. Вид одноименной панели приведен на рис.68; на ней задаём имя материала **st** и, щелкнув левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**, его физико-механические характеристики. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options**, а на панели **Materials** щелкаем по кнопке **Apply**.

Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **1D**, тип элементов – **Beam**. В окне **Property Set Name** задаём имя **balka** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties** (рис.92). На появившейся одноименной панели задаём имя материала:

ла: щёлкаем по кнопке  (шаг 1), появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **st**. Щелчок по имени материала (шаг 2) приводит к появлению записи **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. Нажимаем клавишу **Create Section** (шаг 3), появляется первая панель типов поперечных сечений балок и две кнопки  и . Щелкаем по кнопке  (шаг 4). Появится новая панель типов поперечных се-

чений балок (*шаг 5*), на которой выбираем сечение – прямоугольник с отверстием (*шаг 6*) и вверху на правой части панели задаем его размеры (*шаг 7*). В поле **New Section Name** задаем имя «pr» (*шаг 8*) и нажимаем клавишу **OK** (*шаг 9*). Панель **Beam Library** закроется, а в окне **Section Name** панели **Input Properties** появится новое имя «pr». В окне **Bar Orientation** задаем ориентацию поперечного сечения балки: $\langle 0 \ 1 \ 0 \rangle$ (*шаг 10*) и, щелкнув по клавише **OK** (*шаг 11*), возвращаемся к панели **Element Properties**, на которой в секции **Application Region** задаем элементы (путем их выделения в графическом окне), которым присваиваются установленные нами свойства. В окне **Select Members** появится сообщение **Curve 1:5**. Последовательно щелкаем по клавишам **Add** (в окне «**Application Region**» появится запись **Curve 1:5**) и **Apply**.

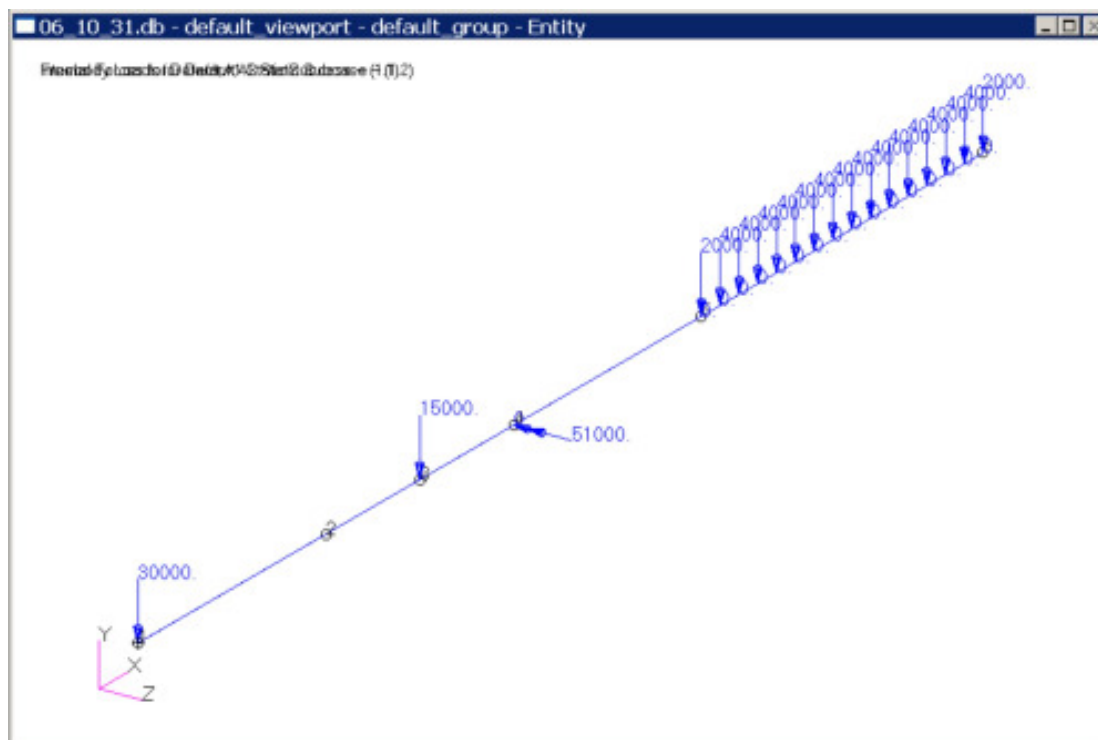


Рис.91

- M.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Для расчета балки выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. Для того чтобы изменить вычисляемые решателем **Nastran** параметры, нажимаем клавиши **Subcase** (подблока), **Output Request** (запрос на вывод), открывается панель **Output Request**. Для того чтобы вывести информацию об усилиях в балке, щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команду **Element Force, Applied Loads, Grid Point Force Balance**. Нажимаем клавишу **OK**. В окне **Subcase Name** панели **Subcase** задаем имя «s1»; устанавливаем указатель мыши на клавише **Apply** и щелкаем левой клавишей мыши.
- N.** Нажимаем клавишу **Subcase Select** на панели **Analysis**. Откроется одноименная панель (рис.94), на которой выбираем подблок «s1» и нажимаем клавишу **OK**, а затем клавишу **Apply** панели **Analysis**.
- O.** В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.
- P.** После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.

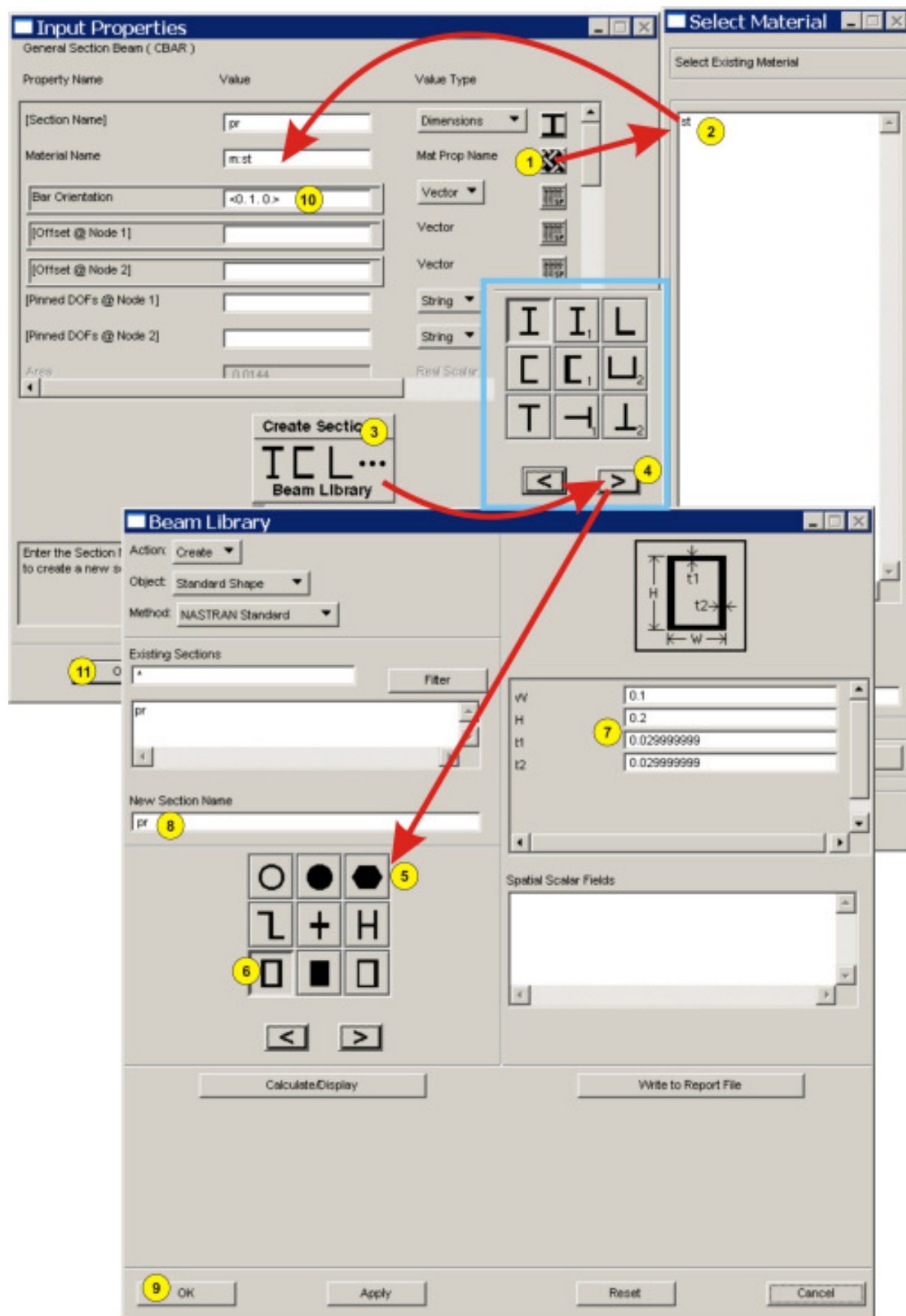


Рис.92

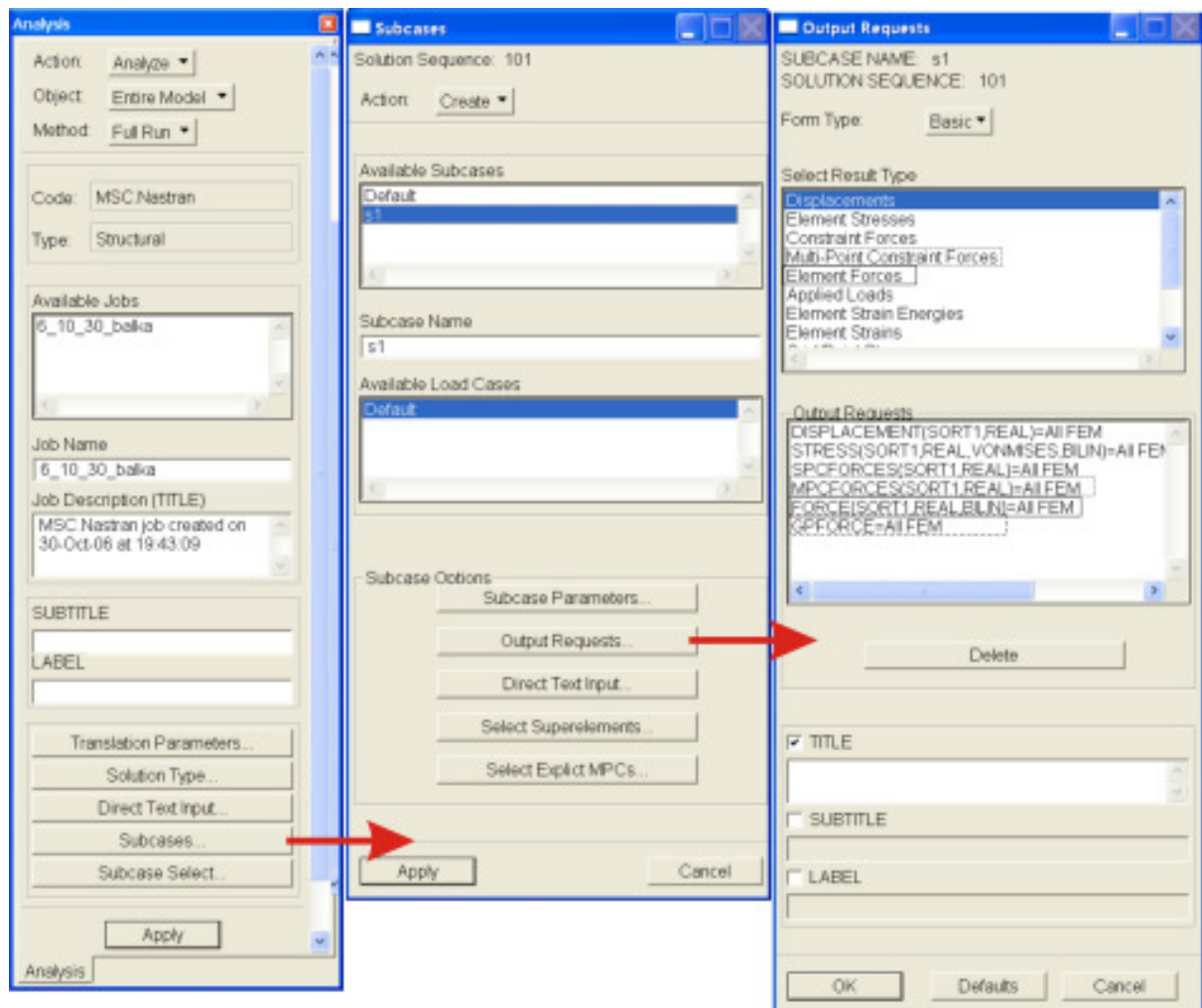


Рис.93

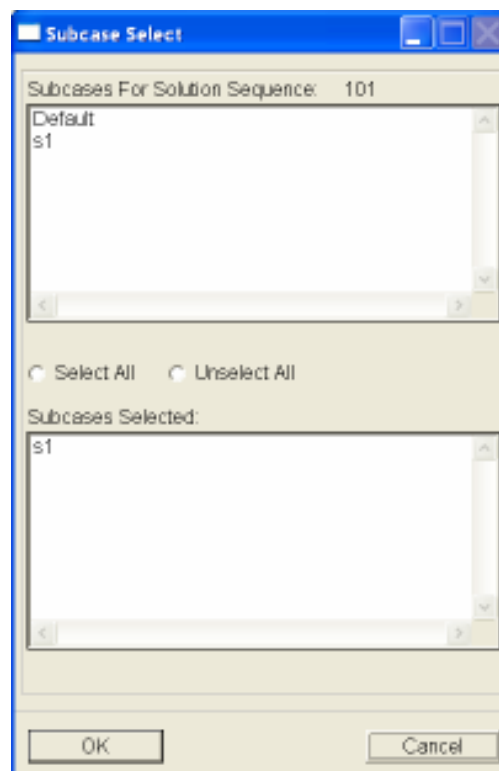




Рис.94

Q. Приложение **Results** открывается нажатием на клавишу . **MSC.Patran** позволяет получить точную информацию о реакциях и внутренних усилиях в поперечных сечениях бруса. При нажатой клавише  - **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;
Object ► *Freebody*;
Metod ► *Loads*.



Панель **Results** примет вид, приведенный на *рис.95*.

Отображение заданной нагрузки на модель

Выберем:

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.3)*;

тип результата: *Applied Loads*.

Нажимаем на клавишу  **Display Attributes**, в нажатом состоянии она приобретает негативное изображение, панель **Results** примет вид, представленный на *рис.95*. В разделе **Показать (Show)** требуем показать силы и моменты, в разделе **Отображать как (Display as)** – показать компоненты, в разделе измерения (**Dimensions**) требуем показать объекты отображения в трехмерном пространстве. Нажимаем последовательно клавиши **Apply**,  и снова **Apply**. Появится изображение балки с заданной нагрузкой (*рис.96*).

Отображение реакций связи

Выберем:

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.3)*;

тип результата: *Constraint Forces*.

Нажимаем клавишу **Apply**. Появится изображение балки с реакциями связи (*рис.97*), которые в точности совпадают с ранее найденными в **MathCAD**.

Отображение загрузений балки или участка балки, рассматриваемых как свободные тела


Выберем:


вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.3)*;

тип результата: *Freebody Loads*.

Нажимаем клавиши **Apply**. Появится изображение балки с приложенными к ней нагрузками и найденными реакциями связи (*рис.98*). Так как к **50** узлу, совпадающему с шарнирно-неподвижной опорой, были приложены силы **2000** и **48000 Н**, направленные в разные стороны, то на *рис.98* к этому узлу приложена сила величиной **46000 Н**.

Можно из балки вырезать некоторый участок и рассмотреть его равновесие,

т.е. в **Patran** реализован стандартный метод сечений. Активизируем кнопку 

Target Entities. Вид панели **Results** изменится (*рис.99*). Щелкаем по кнопке  и затем, при нажатой левой клавише мыши, в графическом окне выделяем прямоугольником некоторый участок балки, например, содержащий с **10**-го по **31**-й эле-

мент. Нажимаем клавишу **Apply**. В результате этих действий в графическом окне к выделенному участку балки будут приложены все активные силы и реакции связей:

- к левому торцу участка балки поперечная сила $Q = 30000 \text{ Н}$ и момент $M = 54000 \text{ Нм}$;
- к правому торцу участка балки поперечная сила $Q = 10000 \text{ Н}$ и момент $M = 56000 \text{ Нм}$ (рис.99).

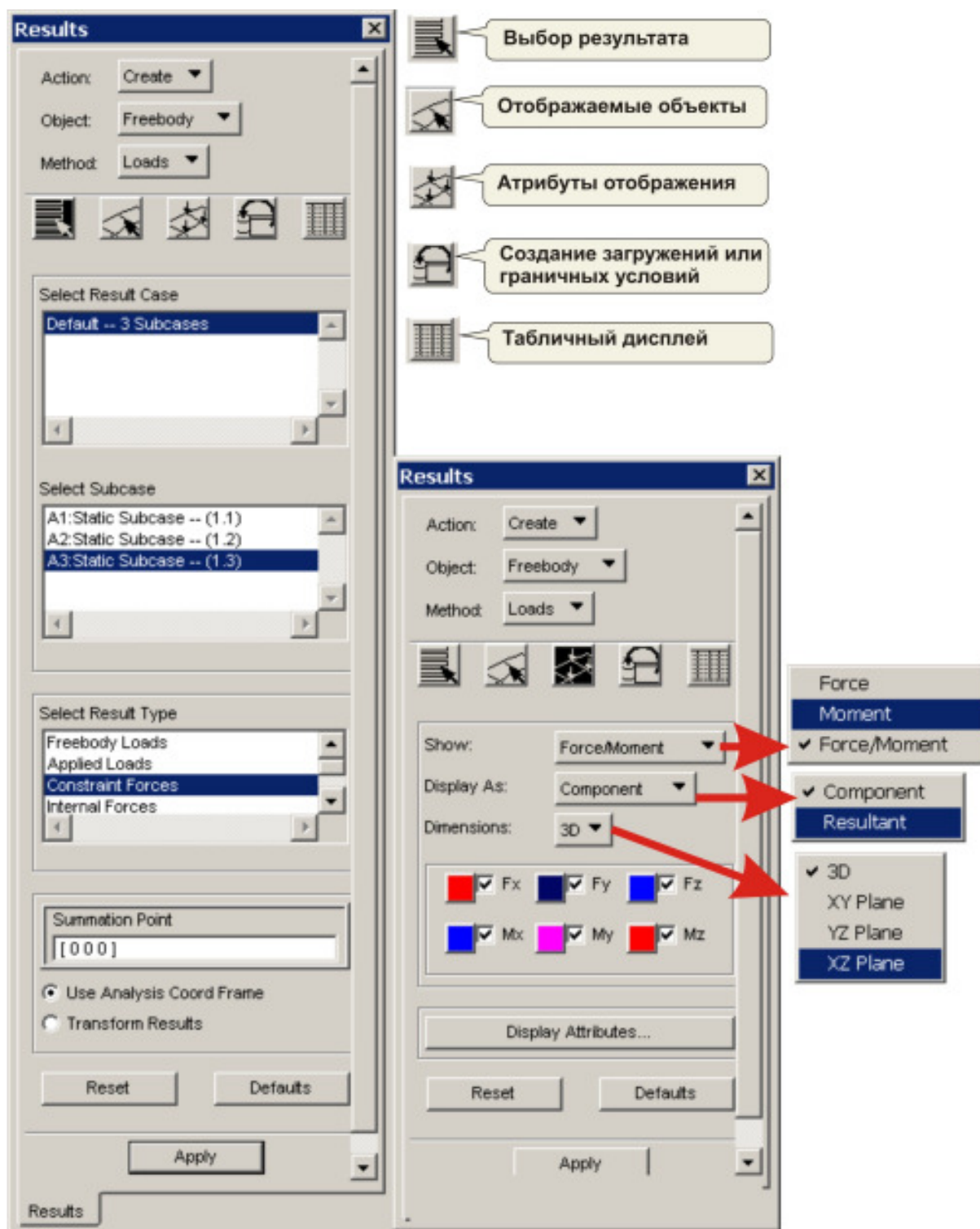
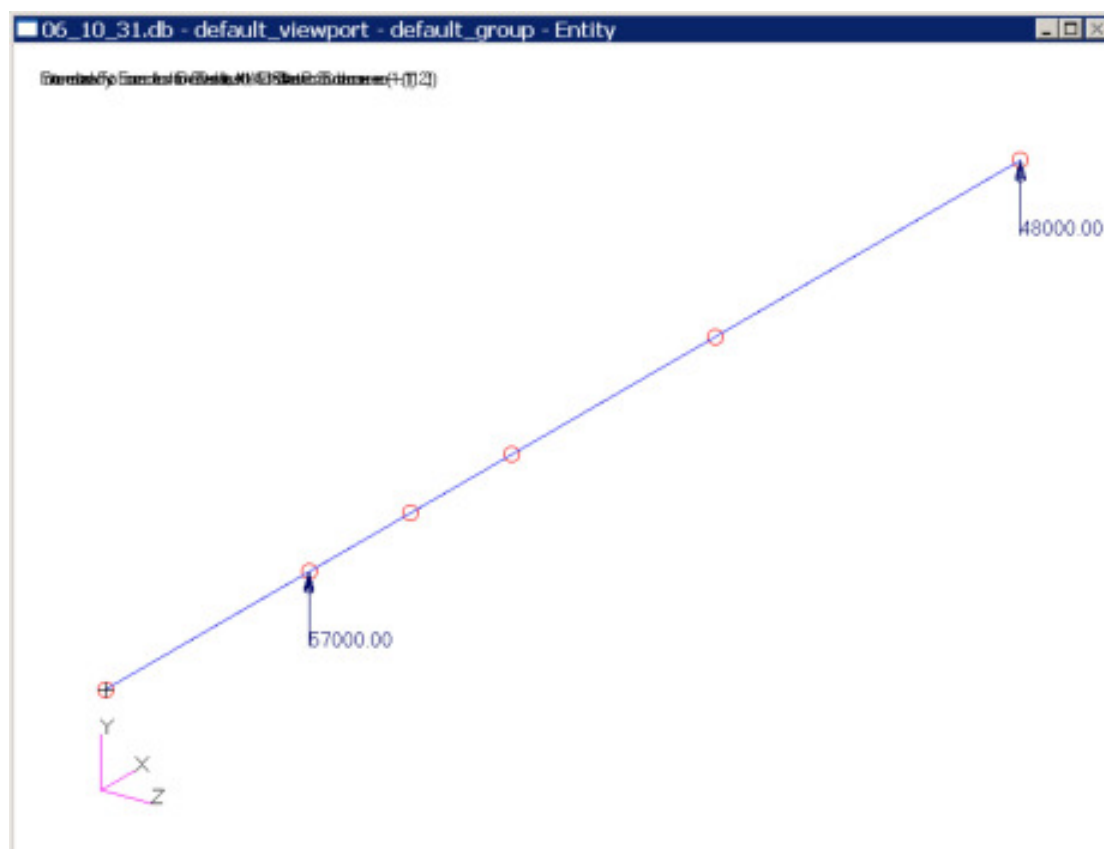
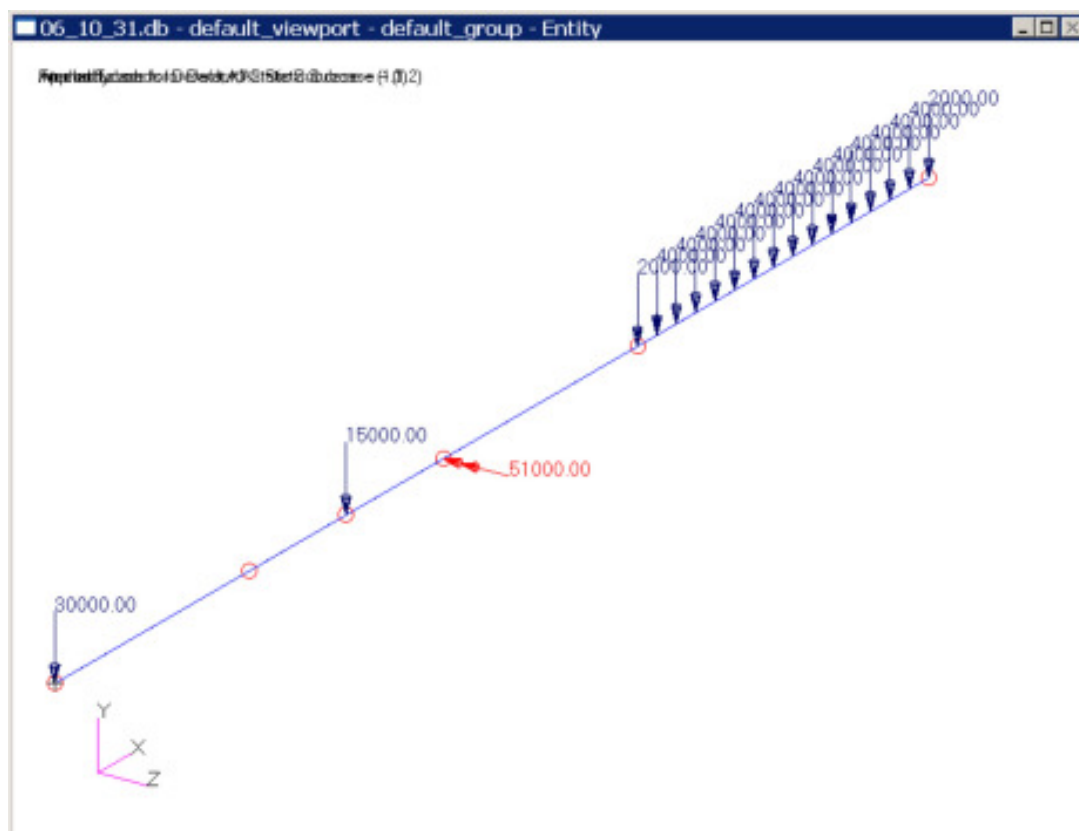


Рис.95



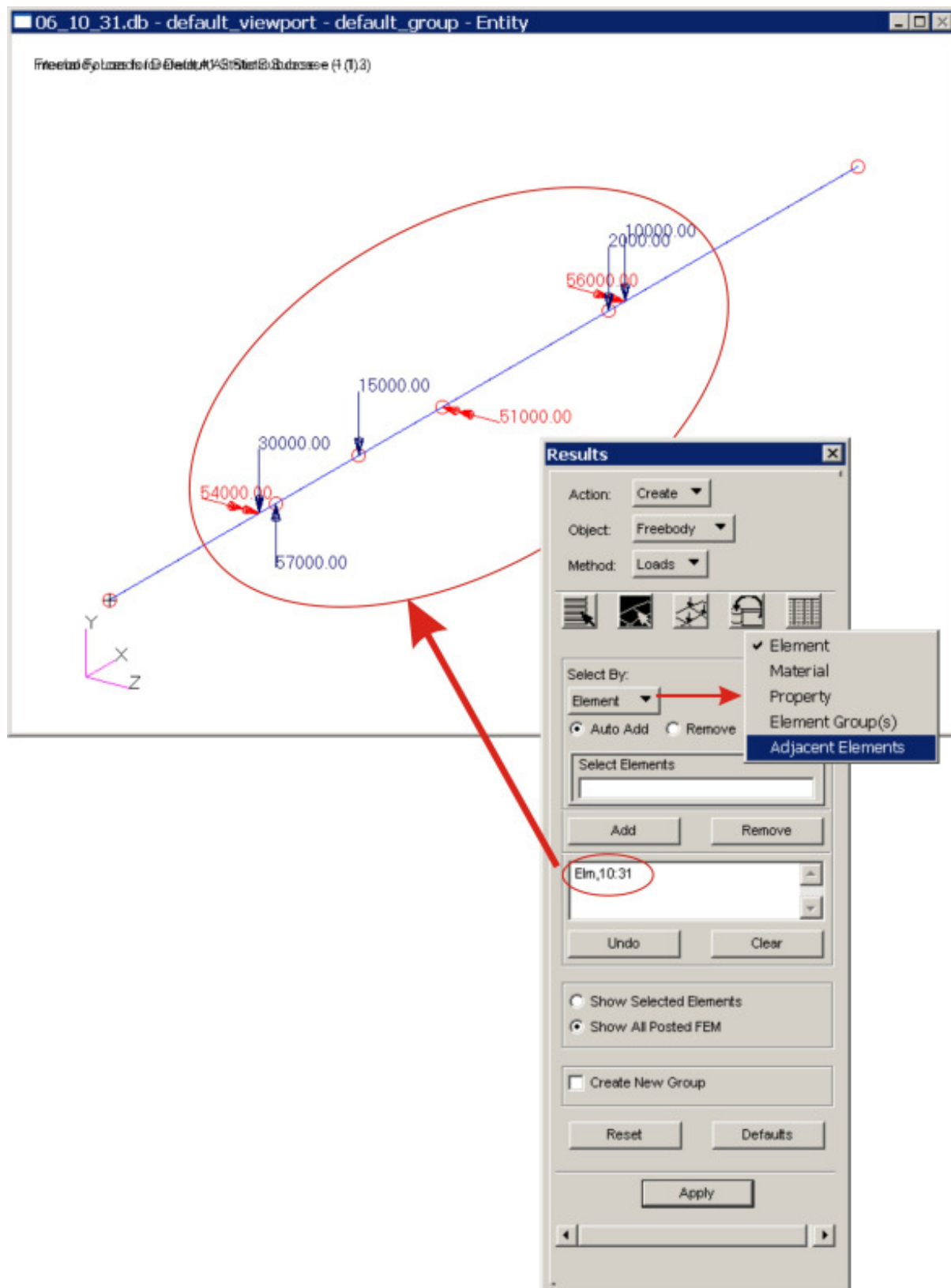


Рис.99

Node ID	Coord ID	Force	Moment	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
11	0	57000.00	0.00	0.00	57000.00	0.00	0.00	0.00	0.00
17	0	15000.00	0.00	0.00	-15000.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	0	0.00	51000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-51000.00
34	0	2000.00	0.00	0.00	-2000.00	0.00	0.00	0.00	0.00
36	0	10000.00	56000.00	0.00	-10000.00	0.00	0.00	0.00	56000.00
Totals	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

"Freebody Loads" for Result Case [Default], Subcase [A3 Static Subcase], using method [Freebody Loads]. Values shown in the Analysis Coordinate Frames. Summation point shown in Rectangular Coordinate System [0]. Summation Point (0.00, 0.00, 0.00) identified as [1 1 0 0 0 1].

Report Close

Рис.100

Построение графиков внутренних силовых факторов

При нажатой клавише  - **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Graph*;

Method ► *Y vs X* (**Y** в зависимости от **X**).

Панель **Results** примет вид, приведенный на рис.102, а. Выберем:

вариант расчета – *Default, A3: Static Subcase*;...

ординату **Y**: *Result*


тип результата: *Bar Forces, Rotational*;

опцию Quantity: *Z Component*;

абсциссу **X**: *Coordinate*.

Щёлкаем по кнопке  **Target Entities**. Панель **Results** примет вид, приведенный на рис.102, б.

В графическом окне выделяем необходимые узлы. Они автоматически перенесутся в окно **Select Nodes** панели **Results**. Нажимаем клавишу **Apply**.

В графическом окне появится эпюра моментов (рис.103), атрибуты которой задаются на панели **Results**, если нажата кнопка  (рис.102, в).

По внешнему виду эта эпюра совпадает с ранее построенными эпюрами в программных продуктах **MathCAD** и **SCAD**. Точного совпадения не наблюдается ввиду разного числа точек, в которых вычислялась эта физическая величина: в **MathCAD** – 180 точек, в **Patran** – 50 точек.

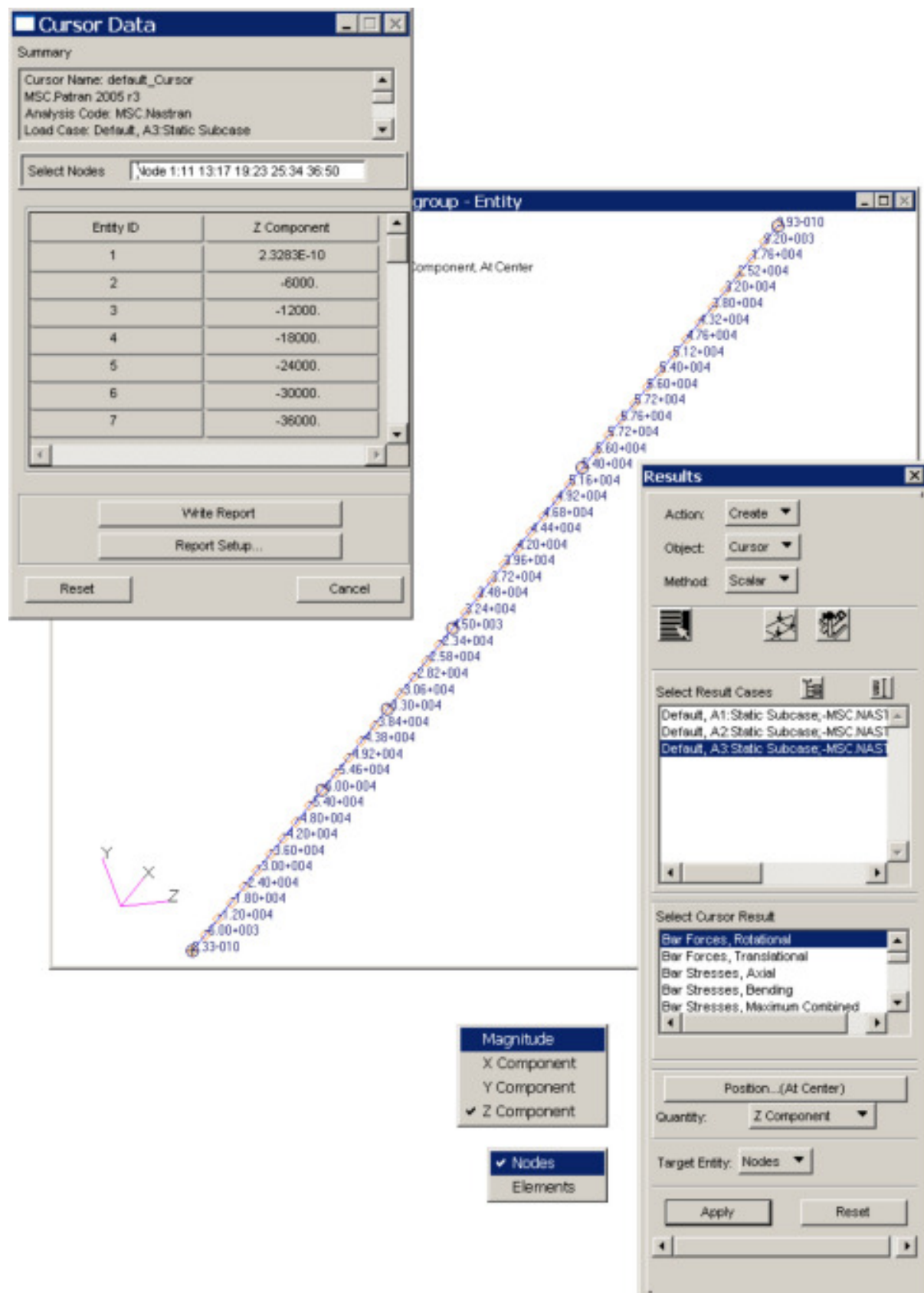


Рис.101

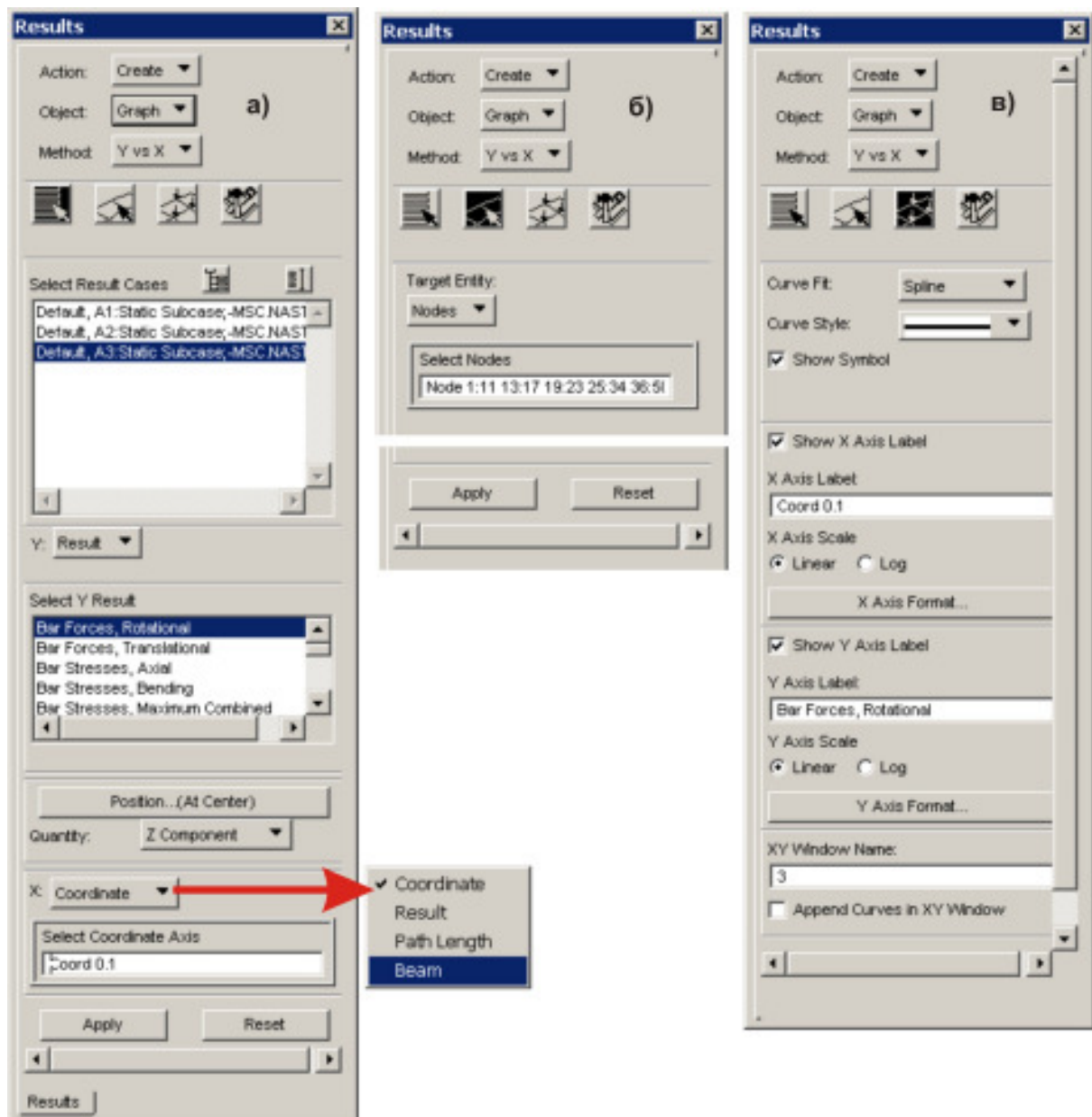


Рис.102

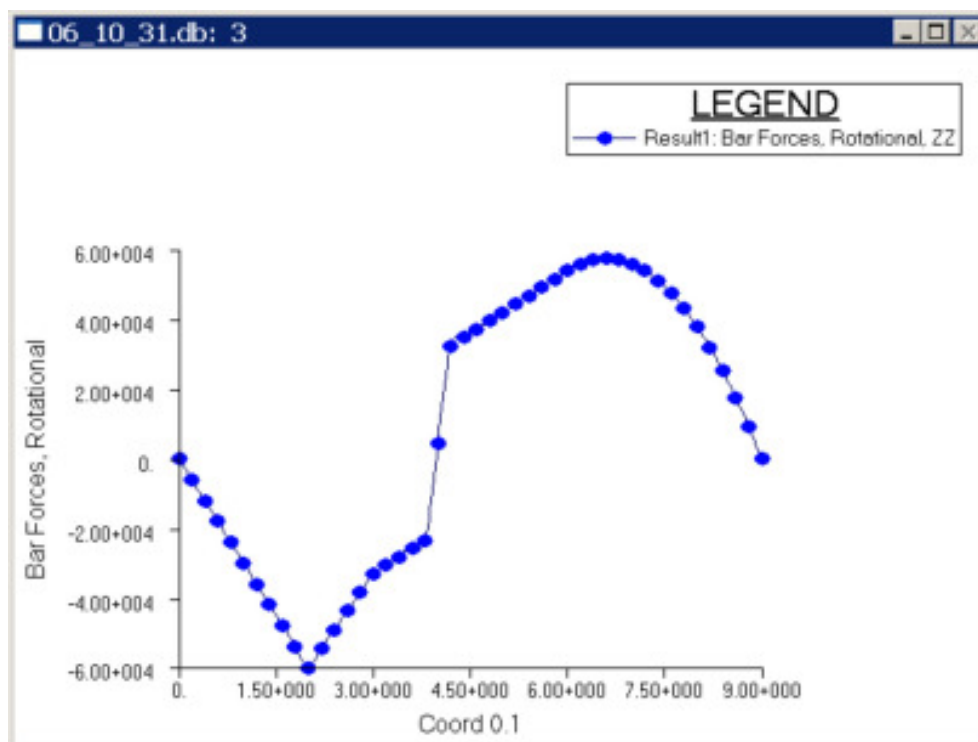


Рис.103

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

3.1. ЗАДАЧИ НА РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Рассмотрим задачу о нахождении опорных реакций и внутренних силовых факторов (построить эпюры Q и M , вычислить Q_{max} и M_{max}) в трехопорной балке с промежуточным шарниром, изображенной на рис.104.

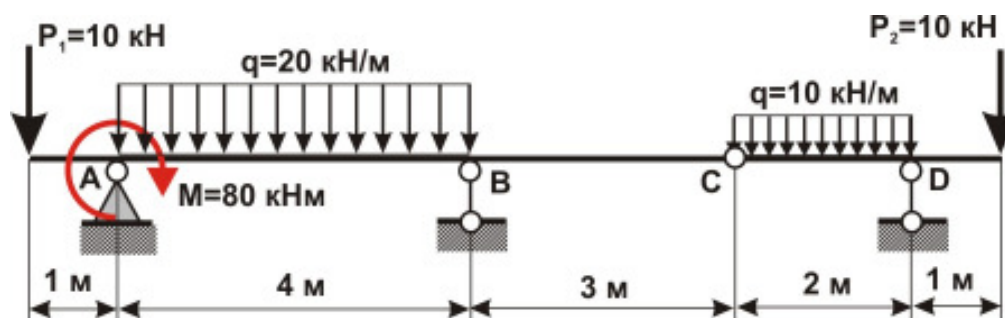


Рис.104

Если рассматривать эту систему тел как одно твердое тело (аксиома 5¹⁰), то будем иметь три уравнения равновесия с четырьмя неизвестными: X_A , Y_A , Y_B , Y_D (проекции опорных реакций в точках A, B и C). Тем не менее, эта задача статически определенная. Дело в том, что в равновесии находятся два тела: основная балка ABC и присоединённая CD, соединенные между собой идеальным шарниром C, и можно рассматривать равновесие каждого тела в отдельности. Таким образом, число уравнений равновесия будет шесть - по три уравнения для каждого тела.

¹⁰ Жилкин В.А. Применение системы MathCAD при решении задач прикладной механики. Часть 2. Теоретическая механика – Статика. Челябинск: ЧГАУ, 2001. – 100 с.

Указанный путь решения задачи, конечно, не единственный. Можно, например,

- составить три уравнения равновесия для балки **ABC**, а остальные три - для системы балок **ABC** и **CD**, принимая их за одно твердое тело;
- составить уравнения равновесия для системы балок **ABC** и **CD**, принимая их за одно твердое тело, и уравнение моментов сил, приложенных только к левой (**ABC**) или правой (**CD**) части составной балки, относительно шарнира **C**.

Целесообразность применения того или иного способа решения задачи зависит от условий конкретной задачи.

3.1.1. Составная балка

3.1.1.1. Решение задачи в MathCAD

Данная задача решается так же, как и приведённая в разделе 2.3, за исключением того, что теперь надо составить не три, а четыре уравнения равновесия системы сил, приложенных к балке:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_D = 0; \quad \sum M_C^{\text{Для сил справа}} = 0.$$

Первое уравнение удовлетворяется тождественно, так как нет сил, проектирующихся на горизонтальную ось, следовательно, для определения опорных реакций Y_A , Y_B и Y_C необходимо совместно решить три оставшихся уравнения равновесия.

Длины участков обозначим соответственно a , b , c , d и e . Длину с первого до $(i+1)$ -го участка включительно обозначим L_{ii} ($i = 2, 3, 4$), длину балки - L .

Введём исходные данные.

$$\begin{aligned} a &:= 1 & b &:= 4 & c &:= 3 & d &:= 2 & e &:= 1 & L_{12} &:= a + b \\ L_{23} &:= b + c & L_{13} &:= L_{12} + c & L_{14} &:= L_{13} + d & L_{24} &:= L_{14} - a & L_{15} &:= L_{14} + e \\ P_1 &:= 10 & P_2 &:= 10 & M &:= 80 & q_2 &:= 20 & q_4 &:= 10 \end{aligned}$$

Определяем опорные реакции.

$$Y_A := 1 \quad Y_B := 1 \quad Y_D := 1 \quad \text{Given}$$

$$P_1 \cdot a - P_2 \cdot (L - a) - M - \frac{q_2 \cdot b^2}{2} - q_4 \cdot d \cdot \left(L_{23} + \frac{d}{2} \right) + Y_B \cdot b + Y_D \cdot L_{24} = 0$$

$$P_1 \cdot (L - a) - P_2 \cdot e + q_2 \cdot b \cdot \left(L_{24} - \frac{b}{2} \right) + \frac{q_4 \cdot d^2}{2} - M - Y_A \cdot L_{24} - Y_B \cdot (L_{24} - b) = 0$$

$$-P_2 \cdot (d + e) + Y_D \cdot d - \frac{q_4 \cdot d^2}{2} = 0$$

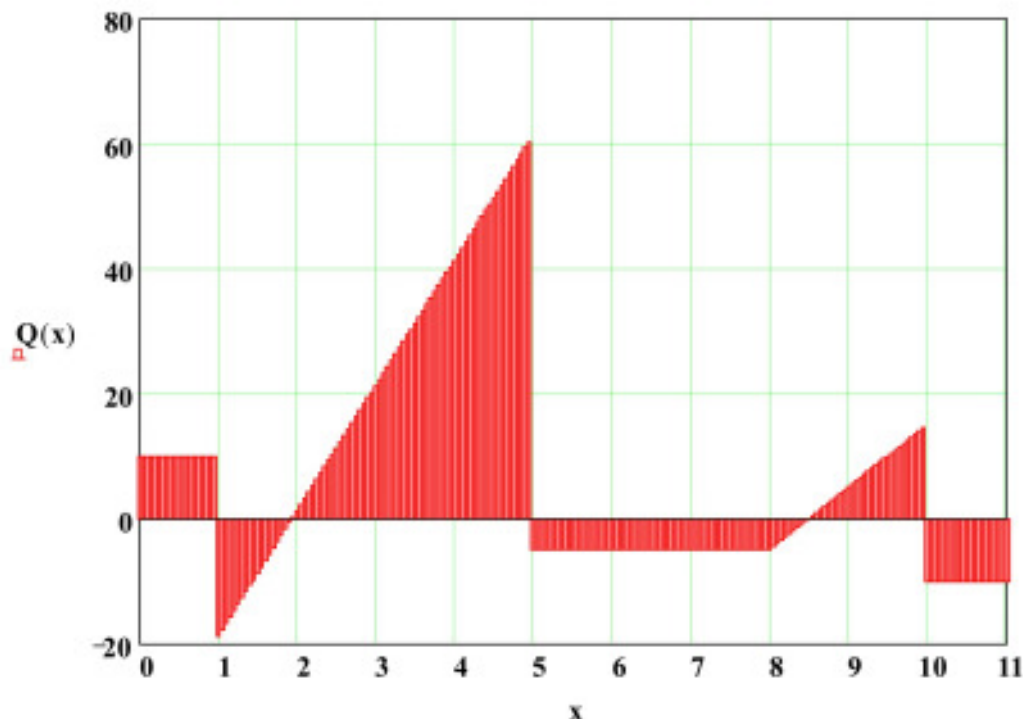
$$\begin{pmatrix} Y_A \\ Y_B \\ Y_D \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_A, Y_B, Y_D) \quad Y_A = 28.75 \quad Y_B = 66.25 \quad Y_D = 25$$

Определяем внутренние силовые факторы на каждом из участков, рассматривая равновесие отсеченной левой части бруса.

Определение поперечных сил

$$Q(x) := \begin{cases} P_1 & \text{if } 0 \leq x < a \\ P_1 - Y_A + q_2 \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x < L_{12} \\ P_1 - Y_A + q_2 \cdot b - Y_B & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ P_1 - Y_A + q_2 \cdot b - Y_B + q_4 \cdot (x - L_{13}) & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ P_1 - Y_A + q_2 \cdot b - Y_B + q_4 \cdot d - Y_D & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.05 \dots L \quad Q(0) = 10 \quad Q(4.9) = 59.25 \quad Q(11) = -10$$



Максимальное значение поперечной силы $Q(4,9999) = 61,248 \text{ кН}$.

Определение изгибающих моментов

Так как в данной задаче выражения для изгибающих моментов на некоторых участках балки имеют громоздкие выражения, то целесообразно предварительно определить эти выражения для каждого из участков, а только затем воспользоваться стандартной процедурой.

$$\begin{aligned} M_1(x) &:= -P_1 \cdot x & M_2(x) &:= -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) + M - \frac{q_2 \cdot (x - a)^2}{2} \\ M_3(x) &:= -P_1 \cdot x + Y_A \cdot (x - a) + M - q_2 \cdot b \cdot \left(x - L_{12} + \frac{b}{2} \right) + Y_B \cdot (x - L_{12}) \end{aligned}$$

$$M_4(x) := M_3(x) - \frac{q_4 \cdot (x - L_{13})^2}{2}$$

$$M_5(x) := M_3(x) - q_4 \cdot d \cdot \left(x - L_{14} + \frac{d}{2} \right) + Y_D \cdot (x - L_{14})$$

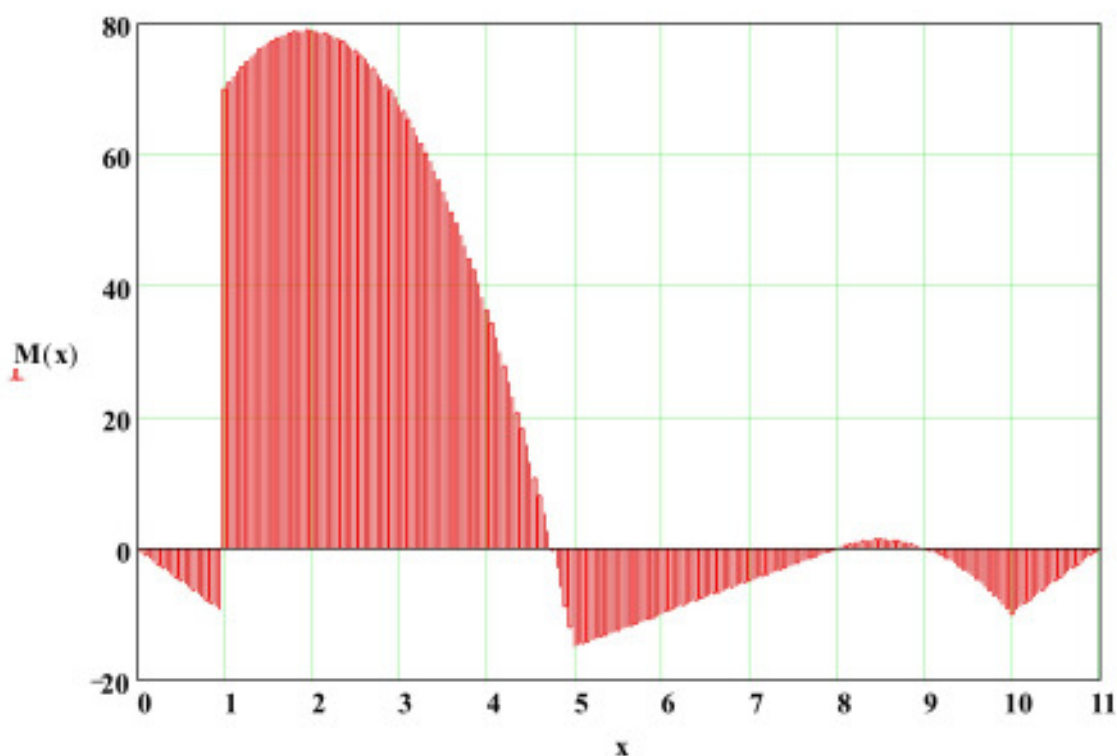
$$M(x) := \begin{cases} M_1(x) & \text{if } 0 \leq x < a \\ M_2(x) & \text{if } a \leq x < L_{12} \\ M_3(x) & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ M_4(x) & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ M_5(x) & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$M(1) = 70$$

$$M(2) = 78.75$$

$$M(8) = 0$$

$$M(11) = 0$$




Максимальный изгибающий момент $M(2) = 78,75$ кНм.

3.1.1.2. Решение задачи в MSC.Patran-Nastran 2005


Алгоритм создания конечно-элементной модели балки:

- A. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.
- B. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
Action►Create
Object►Point
Method►XYZ.
- C. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты границ участков. После каждого ввода координат точек границ участков балки нажимаем клавишу **Ar-**

ply. Для контроля положения введенных точек активизируем кнопку  **Положение точек.**

- D. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**.
- E. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам. Для визуализации выполняемых действий нажмем на кнопку . В результате этого действия на расчетной модели балки будут проставлены номера узлов и элементов.

Внимание! Если до сих пор описываемый алгоритм совпадал с рассмотренным в разделе 2.5, то в этом примере он будет иным: мы изменим последовательность операций при создании конечно-элементной модели балки.

- F. Открываем форму приложения **Materials** и задаём имя материала **st** и его физико-механические характеристики. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options** и по кнопке **Apply** на панели **Materials**.
- G. Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **1D**, тип элементов **Beam**. В окне **Property Set Name** задаём имя **Beam** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала: щелкаем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный материал **st**. Щелчок левой клавишей мыши по имени материала приводит к появлению записи **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. Нажимаем клавишу **Create Section** и выбираем сечение – сплошное круглое. В поле **New Section Name** задаем имя «**kr**» и нажимаем клавишу **OK**. Панель **Beam Library** закроется, а в окне **Section Name** панели **Input Properties** появится новое имя «**kr**». В окне **Bar Orientation** задаём ориентацию поперечного сечения балки: **<0 1 0>** и, щелчком по клавише **OK**, возвращаемся к панели **Element Properties**, на которой нажимаем клавишу **Apply**.
- H. Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**.
- I. Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели балки. В поле **Number** задаем число элементов на кривой (в нашем случае участки 1 и 5 - **5**; участок 2 - **20**; участок 3 - **15**; участок 4 - **10**).
- J. Переходим к созданию сетки. Активизируем команду **Object►Mesh**. Панель **Finite Elements** примет вид, показанный на *рис.105*.
- K. Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой щелкаем по имени заданных свойств элементов – **beam** (*рис.105*). Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**.
- L. В графическом окне выделяем все элементы балки. В окне **Curve List** появится запись **Curve 1:5**, означающая, что выбраны кривые с **1** по **5**. Далее нажимаем на кнопку **Apply** (*рис.105*).
- M. Активизируем команду **Action►Create►Equivalence**. Появившаяся измененная панель **Finite Elements** показана на *рис.106*. С целью исключения **43** и **44** узлов из операции **Equivalence**, так как в дальнейшем на их основе будет создан идеальный шарнир **C**, щелчком в окне **Nodes to be excluded** активизируем его, затем в графическом окне выделяем узлы **43** и **44**. В окне **Nodes**

to be excluded появится запись **Node 43 44** (рис.106). Щелчком по кнопке **Apply**. В графическом окне будут отмечены узлы, для которых выполнена операция **Equivalence**, а на информационной панели появится сообщение, о том, что объединено три узла.

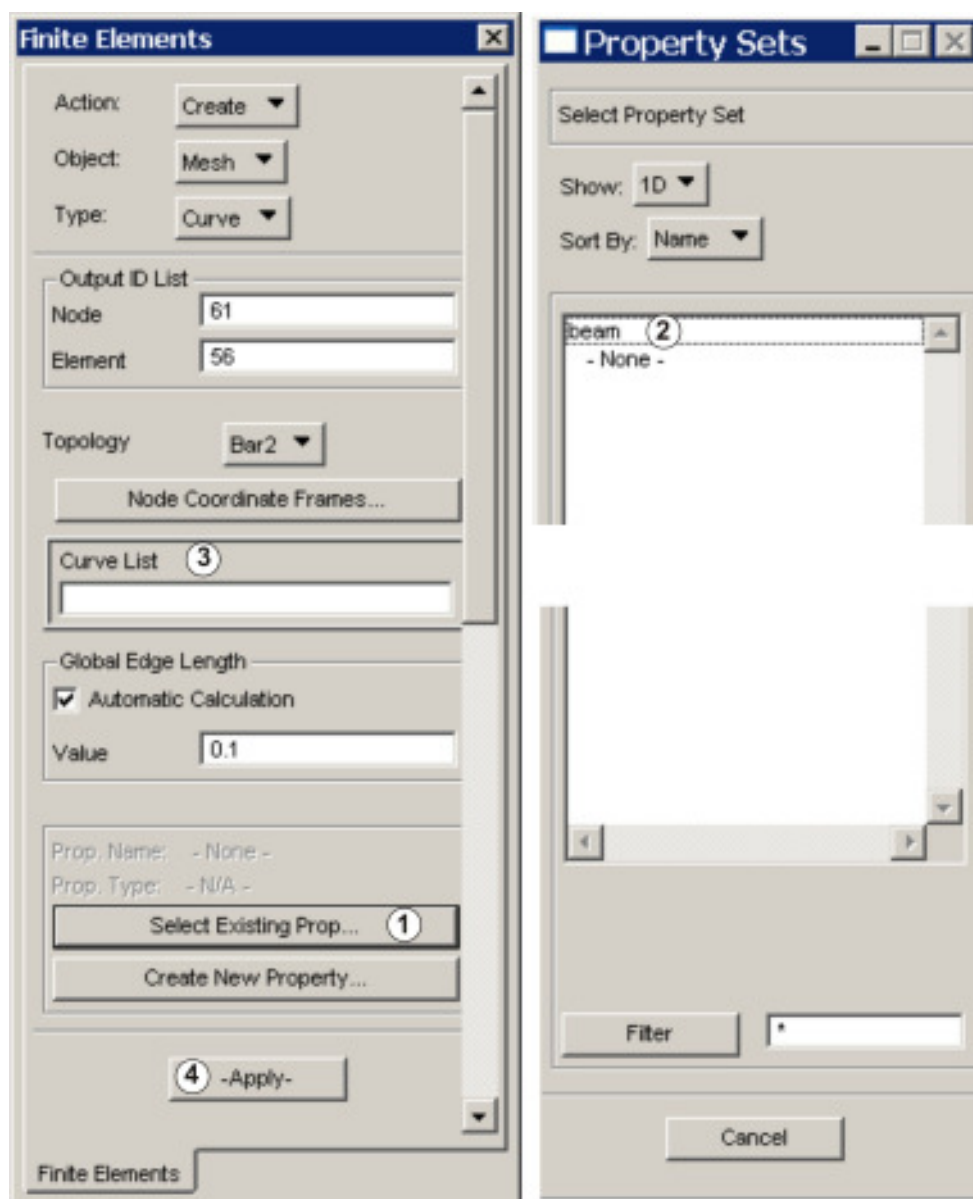


Рис.105

N. Создаём **MPC** для шарниров **43** и **44**. Устанавливаем опции:

Action ► Create
Object ► MPC
Type ► Explicit

Щелкаем по клавише **Define Terms**. Появится одноименная панель (рис.107), на которой таблицы **Dependent Terms** (зависимые от условий задачи величины; может быть задана только одна величина), **Independent Terms** (независимые величины; могут быть заданы несколько величин) и окно **Node List** пока пусты, опция **Create Dependent** – активизирована.

O. В графическом окне щелкаем по **43** узлу. Имя узла появляется в окне **Node List** панели **Define Terms** (рис.107).

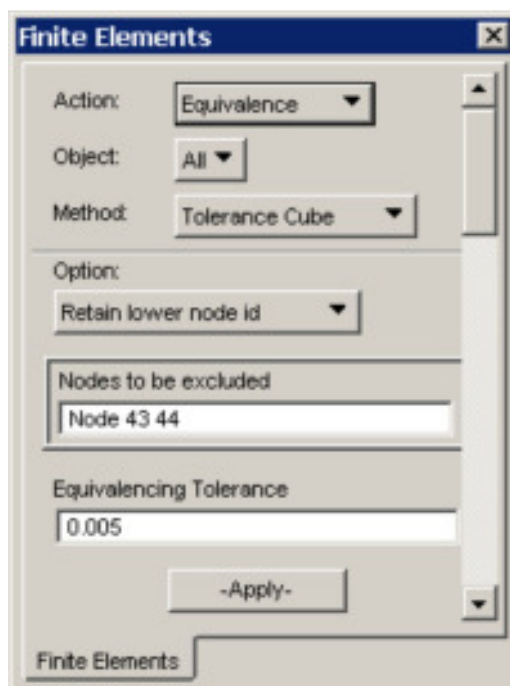


Рис.106

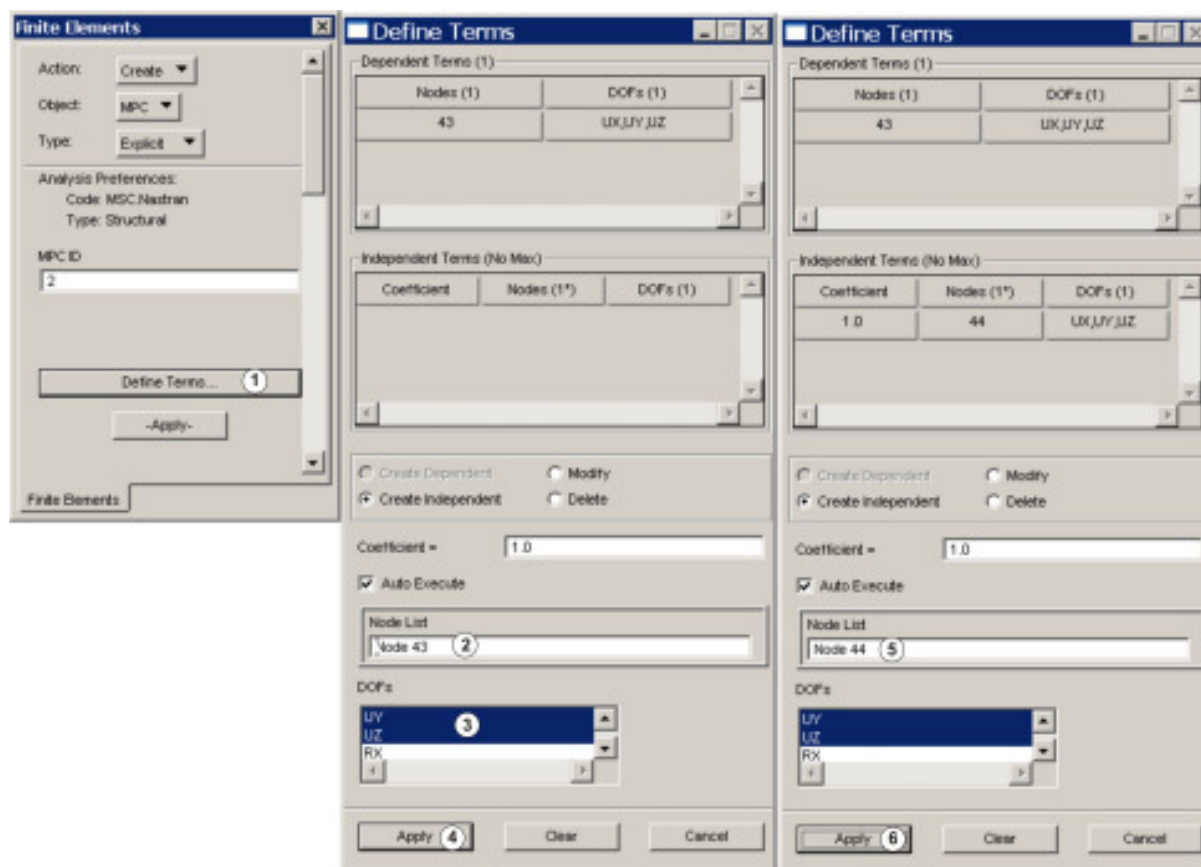


Рис.107

Р. В окне **DOFs** панели **Define Terms** указываем, на какие степени свободы будут наложены связи (в нашем случае при нажатой клавише **Shift** щелкаем левой клавишей мыши по **UX**, **UY** и **UZ**). Щелкаем по клавише **Apply**. Опция **Create Dependent** автоматически закрывается, опция **Create Independent** становится активной (рис.107).

- Q.** В окно **Node List** вводим **Node 44** и щелкаем по клавишам **Apply** на панели **Define Terms** и панели **Finite Elements**.
- R.** Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action► Create
Object► Displacement
Type► Nodal.

В окне «**New Set Name**» задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия для шарнирно-неподвижной опоры **A**. Запрещаем все три поступательных перемещения **u**, **v**, **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**. Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне по узлу **6**. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, а на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенной кинематической связи



. Аналогичным образом вводим вторую и третью кинематические

связи **d2** для шарнирно подвижных опор  : запрещены перемещения **v**, **w** и повороты относительно осей **x** и **y**.

Для задания силовых граничных условий активизируем команду **Object► Force**. В окне «**New Set Name**» задаем имя силового условия **P1**. Щелкаем по кнопке **Input Data...** Открывается одноименная панель, в окне которой вводим компоненты вектора силы **<0 -10000 0>**, компоненты вектора момента не вводим. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне при нажатой клавише Shift по узлам **1** и **60**. На панели **Select Application Region** щелкаем по кнопке **OK**, на панели **Loads/Boundary Conditions** - по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенных сил.

Аналогичным образом вводим пару сил **m** с моментом **80 кН·м: <0 0 -80000>**.

Распределенные нагрузки **q** на втором и четвертом участках преобразуем к узловой нагрузке:

- во внутренних узлах задаём **4** и **2 кН** соответственно;
- на границах участков **2** и **1 кН** соответственно.

- R.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**.
- S.** Для расчета балки выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. Для того чтобы изменить вычисляемые решателем **Nastran** параметры, нажимаем клавиши **Subcase** (подблока), **Output Request** (запрос на вывод), открывается панель **Output Request**. Чтобы вывести информацию об усилиях в балке, щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команды: **Element Force**, **Applied Loads**, **Grid Point Force Balance**. Нажимаем клавишу **OK**. В окне **Subcase Name** панели **Subcase** задаём имя «**s2**», устанавливаем указатель мыши на клавишу **Apply** и щелкаем левой клавишей.
- T.** Нажимаем клавишу **Subcase Select** на панели **Analysis**. Откроется одноименная панель (рис.94), на которой выбираем подблок «**s2**» и нажимаем кла-

вишу **OK**, далее нажимаем клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.

U. После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.

V. Определяем информацию о реакциях и внутренних усилиях в поперечных сечениях бруса. При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► Create;
Object ► Freebody;
Method ► Loads.

Отображение заданной нагрузки на модели

Выберем:

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.3)*;

тип результата: *Applied Loads*.

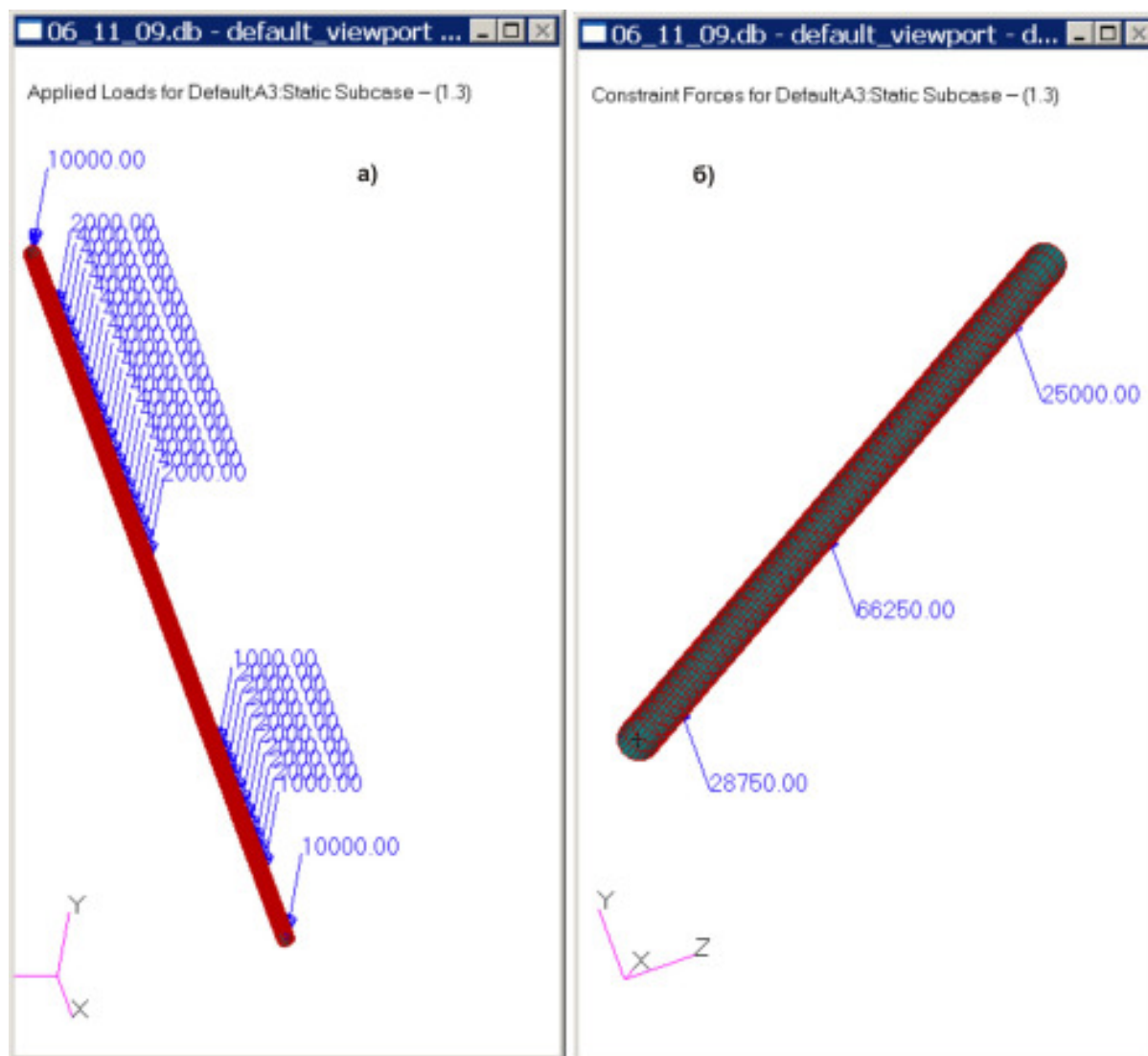


Рис.108

Нажимаем на клавишу  **Display Attributes**. В разделе **Показать (Show)** требуем показать силы и моменты, в разделе **Отображать как (Display as)** – компоненты, в разделе измерения (**Dimensions**) - объекты отображения в трехмерном пространстве. Нажимаем последовательно клавиши **Apply**,  и снова **Apply**. Появится изображение балки с заданной нагрузкой (рис.108,а).

Отображение реакций связи

Выберем:

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.3)*;
тип результата: *Constraint Forces*.

Нажимаем клавишу **Apply**. Появится изображение балки с реакциями связи (рис.108,б), которые полностью совпадают с ранее найденными в **MathCAD**.

Отображение деформированной схемы балки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Quick Plot*;

вариант расчета – *Default, A3: Static Subcase*;

тип результата: *Displacements, Translation*;

величину: *Magnitude*;

результаты деформированной модели: *Displacements, Translation*.

Нажимаем клавишу **Apply**. Появится изображение деформированной балки (рис.109).

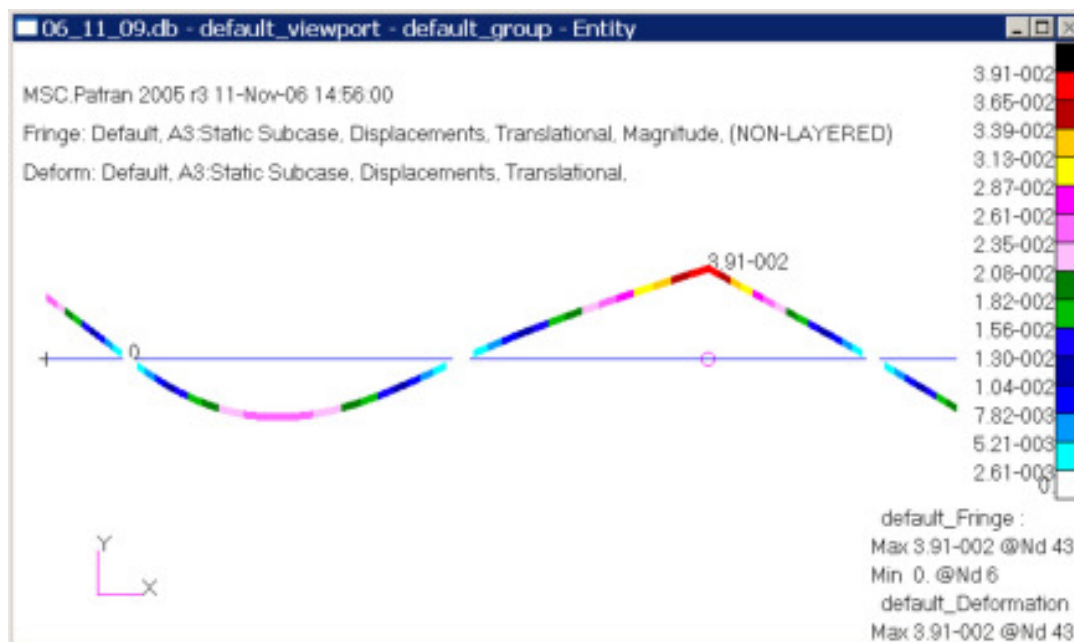


Рис.109

Отображение напряжений в одном из волокон балки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Quick Plot*;

вариант расчета – *Default, A3: Static Subcase*;

тип результата: *Bar Stresses, Bending*;

волокно: *Position...(At Point C)*

величину: *X Component*;

результаты деформированной модели: *Displacements, Translation*.

Нажимаем клавишу **Apply**. Появится изображение деформированной балки с изополями напряжений (рис.110).

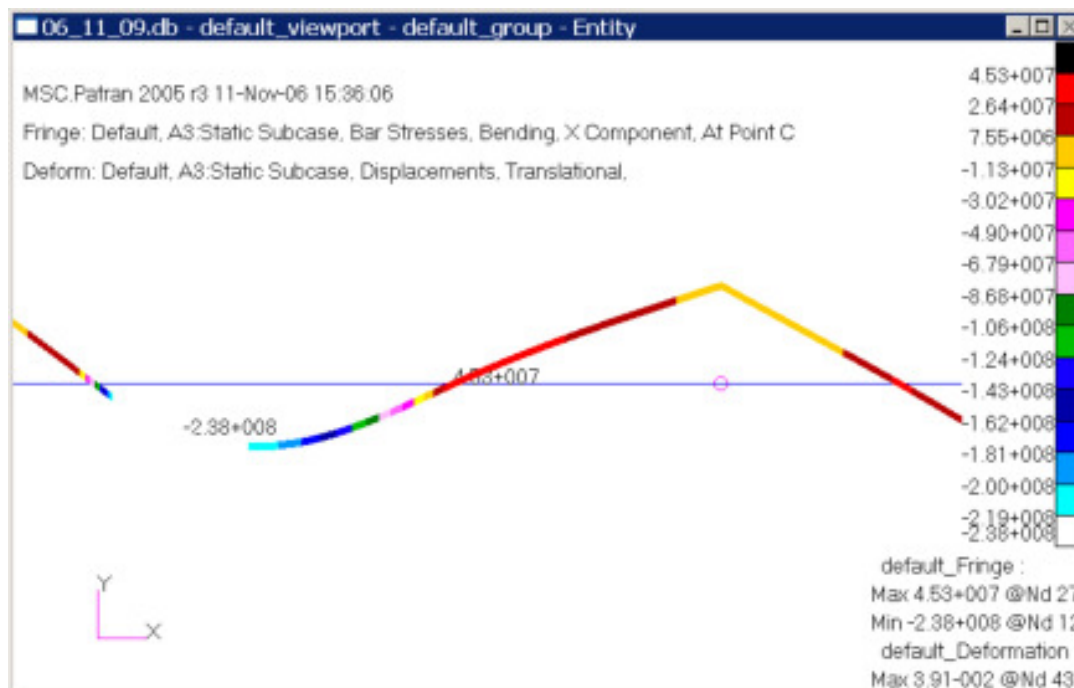














Рис.110

3.1.1.3. Решение задачи в SCAD

Алгоритм решения задачи

- A. Создаём новый проект. В окне панели **Создание нового проекта** вводим: наименование проекта, название объекта; выбираем: тип схемы и единицы измерения и щелкаем по кнопке **ОК**. Сохраняем новый проект в некотором файле.
- B. В главном окне конечно-элементного пакета **SCAD** активизируем раздел **Расчетная** схема.
- C. Активизируем раздел **Узлы и элементы**.
- D. Щелкаем по кнопке  **Узлы**. Воспользовавшись кнопкой  **Ввод узлов** с помощью диалогового окна **Ввод узлов**, зададим узлы со следующими координатами: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(8,0,0)$, $(10,0,0)$, $(11,0,0)$ м. Для отображения на экране вводимых узлов необходимо активизировать фильтр  **Узлы**. На панели **Фильтры отображения** нажимаем кнопку  номера узлов. Вид введенных нами узлов представлен на рис.111.
- E. Активизируем кнопку  **Элементы** и кнопку  **Номера элементов** панели **Фильтры отображения**. Щелкаем левой клавишей мыши по кнопке  **Добавление стержней** и затем последовательно по узлам **1...6**. В результате этих операций узлы будут соединены прямыми линиями (рис.112).

- Г.** В разделе «**Назначения**» задаём жесткость балки. Активируем кнопку  и в окно **Жесткости стержневых элементов** выбираем двутавр №30 с уклоном полок по ГОСТ 8239-89.
- Н.** Запретим перемещение узла 2 (шарнирно неподвижная опора *A*, *рис.104*) в направлении осей *x*, *y* и *z* и запретим повороты вокруг осей *x* и *z*; для узлов 3 и 5 (шарнирно-подвижные опоры *B* и *D*, *рис. 104*) запретим перемещения в направлении осей *y* и *z* и повороты вокруг осей *x* и *z*. Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра , для отображения общей системы координат – по кнопке фильтра .
- И.** Нагрузку на балку задаем в разделе «**Загружения**» (*рис.26*). Для отображения величин введенных нагрузок активируем кнопку фильтра . Внешний вид созданной конечно-элементной модели балки показан на *рис.114*.
- Ж.** Вставляем в четвертый узел шарнир. В разделе «**Назначение**» нажимаем кнопку  **Вставить шарнир**. Появится панель **Условия примыкания стержней** (*рис.115*), на которой освобождаем угловую связь относительно оси *y*. В рабочем окне щелкаем по четвертому узлу, который соединяет 50 и 51 элементы. Появится панель **Элементы в мишени** с просьбой выбрать элемент (*рис.116*). Выберем 51 элемент и подтвердим наш выбор щелкнув по кнопке **ОК** основного меню. В результате этих действий в четвертом узле появится шарнир (*рис.117*).

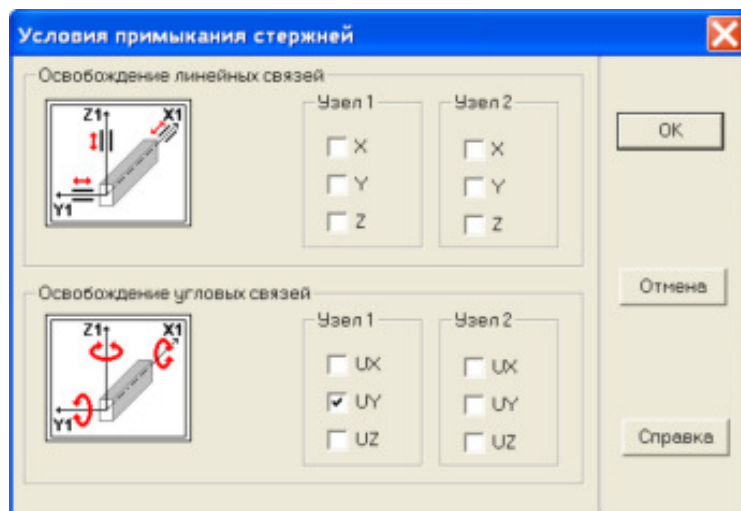


Рис.115

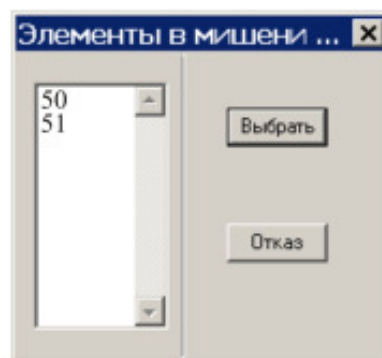
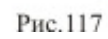
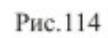
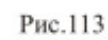
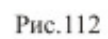
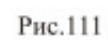


Рис.116

- К.** Выполняем расчет балки и переходим к графическому анализу полученных результатов.
- Л.** В разделе **Деформации** проверяем правильность деформированной схемы балки (*рис.118*). Внешний вид деформированной схемы балки возражений не вызывает: на опорах перемещения оси балки равны нулю, в шарнире наблюдается излом.
- М.** Выводим информацию об эпюрах *Q* и *M* (*рис.119, 120*).



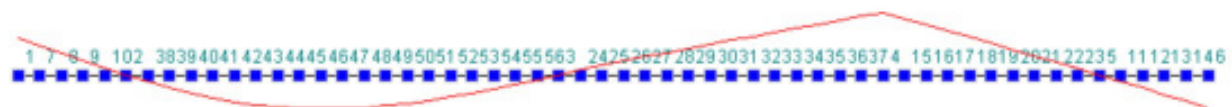
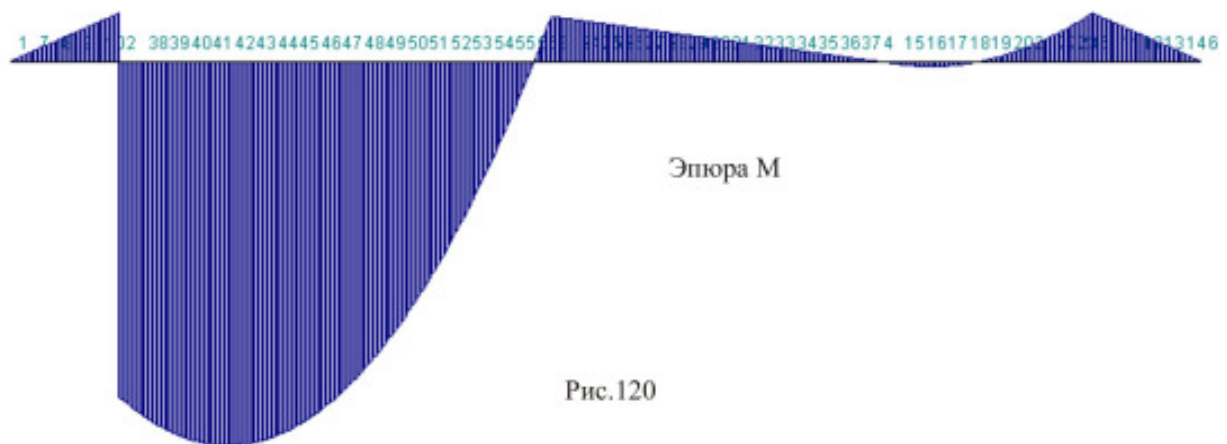
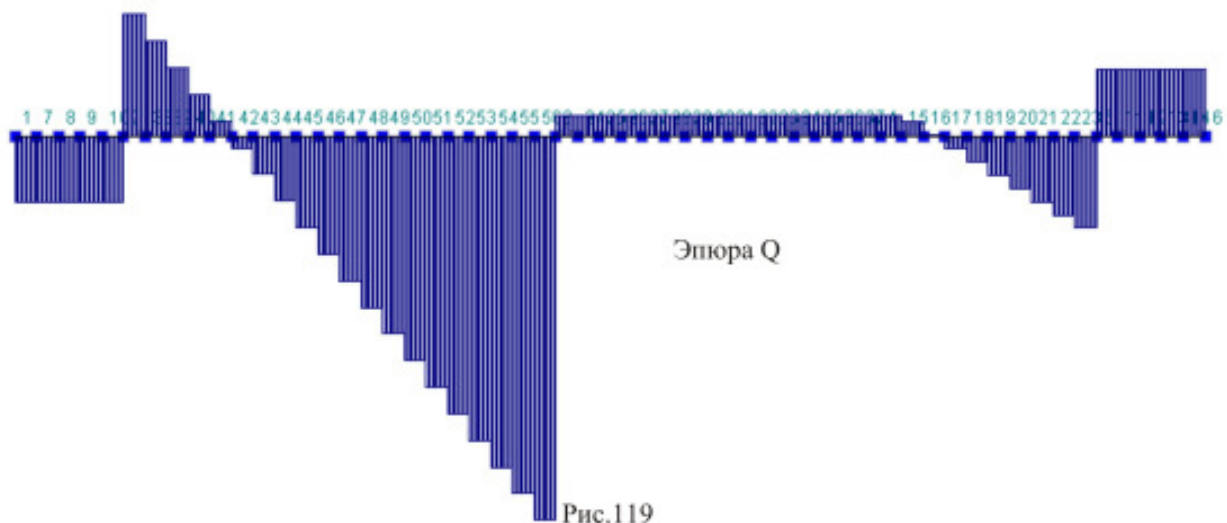


Рис.118



3.1.2. Составная рама

Найти реакции опор и давление в промежуточном шарнире составной конструкции (рис.121).

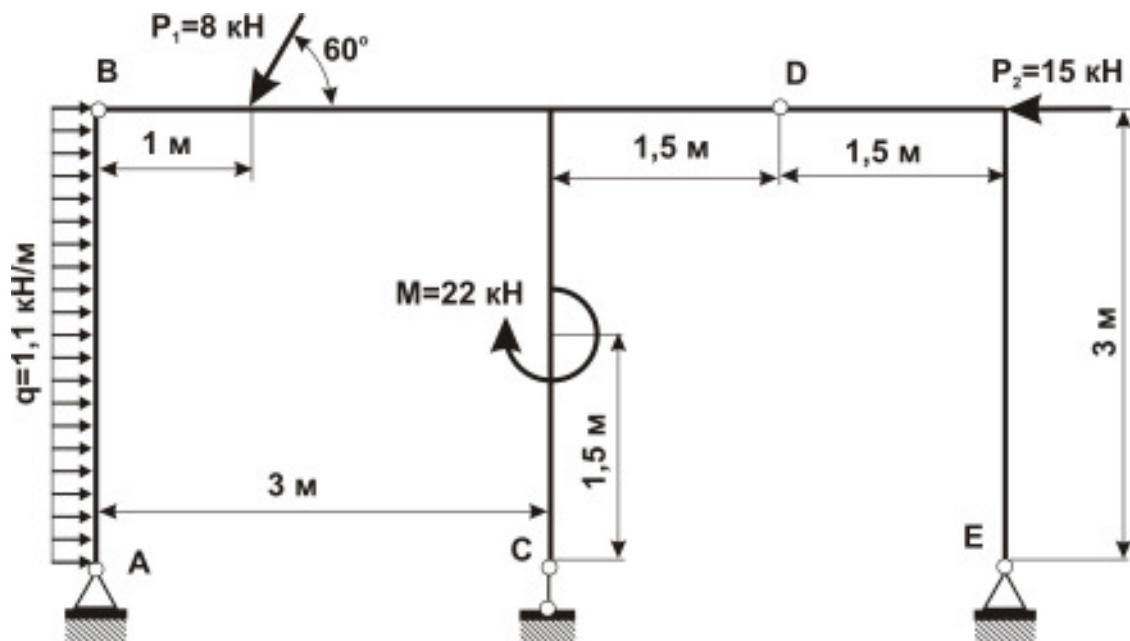


Рис.121

3.1.2.1. Решение задачи в MathCAD

Определение опорных реакций. Отсоединяем раму от связей, действие связей заменяем реакциями связей. Для полученной расчетной схемы (рис.122) составляем условия равновесия для системы сил, приложенных к раме. Решив полученную систему уравнений, находим величины опорных реакций: Y_A , Y_C , Y_E , X_A , X_E .

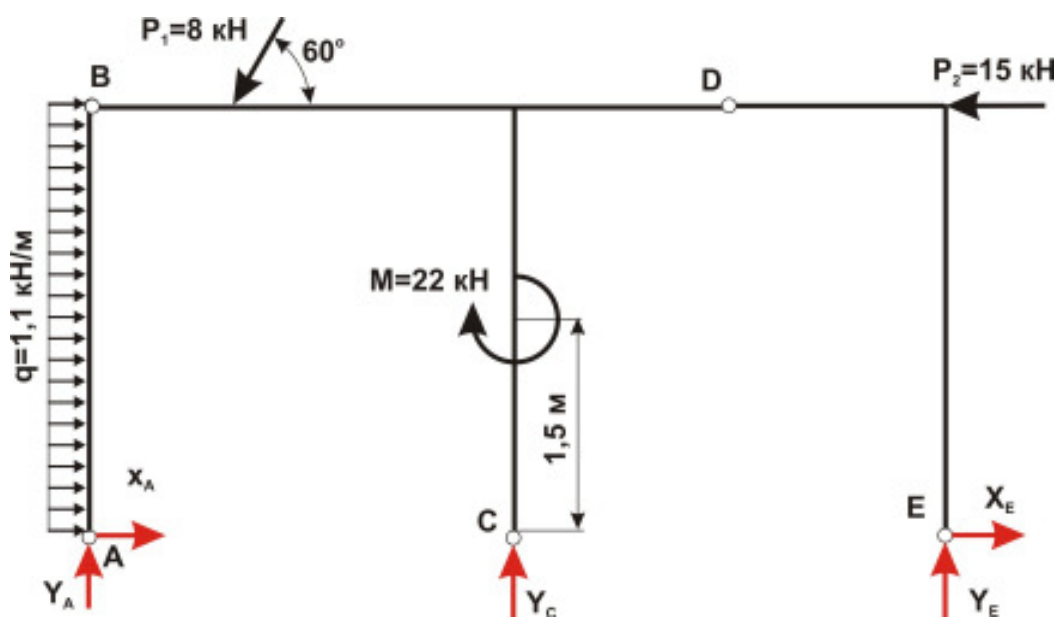


Рис.122

Дано: $P_1 := 8$ $P_2 := 15$ $M_0 := 22$ $q := 1.1$ $H := 3$ $h := 1.5$
 $\alpha := 60 \cdot \text{deg}$ $L := 1$

Решение

Определение опорных реакций:

$$X_A := 1 \quad Y_A := 1 \quad Y_C := 1 \quad X_E := 1 \quad Y_E := 1$$

$$\text{Given} \quad X_A + X_E - P_1 \cdot \cos(\alpha) - P_2 + q \cdot H = 0$$

$$Y_A + Y_E + Y_C - P_1 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$\frac{-q \cdot H^2}{2} + P_1 \cdot H \cdot \cos(\alpha) - P_1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha) - M_0 + P_2 \cdot H + Y_C \cdot H + Y_E \cdot 2 \cdot H = 0$$

$$X_A \cdot H + \frac{q \cdot H^2}{2} = 0 \quad Y_E \cdot h + X_E \cdot H = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_C \\ X_E \\ Y_E \end{pmatrix} := \text{Find}(X_A, Y_A, Y_C, X_E, Y_E) \quad \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_C \\ X_E \\ Y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.65 \\ -20.065 \\ 61.693 \\ 17.35 \\ -34.7 \end{pmatrix}$$

Так как **MathCAD** не позволяет строить эпюры внутренних силовых факторов непосредственно в рамках, разобьем раму по шарнирам на три части и для упрощения составления выражений для внутренних силовых факторов переопределим отрицательные значения реакций, одновременно изменив их направления (*рис.123*).

$$X_A := 1.65 \quad Y_A := 20.065 \quad Y_E := 34.7$$

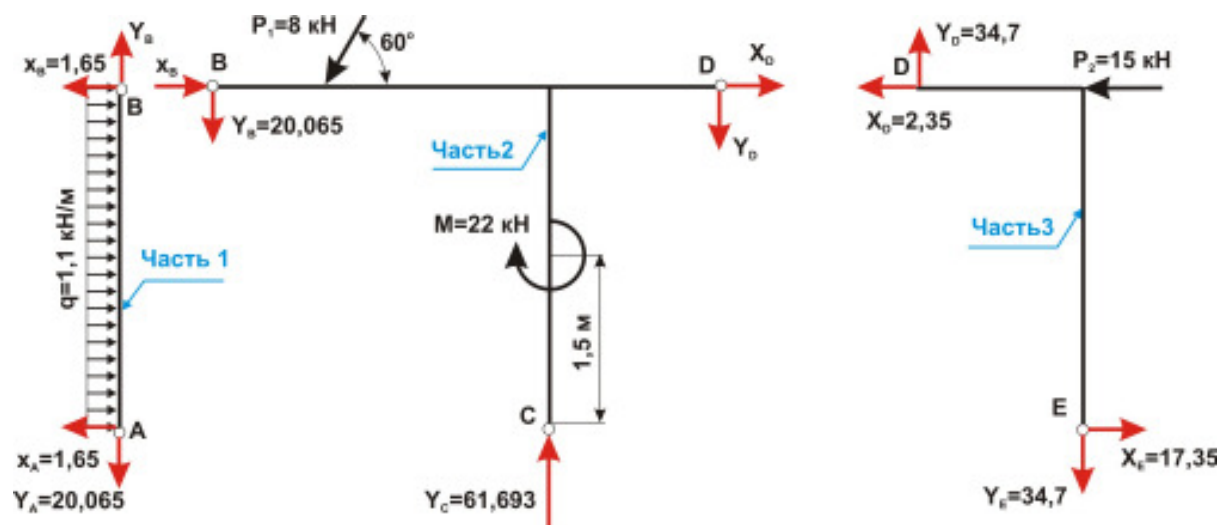


Рис.123

Построение эпюр. Определение внутренних усилий и построение эпюр этих усилий для пространственных брусьев с ломаной осью производится методом сечений в том же порядке, что и для обычных балок. Предварительно выбирают на каждом из участков бруса естественную систему координат, ось x которой совпадает с продольной осью бруса, а оси y и z проходят через центр тяжести поперечного сечения, совпадающего с началом участка, и расположены в его плоскости.

Положительные направления осей выбираются произвольно. Аналогия между правилами построения эпюр в раме (брусе с ломаной осью) и в балке будет полной, если предположить, что наблюдатель всегда находится внутри рамы и повернут лицом к ее оси.

Поперечные силы, расположенные в рассматриваемом сечении отсеченной части рамы, положительны, если их направление совпадает с положительным направлением осей y и z .

Продольные силы N считаются положительными при растяжении и отрицательными - при сжатии.

Для **изгибающих моментов** правила знаков не устанавливаются, а их эпюры изображают со стороны сжатых волокон бруса.

Итак, перейдем к определению внутренних усилий на каждом из участков рамы.

Разбиваем раму на части. В нашем случае их будет три. Первую часть рамы рассматриваем как шарнирно-опертую балку, загруженную равномерно распределенной нагрузкой. Вторая часть рамы представляет Т-образную раму, а третья часть рамы – Г-образную раму.

Определение внутренних силовых факторов для первой части рамы (рис.124).

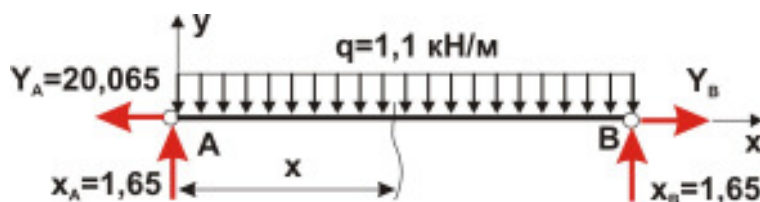
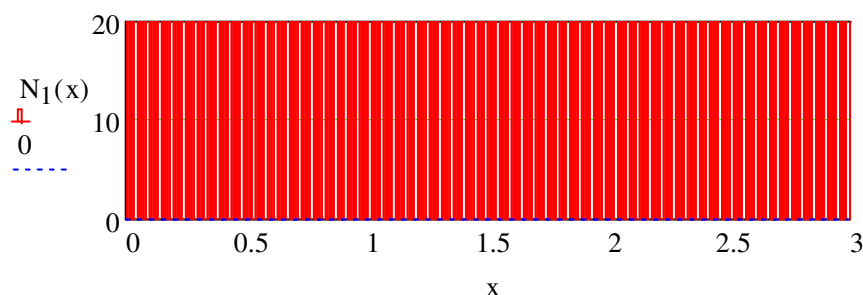


Рис.124

Построение эпюры нормальных сил

$$x := 0, 0.01 \dots 3$$

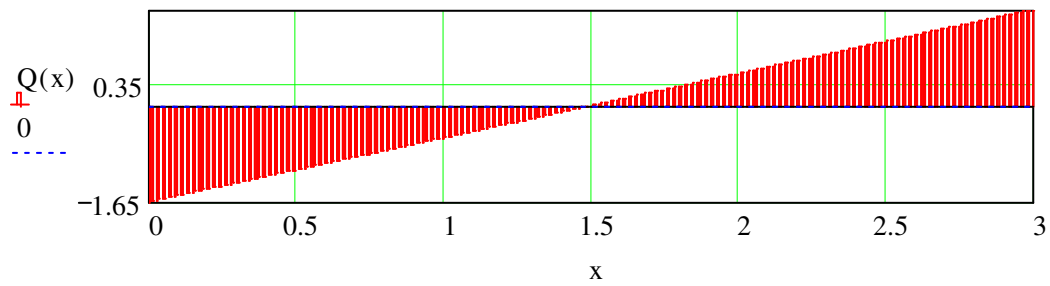
$$N_1(x) := Y_A$$



Построение эпюры поперечных сил

$$Q(x) := -X_A + q \cdot x$$

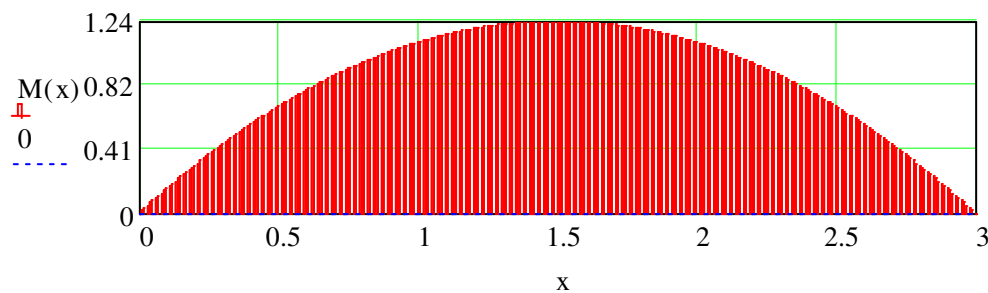
$$Q(3) = 1.65$$



Построение эпюры изгибающих моментов

$$M(x) := X_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$M(1.5) = 1.237$$



Определение внутренних силовых факторов для второй части рамы (рис.125).

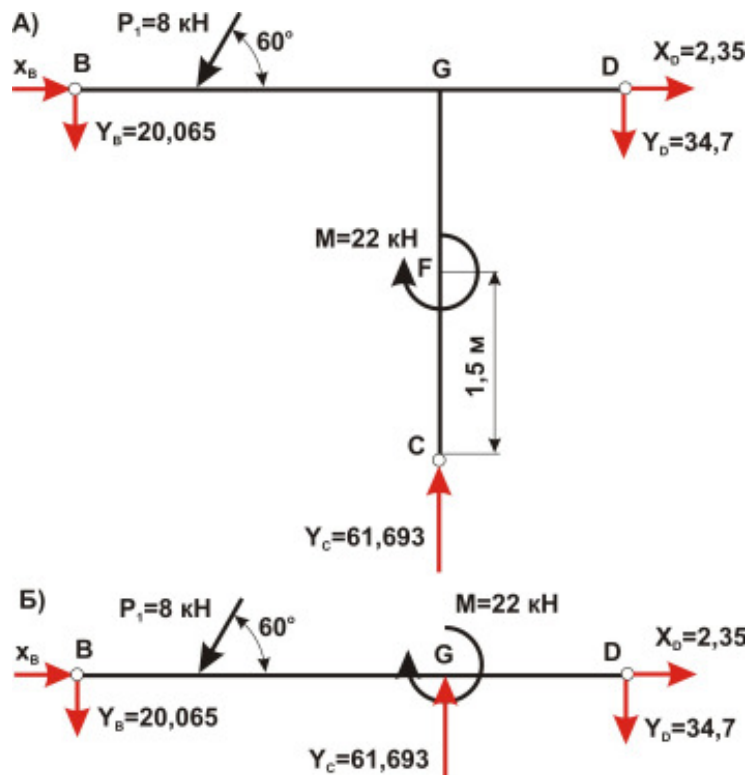


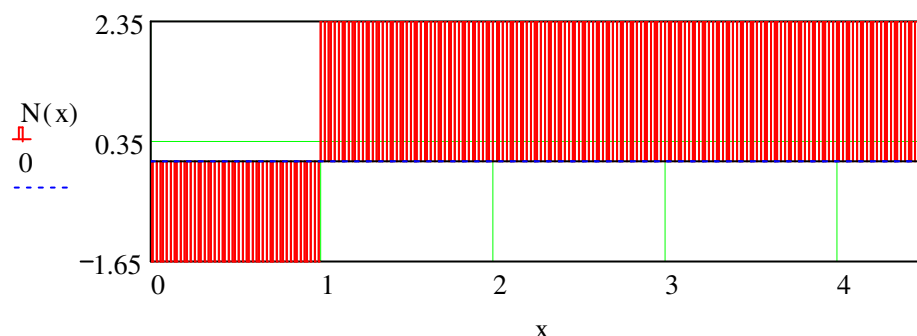
Рис.125

Так как в стойке **CG** участок **CF** не изгибается, а на участке **FG** действует только один изгибающий момент **M**, то в MathCAD'е эпюры будем строить только на ригеле (участок **BD**), рассматривая его как балку (рис.125, б).

$$L_n := H + h \quad x := 0, 0.02 \dots L_n \quad X_B := X_A$$

Построение эпюры нормальных сил на ригеле

$$N(x) := \begin{cases} -X_B & \text{if } 0 \leq x < L \\ -X_B + P_1 \cdot \cos(\alpha) & \text{if } L \leq x \leq L_n \end{cases}$$



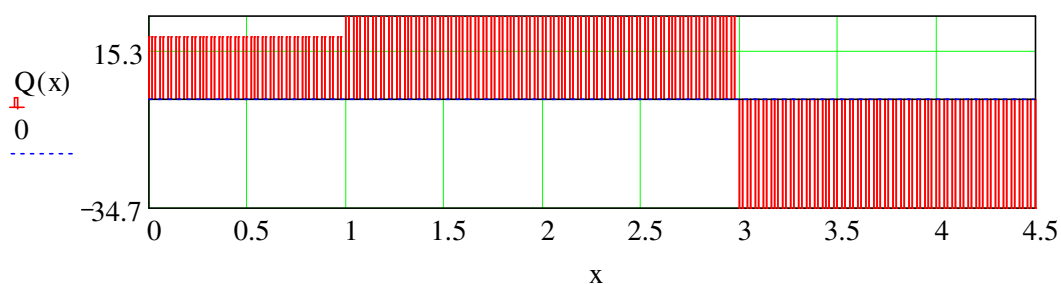
Построение эпюры поперечных сил

$$Q(x) := \begin{cases} Y_A & \text{if } 0 \leq x < L \\ Y_A + P_1 \cdot \sin(\alpha) & \text{if } L \leq x < H \\ Y_A + P_1 \cdot \sin(\alpha) - Y_C & \text{if } H \leq x \leq L_n \end{cases}$$

$$Q(0) = 20.065$$

$$Q(1) = 26.993$$

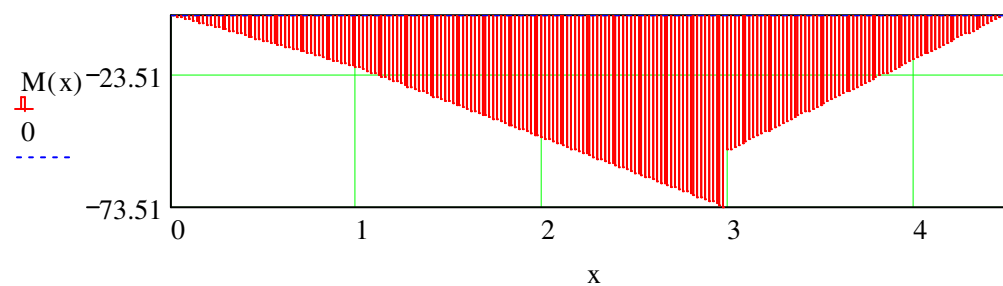
$$Q(4.5) = -34.7$$



Построение эпюры изгибающих моментов

$$M(x) := \begin{cases} -Y_A \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L \\ -Y_A \cdot x - P_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot (x - L) & \text{if } L \leq x < H \\ -Y_A \cdot x - P_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot (x - L) + M_0 + Y_C \cdot (x - H) & \text{if } H \leq x \leq L_n \end{cases}$$

$$M(3) = -52.051$$



Определение внутренних силовых факторов для *третьей части* рамы (рис.126).

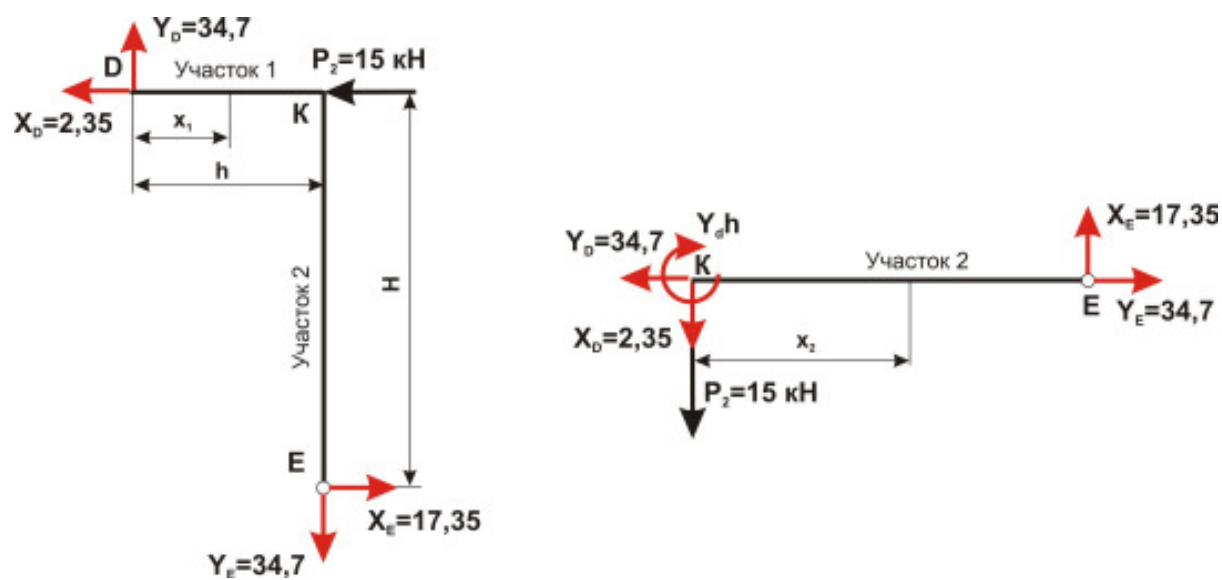
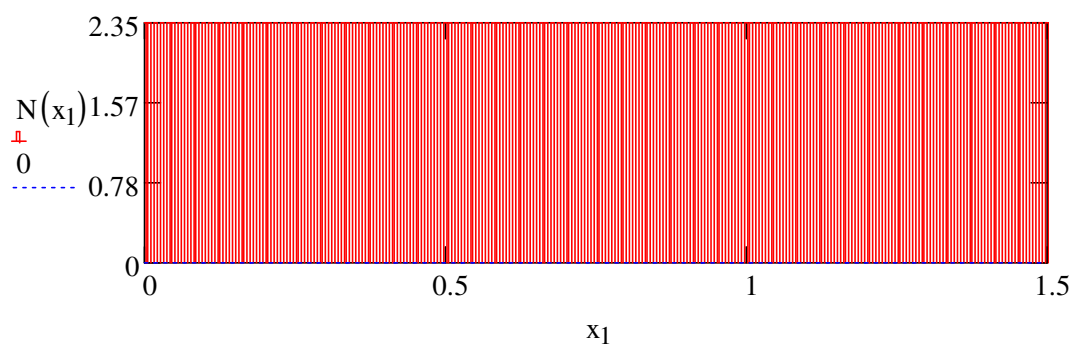


Рис.126

Участок 1 $x_1 := 0, 0.01 \dots h$

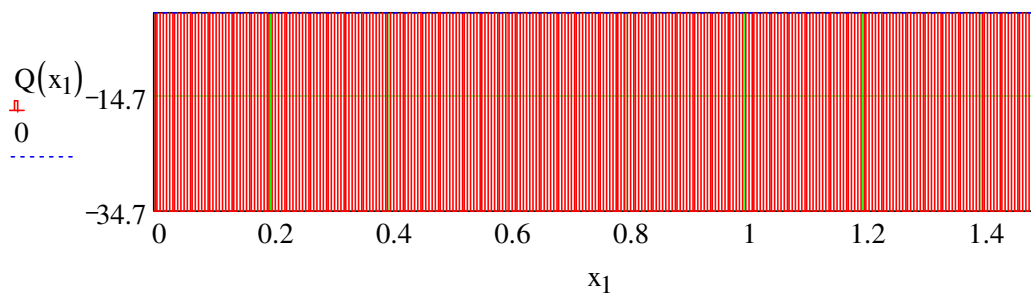
Построение эпюры нормальных сил $X_D := 2.35$ $N(x_1) := X_D$



Построение эпюры поперечных сил

$$Y_D := 34.7$$

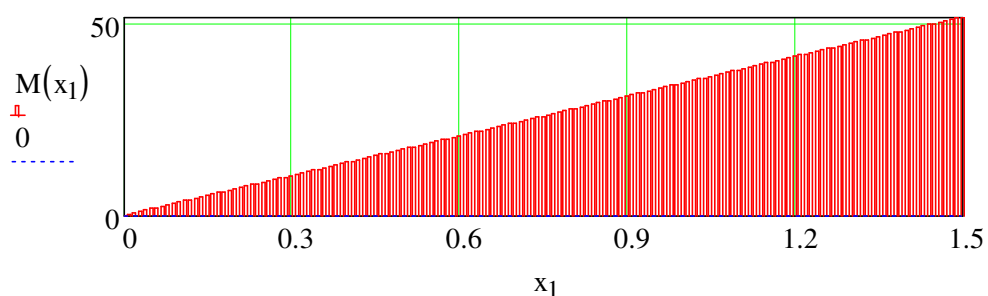
$$Q(x_1) := -Y_D$$



Построение эпюры изгибающих моментов

$$M(x_1) := Y_D \cdot x_1$$

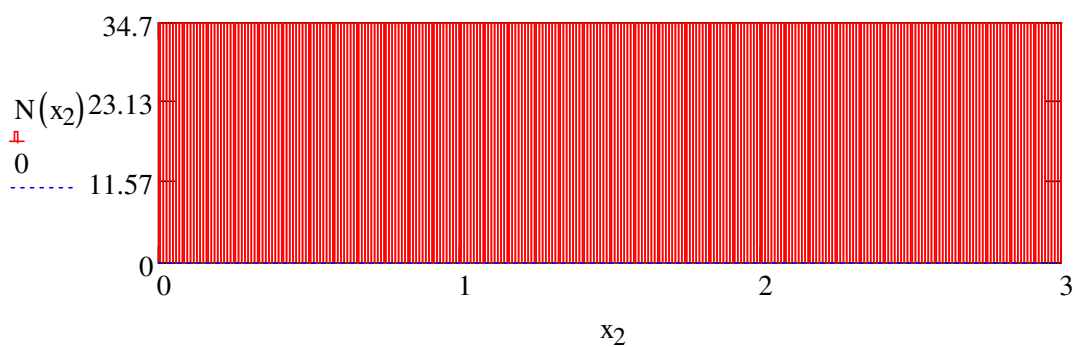
$$M(1.5) = 52.05$$



Участок 2

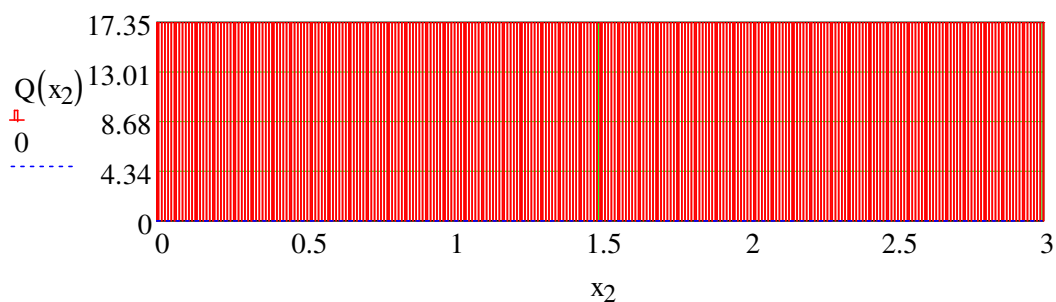
$$x_2 := 0, 0.01 \dots H$$

Построение эпюры нормальных сил



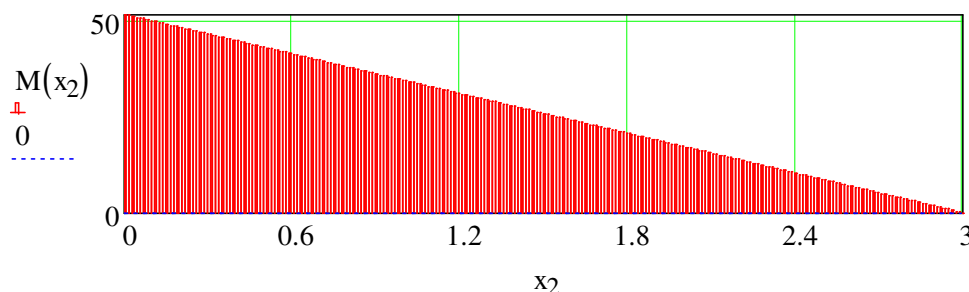
Построение эпюры поперечных сил

$$Q(x_2) := X_D + P_2$$



Построение эпюры изгибающих моментов










$$M(x_2) := -(X_D + P_2) \cdot x_2 + Y_D \cdot h$$



Используя вычисленную информацию о внутренних силовых факторах для каждой из частей рамы, строим эпюры N , Q и M для заданной рамы (рис.127).

3.1.2.2. Решение задачи в SCAD

Алгоритм решения задачи

- A.** Создаём новый проект. В окна панели **Создание нового проекта** вводим: наименование проекта, название объекта; выбираем: тип схемы и единицы измерения и щелкаем по кнопке **ОК**. Сохраняем новый проект в некотором файле.
- B.** В главном окне конечно-элементного пакета **SCAD** активизируем раздел **Расчетная схема**.
- C.** Активизируем раздел **Узлы и элементы**.
- D.** Щелкаем по кнопке  **Узлы**. Воспользовавшись кнопкой  **Ввод узлов**, с помощью диалогового окна **Ввод узлов** зададим узлы со следующими координатами: $(0,0,0)$, $(0,3,0)$, $(3,3,0)$, $(0,3,0)$, $(6,0,0)$ $(6,3,0)$ м. Для отображения на экране вводимых узлов необходимо активизировать фильтр  **Узлы**. На панели **Фильтры отображения** нажимаем кнопку  номера узлов.
- E.** Активизируем кнопку  **Элементы** и кнопку  **Номера элементов** панели **Фильтры отображения**. Щелкаем левой клавишей мыши по кнопке  **Добавление стержней** и затем последовательно по узлам **1...6**. В результате этих операций узлы будут соединены прямыми линиями.
- F.** Разобьём все стержни на **12** элементов.
- G.** Запретим перемещение узла **1** (шарнирно-неподвижная опора **A**, рис.122) в направлении осей **x**, **y** и **z**, и повороты вокруг осей **x** и **z**; для узлов **4** и **5** (шарнирно-подвижные опоры **C** и **E**, рис.104) запретим перемещения в направлении осей **y** и **z** и повороты вокруг осей **x** и **z**. Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра , для отображения общей системы координат – по кнопке фильтра . На рис.128 приведена полученная расчетная схема.

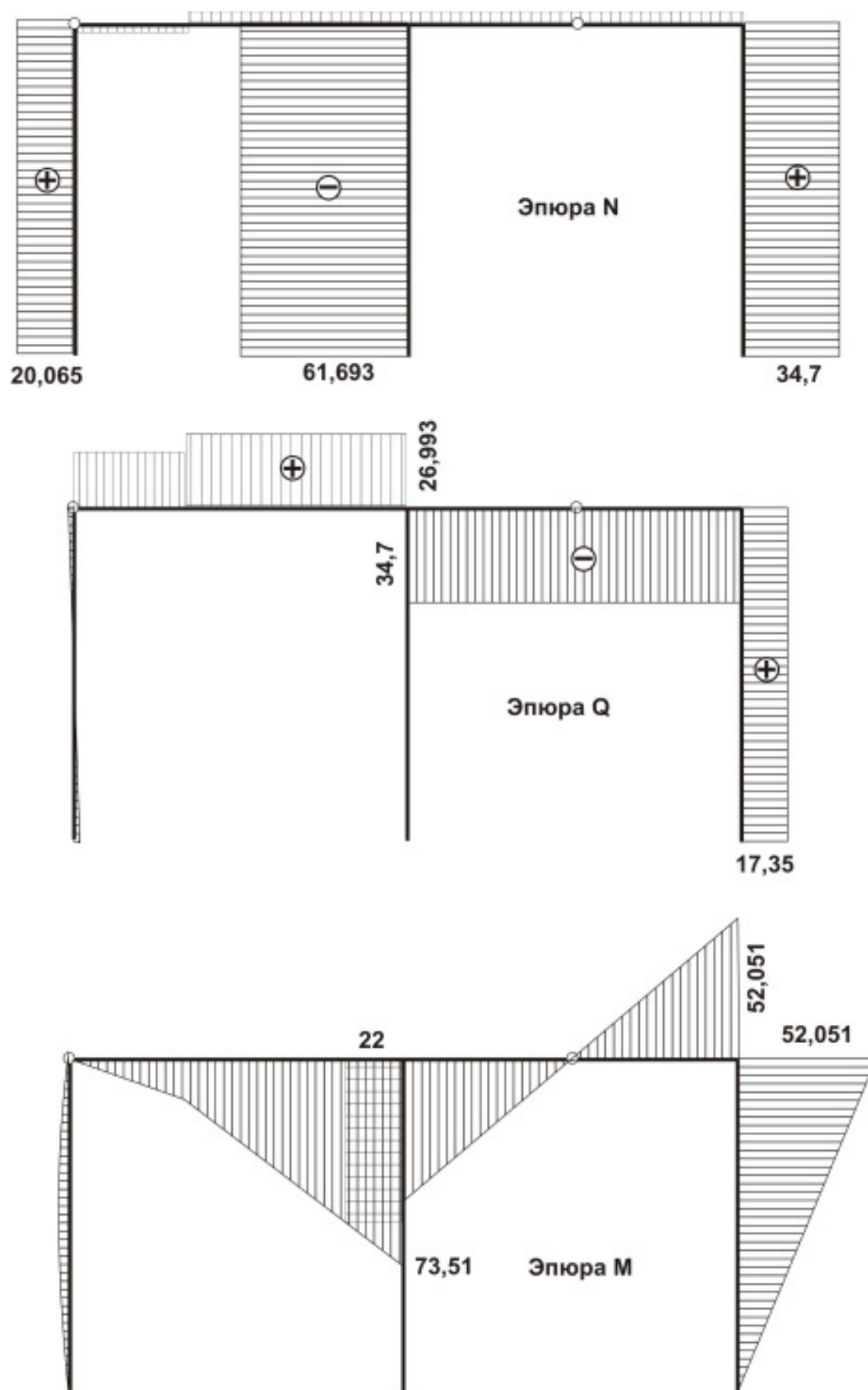


Рис.127

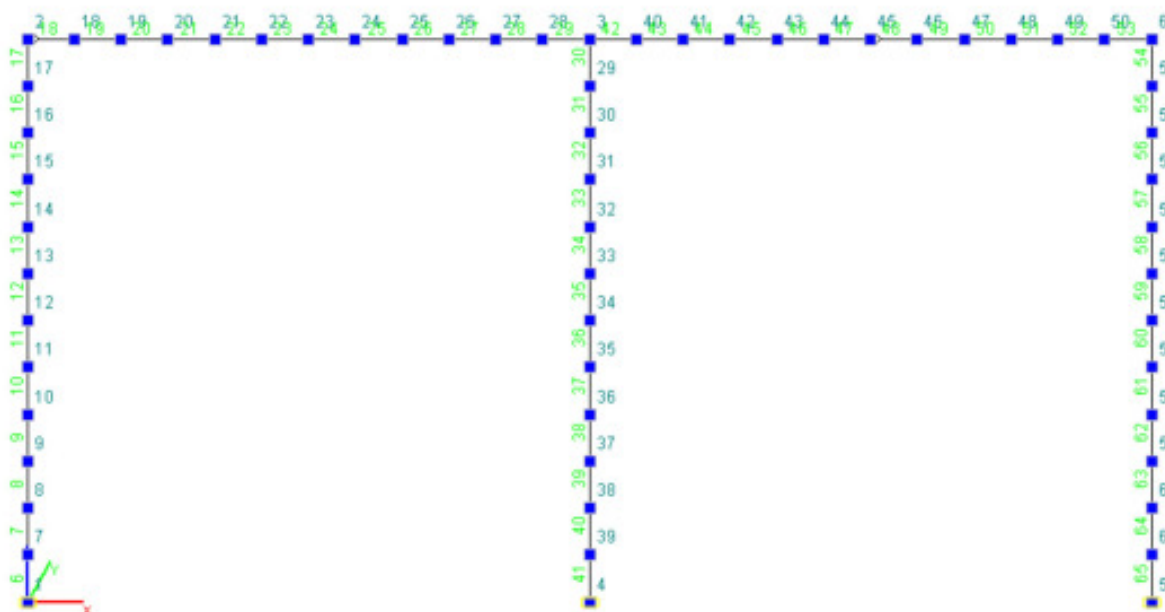





Рис.128

- Н. В разделе «Назначение» нажимаем кнопку  **Вставить шарнир**. Появится панель **Условия примыкания стержней** (рис.115), на которой освобождаем угловую связь относительно оси y в первом узле элемента. Выбираем элементы **18** и **48** и подтверждаем наш выбор, щелкнув по кнопке **ОК** основного меню. В результате этих действий в соответствующих узлах появится шарнир (рис.128).
- И. В разделе «Назначения» задаём жесткость балки. Активируем кнопку  и в окне **Жесткости стержневых элементов** выбираем двутавр **№30** с уклоном полок по ГОСТ 8239-89.
- Ж. Нагрузку на балку задаем в разделе «Загрузки». Для отображения величин введенных нагрузок активируем кнопку фильтра . Внешний вид созданной конечно-элементной модели балки показан на рис.129.

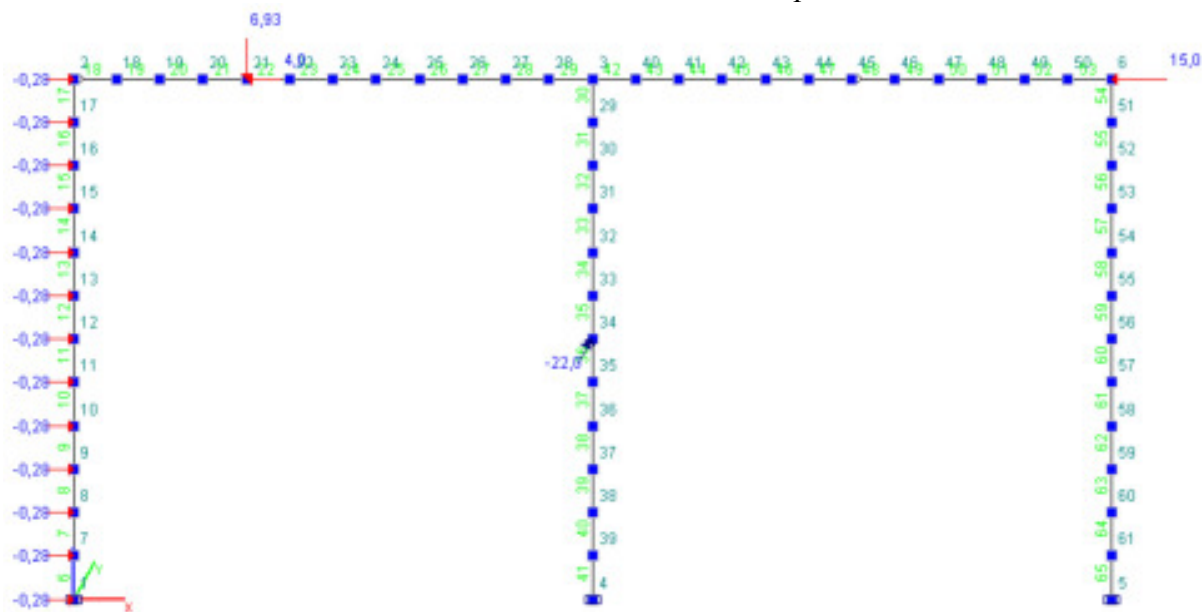


Рис.129

- А.** Выполняем расчет рамы и переходим к графическому анализу полученных результатов.
- В.** В разделе **Деформации** проверяем правильность деформированной схемы рамы (рис.130). Внешний вид деформированной схемы рамы не противоречит физическим представлениям.
- С.** Выводим информацию об эпюрах Q и M (рис.131, 132).

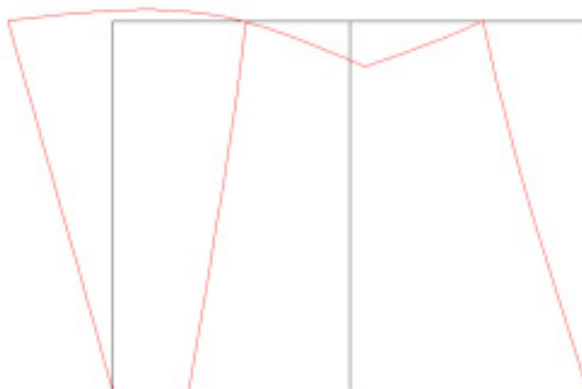


Рис.130



Рис.131

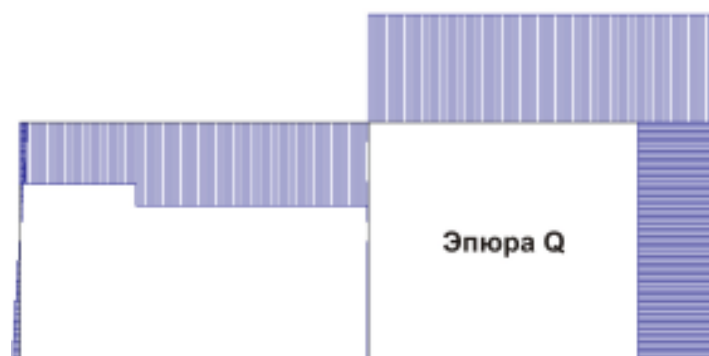




Рис.132



Рис.133

3.1.2.2. Решение задачи в MSC.Patran-Nastran 2005

Алгоритм создания конечно-элементной модели рамы

- A. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.
- B. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
Action► Create
Object► Point
Method► XYZ.
- C. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты границ участков: $[0\ 0\ 0]$, $[0\ 3\ 0]$, $[3\ 3\ 0]$, $[3\ 0\ 0]$, $[4.5\ 3\ 0]$, $[6\ 3\ 0]$, $[6\ 0\ 0]$. Для контроля положения введенных точек активизируем кнопку  «Положение точек».
- D. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**.
- E. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам.
- F. Открываем форму приложения **Materials** и задаём имя материала **st** и его физико-механические характеристики: **Elastic Modulus = 2e11**, **Poisson Ratio = 0.3**. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options** и по кнопке **Apply** на панели **Materials**.
- G. Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **1D**, тип элементов – **Beam**. В окне **Property Set Name** задаём имя **Stergen** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала: щёлкаем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **st**. Щелчок левой клавишей мыши по имени материала приводит к появлению записи **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. Нажимаем клавишу **Create Section** и выбираем сечение – сплошное круглое. В поле **New Section Name** задаём имя **krug** и нажимаем клавишу **OK**. Панель **Beam Library** закроется, в окне **Section Name** панели **Input Properties** появится новое имя **krug**. В окне **Bar Orientation** задаём ориентацию поперечного сечения балки: $\langle 0\ 1\ 0 \rangle$ и, щелкнув по клавише **OK**, возвращаемся к панели **Element Properties**. Так как рама состоит из вертикальных и горизонтальных стержней, то ориентация поперечного сечения балки у них различна. Поэтому надо отдельно задавать свойства горизонтальных и вертикальных стержней. Операции по заданию свойств вертикальных стержней те же, что и для горизонтальных стержней, за исключени-

ем того, что в окне **Property Set Name** задаём имя **Stergen_v**, а в окне **Bar Orientation** задаём: **<1 0 0>**. Щелкаем по клавише **OK** и возвращаемся к панели **Element Properties**, на которой нажимаем клавишу **Apply**.

- H.** Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели (рис.54).
- I.** Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели рамы. В поле **Number** задаем число элементов на кривой (в нашем случае на стойках - **30** элементов; на ригеле для трехметрового пролета - **30**, для полутораметровых - **15**).
- J.** Переходим к созданию сетки. Активируем команду **Object►Mesh**. Появляется панель **Finite Elements** (рис.105).
- K.** Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой для горизонтальных стержней выбираем свойства элементов **Stergen**. Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**.
- L.** В графическом окне выделяем все горизонтальные стержни рамы и нажимаем клавишу **Apply**.
- M.** Повторяем только что описанные процедуры для вертикальных стержней, выделяя на панели **Property Sets** свойства **Stergen_v**.
- N.** Активируем команду **Action►Create►Equivalence**. Панель **Finite Elements** примет вид как на рис.106. Исключаем из операции **Equivalence** узлы, совпадающие с шарнирами **B** и **D** (рис.121), щелчком в окне **Nodes to be excluded** активируем его, затем в графическом окне выделяем узлы **187**, **250** (шарнир **B**) и **296**, **297** (шарнир **D**). Щелкнем по кнопке **Apply**. В графическом окне будут отмечены узлы, для которых выполнена операция **Equivalence**, а в информационной панели появится сообщение о том, что объединено три узла.
- O.** Создаём **MPC** для шарниров **B** и **D**. Устанавливаем опции:
- Action ► Create**
 - Object ► MPC**
 - Type ► Explicit.**

Щелкаем по клавише **Define Terms**. Появится одноименная панель (рис.107).

- P.** В окне **DOFs** панели **Define Terms** указываем, на какие степени свободы будут наложены связи (в нашем случае при нажатой клавише **Shift** щелкаем левой клавишей мыши по **UX** и **UY**). В окне **Node List** вводим **Node 187**. Щелкаем по клавише **Apply**. Опция **Create Dependent** автоматически закрывается, опция **Create Independent** становится активной (рис.107).
- Q.** В окне **Node List** вводим **Node 250** и щелкаем по клавишам **Apply** на панели **Define Terms** и панели **Finite Elements**.
- R.** Повторяем операции, описанные в пунктах **P**, **Q**, для узла **D**.
- S.** Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активируем команды:

- Action►Create**
- Object►Displacement**
- Type►Nodal.**

В окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия для шарнирно-неподвижных опор **A** и **E** (рис.121). Запрещаем все три поступательных перемещения **u**, **v**, **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**. Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. Щелкаем левой клавишей мыши в графическом окне по узлам,

совпадающим с опорами **A** и **E**, при нажатой клавише **Shift**. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. Вводим третью кинематическую связь **d2** для шарнирно-подвижной опоры **C**: запрещены перемещения v , w и повороты относительно осей x и y .

Для задания силовых граничных условий активизируем команду **Object►Force**. Распределенные нагрузки q на стойке **AB** преобразуем к узловой нагрузке: $(1100 \cdot 3) / 30$, где число **30** соответствует числу элементов, образующих стойку **AB**. В окне **New Set Name** задаем имя распределенной нагрузки **q1**. Щелкаем по кнопке **Input Data...** Открывается одноименная панель, в окне которой вводим компоненты вектора распределенной нагрузки **<110 0 0>**. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. В графическом окне выделяем все узлы стойки **AB**, за исключением двух крайних, в которых нагрузка должна быть **55 Н**. На панели **Select Application Region** щелкаем по кнопке **OK**, на панели **Loads/Boundary Conditions** - по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенных сил.

Снова в окне **New Set Name** задаем имя распределенной нагрузки **q2** и аналогичным образом задаём нагрузку **55 Н** в двух крайних узлах стойки **AB**: **<55 0 0>**.

Эти операции повторяем до тех пор пока не будут введены все нагрузки. На *рис.134* представлен вид рамы после введения всех нагрузок.

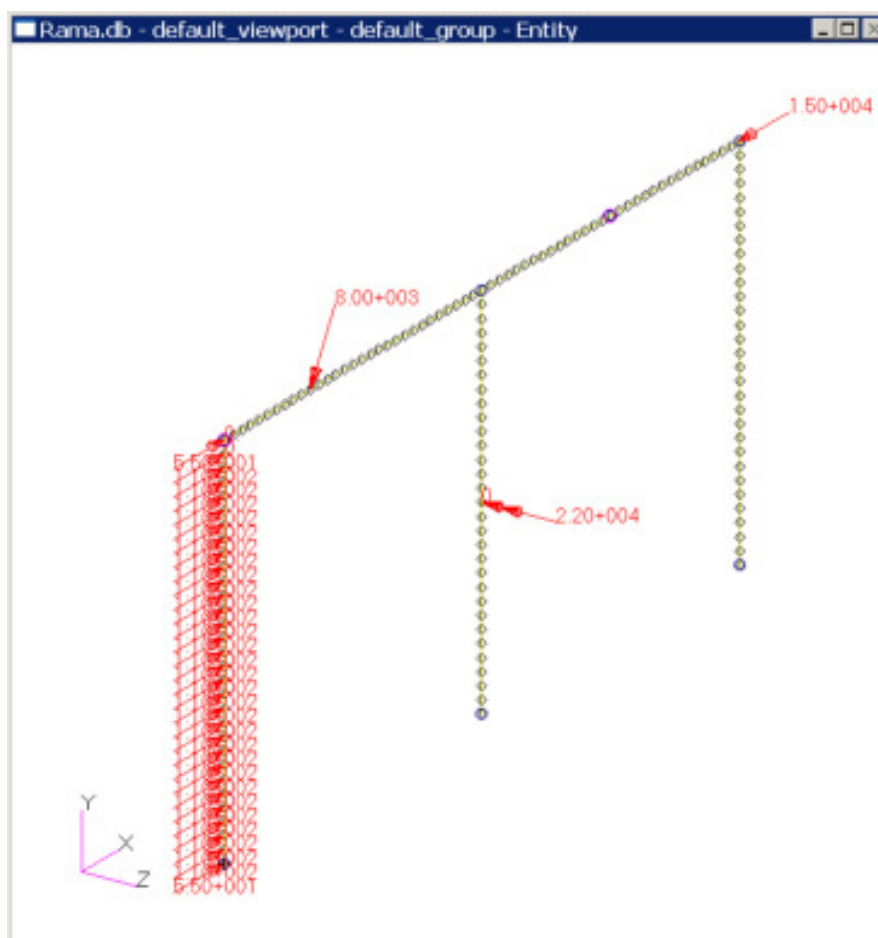






Рис.134

- T.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Внешний вид панели **Analysis** приведен на *рис.63*. Для расчета рамы выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. Для того чтобы изменить вычисляемые решателем **Nastran** параметры, нажимаем клавиши **Subcase** (подблока), **Output Request** (запрос на вывод), открывается панель **Output Request**. Чтобы вывести информацию об усилиях в балке, щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команды **Element Force, Applied Loads, Grid Point Force Balance**. Нажимаем клавишу **OK**. В окне **Subcase Name** панели **Subcase** задаём имя «**s2**»; устанавливаем указатель мыши на клавишу **Apply** и щелкаем левой клавишей мыши.
- U.** Нажимаем клавишу **Subcase Select** на панели **Analysis**. Откроется одноименная панель (*рис.94*), на которой выбираем подблок «**s2**» и нажимаем клавишу **OK**, затем клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.
- V.** После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.
- W.** Определяем информацию о деформированном состоянии конструкции, реакциях и внутренних усилиях в поперечных сечениях рамы.

Отображение деформированной схемы рамы

При нажатой клавише  **Select Results** выберем (*рис.135,а*):
Action ► Create;
Object ► Quick Plot;
 вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase;*
 тип результата: *Displacements, Translational;*
 величину: *Magnitude;*
 результаты деформированной модели: *Displacements, Translational.*

Клавиши  и  позволяют изменить атрибуты отображения рамы. Например, нажатие на клавишу  приводит к появлению панели (*рис.135,б*), в окнах и списках которой можно изменить параметры отображения, такие, как спектр, диапазоны отображения перемещений, ширина линии и т.п. После установка параметров отображения щелкаем по клавишам **Apply**. Появится изображение деформированной рамы с изополями перемещений (*рис.136*), из которого следует:

- деформированный вид рамы подобен приведенному на *рис.130*, полученному в системе **SCAD**;
- при заданной нагрузке максимальные перемещения наблюдаются на опоре **C** и составляют **0.829 м**, что, конечно, для реальной рамы неприемлемо!

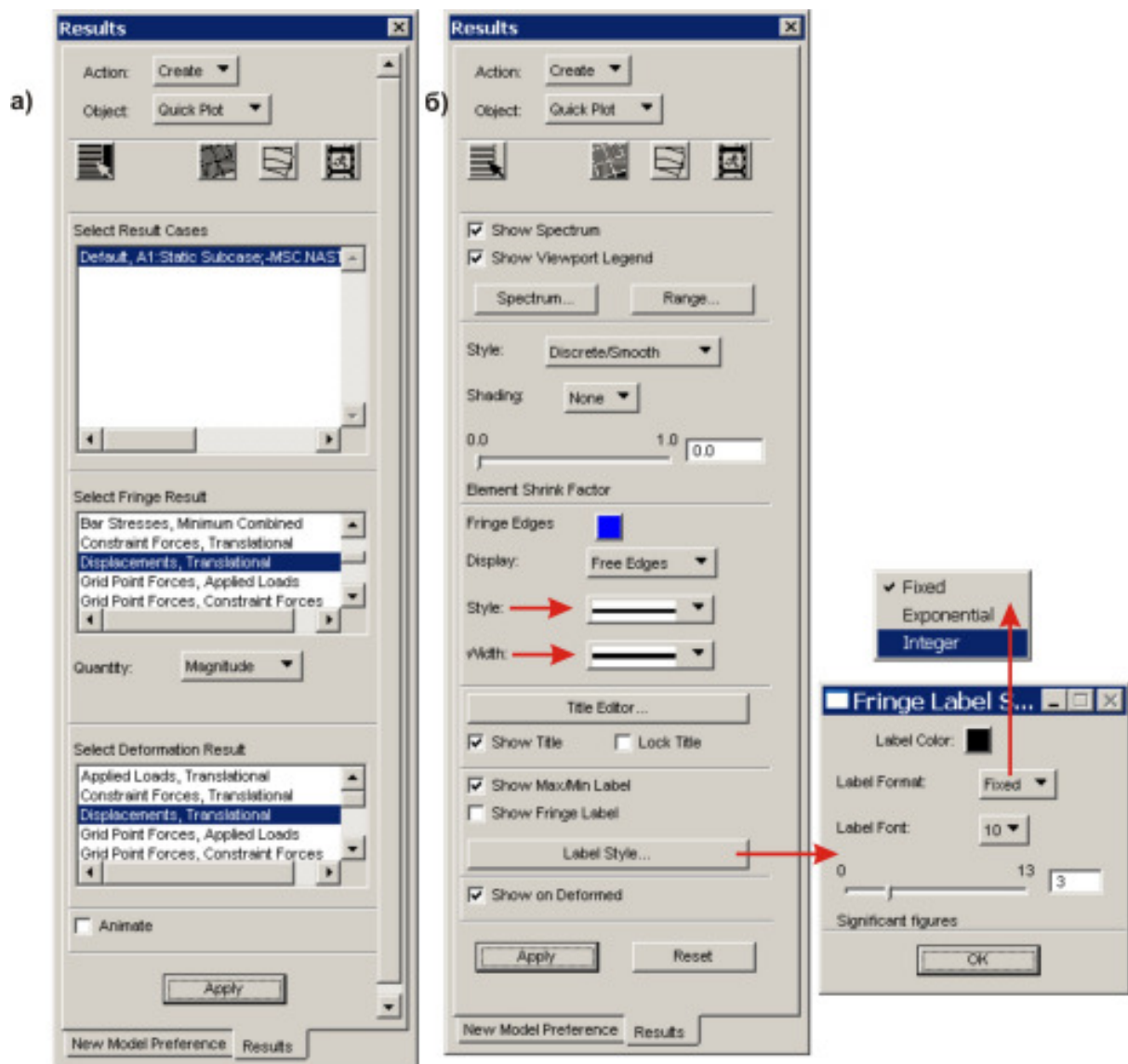


Рис.135

Отображение заданной нагрузки и реакций связей в шарнирных узлах рамы

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Freebody*;

Metod ► *Loads*;

вариант расчета – *Default*;

тип результата: *Freebody Loads*.

Нажимаем на клавишу  **Display Attributes**. В разделе **Показать (Show)** требуем показать силы и моменты, в разделе **Отображать как (Display as)** – компоненты, в разделе измерения (**Dimensions**) - объекты отображения в трехмерном пространстве. Нажимаем последовательно клавиши **Apply**,  и снова **Apply**. Появится изображение рамы с заданной нагрузкой и реакциями в шарнирах (рис.137), которые в точности совпадают с приведенными на рис.123.

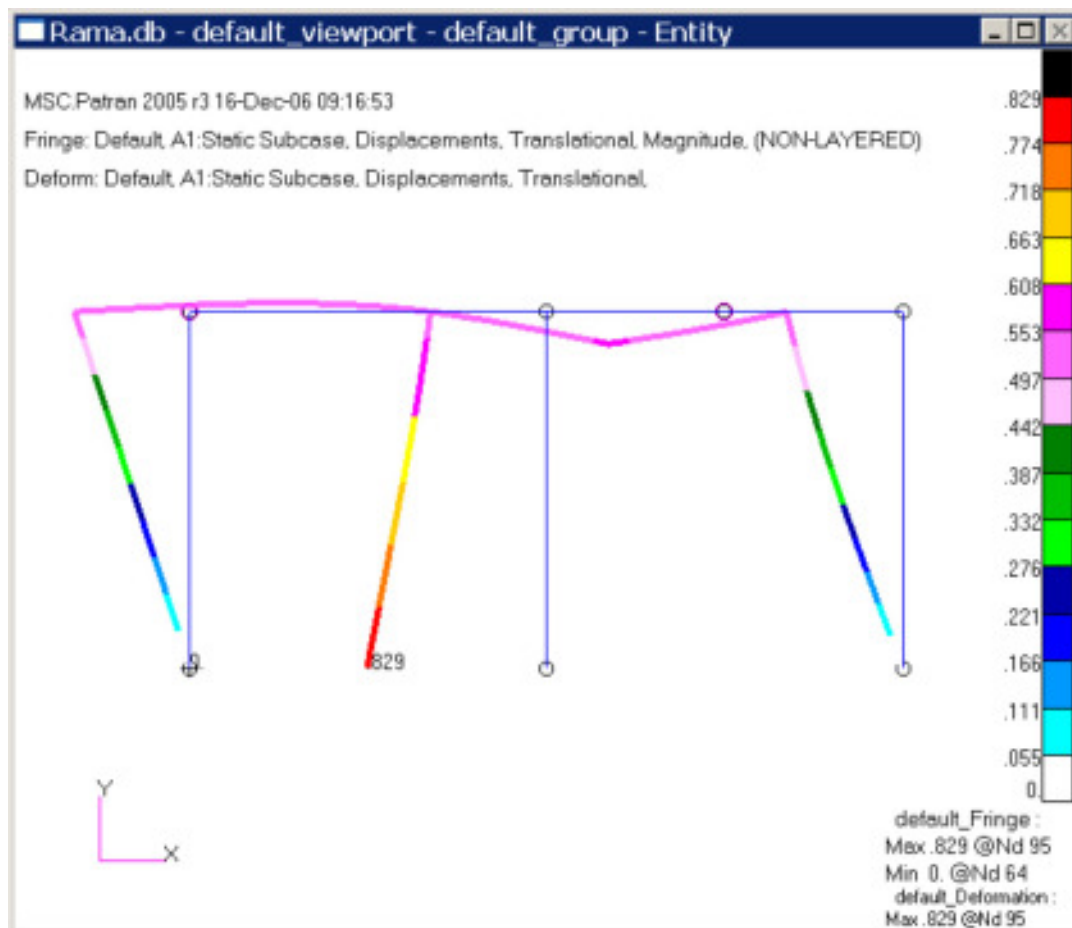


Рис.136

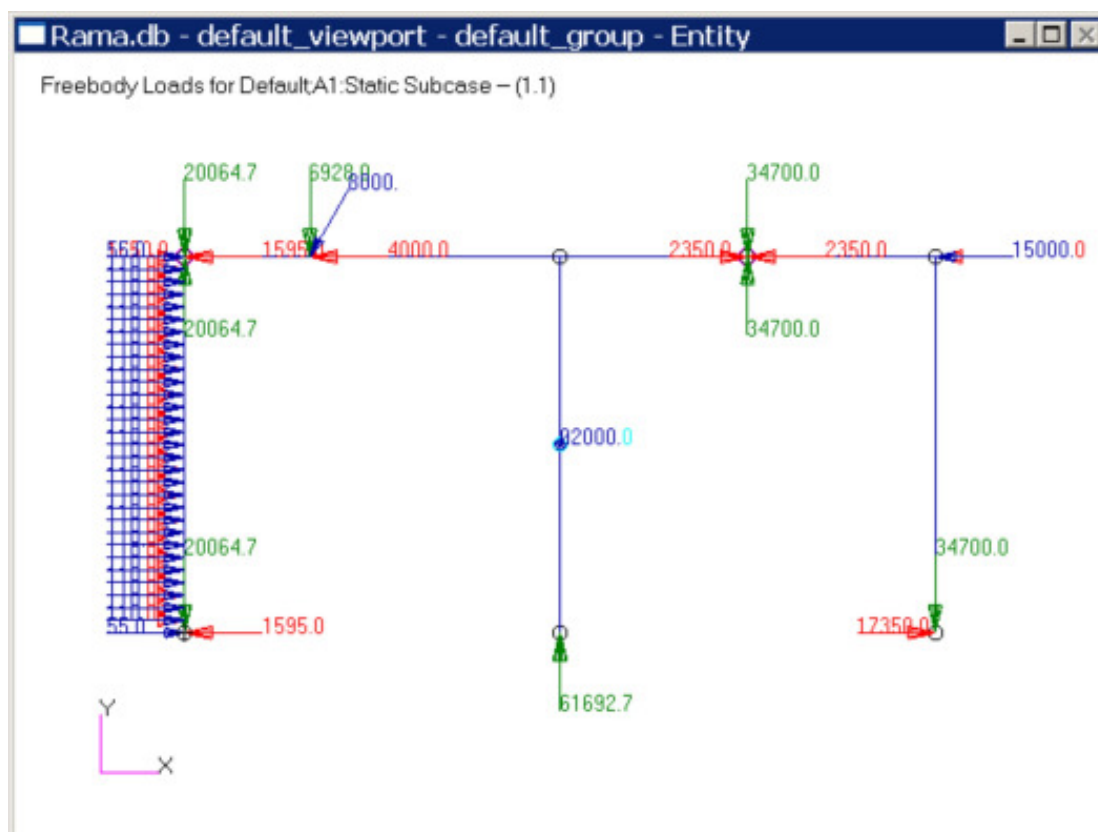


Рис.137

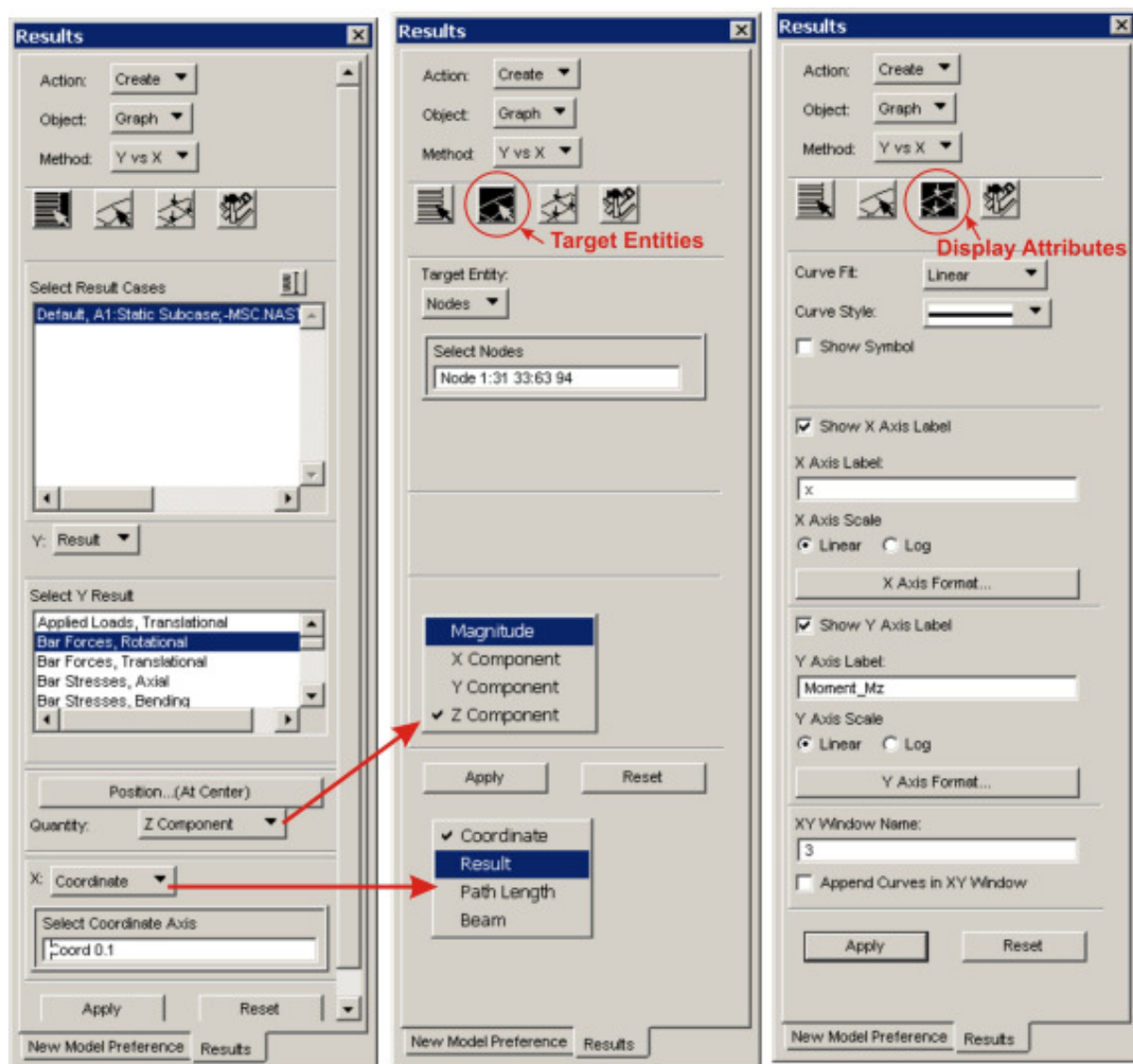


Рис.138

Отображение графиков изменения внутренних усилий вдоль стержней и ригеля

Patran не строит эпюр внутренних усилий, но позволяет получать графики вдоль прямой линии различных предварительно рассчитанных величин (находящихся в базе данных результатов). Поэтому проиллюстрируем лишь построение эпюры моментов на ригеле рамы.

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Graph*;


Method ► *Y vs X*;


вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase*;

тип результата: *Bar Forces, Rotational*;

компоненты вектора: *Z Component*

ось X: *Coordinate* .

Активизируем кнопку  **Target Entities**, позволяющую фильтровать результаты расчетов. Панель **Results** изменит вид (рис.138). В графическом окне **Patran** выделим узлы, принадлежащие ригелю. Их номера появятся в окне **Select Nodes**.

Активизируем кнопку  **Display Attributes**. Панель **Results** снова изменит вид (рис.138). В окнах этой панели зададим параметры графика: стиль графика и название осей. Нажимаем клавишу **Apply**, в графическом окне появится график, приведенный на рис.139, который не противоречит эпюре моментов, приведенной на рис.127. Аналогичным путем можно вывести графики (эпюры) моментов и вдоль стоек рамы.

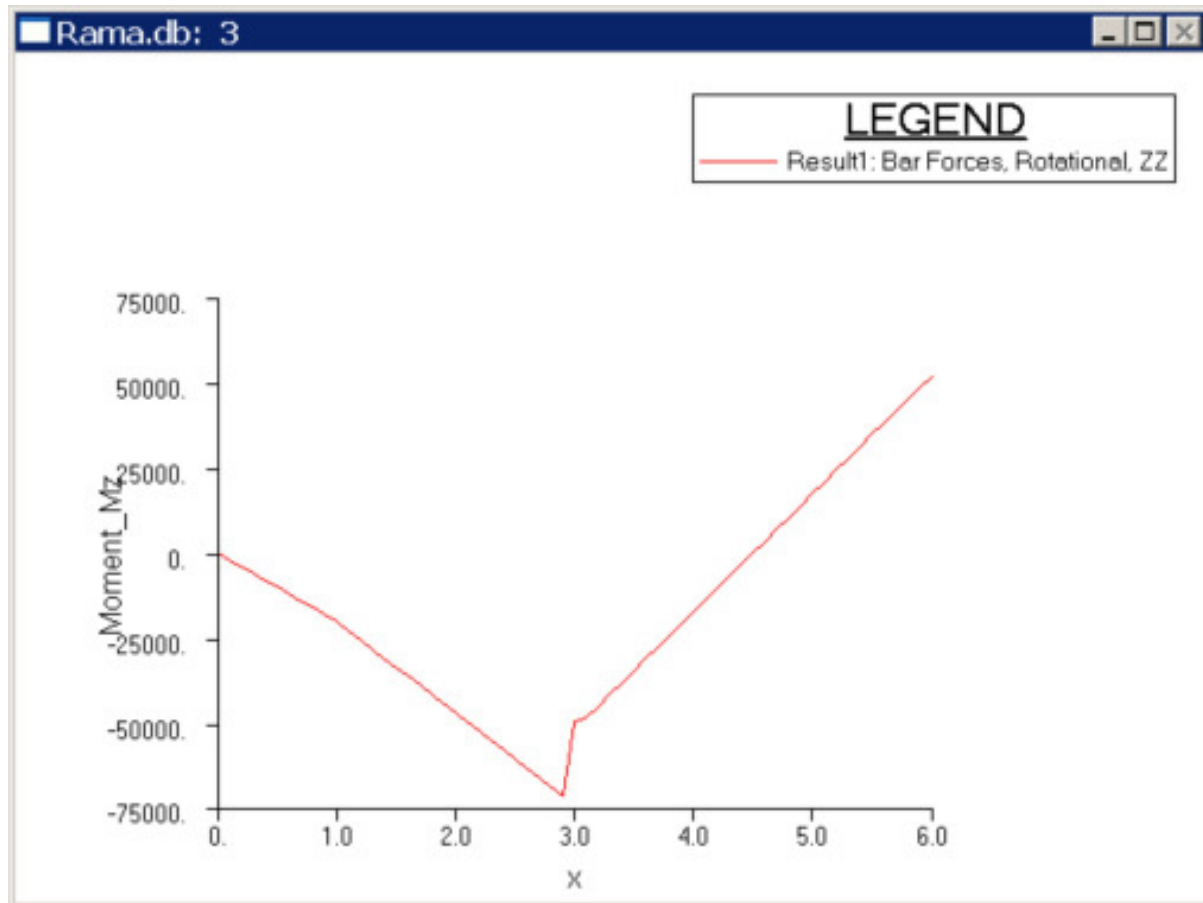


Рис.139

3.2. РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Никакая из современных наук не в состоянии охватить бесконечное многообразие свойств и связей, присущих любому телу или явлению. Поэтому для получения эффективных результатов каждая из наук вынуждена принимать ряд гипотез, допущений, которые акцентируют одни свойства и отвергают другие. В результате объектом изучения становится не само реальное тело, а его приближенная модель.

Исходя из основных гипотез (о свойствах материала, об его идеальной упругости и естественной ненапряженности), можно в принципе получить способы для вычисления напряжений и деформаций в любом теле. Однако в подавляющем большинстве случаев для этого необходимо использовать весьма сложный и громоздкий математический аппарат, что иногда приводит к непреодолимым в настоящее время затруднениям. Поэтому для получения относительно простых формул и методов расчета, пригодных для широкого применения в практике, приходится вводить дополнительные предположения и допущения.

В курсе сопротивления материалов в теории изгиба брусков принимаются следующие рабочие гипотезы.

1. Сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси бруса и после деформации (гипотеза Якова Бернулли). Гипотеза будет справедлива, если в поперечных сечениях бруса касательные напряжения отсутствуют. Поэтому она справедлива только при чистом изгибе бруса, но применяется и при поперечном изгибе.
2. Продольные волокна бруса не давят друг на друга. При чистом изгибе это предположение является строгим, при поперечном изгибе – приближенным. Из этой гипотезы следует, что нормальные напряжения в горизонтальных площадках отсутствуют (если нормалью к таким площадкам является ось z , то напряжения $\sigma_z = 0$).

Введенные гипотезы позволяют в курсе «Сопротивление материалов» получить для плоского поперечного изгиба бруса простые формулы для нормальных σ_x и касательных τ_{xy} напряжений в поперечных сечениях:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z; \quad \tau_{xy} = \frac{QS_{n.o}^{omc}}{bJ_y}, \quad (3.1)$$

где M_y - изгибающий момент в поперечном сечении бруса относительно оси y ; J_y - осевой момент инерции относительно оси y ; z - текущая координата, определяющая точку поперечного сечения, в которой вычисляются напряжения; Q - поперечная сила в сечении; $S_{n.o}^{omc}$ - статический момент отсеченной части площади, лежащей выше или ниже точки с координатой z , относительно нейтральной оси; b - ширина поперечного сечения на уровне z .

В соответствии с приведенными формулами нормальные напряжения σ_x в поперечных сечениях бруса распределяются по линейному закону, касательные напряжения τ_{xy} – по параболическому.

Французским ученым Сен-Венаном¹¹ в 1855 г. для упрощения решения прочностных задач было выдвинуто положение, носящее название принципа Сен-Венана:

Распределение напряжений и деформаций для внутренних точек тела при достаточном удалении их от границ тела слабо зависит от характера распределения внешней нагрузки на границах тела.

Таким образом, если на некоторой части поверхности тела изменить закон распределения внешней нагрузки так, что видоизмененная нагрузка будет статически эквивалентна прежней, то такое изменение приведет лишь к изменению напряженного и деформированного состояния в области тела, прилегающей к нагруженному участку, то есть - местным напряжений. Напряженное и деформированное состояние тела вдали от места нагружения при этом почти не изменяется.

Вблизи зон приложения внешней нагрузки формулы сопротивления материалов применять нельзя!

Примером использования принципа Сен-Венана является задача о растяжении бруса силами, приложенными к его торцам. В этом случае закон распределения напряжений по сечению бруса на достаточном удалении от торцов не зависит от того,

¹¹ Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности.- М.: Высш. шк., 1990.- 400 с.

каким образом распределяется приложенная по торцу сечения нагрузка, лишь бы величина равнодействующей нагрузки и точки ее приложения не изменялись (рис.140).

Принцип Сен-Венана имеет большое значение в решении многих задач прикладной механики. Он позволяет при решении некоторых задач удовлетворять граничным условиям не в каждой точке торцового сечения, а лишь в интегральном смысле, т. е. в смысле удовлетворения условиям статики для тела в целом. Однако следует иметь в виду, что в некоторых случаях принцип Сен-Венана неприменим. В тонкостенных конструкциях (пластины, оболочки, тонкостенные стержни) могут иметь место случаи, когда статически эквивалентные изменения внешних нагрузок на торцах тонкостенного стержня приводят к изменениям не местных напряжений и деформаций, а всего тонкостенного стержня.

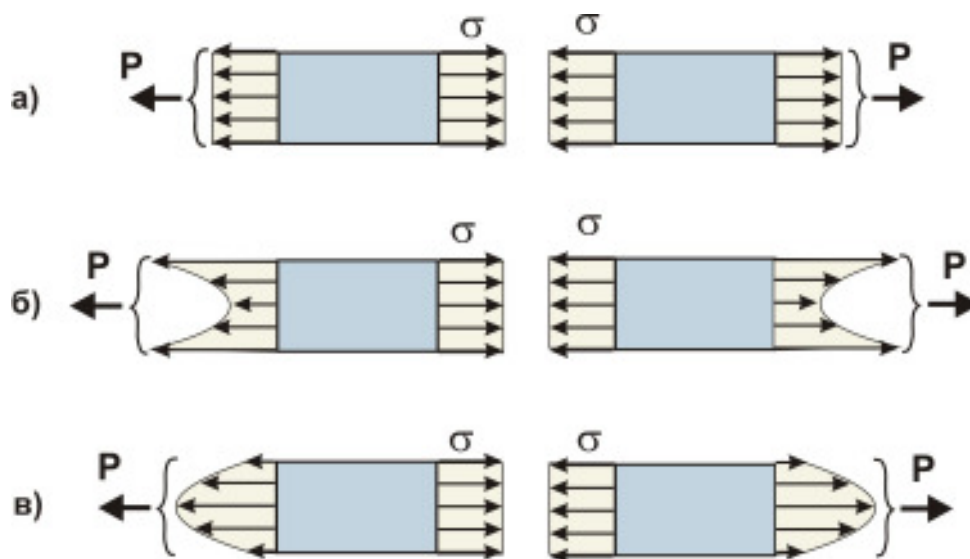


Рис.140

Поперечные сечения стержня (бруса, пластины) могут меняться по его длине: часто в стержне имеются отверстия, врубки, выемки, выточки, уменьшающие рабочую площадь сечения и носящие название *местных ослаблений*. Например, стержни клепанной фермы имеют отверстия для постановки заклепок, которыми их прикрепляют к узловым фасонным листам. Полную площадь поперечного сечения стержня называют площадью *брутто* $F_{бр}$. Площадь поперечного сечения в ослабленном месте за вычетом части, приходящейся на ослабление, т. е. рабочую площадь в ослабленном сечении, называют площадью *нетто* - $F_{нт}$.

Если стержень растянут или сжат силой, постоянной по его длине, то в поперечных сечениях, где площадь уменьшена, напряжение будет больше, чем в неослабленном месте. В тех случаях, когда на различных участках стержня действуют разные по величине силы, наибольшее напряжение возникает не обязательно в ослабленном сечении.

Обычно в ослабленном сечении определяют среднее (номинальное) напряжение, для чего растягивающую или сжимающую силу делят на площадь сечения нетто:

$$\sigma_n = \frac{P}{F_{нт}}. \quad (3.2)$$

В действительности в местах ослаблений сечений, вырезов и т. п., а также в местах, где стыкуются участки стержня с различными сечениями, нормальные напряжения при упругих деформациях распределяются по сечению неравномерно, достигая в отдельных точках весьма значительных величин. Например, методами теории упру-

гости установлено, что в случае растянутой полосы, имеющей постоянную ширину и ослабленной посередине круглым отверстием, напряжения по поперечному сечению $m - m$, проходящему через центр отверстия, распределяются так, как показано на эпюре напряжений (рис.141, а). Наибольшие напряжения σ_{max} получаются в точках A и B , расположенных у отверстия. Величина их зависит от отношения диаметра отверстия к ширине полосы. При небольшом диаметре они получаются примерно в три раза больше средних напряжений, вычисленных для этого сечения по формуле (3.2).

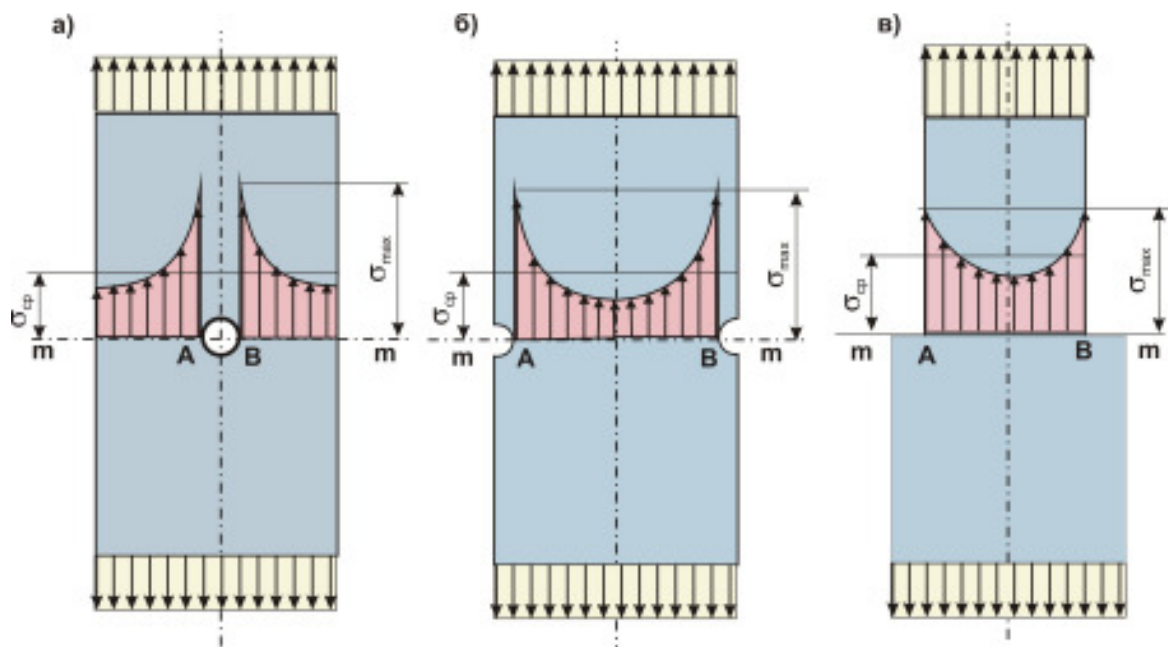


Рис.141

В случае растяжения полосы, ослабленной с боков двумя вырезами, например, выкружками, наблюдается значительное повышение напряжений у краев этих вырезов (рис.141, б). Величина наибольших напряжений зависит от формы и глубины вырезов.

Напряжения значительно повышаются также у мест резкого изменения формы и размеров поперечного сечения (рис.141, в). Неравномерность в распределении напряжений тем больше, чем более резко изменяется сечение.

Явление возрастания напряжений в местах изменения размеров и формы сечений, у краев отверстий и вырезов, в местах повреждения поверхности деформируемого тела и т. п. называют *концентрацией напряжений*. Перечисленные факторы, вблизи которых возникает это явление, называют *концентраторами напряжений*, или *факторами концентраций напряжений*. Концентрация напряжений распространяется на весьма незначительную область сечения и потому напряжения, возникающие в зонах концентрации, называют *местными напряжениями*.

Для оценки максимальных напряжений в зоне концентрации вводятся понятия номинального напряжения и коэффициента концентрации.

Номинальным напряжением называется напряжение, вычисленное в сечении ослабленном концентратором по формуле (3.2).

Коэффициентом концентрации напряжений называется отношение наибольшего местного напряжения в зоне концентрации к номинальному напряжению:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (3.3)$$

Этот коэффициент называется *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений* в связи с тем, что он определяется для различных концентраторов теоретически, методами теории упругости для однородного идеально упругого материала.

Величина теоретического коэффициента концентрации напряжений может достигать двух, трех и более.

Для реальных материалов коэффициент концентрации напряжений обычно несколько меньше теоретического. Он называется *эффективным* коэффициентом концентрации напряжений и обозначается через β .

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений определяются опытным путем как отношение предела прочности материала образца без концентратора напряжений к пределу прочности образца материала с концентратором напряжений $(\sigma_B)_k$:

$$\beta = \frac{\sigma_B}{(\sigma_B)_k} \quad (3.4)$$

Данные об эффективных коэффициентах концентрации напряжений приводятся в справочной литературе. При отсутствии данных при расчетах на прочность используются теоретические коэффициенты.

Концентрация напряжений по-разному влияет на работу деталей из пластичных и хрупких материалов. Если материал достаточно пластичен и имеет площадку текучести, то при достижении наибольшими местными напряжениями предела текучести их рост временно приостанавливается; в остальных точках сечения напряжения будут расти, пока всюду не достигнут предела текучести. Таким образом происходит выравнивание напряжений; *поэтому при расчетах на прочность пластичных материалов при статических нагрузках концентрацию напряжений не учитывают и расчет ведут по номинальным напряжениям.*

В случае же хрупких материалов, таких, как закаленная сталь, чугун и другие, выравнивания напряжений не происходит, и при их росте разрушение начинается в местах наибольших местных напряжений, когда они достигают предела прочности. *Расчет на прочность хрупких материалов нужно вести по наибольшим местным напряжениям, т. е. с учетом концентрации напряжений.*

Определив путем расчета номинальное напряжение и зная коэффициент концентрации напряжений для данного концентратора, находят максимальное напряжение в месте концентрации по формуле

$$\sigma_{max} = \beta \sigma_n \quad (3.5)$$

Это напряжение должно удовлетворять условию прочности.

Серый чугун, являющийся хрупким материалом, нечувствителен к концентрации напряжений, вызванной внешними концентраторами. Это объясняется крупнозернистой структурой чугуна, в котором графитовые включения создают повсеместно очаги концентрации напряжений, и дополнительные внешние концентраторы не вносят существенных изменений в распределение напряжений.

При динамических нагрузках выравнивание напряжений не успевает произойти даже в пластичных материалах, поэтому концентрацию напряжений нужно учитывать.

В случае хрупкого материала (чугун, твердые стали и др.) или хрупкого состояния материала (при ударных нагрузках или низких температурах) выравнивания напряжений не происходит и резкое их повышение у мест концентрации может привести к появлению трещин, а потому учет концентрации напряжений является обязательным.

При конструировании деталей следует, по возможности, избегать в них резких изменений поперечных сечений, канавок, отверстий и других концентраторов напряжений. Особенно это важно в случае высокопрочных сталей, подвергающихся закалке, и в деталях, работающих при динамических нагрузках.

МКЭ позволяет решать все вышеперечисленные задачи. В последующих примерах там, где это возможно, сопоставим результаты полученные методами сопротивления материалов и численным методом конечных элементов.

3.2.1. Исследование напряженного состояния балок-стенок

Балкой-стенкой называют короткие балки, у которых отношение длины балки к её высоте меньше четырех. В общем случае для расчета балок-стенок используют аппарат теории упругости.

Пусть требуется исследовать напряженное состояние балки-стенки, изображенной на *рис.142*.

3.2.1.1. Определения напряжений в поперечных сечениях балки-стенки методами сопротивления материалов

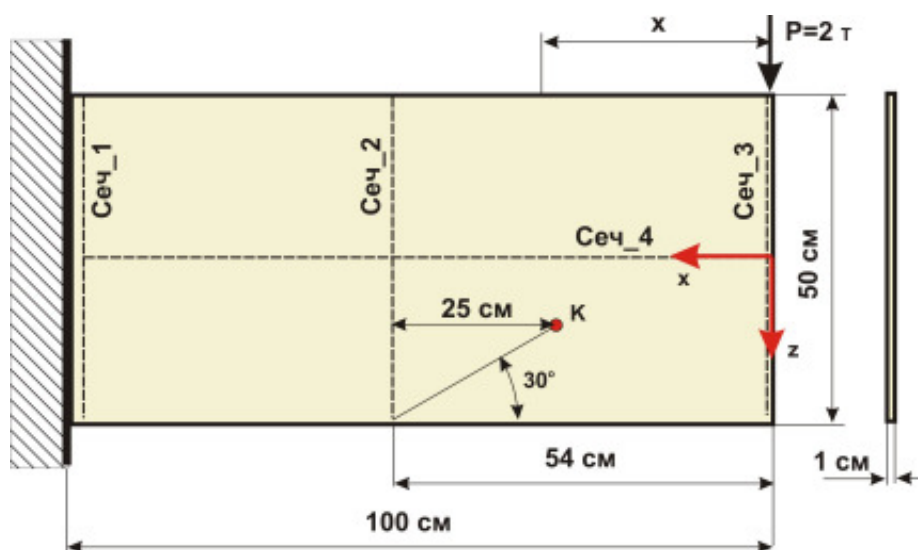


Рис.142

Применим методы сопротивления материалов для определения напряжений в сечениях *1* и *2* балки-стенки и главных напряжений и главных площадок в точке *К*. Формулы сопротивления материалов получены для случая, когда начало системы координат *xoz* находится в нейтральном слое бруса. Примем направление осей *x* и *z* так, как показано на *рис.142*. Вычисления проведём в системе **MathCAD**.

Дано: $L := 100$ см $a := 54$ см $P := 2000$ кг $h := 50$

Решение

Определяем момент инерции поперечного сечения балки-стенки

$$J_y := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad J_y = 1.042 \times 10^4$$

Статический момент отсеченной части площади

$$S_{\text{но}}(z) := \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Определяем внутренние силовые факторы в поперечном сечении балки-стенки

$$Q(x) := P$$

$$M(x) := -P \cdot x$$

$$M_K := M(L_1) \quad M_K = -5.8 \times 10^4$$

$$z_K := 25(1 - \tan(30 \cdot \text{deg})) \quad z_K = 10.566$$

Определяем нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении балки-стенки

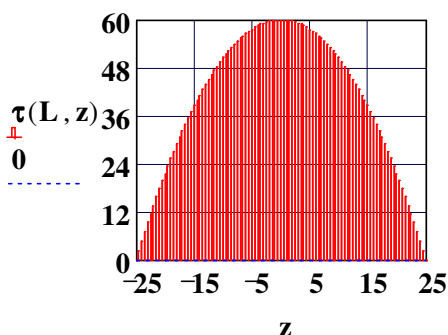
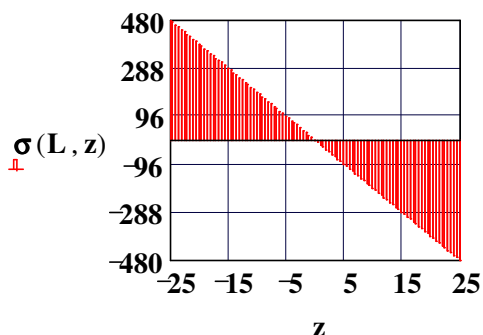
$$\sigma(x, z) := \frac{M(x)}{J_y} \cdot z$$

$$\tau(x, z) := \frac{Q(x) \cdot S_{ho}(z)}{J_y \cdot b}$$

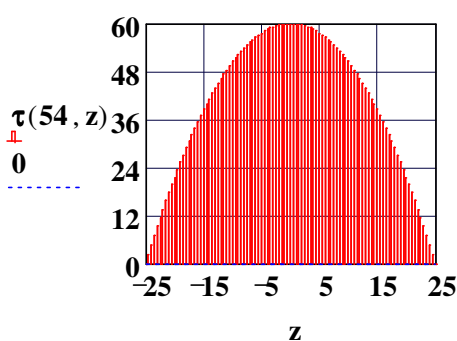
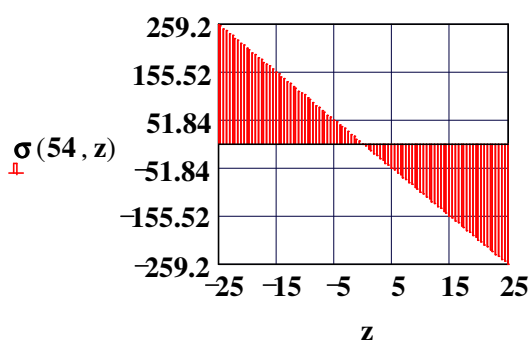
$$x := 0, 0.5 \dots L$$

$$z := \frac{-h}{2}, \frac{-h}{2} + 0.5 \dots \frac{h}{2}$$

Определение напряжений в 1-м сечении балки-стенки



Определение напряжений во 2-м сечении балки-стенки



В сечении 3 нормальные напряжения $\sigma_x \equiv 0$, а касательные напряжения τ_{xz} в этом сечении такие же, как и в двух предыдущих сечениях.

В сечении 4, лежащем в нейтральном слое бруса (в нашем случае для балки-стенки такого слоя нет), нормальные напряжения $\sigma_x \equiv 0$, а касательные напряжения постоянны: $\tau_{xz} = 60 \text{ кг/см}^2$.

Примечание. Здесь и в последующих расчетах выбрана старая техническая система единиц измерений с целью уменьшения числа значащих цифр выводимых постпроцессором **SCAD** при представлении результатов расчета в графической форме.

Определим главные площадки и главные напряжения в точке K . Вначале найдем напряжения σ_x и τ_{xz} в поперечном сечении балки-стенки, проходящем через точку K . Точка K находится на расстоянии $25 - 25 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 10.566$ см от нейтральной оси. Тогда

$$\sigma_K := \sigma(29, 10.566) \quad \sigma_K = -58.831 \quad \tau_K := -\tau(29, 10.566) \quad \tau_K = -49.283$$

и далее

$$\sigma_{\max} := \frac{\sigma_K}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{2}\right)^2 + \tau_K^2} \quad \sigma_{\min} := \frac{\sigma_K}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{2}\right)^2 + \tau_K^2}$$

$$\sigma_{\max} = 27.978$$

$$\sigma_{\min} = -86.81$$

$$\alpha_{\text{гл}} := \operatorname{atan}\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_K}{\tau_K}\right)$$

$$\frac{\alpha_{\text{гл}}}{\text{deg}} = -60.416$$

Вырежем у точки K малый элемент со сторонами, параллельными координатным осям, и по граням этого элемента приложим найденные напряжения σ_K и τ_K . Касательное напряжение τ_K по направлению совпадает с направлением поперечной силы в сечении, а она направлена так же, как и заданная сила P . В соответствии с полученными значениями для главных напряжений на этом же рисунке изобразим главные площадки и действующие по ним главные напряжения (рис.143).

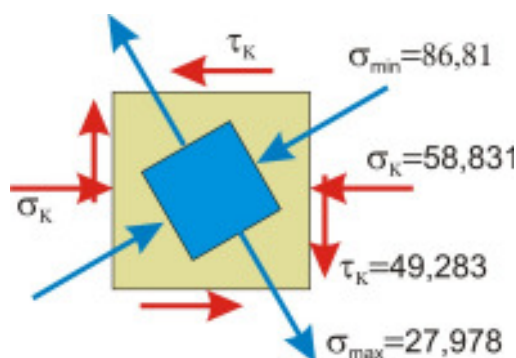


Рис.143

3.2.1.2. Расчет балки-стенки в программном комплексе SCAD

1. Загружаем программный комплекс. После загрузки программы появится пока ещё пустое окно, на панели инструментов которого нажмем кнопку **Создание нового проекта**, что приведет к появлению панели **Новый проект**, в поля ввода которого введем наименование проекта **Плоская задача** и название объекта **Балка-стенка**. Из списка **Тип схемы** выберем **Система общего вида** и щелкнем по кнопке **Единицы измерения**. Появится одноименная панель, в полях ввода которой зададим

единицы измерения геометрических и силовых параметров расчета. Щелчком по кнопке **ОК**. Далее программа потребует сохранить новый проект в некотором файле. Имя файла будет присвоено не только файлу проекта, но и всем служебным файлам, а также файлам с результатами расчета. После выполнения этих операций открывается главное окно конечно-элементного пакета **SCAD**, содержащее четыре раздела первого уровня, являющиеся фактически этапами решения задачи: **Исходные данные**, **Расчет**, **Результаты** и **Конструирование**. Эти разделы содержат ссылки на разделы второго уровня, которые детализируют выполняемые операции, например, **Расчетная схема**, **Линейный расчет** или **Печать таблиц**.

2. Создание нового проекта начнем с формирования расчетной схемы. Для этого установим курсор на раздел **Расчетная схема** дерева и нажмем левую кнопку мыши. Управление будет передано графическому препроцессору, с помощью функций которого и выполняется синтез расчетной схемы. После старта препроцессора в инструментальной панели активен раздел **Управление**.
3. Активизируем на инструментальной панели раздел **Схема** - *создание схем из прототипов и их модификация*. Это приведет к появлению панели кнопок (рис.144).

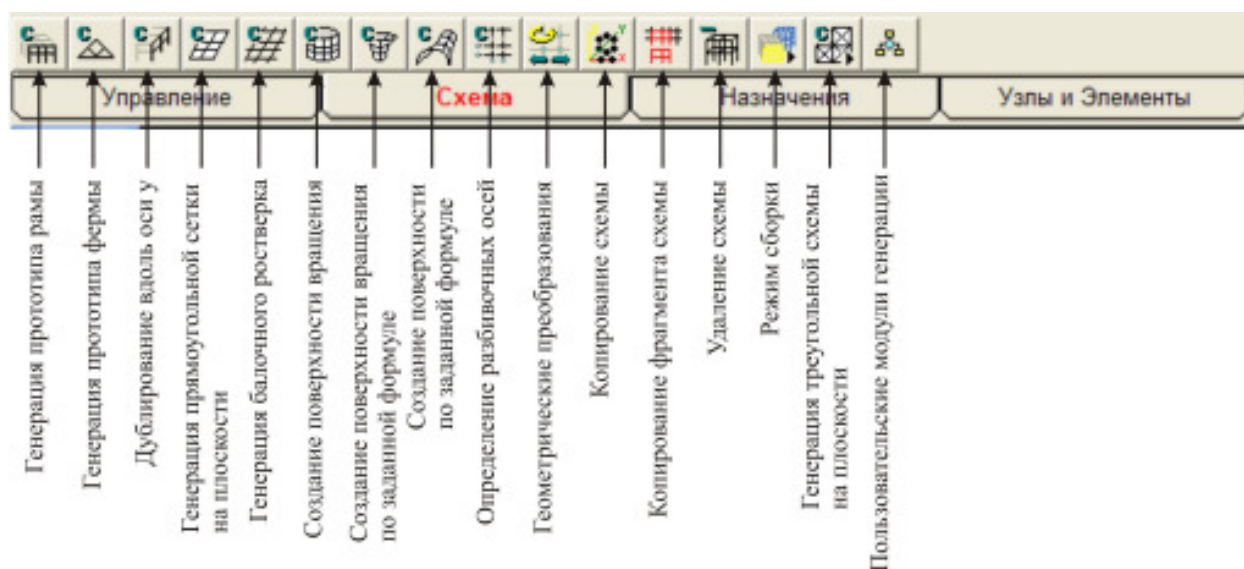



Рис.144

4. Щелчком по кнопке  **Генерация прямоугольной сетки на плоскости**. С помощью этой функции может быть создана прямоугольная сетка с переменным или постоянным шагом, расположенная в плоскости **xoy** или **xoz**. Назначение параметров сетки выполняется в диалоговом окне **Генерация пластинчатой схемы** (рис.145). Тип схемы и ее положение в пространстве назначаются с помощью кнопок, установленных в верхней части окна. При правильном выборе типа схемы конечным элементам автоматически будет назначен тип и его не придется изменять в процессе работы со схемой.
5. В разделе **Вид схемы** выбираем **Балка-стенка** в плоскости **xoz**.
6. Щелкаем по клавише **Жесткость** и на появившейся панели **Жесткости пластин** назначаем материал балки-стенки – *Сталь обыкновенная* и толщину пластины **0,01 м**.

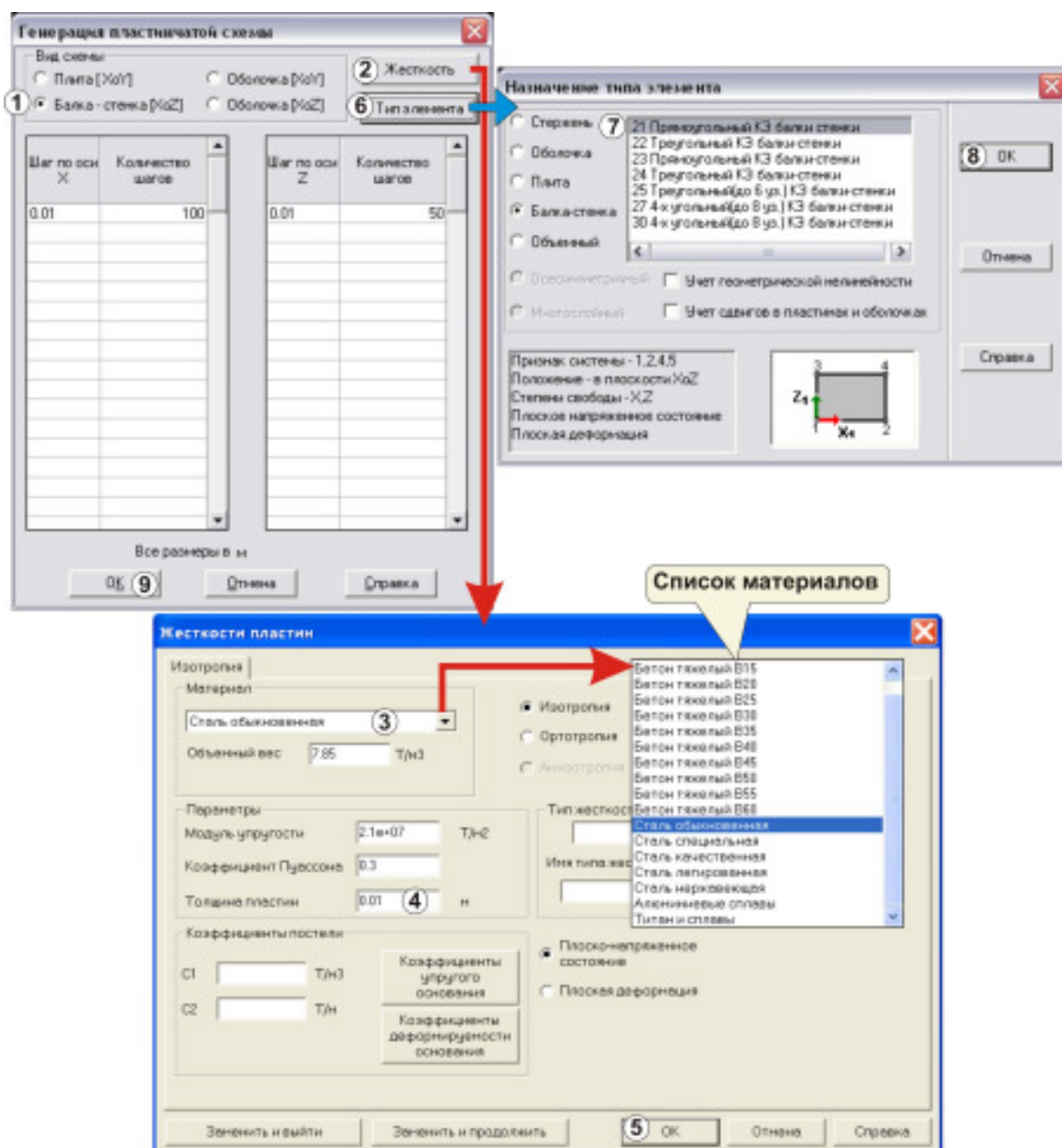


Рис.145

7. Для генерации балки-стенки с габаритными размерами $1 \times 0,5$ м задаём шаг конечно-элементной сетки $0,01$ м по обоим направлениям, а количество шагов по направлению x - 100 , по направлению y - 50 . После нажатия на кнопку **ОК** будет сформирована схема (рис.146, активизирован фильтр **Узлы**). Возможен случай, когда вдоль осей задается переменный шаг сетки. При формировании сетки с разным шагом вводятся величины шагов и количество повторений по каждому направлению. При назначении разного шага сетки следует помнить, что наиболее качественное решение будет получено при соотношении сторон 4-узловых конечных элементов близким к 1 . Не рекомендуется назначать соотношение более $1/5$. Идеальным в этом смысле является, конечно, квадрат.
8. Связи в узлах расчетной схемы назначаются в диалоговом окне **Связи**, которое вызывается нажатием на соответствующую кнопку в разделе **Назначение**. Так как левый торец балки-стенки закреплён, нажимаем клавишу **Установить всё** и щелкаем по кнопке **ОК**.

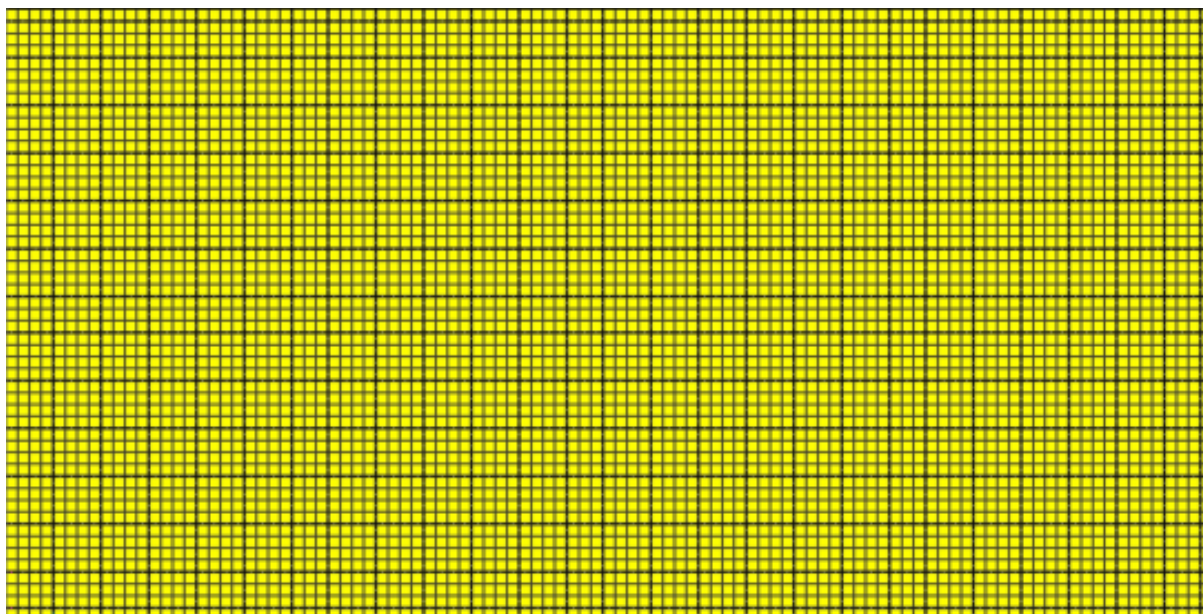


Рис.146

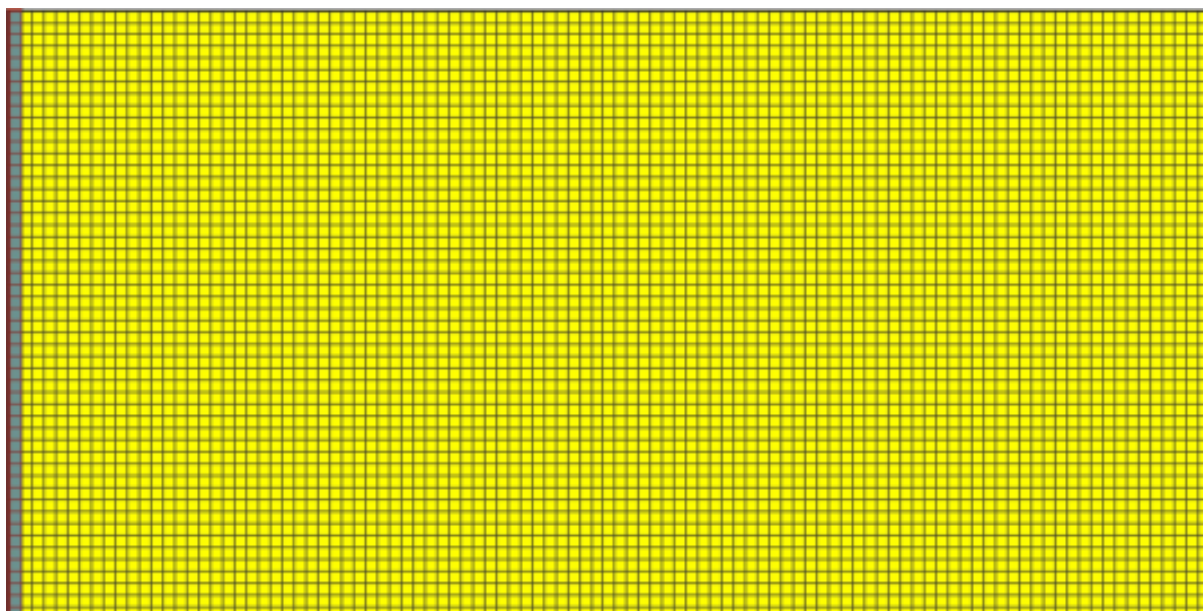





Рис.147

9. Устанавливаем указатель курсора в произвольной точке рабочего окна, нажимаем правую кнопку мыши. Появляется панель **Выбор узлов и элементов**, на которой выбираем вид курсора – **Прямоугольник**. Выделяем крайние левые узлы балки-стенки, щелкаем левой клавишей мыши, выделенные элементы окрашиваются в красный цвет (рис.147), и подтверждаем наш выбор нажатием на кнопку .
10. Нагрузка на пластину задается в разделе **Загрузки**. Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра . Активизируем кнопку **Узловые нагрузки** . Появится панель **Ввод узловых нагрузок**, в полях ввода которой задаем направление и величину нагрузки во внутренних узлах конечно-элементной сетки. Загрузим созданную конечно-элементную модель балки-стенки на свободном торце силой 2 т, приложенной к верхнему левому узлу (рис.148).

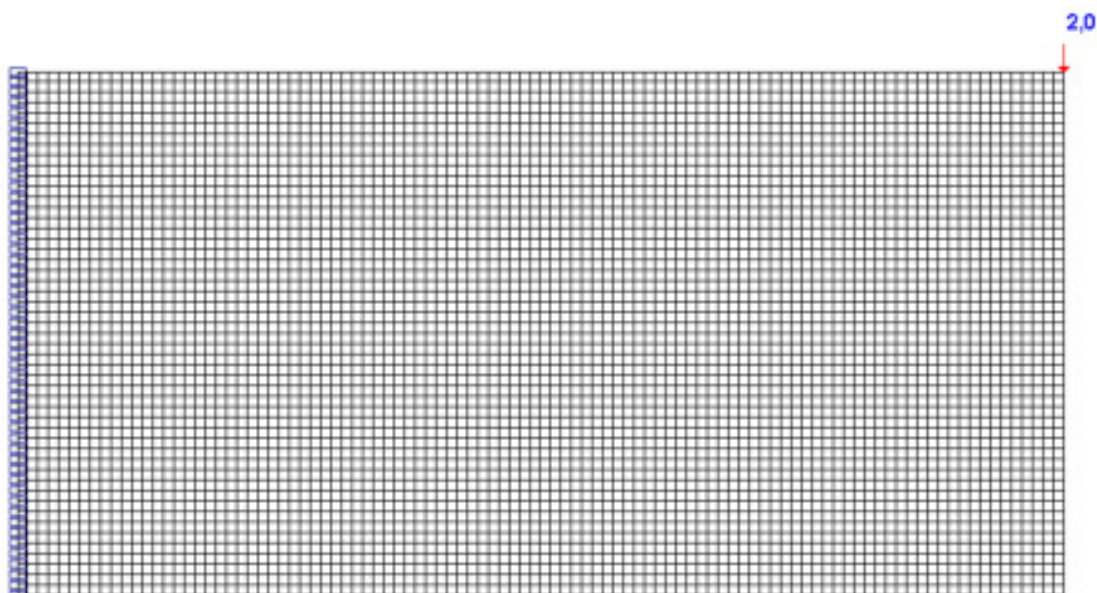





Рис.148

11. Переходим в раздел **Управление** и нажимаем кнопку  **Выйти в экран управления проектом**. Раскрываем список **Специальные исходные данные** (рис.149) и активизируем команду **Главные и эквивалентные напряжения**. Появляется панель **Расчет главных и эквивалентных напряжений**, на которой можем задать тип теории прочности, например, *Теория наибольших касательных напряжений* (рис.150).


12. Для заданных характеристик нагружения возможен только линейный расчет. Установим указатель мыши в позицию **Линейный** и нажмём левую клавишу мыши. Если позиция **Линейный** имеет вид  (выполнение невозможно), то расчет недоступен. Причиной этого, как правило, является полное или частичное отсутствие обязательных исходных данных. К ним относятся: нагрузки, жесткостные характеристики, описание расчетной схемы. В тех случаях, когда данные отсутствуют или заданы не для всех элементов схемы (последнее касается жесткостей), пиктограмма соответствующей ветви дерева проекта в разделе **Расчетная схема** содержит просительный знак .


Примечание. Рекомендуется перед выполнением расчета «пройтись» по дереву проекта и убедиться в том, что все исходные данные, которые необходимо задать для расчета, действительно введены и попали в проект. В противном случае нужно вернуться к соответствующей операции подготовки данных и ввести недостающую информацию.

После нажатия левой клавиши мыши в позиции **Линейный** через несколько секунд процессор завершит расчет, и можно будет проанализировать его результаты.

13. Щелчок по кнопке **Графический анализ** открывает рабочее окно **SCAD**, имеющее разделы: **Управление**, **Деформации**, **Эпюры усилий**, **Поля напряжений**, **Постпроцессоры** и **Группы**, которые позволяют проанализировать напряженное и деформированное состояние пластины.

14. Активизируем раздел **Деформации**. Это приведет к появлению кнопок, показанных на рис.151. Анимацию и формирование видеоклипов можно выполнять для полной расчетной схемы или для ее фрагмента. Исключение составляет режим **Крупный план**, для которого эти функции не выполняются.

15. Щелкнем по кнопке  **Совместное отображение исходной и деформированной схемы** и установим коэффициент масштабирования перемещений 4. На *рис.152* представлено деформированное состояние балки-стенки.

16. Активируем кнопку  **Отображение изолиний перемещений** и в окне **Вид перемещений** выберем из списка направление перемещения вдоль оси z (будут отображены изолинии поля перемещения w). В рабочем окне на поверхности балки-стенки появятся изолинии перемещений и панель диапазонов отображения перемещений (*рис. 153*). Аналогично могут быть выведены изолинии поля перемещений u (в направлении оси x) (*рис. 154*).

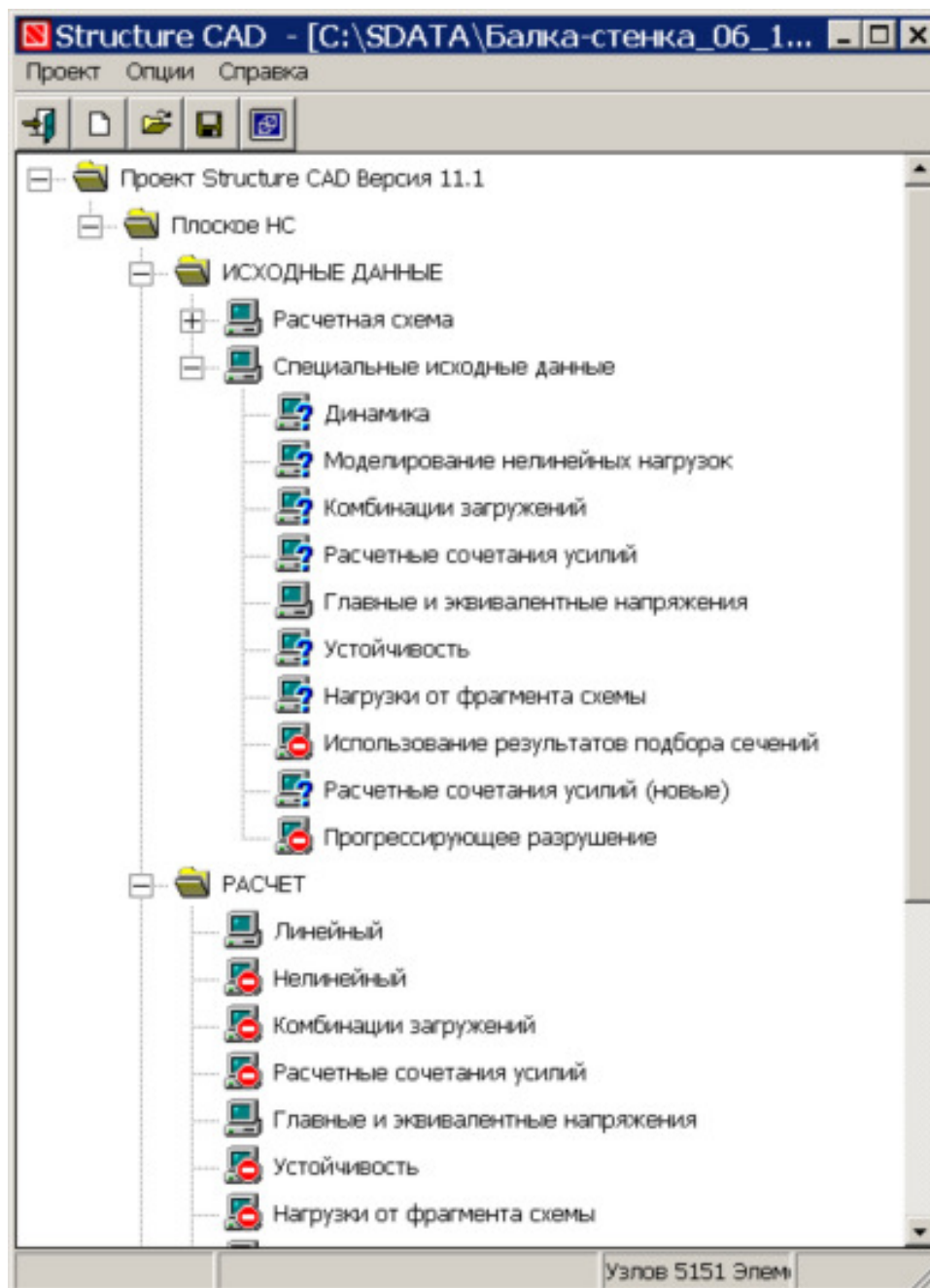


Рис.149

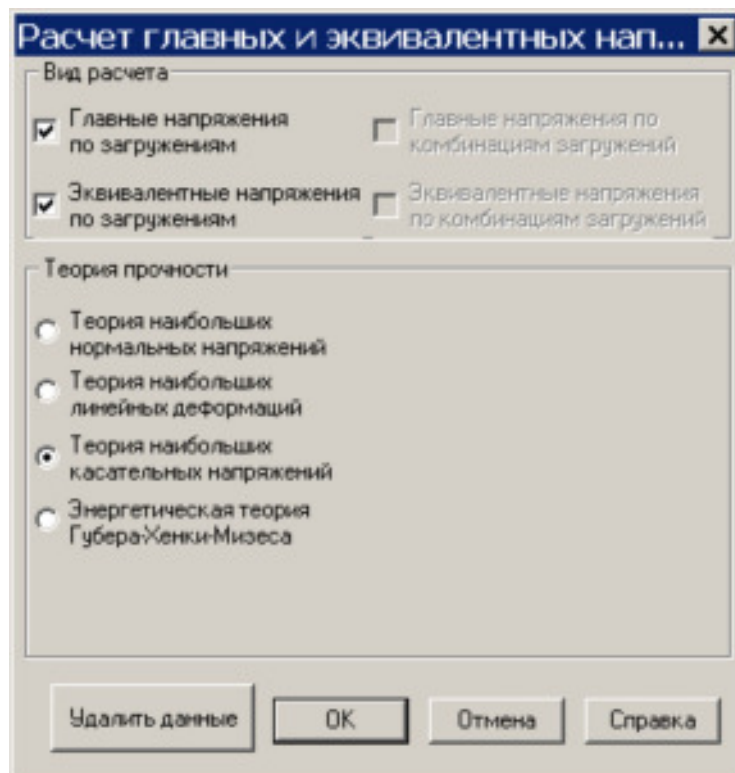


Рис.150



Рис.151

Всякий раз, когда возникает необходимость оценить общую картину распределения того или иного фактора на конструкцию или ее фрагмент, используется цветное представление результатов расчета. Для отображения результатов принята по умолчанию 14-цветная шкала, которая расположена в специальном диалоговом окне (рис. 153-154). Это окно является общим для всех операций

отображения результатов. Каждому диапазону результатов соответствуют маркер и цветовое поле. Если маркер включен, на схеме отображаются результаты, входящие в соответствующий диапазон. Отключив маркеры, можно отказаться от цветового отображения части результатов, имеющих несущественные для работы конструкции значения анализируемого фактора. Можно уменьшить число диапазонов, переопределить значение диапазонов. Для того чтобы отобразить на экране сделанные таким образом установки, используется кнопка **Применить**, расположенная в нижней части окна.

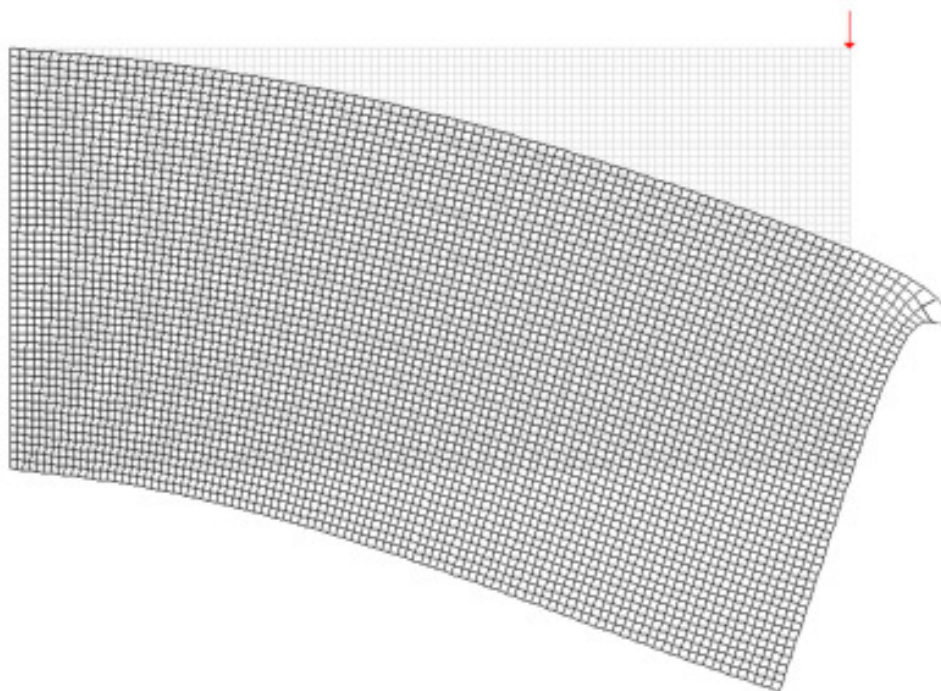


Рис.152

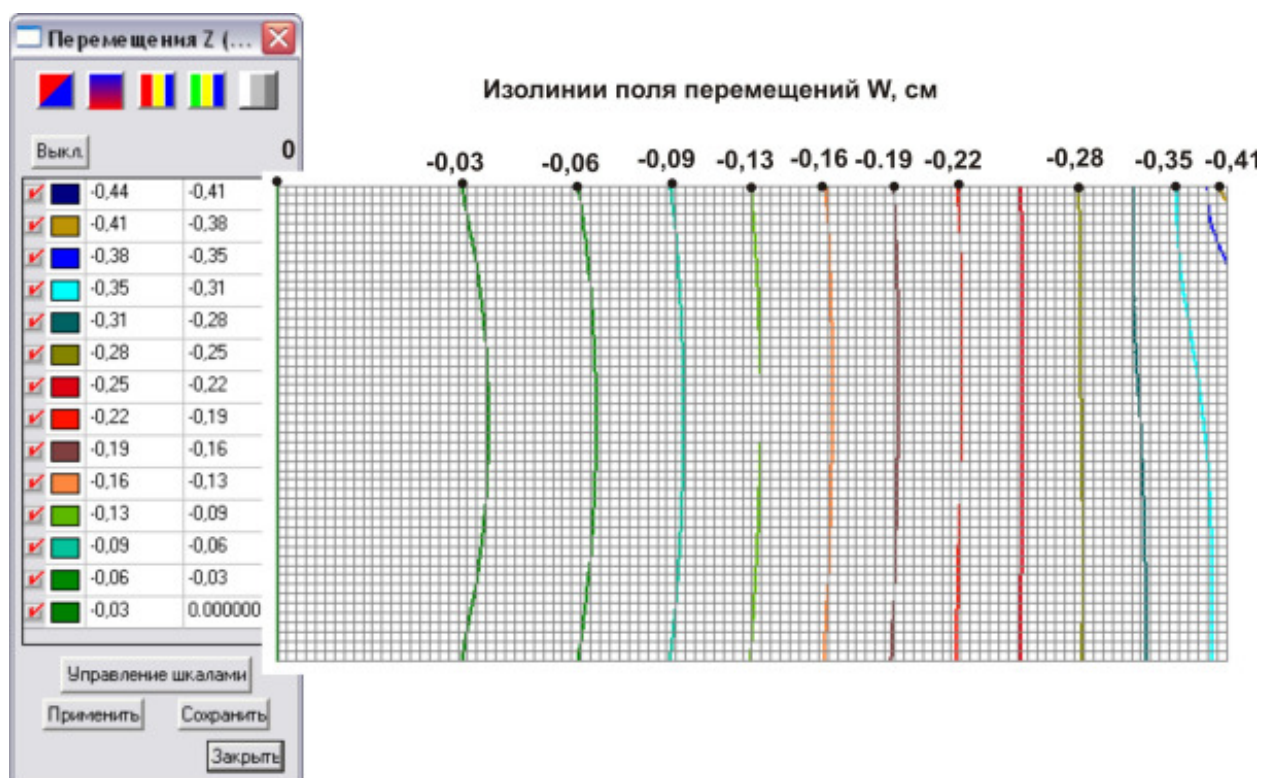


Рис.153

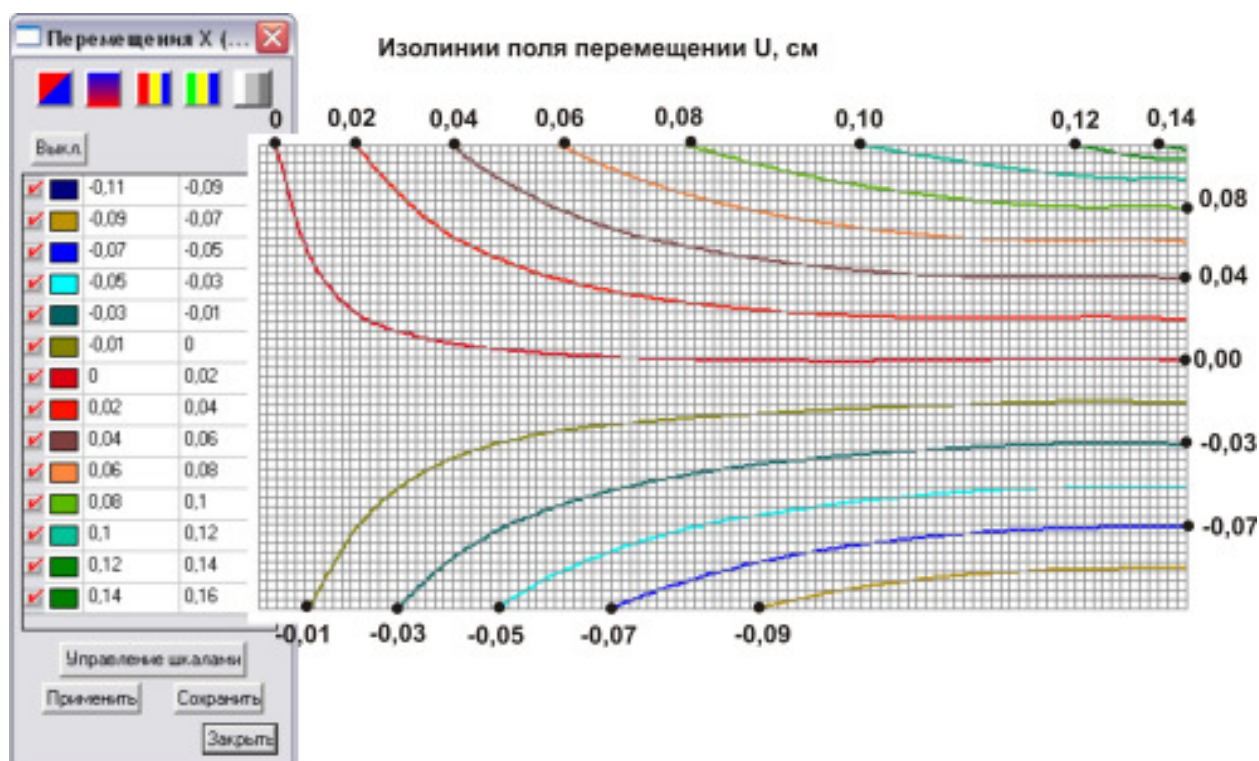


Рис.154

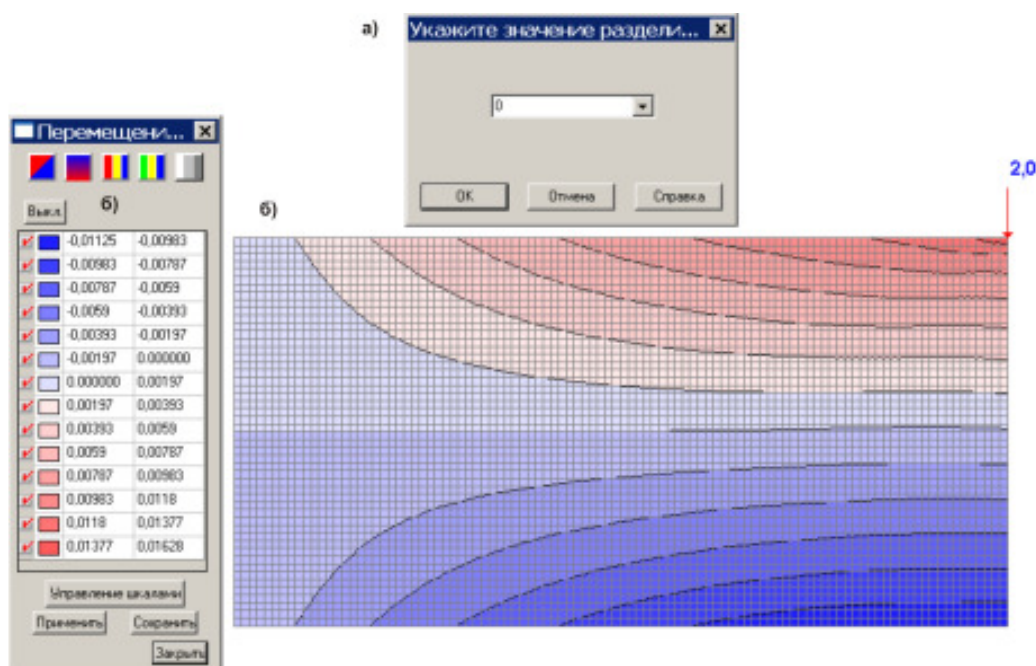



Рис.155

Верхние пять кнопок управляют цветовой гаммой шкалы. Левая кнопка  служит для автоматического деления цветовой шкалы на два диапазона, в один из которых попадают значения больше, в другой - меньше величины указанного значения исследуемого фактора (рис.154). После нажатия этой кнопки появляется диалоговое окно **Значение разделителя** (рис.155, а), в выпадающем списке которого вводим цифру 0, определяющую цветовую границу. Значения, превышающие величину разделителя, будут окрашены в оттенки одного цвета, а значения меньше его - в оттенки другого цвета (рис.155, б).

На *рис.155* величины перемещений и изополя перемещения соответствуют нагрузке 2 кН (в 10 раз меньше той, которая соответствует величинам и цветовым полям, приведенным на *рис. 153 и 154*). Как следует из сопоставления *рис. 154 и 155*, уменьшение нагрузки в 10 раз привело к уменьшению величин перемещений в 10 раз. Этот факт является следствием того, что при решении упругой задачи связь между напряжениями и деформациями линейная (закон Гука).

Настройка цветов выполняется в разделе **Настройка цветовой палитры** меню **Опции** (*рис.156*). На странице **Результаты** эти цвета определены опциями **Цвет положительных изолиний (изополей)** и **Цвет отрицательных изолиний (изополей)**. Отметим, что понятия «отрицательных» и «положительных» весьма условны, т.к. цветом можно разделить и значения фактора, имеющие один знак.

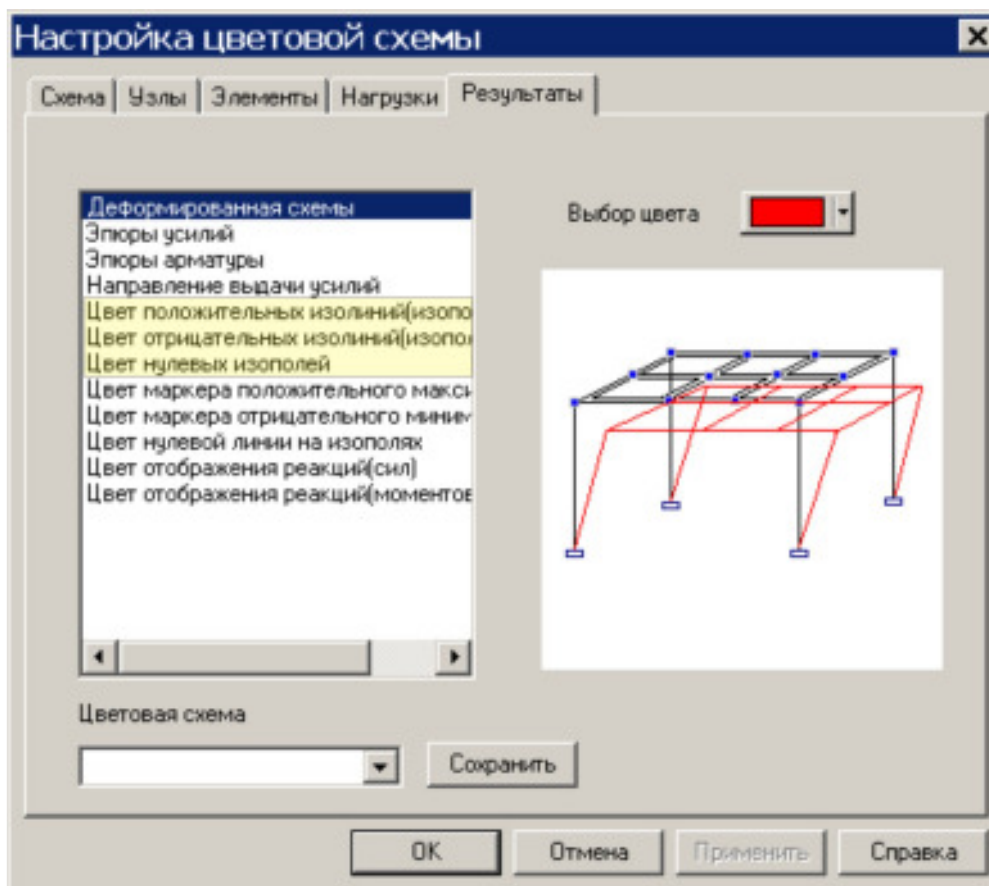



Рис.156

Вторая кнопка  вверху предназначена для «плавной» настройки цветовой шкалы. Плавной считается такая настройка шкалы, у которой переход от цвета к цвету выполняется с плавно меняющейся интенсивностью.

Последние три кнопки вверху предназначены для вызова фиксированных цветовых шкал. Их окраску по умолчанию можно условно отнести к «горячей», «холодной» и «серой». Смена цветовой гаммы и вывод информации на экран после изменения состояния кнопок выполняются нажатием кнопки **Применить**.

Предлагаемые цветовые решения шкал не являются обязательными. Пользователь может заменить любой цвет в шкале или даже всю шкалу и запомнить сделанные изменения для всех последующих сеансов работы. Для этого надо подвести курсор к цветовому квадрату с заменяемым цветом и дважды нажать левую кнопку мыши. При этом открывается стандартная цветовая шкала среды Windows. После выбора цвета следует нажать кнопку **ОК**. Новый цвет попадет в цветовую шкалу. Для того чтобы за-

помнить новую цветовую гамму, используют кнопку **Сохранить**. После этой операции новая гамма цветов будет всегда выводиться вместо ранее выбранной.

Для одновременного отключения или включения всех маркеров цветовой шкалы используется кнопка **Вкл./Выкл**. Этой кнопкой удобно пользоваться в тех случаях, когда из всего диапазона выбирается только несколько значений. Тогда первым действием следует отключить всю шкалу, а затем включить только нужные маркеры и нажать кнопку **Применить**.

Цветовая шкала может занимать любое место на экране, ее можно закрыть (кнопка **Заккрыть**) или вынести за пределы рабочего поля (если у вас большой экран и окно комплекса занимает не все пространство экрана).

17. Активизируем раздел **Поля напряжений** инструментальной панели. Это приведет к появлению кнопок, показанных на *рис.157*.

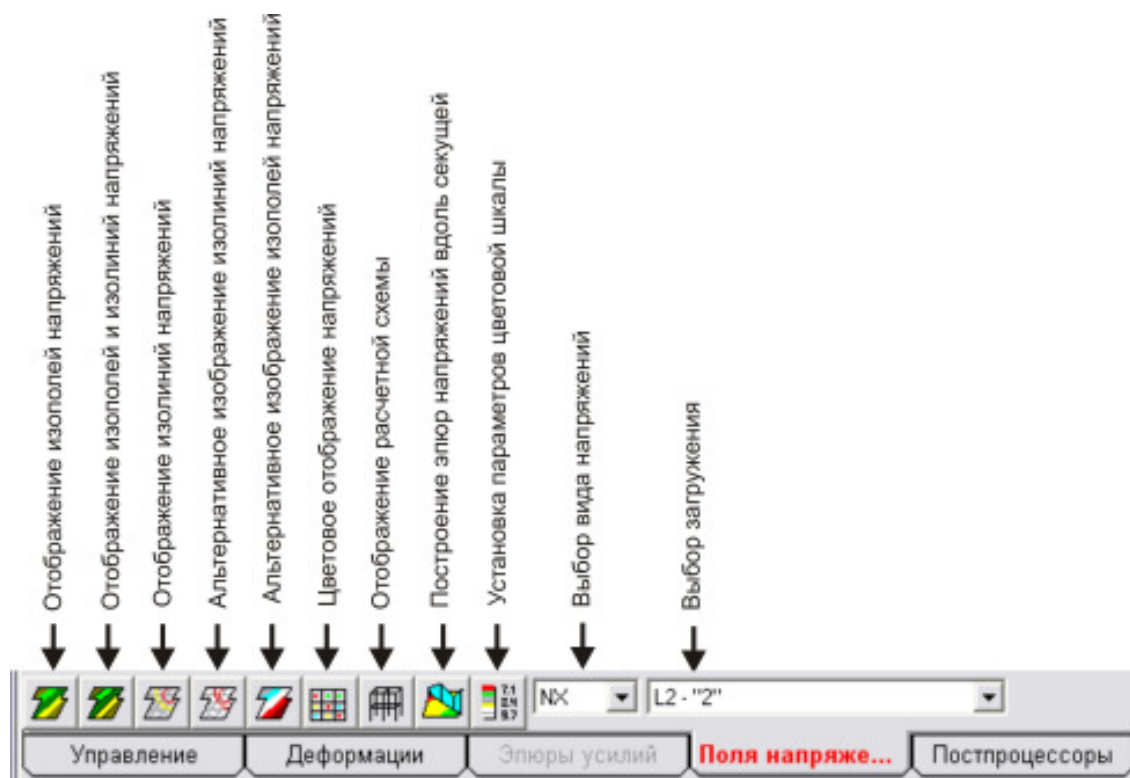




Рис.157

Для отображения числовых значений силового фактора на изополях и изолиниях используется кнопка  фильтров. Значения могут выводиться в центрах элементов или в узлах. Для получения значений в узлах необходимо активизировать соответствующую операцию в диалоговом окне **Настройка графической среды** (вызывается из одноименного пункта в разделе меню **Опции**). Вывод изолиний и изополей напряжений выполняется по тем же правилам, что и при анализе перемещений в пластинчатых элементах. Поле напряжений σ_x представлено на *рис.158*.

18. Щелкаем по клавише  **Эпюры напряжений вдоль секущей** и, выбирая последовательно сечения **1 – 4** (протягивая при нажатой левой клавиши мыши её указатель вдоль рассматриваемого сечения), получаем эпюры σ_x , σ_z и τ_{xy} . На открывшейся панели **Эпюры напряжений вдоль прямой**, щелкая последовательно по обозначениям напряжений **NX**, **NZ**, **TXZ**, получаем в рабочем окне соответствующие эпюры. В **SCAD NX** - нормальные напряжения в направлении

нормали к выбранному сечению, NZ - нормальные напряжения вдоль сечения, TXZ - касательное напряжение. Для получения численных значений ординат эпюр активизируем флажок Отображение значений на графике. Щелчок по выбранной ординате приводит к появлению поля со значением соответствующей компоненты тензора напряжений (рис.159-162).

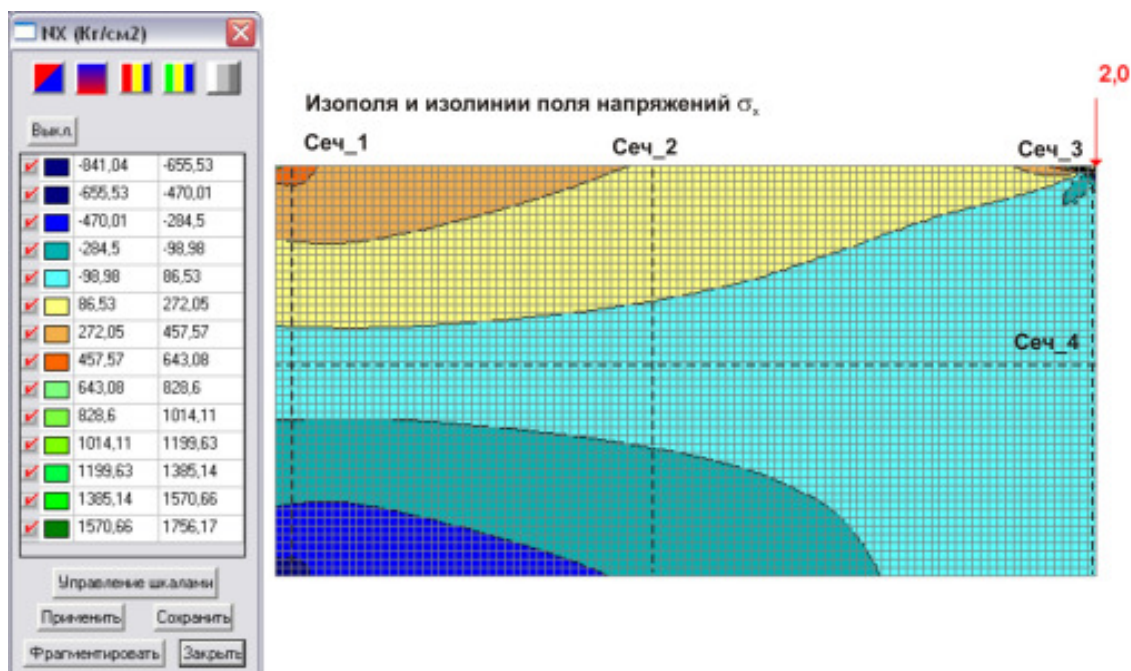


Рис.158

Как следует из приведенных эпюр, только в сечении 2 характер распределения напряжений в поперечном сечении бруса соответствует распределением напряжений, определяемым по формулам сопротивления материалов. Величины максимальных напряжений во втором сечении балки-стенки, определенные по формулам сопротивления материалов практически соответствуют таковым, приведенным на рис.160. В остальных сечениях результаты вычисления напряжений программой **SCAD** и по формулам сопротивления материалов не совпадают. Следовательно, при анализе напряженного состояния материала балки-стенки в этих зонах нужно пользоваться только соотношениями, полученными в курсах теории упругости и пластичности.

Зависимости для напряжений, приводимые в курсе сопротивления материалов справедливы только для длинных балок, у которых длина, по крайней мере, в четыре раза больше их высоты, исключая участки приложения сосредоточенных сил и моментов.

В качестве иллюстрации этого положения на рис.163-164 приведены эпюры напряжений для длинной балки (длина/высота=5/1) с прямоугольным поперечным сечением, нагруженной на свободном торце усилием 1 т . Величины максимальных напряжений в первом и втором сечениях балки, определенные по формулам сопротивления материалов:

сечение 1: $\max \sigma_x = 750\text{ кг/см}^2$; $\max \tau_{xy} = 75\text{ кг/см}^2$;

сечение 2: $\max \sigma_x = 550\text{ кг/см}^2$; $\max \tau_{xy} = 75\text{ кг/см}^2$,

близки к величинам, вычисленным конечно-элементным комплексом **SCAD**. В соответствии с гипотезами, принятыми в курсе сопротивления материалов, касательные напряжения в нейтральном слое должны быть максимальными постоянными и равными $\max \tau_{xy} = 75\text{ кг/см}^2$.

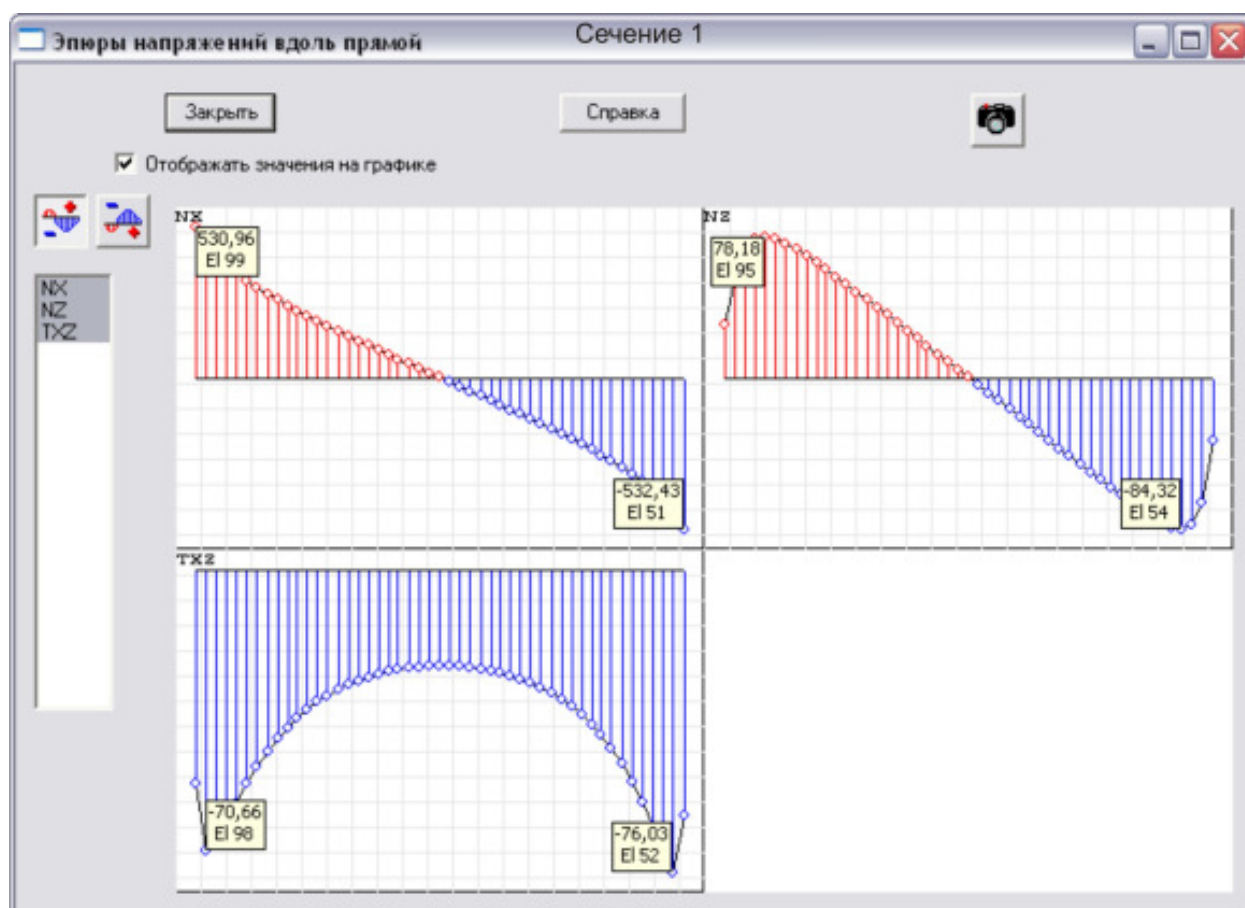


Рис.159

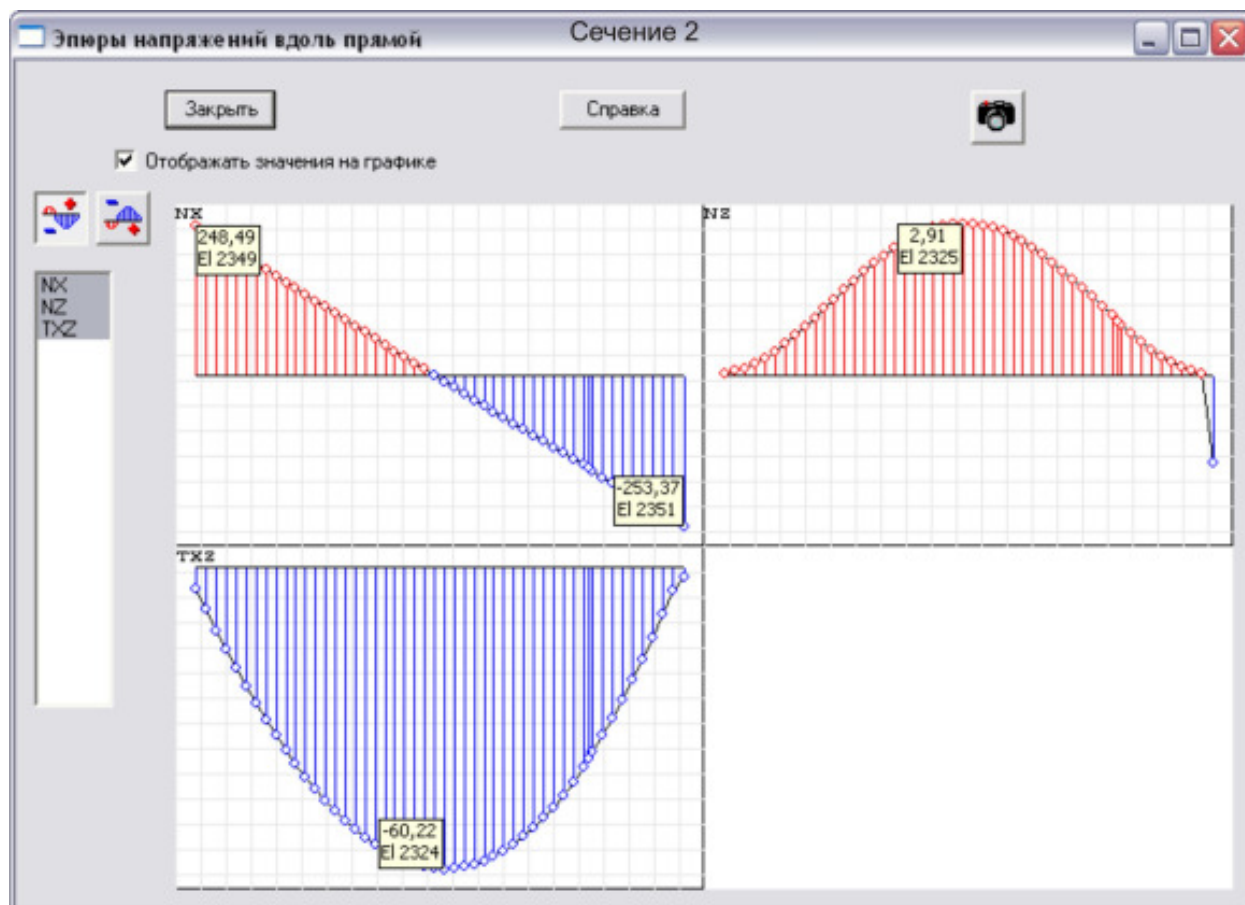


Рис.160

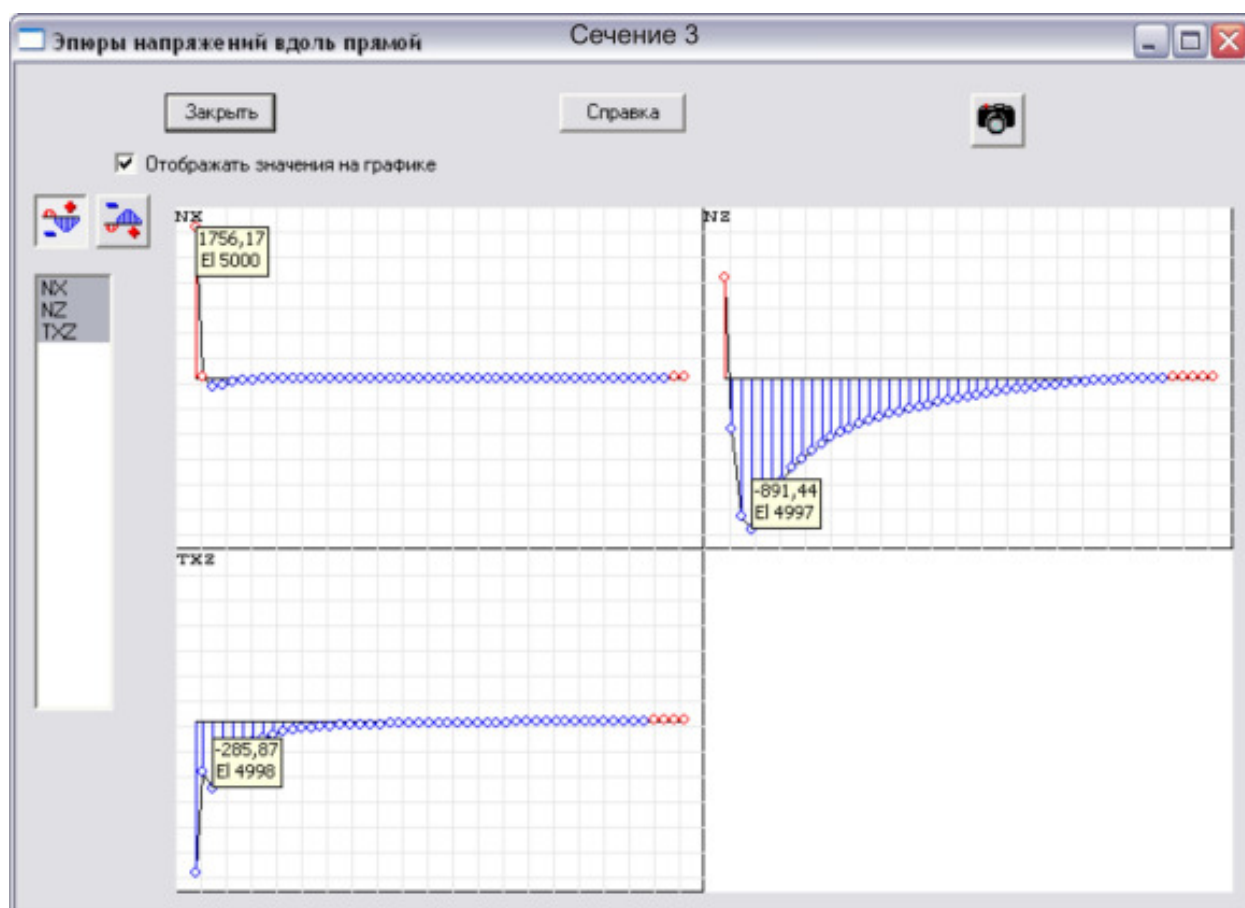


Рис.161

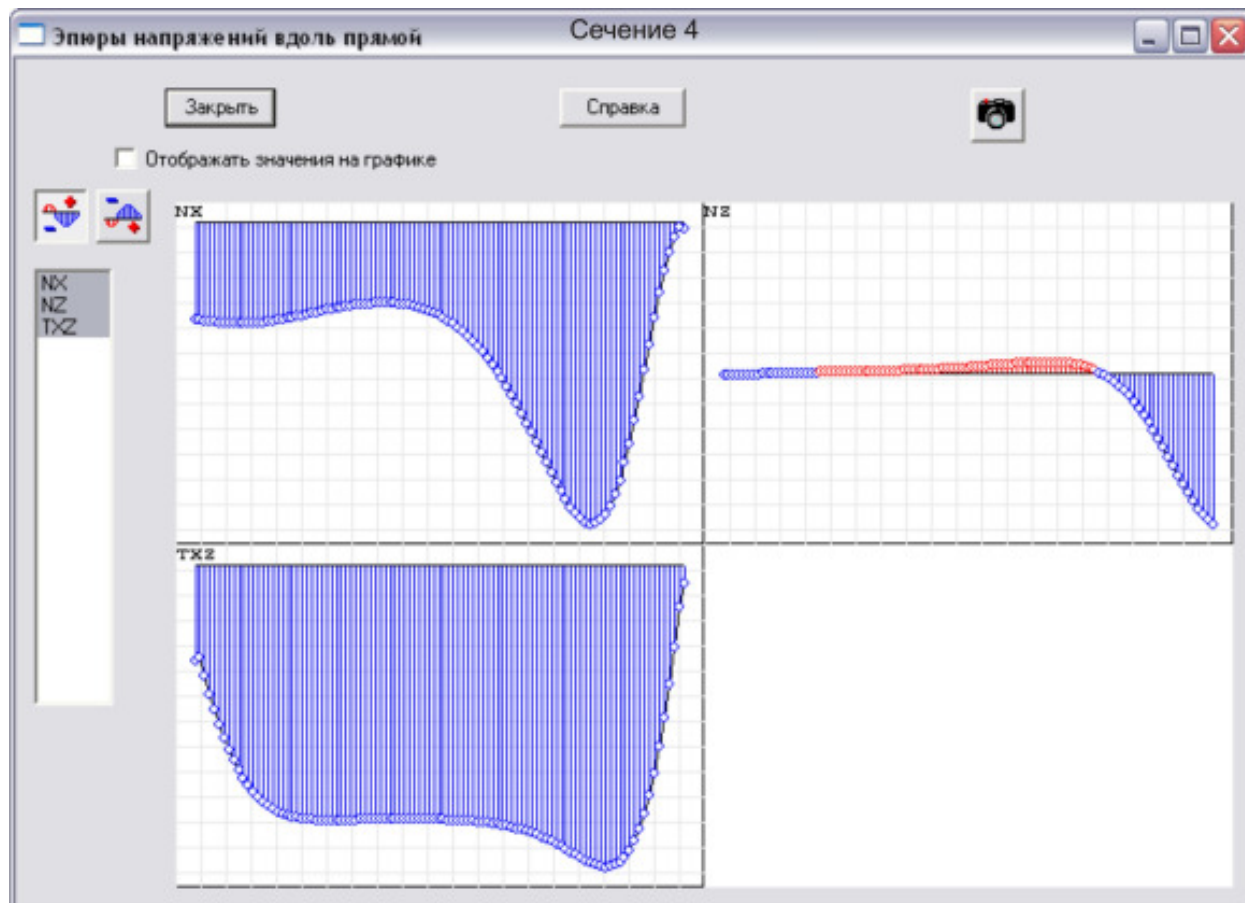


Рис.162

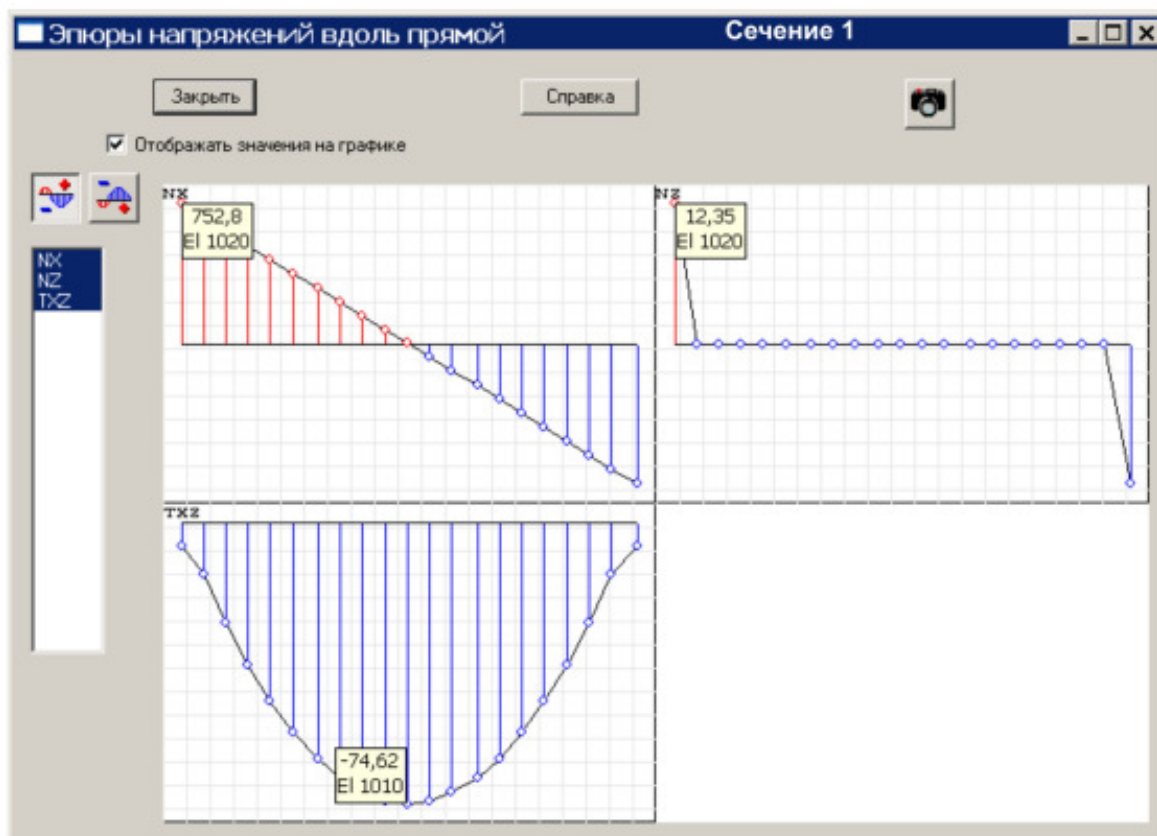
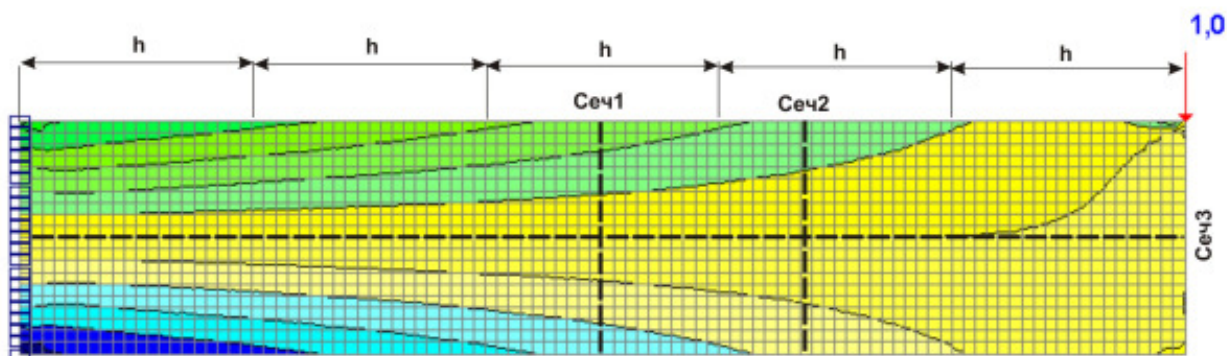


Рис.163

Из *рис.163-164* следует, что эта гипотеза выполняется на удалении от торцов балки на расстояние, приблизительно равное характерному размеру балки – её высоте (что согласуется с принципом Сен-Венана).

При использовании конечно-элементного подхода в перемещениях вычисление напряжений связано с рядом проблем. Локальный поэлементный подсчет напряжений приводит к полям напряжений, имеющим разрывы на межэлементных границах (*рис.165*). Для получения узловых напряжений в этих случаях прибегают к тому или иному методу усреднения вкладов напряжений отдельных элементов в их общий узел. В программе предусмотрено, что для каждого из конечных элементов эти усилия вычисляются в серединах (в центре тяжести) и в точках примыкания к узлам расчетной схемы. Затем для узла вычисляется среднее арифметическое значение указанных усилий по точкам примыкания всех элементов, сходящихся в узле и определяющих рассматриваемое усилие, при условии, что такие элементы расположены примерно в одной плоскости.

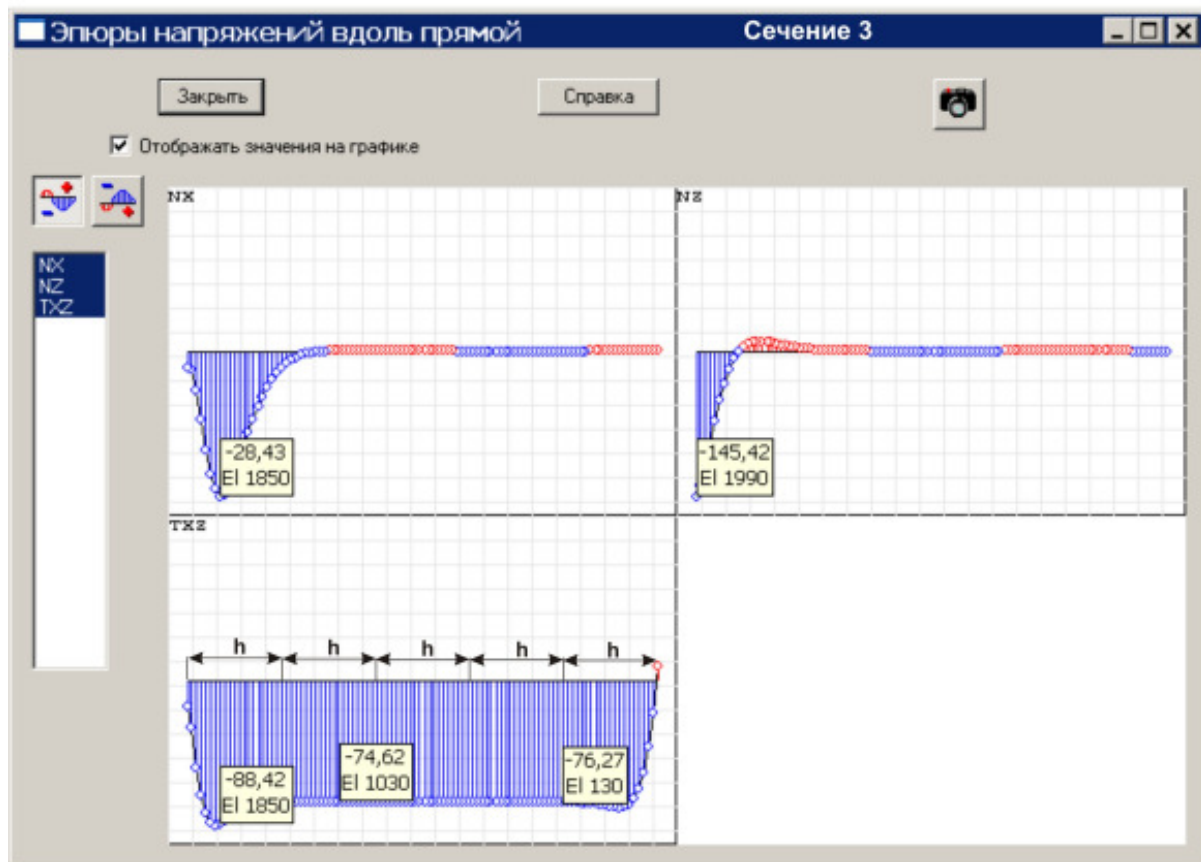
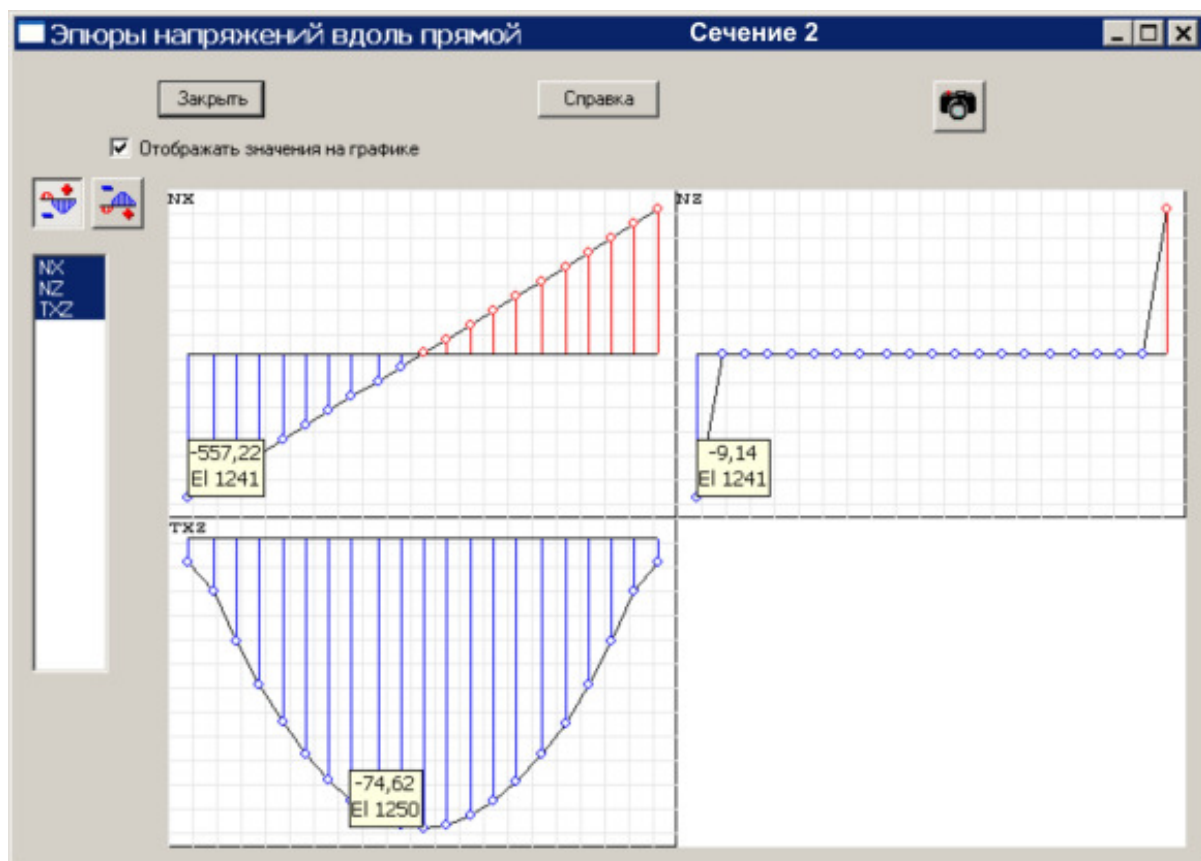


Рис.164

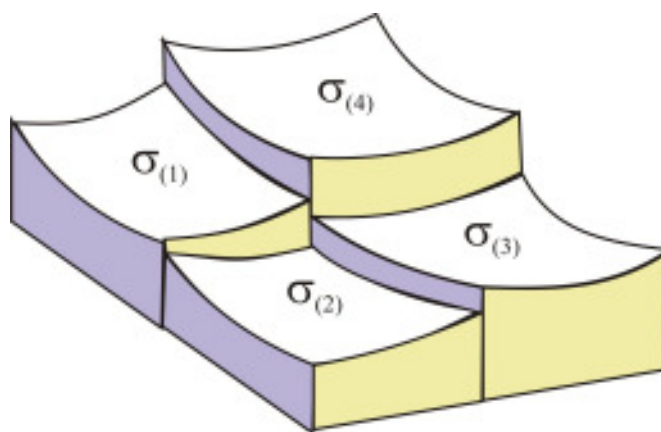






Рис.165

Само понятие «примерно в одной плоскости» регулируется значением «параметра пологости», который по умолчанию принимается равным $0,25$ (это есть синус угла между нормальными к смежным элементам, равного примерно 14°), но может быть заменено пользователем. Именно по указанным среднеарифметическим значениям строятся изополя или изолинии, эти же значения выдаются на экран при соответствующей настройке режима выдачи результатов. Поэтому на *рис.163,164* на свободной поверхности балки-стенки, где должны быть нулевые напряжения, мы наблюдаем скачки на эпюрах напряжений.

По поводу сказанного заметим, что осреднение имеет смысл для так называемых регулярных узлов, где не следует ожидать скачкообразного изменения усилий. Тогда оно дает значение, приближающееся к ожидаемому «плавному» решению. Для тех случаев, когда в узле ожидается появление скачка значений внутренних усилий, осреднение значений такой скачок сглаживает, что может привести к недоразумениям.

Если в версии SCAD отсутствует кнопка  **Эпюры напряжений вдоль секущей**, при построении эпюр напряжений вдоль выделенного сечения можно воспользоваться одним из следующих методов.

Метод 1. С помощью кнопки  **Увеличение изображения** панели **Визуализация** выделить малый участок балки-стенки в окрестности рассматриваемого сечения. Включить фильтры

Узлы , **Номера узлов**  и **Оцифровка изополей/ изолиний** . В результате этих действий в рабочем окне **SCAD** появится картина, представленная на *рис.166*. В центре элементов выводится величина физического параметра (в данном случае напряжения σ_x), а по углам элемента – номера узлов, которые в дальнейшем используются при выборе величин напряжений. Выписывая величины напряжений в элементах, примыкающих к рассматриваемому сечению, строят эпюры напряжений обычным способом или с использованием системы **MathCAD** (при выборе информации необязательно делать полную выборку, но она должна содержать не менее пяти значений анализируемой величины). На *рис.167* приведена программа реализующая построение эпюры напряжений σ_x по 14 выбранным значениям напряжений σ_x .

Метод 2. В диалоговом окне цветовой шкалы, например, Nx (*рис.158*), определяем диапазон изменений напряжений в выбранном сечении балки-стенки, например, $(-500, 500)$, т.е. изменение напряжений составит 1000 кг/см^2 . Предположим, что выбранное сечение должно пересекать не менее пяти изолиний с шагом 100 кг/см^2 .



Рис.166

$X :=$	0	$Y :=$	172.99
	4		141.79
	8		107.75
	12		74.13
	16		43.02
	20		15.13
	24		-9.77
	28		-32.33
	32		-53.27
	36		-73.17
40	-92.52		
44	-111.78		
48	-131.60		
50	-136.76		

$x := 0, 0.5.. 50$

$cY := cspline(X, Y)$

$y(x) := interp(cY, X, Y, x)$

Эпюра σ^x

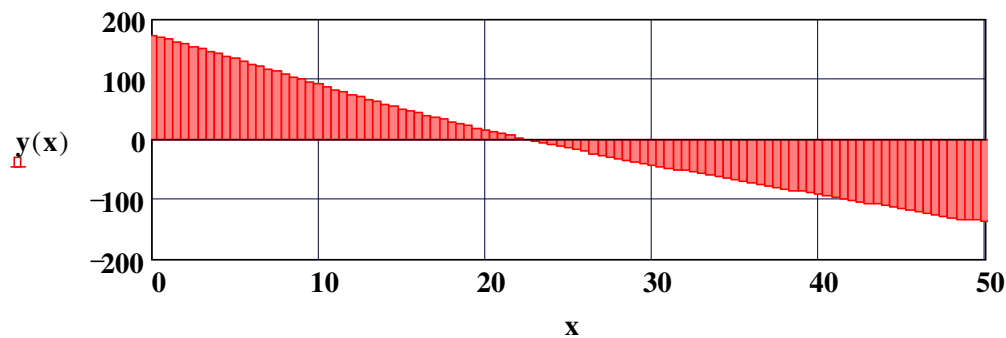


Рис.167

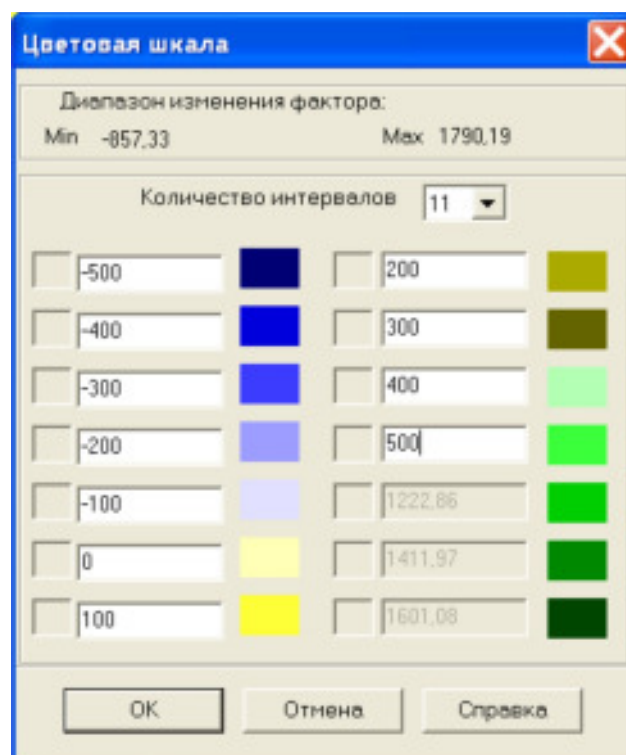


Рис.168

Настройка цветовой шкалы выполняется в диалоговом окне **Цветовая шкала** (рис.168), которое появляется после нажатия кнопки  **Установка параметров цветовой шкалы**. Значения, записанные в строках этого окна, соответствуют начальному значению фактора, отнесенному к каждому цвету. Диапазон значений для каждого цвета определяется интервалом между значениями соседних цветов. Для последнего в списке цвета диапазон определяется между значением в строке и максимальным значением фактора (указывается в верхней части окна **Цветовая шкала**). Изменение количества интервалов выполняется выбором из списка **Количество интервалов**. Так как мы собираемся вывести десять диапазонов, то задаём одиннадцать интервалов и границы диапазонов (рис.168). Щелкаем по клавише **ОК**. В результате получим картину изолиний и изополос, представленную на рис.34.

Обратите внимание, что цветовая шкала начинается и заканчивается величинами минимального и максимального значений исследуемого фактора.

Копируем картину изополос и переносим её в графический редактор **CorelDraw**. Проводим линию, совпадающую с исследуемым сечением балки-стенки. Отмечаем точки пересечения изолиний с сечением и в этих точках строим отрезки прямых линий длиной пропорциональной величинам напряже-

ний изолинии пересекающей сечение в данной точке. Соединяем концы этих отрезков линий. В результате этих действий получаем соответствующую эпюру напряжений (рис.169).

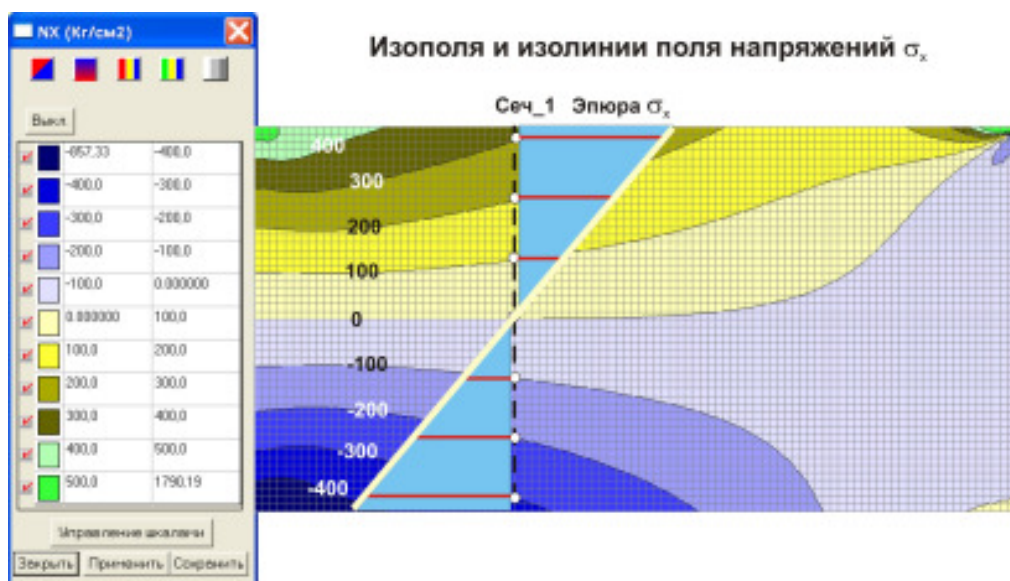


Рис.169

В этом окне надо задать список только тех элементов, которые попадают в выбранное Вами сечение

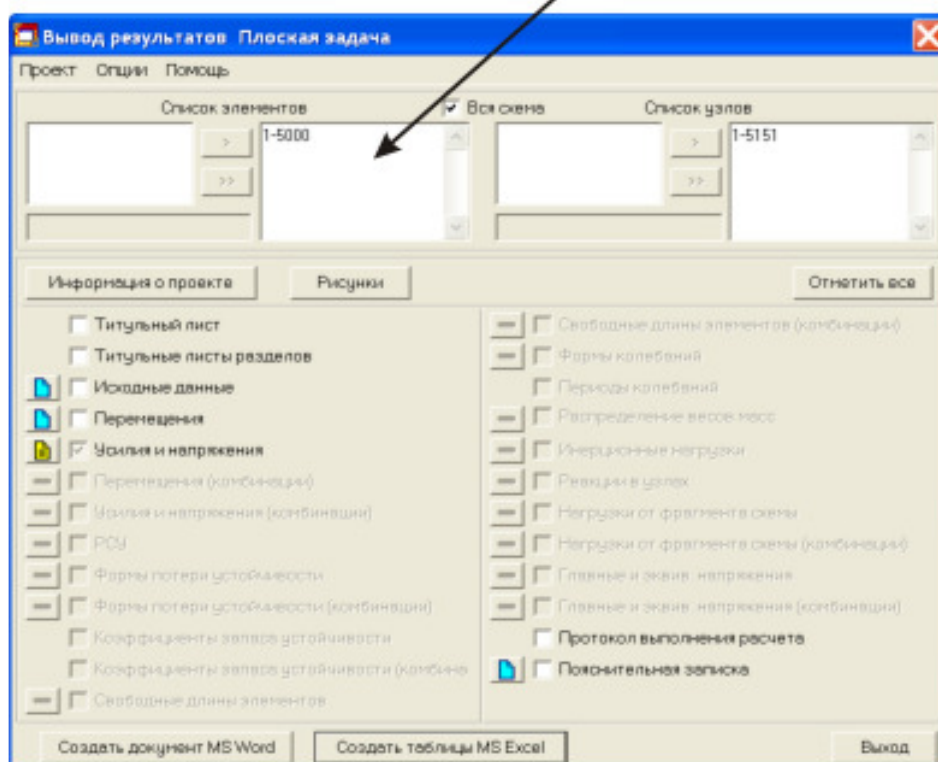


Рис.170

Метод 3. Выходим в экран управления проектом. Выбираем раздел **Печать таблиц**. Появляется панель, представленная на рис.170 (вид этой панели определяется версией SCAD). В соответствующем окне панели задаём список элементов, попадающих в выбранное сечение (не обязательно всех элементов), и требуем создать таблицу в MS Excel. В результате появляется таблица напряжений (рис.171), из которой можно выбрать необходимые вектора и перенести их в MathCAD для последующей обработки (см. рис.167).

Microsoft Excel - балка_стенка.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Adobe PDF

А1 Усилия и напряжения элементов, т, м

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1	Усилия и напряжения элементов, т, м							
2	Номер эл	Номер сек	Номер заг	Усилия и				
3				NX	NZ	TXZ		
4	1	1	1	-6628,5	-1142,61	-1133,74		
5	2	1	1	-5133,95	-1178,67	-983,834		
6	3	1	1	-4558,67	-1157,15	-809,555		
7	4	1	1	-4151,31	-1100,23	-695,741		
8	5	1	1	-3831,07	-1040,94	-609,049		
9	6	1	1	-3555,83	-981,729	-541,141		
10	7	1	1	-3308,73	-923,828	-486,173		
11	8	1	1	-3080,56	-867,324	-440,784		
12	9	1	1	-2866,02	-812,138	-402,746		
13	10	1	1	-2661,77	-758,133	-370,531		
14	11	1	1	-2465,55	-705,173	-343,037		
15	12	1	1	-2275,78	-653,134	-319,446		
16	13	1	1	-2091,28	-601,907	-299,135		
17	14	1	1	-1911,16	-551,395	-281,62		
18	15	1	1	-1734,72	-501,513	-266,517		
19	16	1	1	-1561,39	-452,185	-253,52		
20	17	1	1	-1390,69	-403,342	-242,382		
21	18	1	1	-1222,21	-354,921	-232,902		
22	19	1	1	-1055,61	-306,863	-224,917		

Готово NUM

Рис.171



Рис.172

19. Активируем раздел **Постпроцессоры** инструментальной панели. Кнопки раздела **Постпроцессоры** инструментальной панели приведены на *рис.172*. В разделе **Постпроцессоры** инструментальной панели находятся функции анализа результатов работы постпроцессоров подбора арматуры в элементах железобетонных конструкций, расчета нагрузок от фрагмента схемы и результатов расчета главных и эквивалентных напряжений для пластинчатых элементов -
20. Отображение результатов расчета главных и эквивалентных напряжений выполняется с помощью кнопок инструментальной панели аналогично выводу напряжений для пластин (*рис.173*).



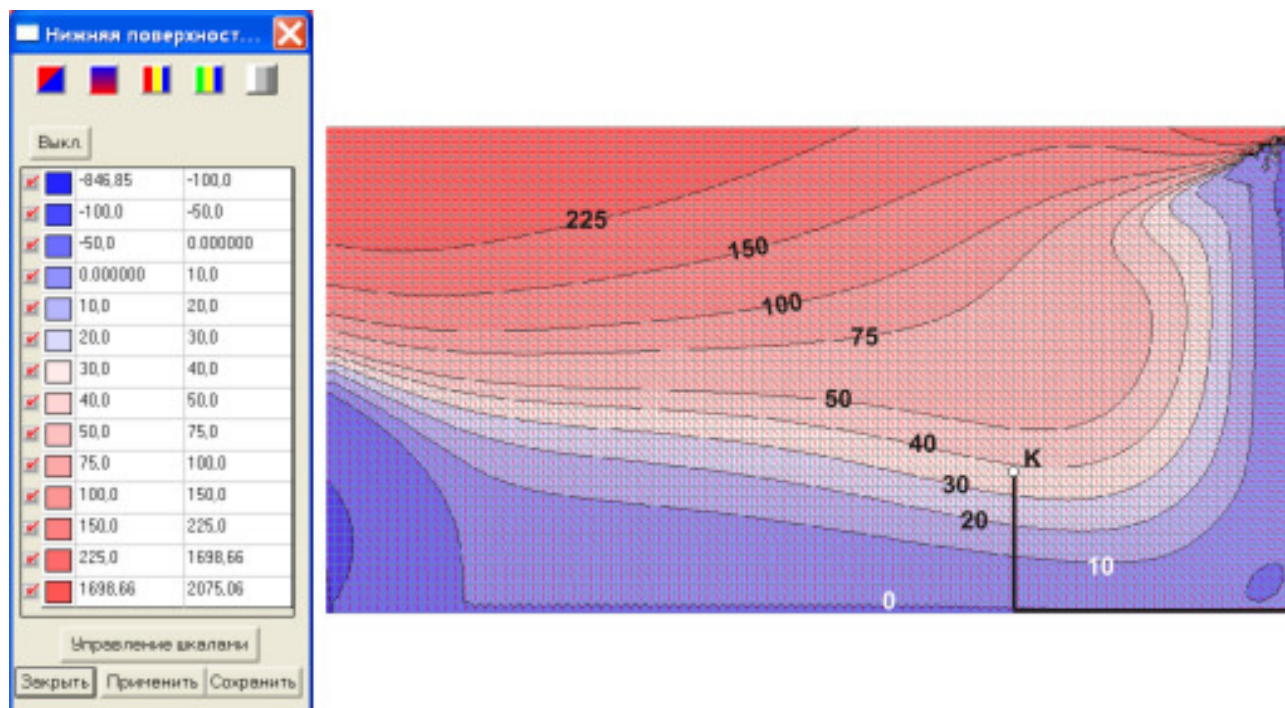


Рис.173

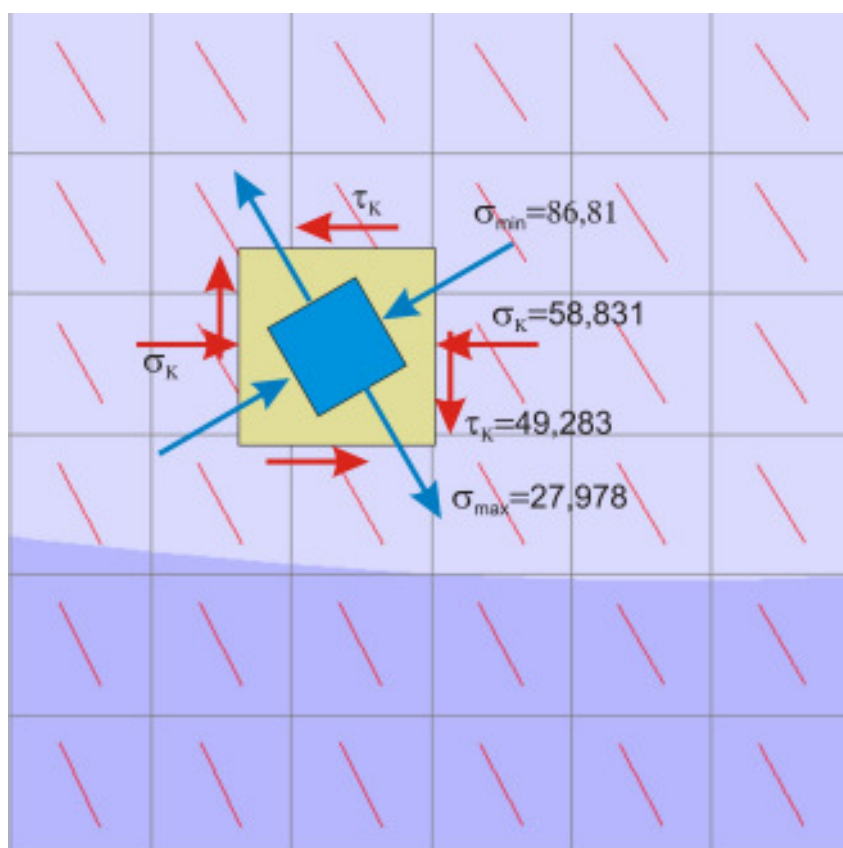


Рис.174



При определении вида выводимой информации в **SCAD** приняты следующие условные обозначения:

- **S1**, **S2**, **S3** - главные нормальные напряжения;
- **NE1**, **NE2**, **NE3**, **NE4** - эквивалентное напряжение (приведенное к эквивалентному растяжению) по **1–4** теориям прочности;

- **NS1, NS2, NS3, NS4** - эквивалентное напряжение (приведенное к эквивалентному сжатию) по **1–4** теориям прочности.

На *рис.173* приведены изополя и изоуровни главных напряжений σ_I для балки-стенки и ориентация главных площадок. Фрагмент этой картины полос, вырезанный в окрестности точки **K**, приведен на *рис.174*. Как следует из *рис.173* и *174*, величины и ориентация главных напряжений в точке **K**, вычисленные по формулам сопротивления материалов, в данной задаче близки к аналогичным величинам, полученным в процессе численного расчета методом конечного элемента.

3.2.1.3. Расчет балки-стенки в программном комплексе MSC.Patran-Nastran 2005

- Загружаем программный комплекс **MSC.Patran-Nastran**.
- Создаём новую базу данных.
- Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.
- В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
Action► Create
Object► Point
Method► XYZ.
- В поле **Point Coordinates List** вводим координаты угловых точек пластины: $[0\ 0\ 0]$, $[0\ 0.5\ 0]$, $[1\ 0.5\ 0]$, $[1\ 0\ 0]$. Для контроля положения введенных точек активизируем кнопку  **Положение точек**.
- На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**.
- Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам.
- На панели **Geometry** в разделе **Object** активизируем опцию **Surface**, в разделе **Method** активизируем опцию **Edge**. Панель **Geometry** изменит вид (*рис.175*), на ней выбираем опцию **4 Edge**.
- В графическом окне щелкаем левой клавишей мыши по кривым, что приводит к последовательному заполнению окон **Surface Edge n List**. После нажатия на клавишу **Apply** будет создана пластина. На *рис.175* приведены номера узлов, кривых и пластины.
- Открываем форму приложения **Materials** и задаём имя материала – **st** и его физико-механические характеристики: **Elastic Modulus = 2e11**, **Poisson Ratio = 0.3**. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options** и по кнопке **Apply** на панели **Materials**.
- Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **2D**, тип элементов – **Shell**. В окне **Property Set Name** задаём имя **plastina** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала: щёлкаем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **st**. Щелчок левой клавишей мыши по имени материала приводит к появлению записи **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. В поле **Thickness** задаем толщину пластины **1 см** и нажимаем последовательно на клавиши **OK** и **Apply** (*рис.176*).

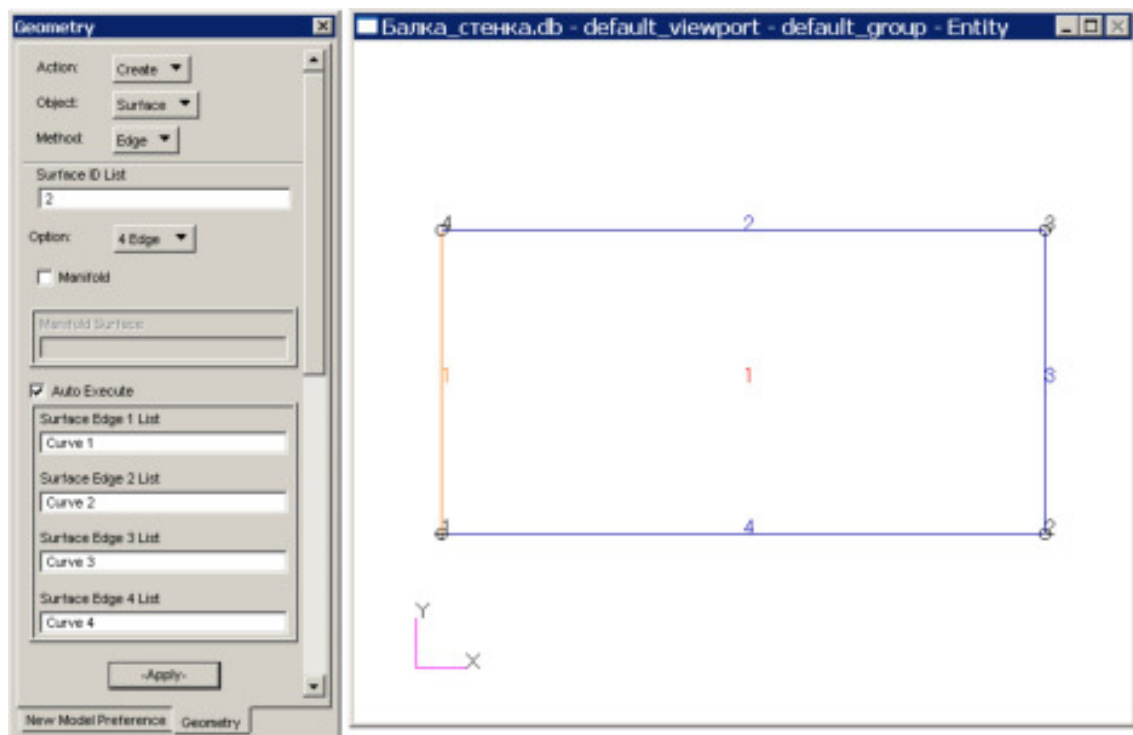


Рис.175

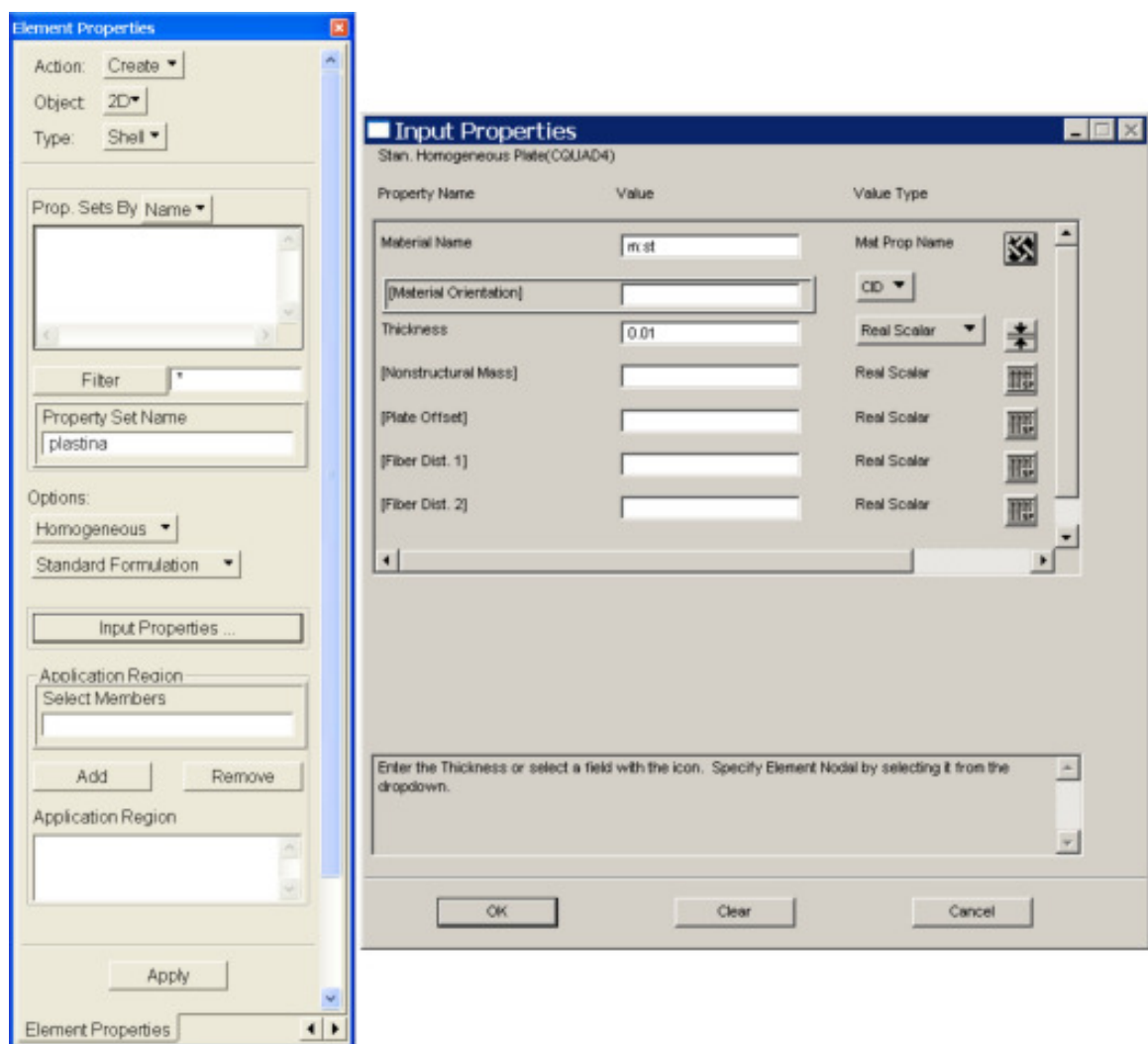


Рис.176

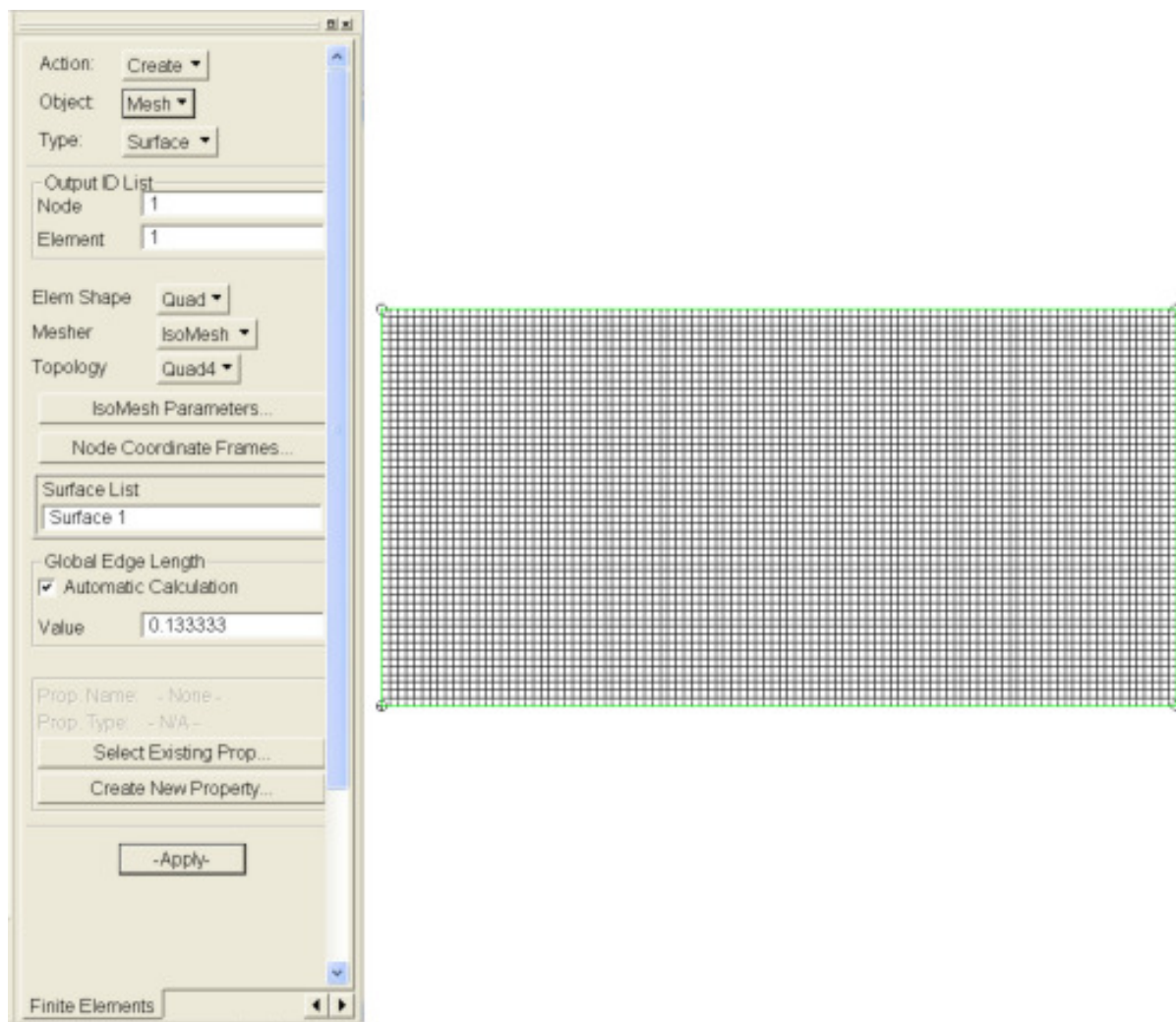


Рис.177

- L. Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели (рис.54).
- M. Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели пластины. В поле **Number** задаем число элементов вдоль границ пластины (в нашем случае на вертикальных границах - **50** элементов; на горизонтальных - **100**).
- N. Переходим к созданию сетки. Активизируем команду **Object►Mesh**. Панель **Finite Elements** примет вид как на рис.105.
- O. Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элементов – **plastina**. Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**.
- P. В графическом окне устанавливаем курсор мыши на пластину и нажимаем её левую клавишу. В окне **Surface List** появится запись **Surface 1** (если в окне **Automatic Calculation** установлен «флажок», то нажимать на клавишу **Apply** не надо). Если всё сделано правильно, в графическом окне появится изображение конечно-элементной сетки (рис.177).
- Q. Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:


Action►Create
Object►Displacement
Type►Nodal

и в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия: запрещаем поступательное перемещение **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**. Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. В графическом окне выделяем все узлы. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, а на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. Вводим вторую кинематическую связь **d2** для жесткого защемления левого торца балки: запрещаем все линейные и угловые перемещения. Далее повторяем все операции, выполненные для связи **d1**.

Для задания силовых граничных условий активизируем команду **Object►Force**. В окне **New Set Name** задаем имя распределенной нагрузки **f**. Щелкаем по кнопке **Input Data...** Открывается одноименная панель, в окне которой вводим сосредоточенную силу **<0 -20000 0>**. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. В графическом окне выделяем крайний правый верхний узел балки-стенки. На панели **Select Application Region** щелкаем по кнопке **OK**, на панели **Loads/Boundary Conditions** - по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенной силы.

- R.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Внешний вид панели **Analysis** приведен на *рис.63*. Для расчета балки-стенки выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. Нажимаем клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.
- S.** Окончив вычисления необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ►Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.
- T.** Определяем информацию о напряженно-деформированном состоянии балки-стенки.

Отображение деформированного состояния балки-стенки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:
Action ►Create;
Object ►Quick Plot;
 вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase*;
 тип результата: *Displacements, Translational*;
 величину: *Magnitude*.

На *рис.178* показаны изополя перемещений в направлении осей **x - u** и **y - v**.

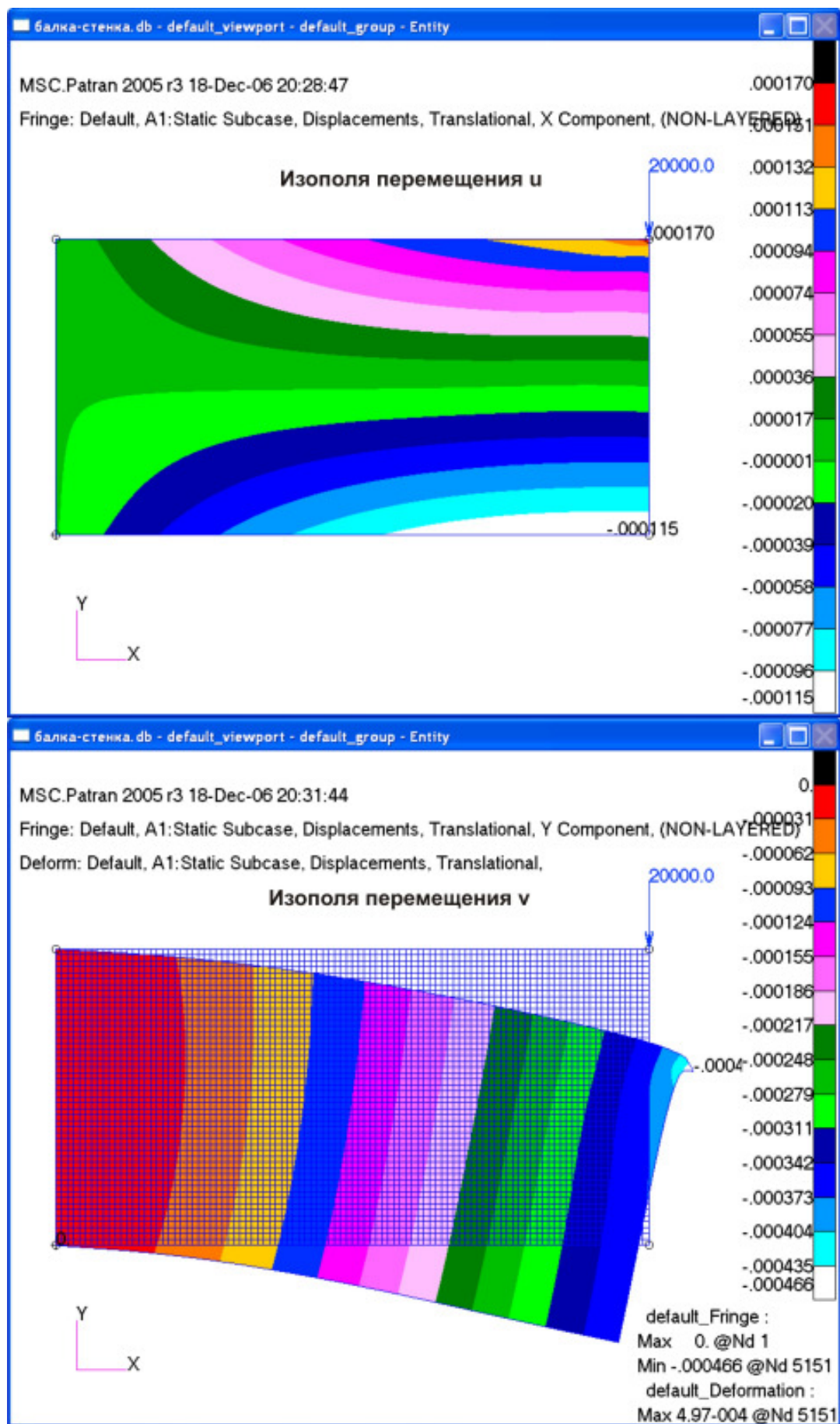


Рис.178

Отображение напряженного состояния балки-стенки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем (рис.179, а):


Action ► *Create*;

Object ► *Quick Plot*;

вариант расчета – *Default A1: Static Subcase*;

тип результата: *Stress Tensor*;

количество (компонента тензора напряжений σ_x): *X*.

Нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение изополей поля напряжения σ_x при разбивке диапазона изменения этих напряжений на **15** уровней (рис.179, б). Эти установки для поля отображения называются **Fri_Default_Fringe**. Как следует из рисунка рис.179, б, в интересующей нас области балки-стенки мы имеем всего шесть полос, так как все остальные полосы локализованы в области концентрации напряжений под силой **20000 Н**. Для увеличения числа полос в рассматриваемой области балки-стенки необходимо изменить разбивку диапазона изменения напряжений σ_x . С этой целью нажимаем кнопку .

Панель **Results** примет вид, показанный на рис.180. Нажимаем на клавишу **Range...** Откроется панель **Set Range**, в окне которой пока две записи: *Fri_Default_Fringe* и *standart_range*. Нажмём на клавишу **Define Range...** . Откроется панель **Ranges** (рис.181). В окне **New Range Name** задаём новое имя диапазонов - **1**, в окнах **Start Value** и **End Value** - границы нового диапазона, в пределах которого изменяются напряжения σ_x в рассматриваемой области балки-стенки. В окне **Number of Sub-ranges** задаём число поддиапазонов, на которое будет разбиваться **1**-й диапазон, и щелкаем по клавише **Calculate** . В результате диапазон **1** будет разбит на **15** поддиапазонов, граничные и средние значения которых появятся в таблице значений. Нажимаем клавишу **Apply**. Имя диапазона появится в окне панели **Set Range**. Картина изополос поля напряжений примет вид, приведенный на рис.179, в.

Аналогичным образом выводим изополя напряжений σ_y , τ_{xy} , σ_1 , σ_3 (рис.182-183).

Отображение графиков изменения внутренних усилий в сечениях балки-стенки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Graph*;

Method ► *Y vs X*;


вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase*;

тип результата: *Stress Tensor*;

компоненты тензора (Quantity): *X Component*;

ось X: *Coordinate*;

ось абсцисс (*Select Coordinate Axis*): *Coord 0.2*.

Активируем кнопку  **Target Entities**, позволяющую фильтровать результаты расчетов. Панель **Results** изменит вид (рис.138). В графическом окне **Patran** выделим узлы, принадлежащие сечению **1**. Их номера появятся в окне **Select Nodes**.

Активируем кнопку  **Display Attributes**. Панель **Results** снова изменит вид (рис.138). В окнах этой панели, в принципе, можно задать параметры графика,

но мы этого делать не будем. Нажимаем клавишу **Apply** и в графическом окне появится график, приведенный на *рис.184*, который не противоречит эпюре моментов, приведенной на *рис.127*.

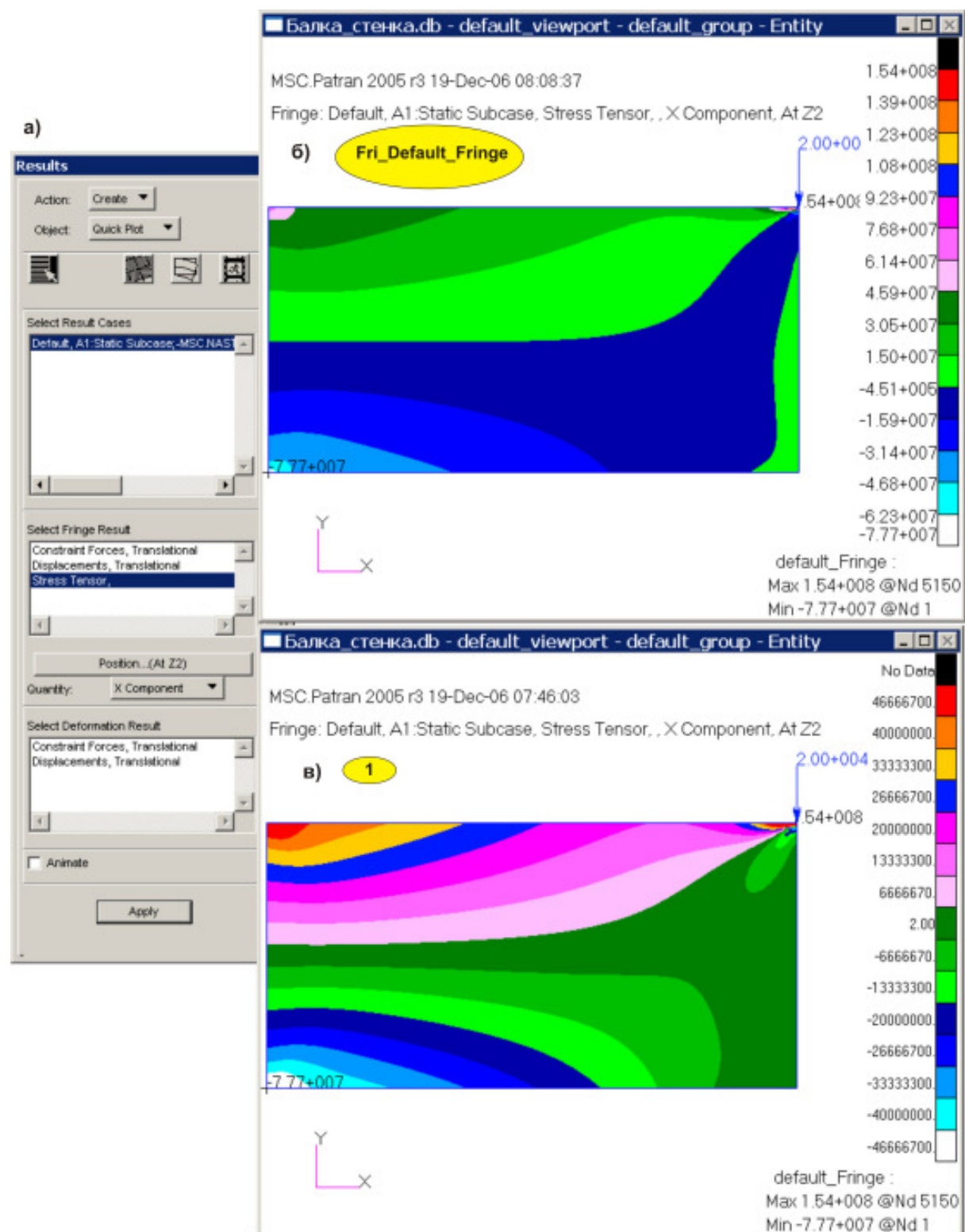


Рис.179

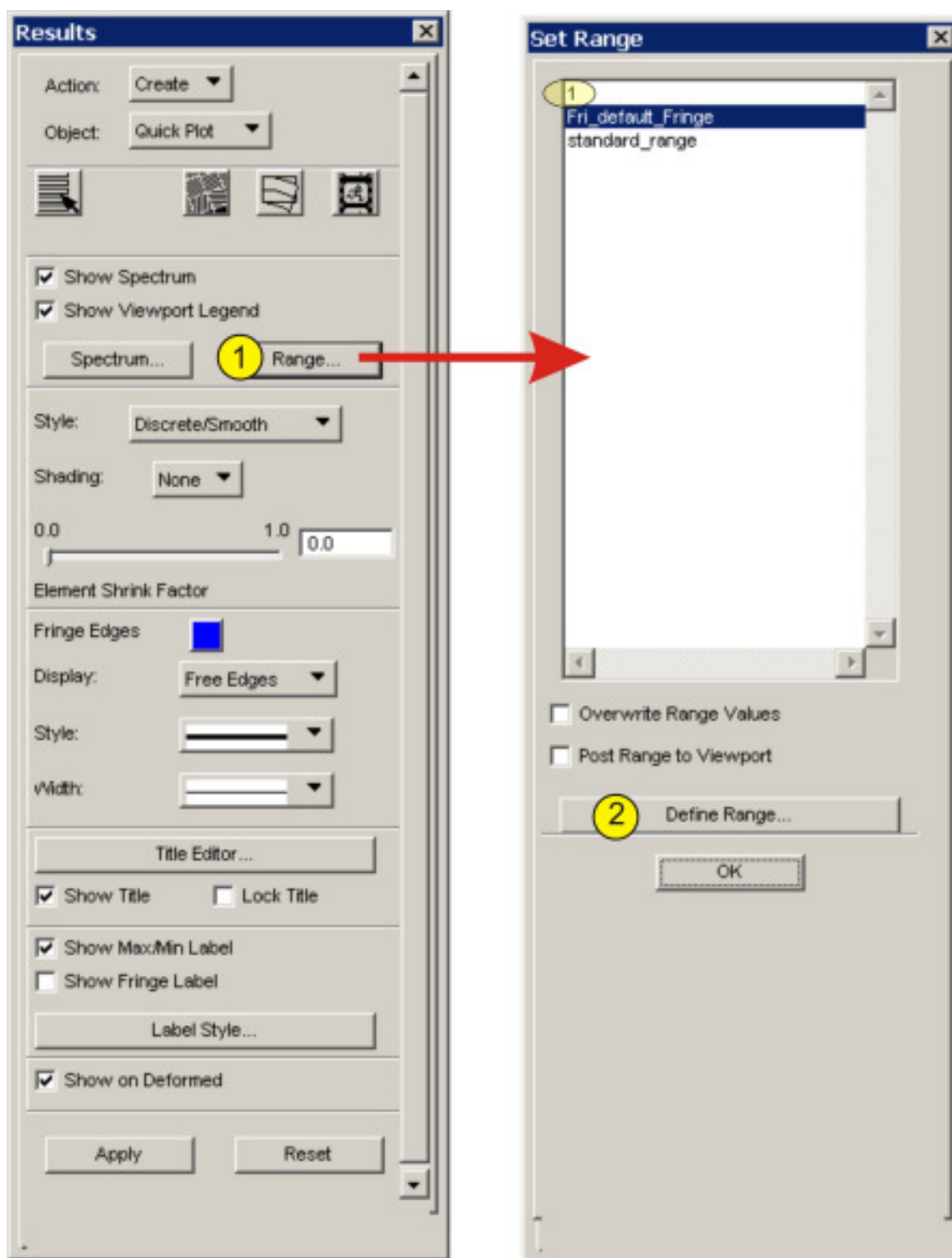


Рис.180

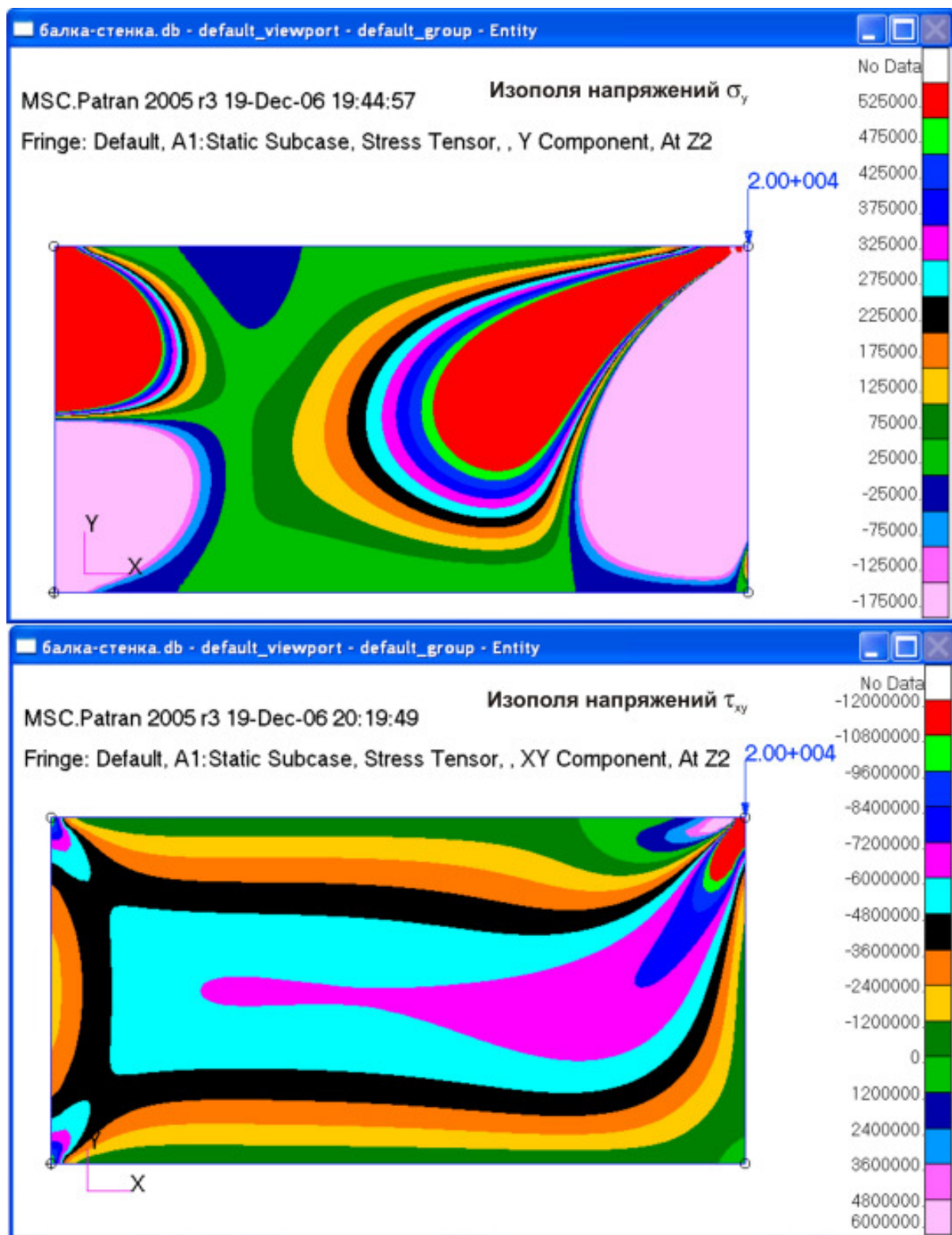


Рис.182

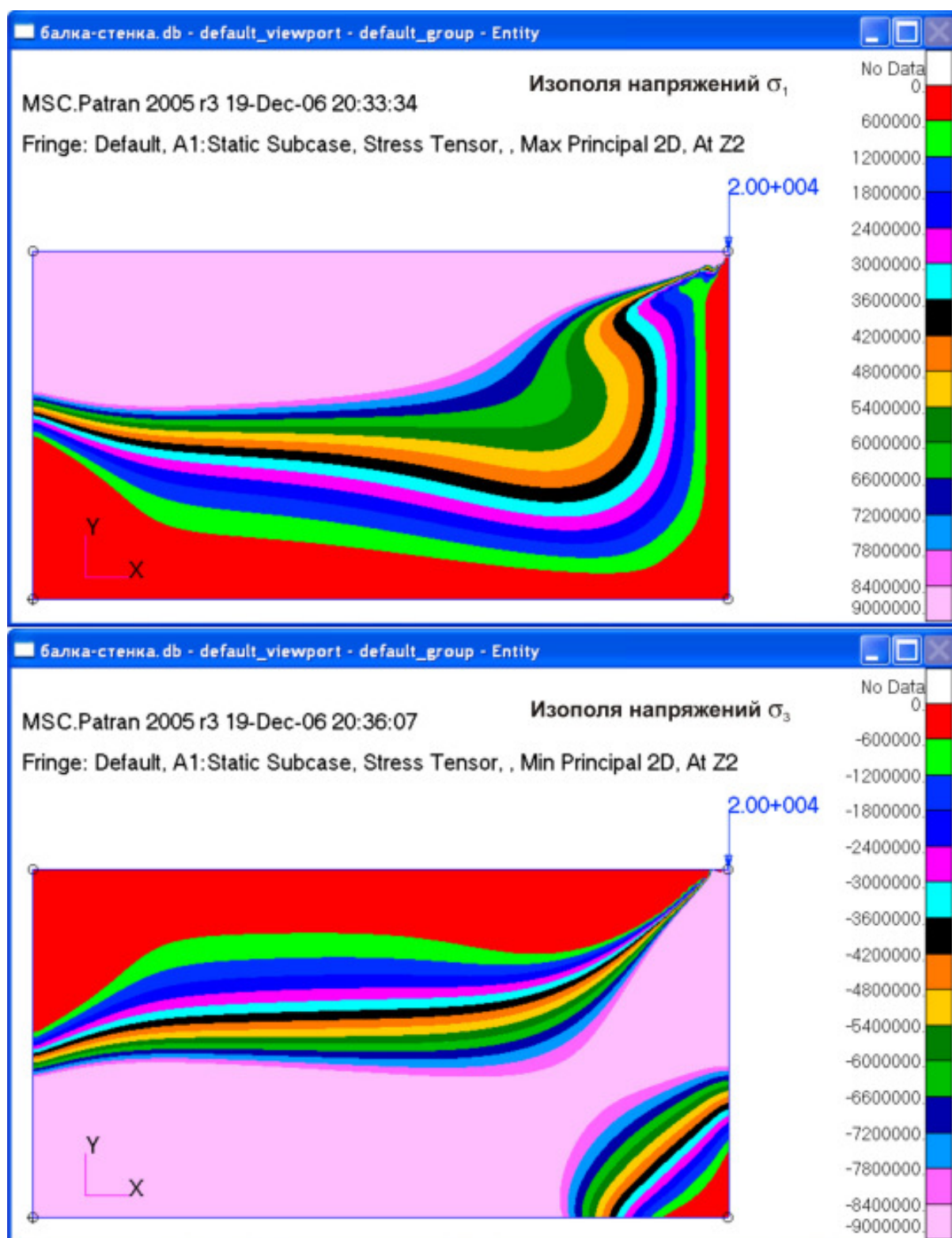


Рис.183

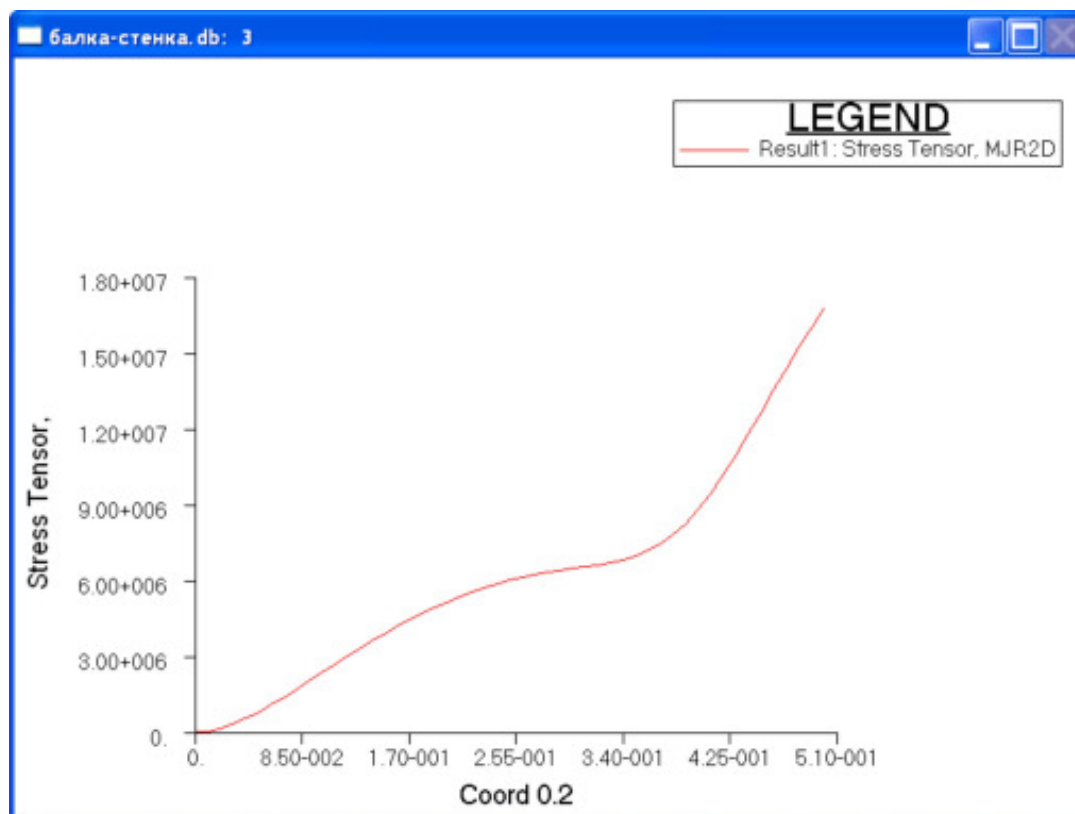


Рис.184

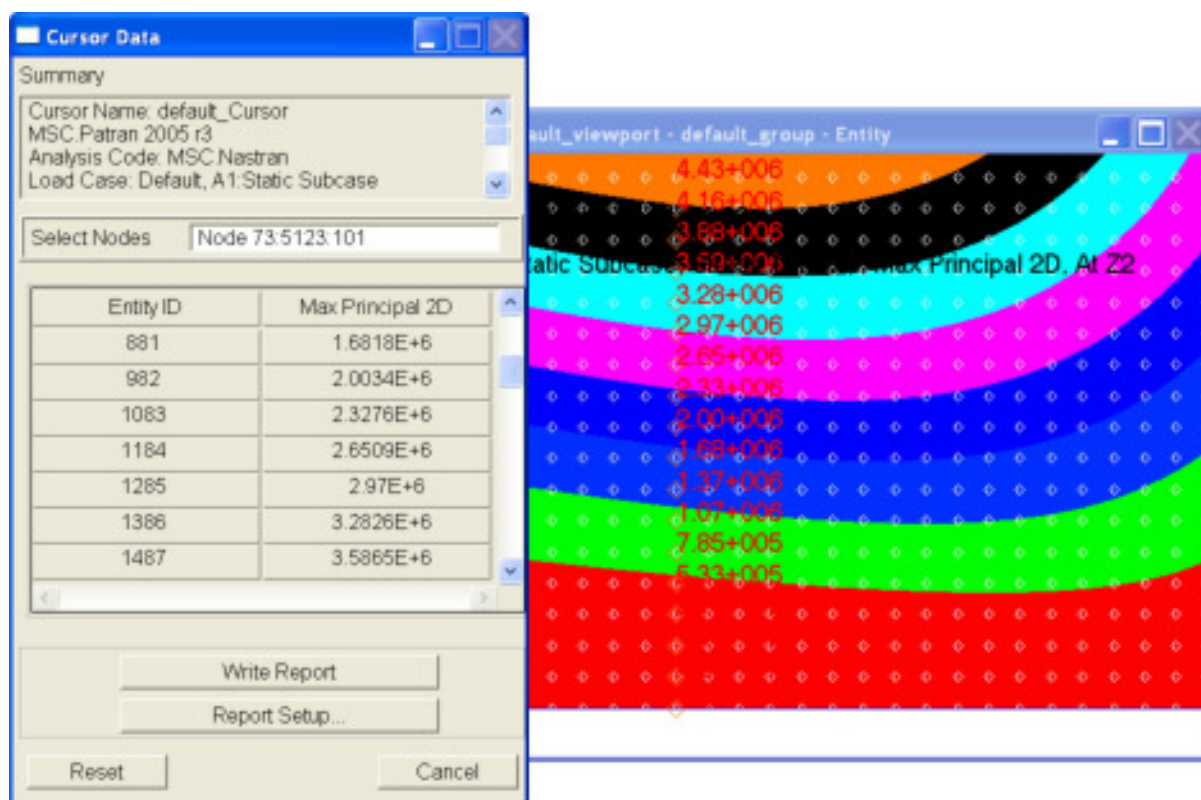


Рис.185

Для определения главных напряжений в точке **К** сначала определим положение сечения, в котором находится точка. Выделим его и увеличим изображение окрестности точки **К**. У выделенных узлов будут проставлены величины главных напряжений (рис.188). Зная шаг конечно-элементной сетки, можно найти положение точки **К** в се-

чении. В рассматриваемом нами случае в окрестности точки **К** действуют напряжения $\sigma_I = 3,59 \cdot 10^6$ Па.

Величину этого напряжения σ_I можно найти и так. Выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Cursor*;


Metod ► *Scalar*;

вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase*;

тип результата: *Stress Tensor*;

компоненты тензора (Quantity): *X Component*;

выбираемый объект (Target Entity): *Nodes*.

Активируем кнопку  **Target Entities**. Щелкаем по клавише **Apply**, появится панель **Cursor Data** (рис.185). В графическом окне **Patran** выделим узлы, принадлежащие сечению **I**. Их номера появятся в окне **Select Nodes** и в таблице, в которой указаны номера узлов и соответствующие им напряжения. В окрестности точки **К** находится узел **1487**.

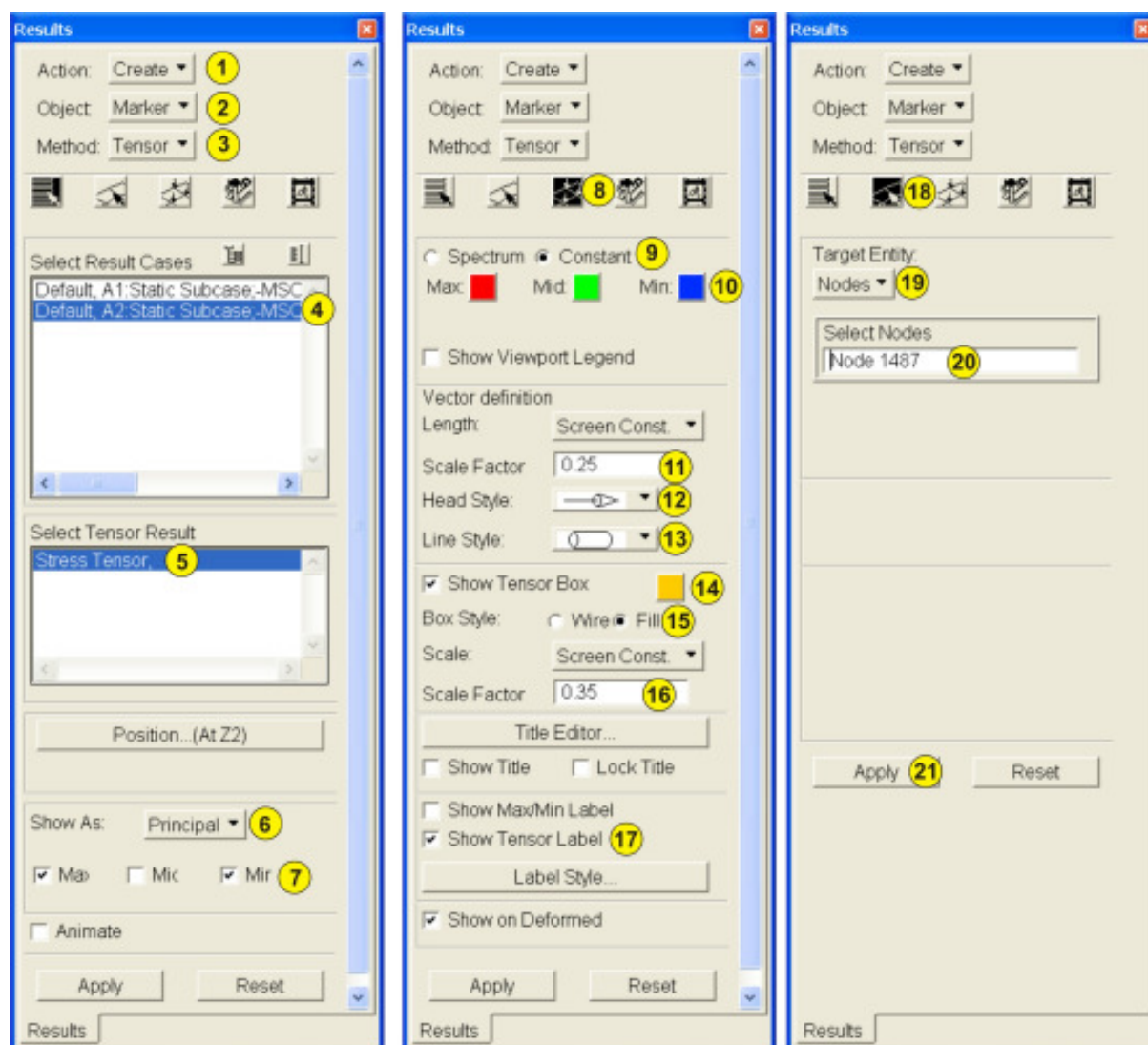




Рис.186

MSC.Patran имеет мощное средство графического анализа напряженного состояния в точке. Выберем (рис.186):

Action ► *Create*, (шаг 1);

Object ► *Marker*, (шаг 2);
Metod ► *Tensor*, (шаг 3);
 вариант расчета – *Default, A2: Static Subcase*, (шаг 4);
 тип результата: *Stress Tensor*, (шаг 5);
 список *Show As: Principal*, (шаг 6);
 выключатели: *Max, Min*, (шаг 7).

Активируем кнопку  **Display Attributes**, (шаг 8). Включаем переключатель **Constant**, (шаг 9) (рис.186). При необходимости изменяем цвет отображения главных напряжений, (шаг 10). Назначаем параметры вектора: длину, отображаемый вид, стиль линии (шаги 11-13), и параметры отображения, вырезаемого малого элемента (шаги 14-16). Включаем выключатель **Show Tensor Label**, (шаг 17) (рис.186).

Активируем кнопку  **Target Entities** (шаг 18). Из списка **Target Entity** выбираем **Nodes** (шаг 19). В графическом окне **Patran** выделяем узел **1487** и щелкаем по клавише **Apply**. В графическом окне появится изображение малого элемента, вырезанного главными площадками (рис.187).

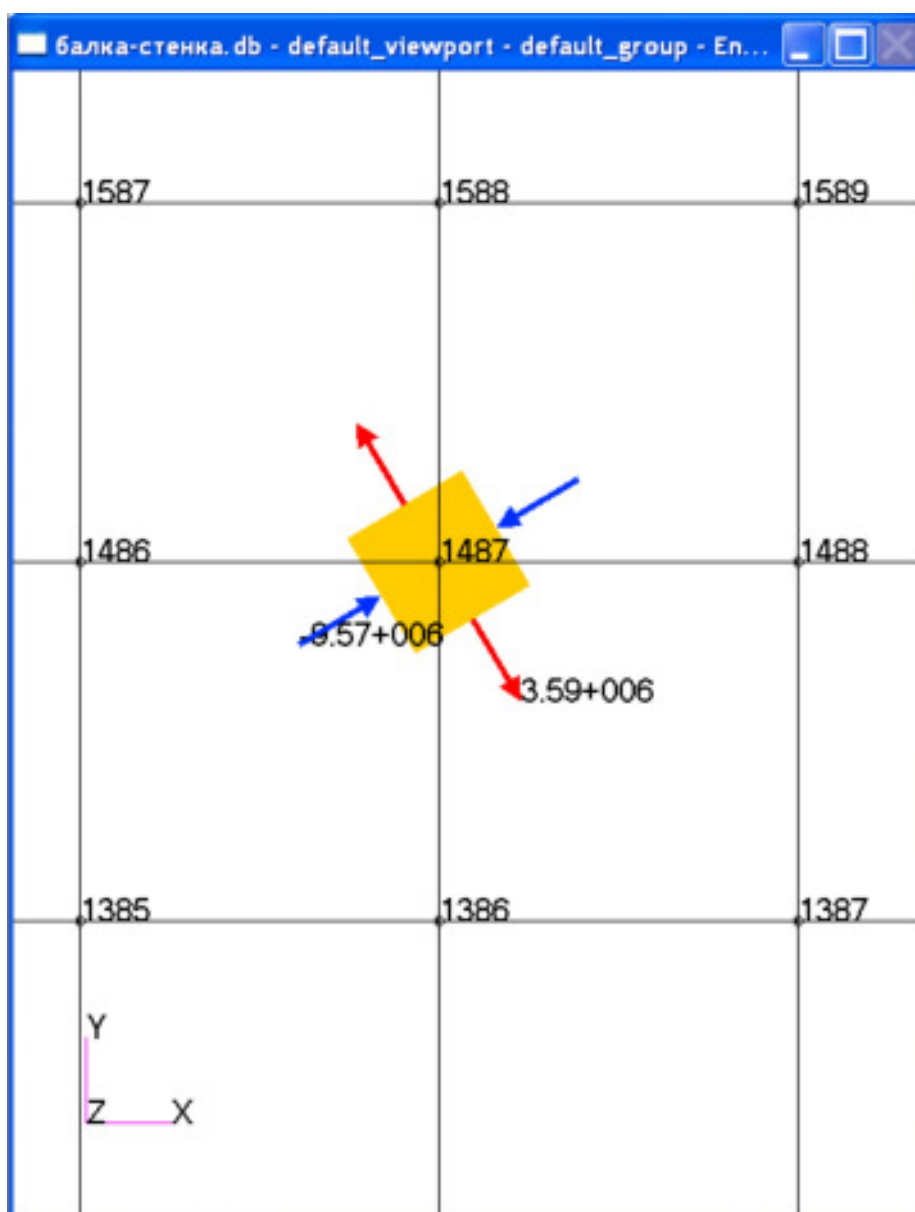


Рис.187

3.2.2. Расчет штифтовых (заклёпочных) соединений

3.2.2.1. Определение наибольших нормальных напряжений в поперечном сечении стержня по формулам сопротивления материалов без учета концентрации напряжений

Стандартный расчет заклёпочных соединений, приводимый в курсе «Сопротивление материалов», проиллюстрируем на примере определения наибольших нормальных напряжений (без учета концентрации напряжений) в поперечном сечении стального стержня фермы, растянутого силой $P = 210$ кН. Стержень составлен из двух стальных полос сечением 120×8 мм и прикреплен к фасонному листу тремя заклепками диаметром $d = 20$ мм (рис.189).

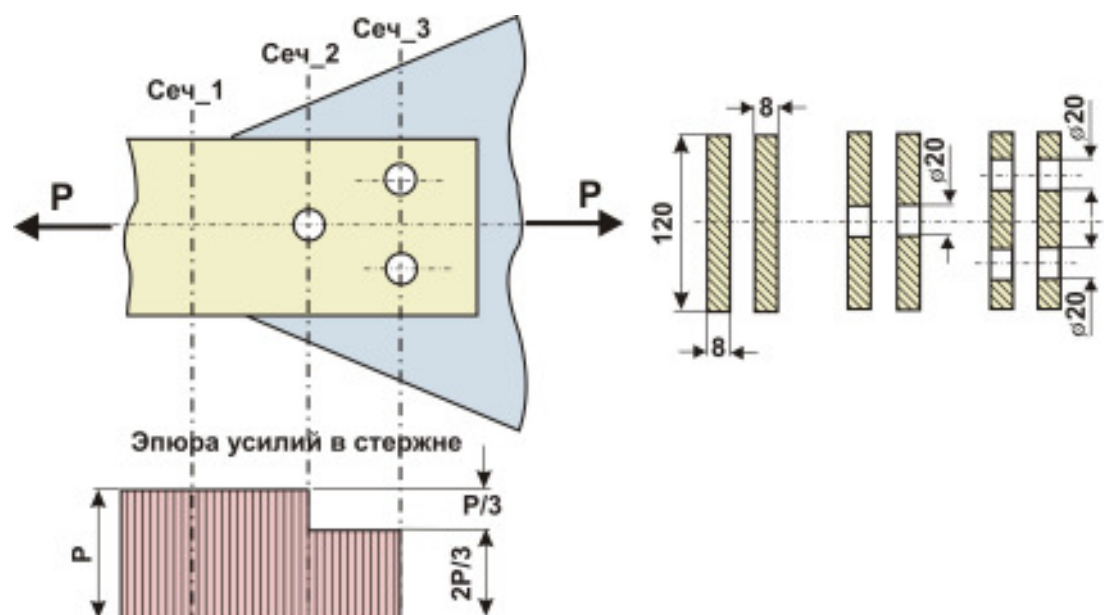


Рис.188

Решение

Сечение 1 не ослаблено заклёпочными отверстиями. Площадь этого сечения

$$F_{бр} = 2 \cdot 18 \cdot 0,8 = 19,2 \text{ см}^2.$$

Сечение 2 ослаблено одним отверстием. Площадь, приходящаяся на ослабление, $F_o = 2 \cdot 2 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ см}^2$. Площадь сечения 2:

$$F_n = F_{бр} - F_o = 19,2 - 3,2 = 16 \text{ см}^2.$$

Сечение 3–3 ослаблено двумя отверстиями. Площадь этого сечения

$$F_{н1} = F_{бр} - 2F_o = 19,2 - 2 \cdot 3,2 = 12,8 \text{ см}^2.$$

Сила P передается от полосы фасонному листу через три заклепки, каждая из которых воспринимает $P/3$. В сечении 2 заклепка снимает с полосы и передает листу $P/3$, следовательно, между сечениями 2 и 3 полоса растянута силой, равной $2P/3$. В сечении 3 две заклепки передают эту силу листу и потому правее сечения 3 полоса свободна от нагрузки. Усилия в полосе представлены на эпюре.

Напряжение в сечении 1

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_{\text{пр}}} = \frac{210}{19,2 \cdot 10^{-4}} = 109 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

напряжение в сечении 2

$$\sigma_2 = \frac{P}{F_{\text{нт}}} = \frac{210}{16 \cdot 10^{-4}} = 131 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

напряжение в сечении 3

$$\sigma_3 = \frac{2P}{3F_{\text{нт1}}} = \frac{2 \cdot 210}{3 \cdot 12,8 \cdot 10^{-4}} = 109 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Наибольшее напряжение возникнет в сечении 2, несмотря на то, что это сечение ослаблено одним отверстием, а сечение 3 двумя.

3.2.2.2. Расчет штифтового соединения по формулам сопротивления материалов

Пусть требуется исследовать напряженное состояние верхней пластины штифтового соединения, нагруженной распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 0,5 \text{ т/см}$. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в пяти сечениях, изображенных на рис.189.

Размеры соединения, скорее всего, не соответствуют реальным. Они выбраны произвольными, так как нашей целью является не расчет реального соединения, а освоение алгоритма расчета подобных соединений (штифтовых, заклёпочных и т.п.). Стандартная процедура определения наибольших нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении стержня (без учета концентрации напряжений), описана выше.

Дано: $d := 20 \text{ см}$ $b := 40 \text{ см}$

$t := 1 \text{ см}$ $q := 0.5 \frac{\text{т}}{\text{см}}$

Решение

Площадь поперечного сечения 1 пластины:

$$F_1 := b \cdot t \quad F_1 = 40 \quad \text{см}^2$$

Площадь опасного сечения 3:

$$F_3 := F_1 - t \cdot d \quad F_3 = 20 \quad \text{см}^2$$

Площадь смятия:

$$F_{\text{см}} := t \cdot d \quad F_{\text{см}} = 20 \quad \text{см}^2$$

Площадь среза:

$$F_{\text{ср}} := t \cdot 30 \quad F_{\text{ср}} = 30 \quad \text{см}^2$$

Усилие, приложенное к пластине:

$$P := q \cdot F_1 \quad P = 20 \quad \text{т}$$

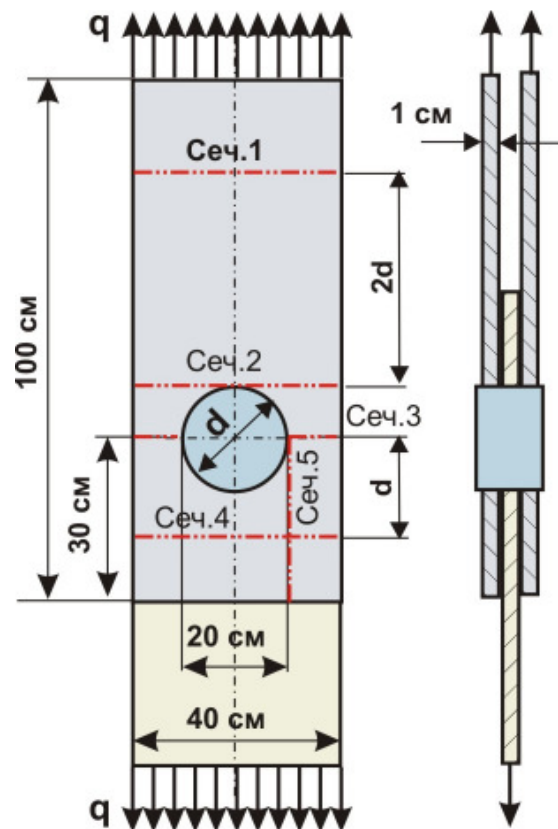






Рис.189

Нормальные напряжения в сечении 1:	$\sigma_1 := \frac{P \cdot 10^3}{F_1}$	$\sigma_1 = 500$	кг/см ²
Нормальные напряжения в сечении 3:	$\sigma_3 := \frac{P \cdot 10^3}{F_3}$	$\sigma_3 = 1 \times 10^3$	кг/см ²
Нормальные напряжения смятия в сечении 3:	$\sigma_{см} := \frac{P \cdot 10^3}{F_{см}}$	$\sigma_{см} = 1 \times 10^3$	кг/см ²
Касательные напряжения среза в сечении 5:	$\tau_{ср} := \frac{P \cdot 10^3}{F_{ср}}$	$\tau_{ср} = 666.667$	кг/см ²

3.2.2.3. Расчет штифтового соединения в программном комплексе SCAD

1. Выполняем первые два шага предыдущего алгоритма расчета балки-стенки и вводим **4** узла, совпадающие с угловыми точками пластины, и узел, совпадающий с центром окружности (рис.190, а).
2. Щелкаем по кнопке  **Генерация узлов по дуге**. Появится панель **Ввод узлов по дуге окружности** (рис.190, б), на которой задаём число узлов по дуге окружности - **12** (число кратное 360°), и радиус окружности – **0.1**. В разделе **Привязка к центру** активизируем флажок **К узлу** и щелкаем по кнопке **ОК**. В рабочем окне щёлкаем левой клавишей мыши по пятому узлу (центру окружности) и далее по кнопке  главного меню. В результате этих действий вокруг пятого узла появятся ещё двенадцать узлов (рис.190, в).
3. Активизируем на инструментальной панели раздел **Схема - создание схем из прототипов и их модификация**. Это приведет к появлению панели кнопок, представленной на рис.144.
4. Нажимаем на кнопку  **Генерация сетки произвольной формы на плоскости**. В результате в инструментальной панели станут доступны кнопки управления режимом триангуляции, изображенные на рис.191. **SCAD** позволяет выполнить автоматическое разбиение произвольной замкнутой области на треугольные конечные элементы. Триангуляция замкнутой области произвольной формы на плоскости является одним из универсальных средств формирования сеток конечных элементов. В комплексе предусмотрена возможность использовать триангуляцию как для создания новой схемы, так и для фрагмента уже готовой схемы.
5. Для триангуляции заданной области необходимо выполнить следующую последовательность операций:
 - ↗ нажать кнопку **Задание контура**  и обвести «резиновой нитью» опорные узлы внешнего контура (под «опорными» понимаются узлы, лежащие в угловых точках контура); на рис. 192, а приведено промежуточное состояние резиновой нити, на рис.192, б - вид полученного контура;

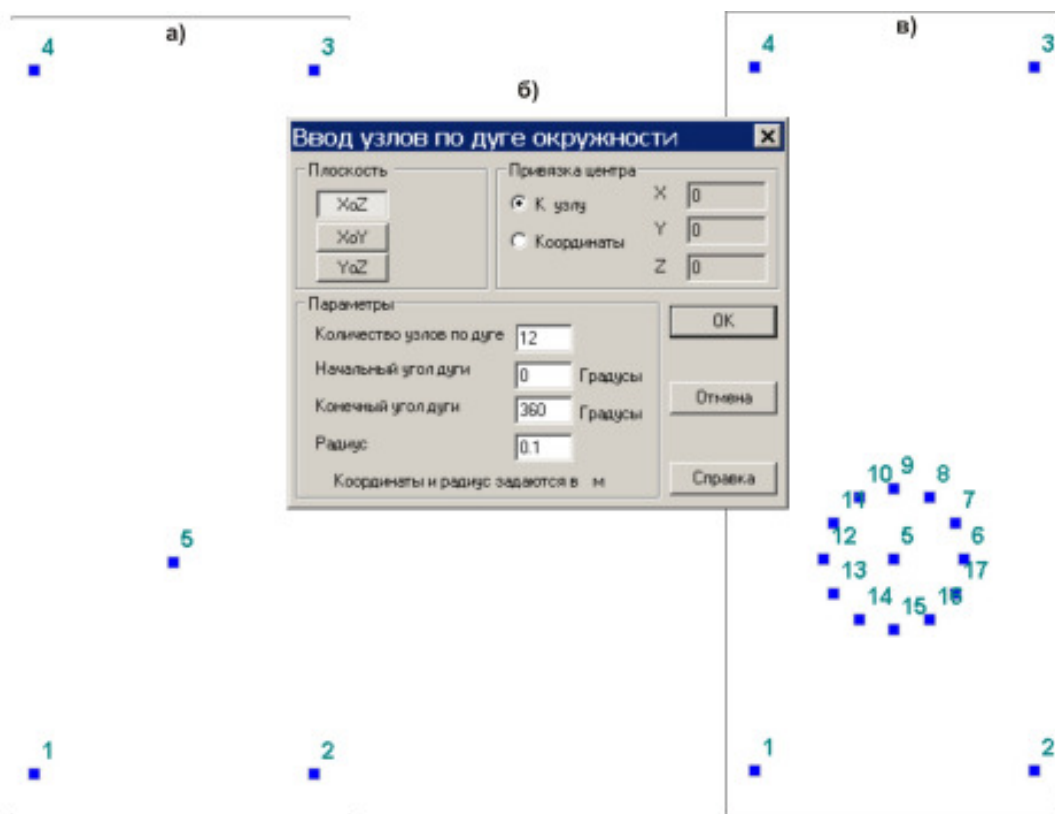


Рис.190






Рис.191


Примечание

- при вводе участка контура можно не останавливаться на узлах, лежащих на прямой, соединяющей опорные узлы; они вводятся в контур автоматически;
- замыкание контура выполняется двойным щелчком мыши после ввода последнего узла или указанием на первый узел;
- не допускается наличие совпадающих узлов как опорных, так и промежуточных (под совпадающими понимают узлы, имеющие одинаковые координаты);



- не допускается попадание внутрь контура совпадающих узлов;
- не допускается наличие внутри контура узлов, лежащих от контура на расстоянии менее **0,15** заданного шага триангуляции, так как это приведет к появлению вырожденных треугольников;
- внутренние контуры не должны пересекать или касаться наружного контура и один другого;
- не допускается наличие контуров, лежащих вне контура, ограничивающего область триангуляции;

- введенный контур можно сохранить, нажав кнопку **Сохранение контура** . Если к моменту сохранения задано несколько контуров, то все они сохраняются под одним именем. Как правило, удобнее сохранять каждый контур отдельно. Для этого после ввода и сохранения контура следует нажать кнопку **Отказ** и только затем вводить новый контур. Перед выполнением триангуляции необходимо нажатием кнопки **Отказ** очистить схему от всех контуров, затем последовательно вызвать контуры из списка, расположенного справа от кнопки сохранения, и активизировать операцию **Генерация сетки конечных элементов** .


- ⇒ нажать кнопку **Указание линий сгущения сетки**  и обойти все узлы внутреннего контура щелкая по ним дважды (за исключением первого узла) левой клавишей мыши;

- ⇒ нажать кнопку **Генерация сетки конечных элементов** . Появится панель **Автоматическая триангуляция**, в окнах которой установить параметры триангуляции – шаг триангуляции **0,02 м** (рис.193, а); нажать клавишу **Жесткости** и в окнах открывшейся панели **Жесткости** пластин указать материал и толщину пластины (рис.193, б);

- ⇒ после выхода из диалогового окна нажатием кнопки **ОК** выполняется разбиение заданной области на треугольные конечные элементы (рис.194, а); для того чтобы более детально исследовать качество созданной конечно-элементной сетки, на панели **Визуализация** активизировать кнопку **Уве-**

личение изображения  и выделить с помощью левой клавиши мыши участок пластины вокруг отверстия (рис.194, б); возврат к исходной расчетной схеме реализуется путём нажатия кнопки **Восстановление исходного размера**  панели **Визуализация**.

6. Схема, созданная в результате триангуляции, фактически является самостоятельной подсхемой, и после завершения триангуляции ее нужно «установить на место», т.е.

присоединить к узлам, на которых выполнялась триангуляция (кнопка  – **Установка сформированной схемы по месту**).

7. Если подсхему предполагается присоединить к другим фрагментам схемы, ее можно сохранить и как самостоятельную схему, воспользовавшись для этого кнопкой



Запись результатов триангуляции. При этом подсхема должна быть записана под новым именем, отличным от имени основной схемы.

8. Окончательная фиксация результатов триангуляции выполняется только после выхода из режима триангуляции (отжата кнопка **Формирование треугольной сетки конечных элементов на плоскости**). На экран выводится результирующая расчетная схема. В течение одного «сеанса» можно выполнить триангуляцию только одной области, после чего закрыть режим триангуляции закрывают. Для триангуляции другой области следует снова активизировать режим триангуляции.

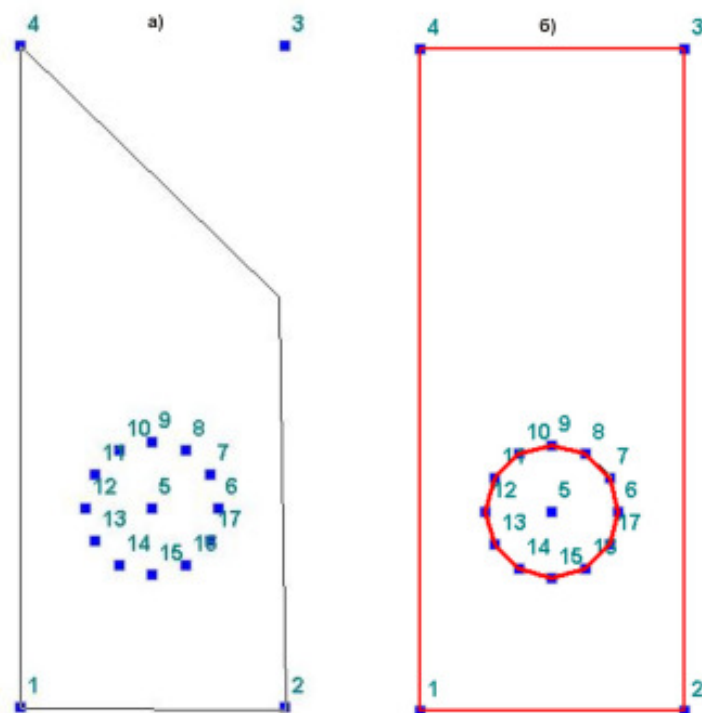


Рис.192

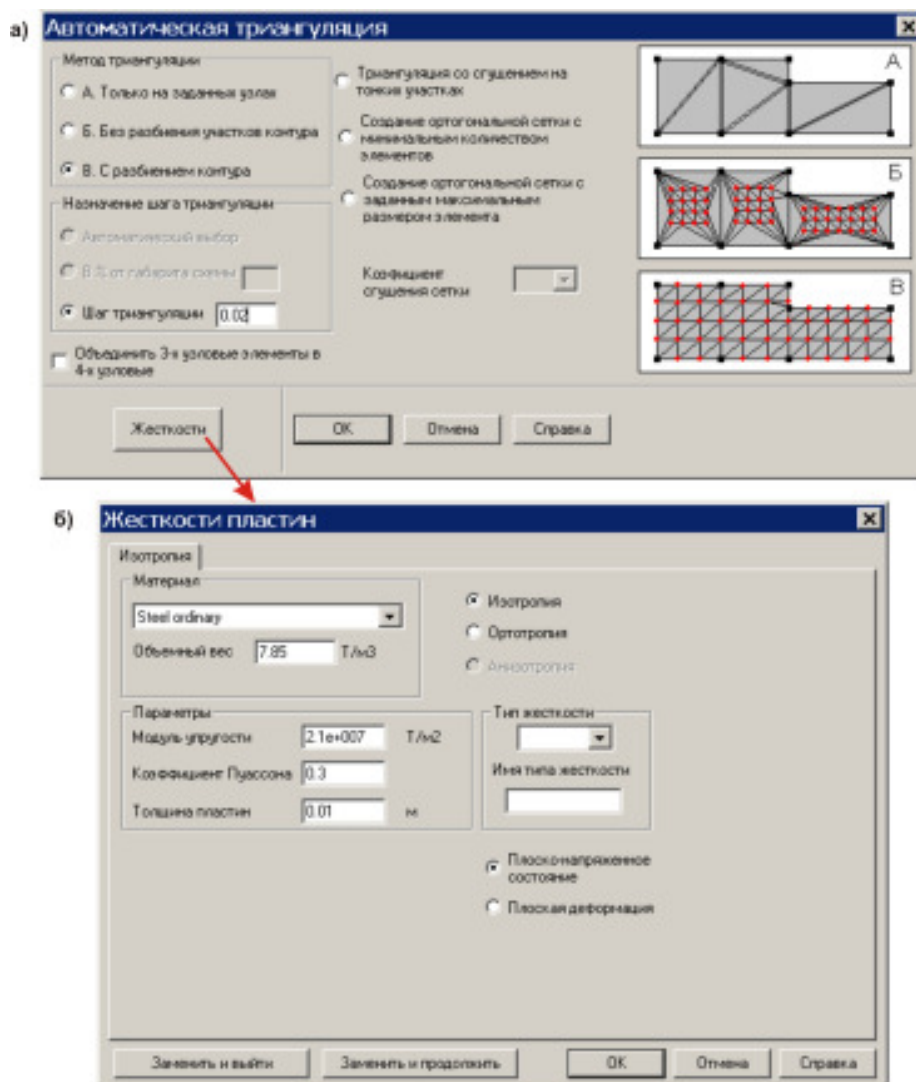


Рис.193

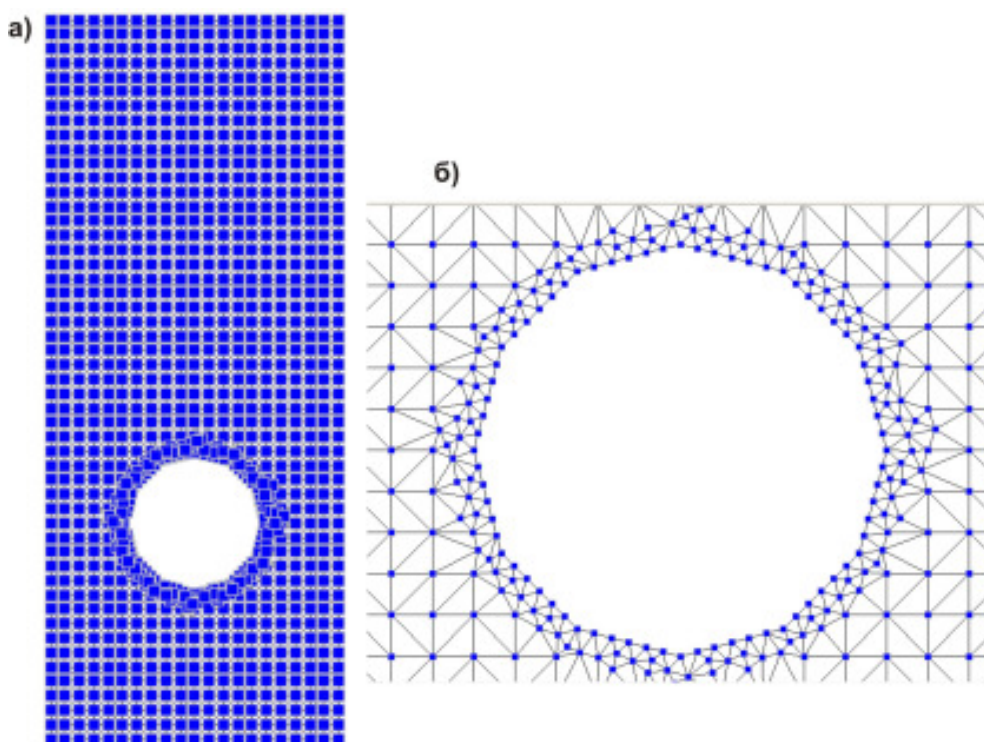




Рис.194

10. Связи в узлах расчетной схемы назначаются в диалоговом окне **Связи**,

которое вызывается по нажатию на соответствующую кнопку  в разделе **Назначение**. Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра




. Внешняя нагрузка, приложенная к пластине, уравнивается реакцией штифта (заклепки). В первом приближении можно считать, что узлы пластины, контактирующие со штифтом, находятся на нижней части полуокружности и неподвижны по отношению к остальным точкам пластины. В действительности это не так: неподвижной является только одна точка, лежащая на оси симметрии пластины, а остальные точки могут перемещаться вдоль поверхности штифта, но такую задачу мы пока решить не можем. Поэтому защемляем все точки, лежащие на нижней полуокружности. Нажимаем на клавишу **Установить всё** и затем на кнопку **ОК**. Выделяем указанные узлы и подтверждаем наш выбор, щелкнув по клавише  главного меню.

11. Нагрузку на пластину задаём в разделе **Загружения**. Активируем кнопку





Узловые нагрузки. Появится панель **Ввод узловых нагрузок**, в полях ввода которой назначаем направление и величину нагрузки (-1 м) в узлах конечно-элементной сетки, расположенных на наиболее удаленном от штифта торце пластины. Для двух крайних узлов вводим нагрузку ($-0,5 \text{ м}$).

12. Переходим в раздел **Управление** и нажимаем кнопку  **Выйти в экран управления проектом**. Раскрываем список **Специальные исходные данные** и активируем команду **Главные и эквивалентные напряжения**, на появившейся панели **Расчет главных и эквивалентных напряжений** задаем тип теории прочности.

13. Щелкаем по кнопке **Линейный** и после завершения расчета «переходим» в раздел **Графический анализ**.

14. Активизируем раздел **Графический анализ**, что приводит к открытию рабочего окна **SCAD** и разделов: **Управление, Деформации, Эпюры усилий, Поля напряжений, Постпроцессоры** и **Группы**.

15. В разделе **Деформации** щелкнем по кнопке  **Совместное отображение исходной и деформированной схемы** и устанавливаем коэффициент масштабирования перемещений **4**. На *рис.195, а* показано деформированное состояние пластины. Из рисунка следует, что граничные условия, назначенные нами, неточны: выше оси симметрии штифта изображение деформированной пластины наложилось на изображение штифта, что противоречит физическим соображениям. Этот расчет позволяет уточнить расчетную схему пластины. Более корректно граничные условия можно описать в полярной системе координат. Активизация кнопки **Отображение изополей и изолиний перемещений**  позволяет проанализировать поля перемещений в направлении оси x и в направлении оси z (*рис.195 б, в*).

16. В разделе **Поля напряжений** инструментальной панели выводим изолинии и изополя напряжений σ_x , σ_z и τ_{xz} (*рис.196*) и распределение напряжений в сечениях **1–5** (*рис.197-199*).

В сечении **1** нормальные напряжения, вычисленные по формулам сопротивления материалов, $\sigma_{(1)} = 500 \text{ кг/см}^2$. Численное решение задачи, выполненное программным комплексом **SCAD**, для этих напряжений даёт величину **504,92 кг/см²**. Разница в величинах напряжений σ_z , полученных по формулам сопротивления материалов и численным методом:

$$\frac{504,92 - 500}{500} \cdot 100\% \approx 1\% .$$

Величины двух других напряжений σ_x и τ_{xz} в поперечном сечении **1** по сравнению с величиной напряжения σ_z невелики:

$$\frac{10,03}{500} \cdot 100\% \approx 2\% ; \quad \frac{5,77}{500} \cdot 100\% \approx 1\%$$

соответственно от величины напряжения σ_z . Поэтому этими напряжениями в курсе сопротивления материалов пренебрегают.

В остальных сечениях пользоваться формулами сопротивления материалов для вычисления напряжений нельзя.

Так как ранее найденные по формулам сопротивления материалов в сечении **3** (одном из опасных сечений, вдоль которого может произойти разрыв листа) напряжения $\sigma_3 = 1000 \text{ кг/см}^2$, то средний коэффициент концентрации напряжения

$$\frac{(1987,96 + 1423,75) / 2}{1000} \approx 1,7 .$$

Величины главных напряжений в точке **A** сечения **3**

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1987,96 - 765,7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1987,96 + 765,7}{2}\right)^2 + 782,78^2} = \begin{cases} 2.195 \cdot 10^3 \\ - 972.665 \end{cases} .$$

Направление главной площадки по отношению к оси z определяется углом

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} = 14,81^\circ .$$

В сечении 5 (одном из опасных сечений, по которому в хрупких материалах может произойти скалывание) касательные напряжения существенно превышают допускаемые напряжения на срез (для стали 800 кг/см^2).

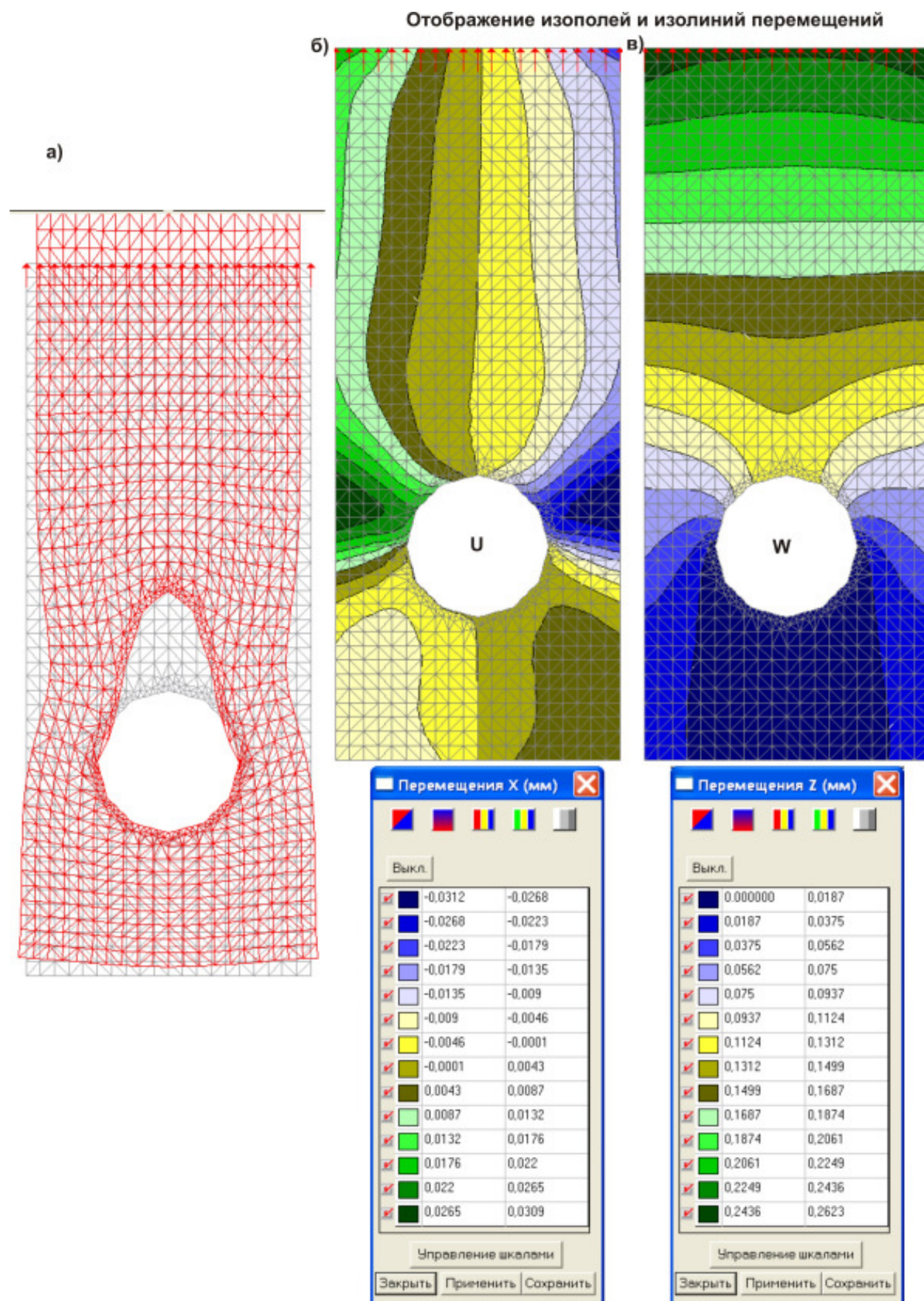


Рис.195

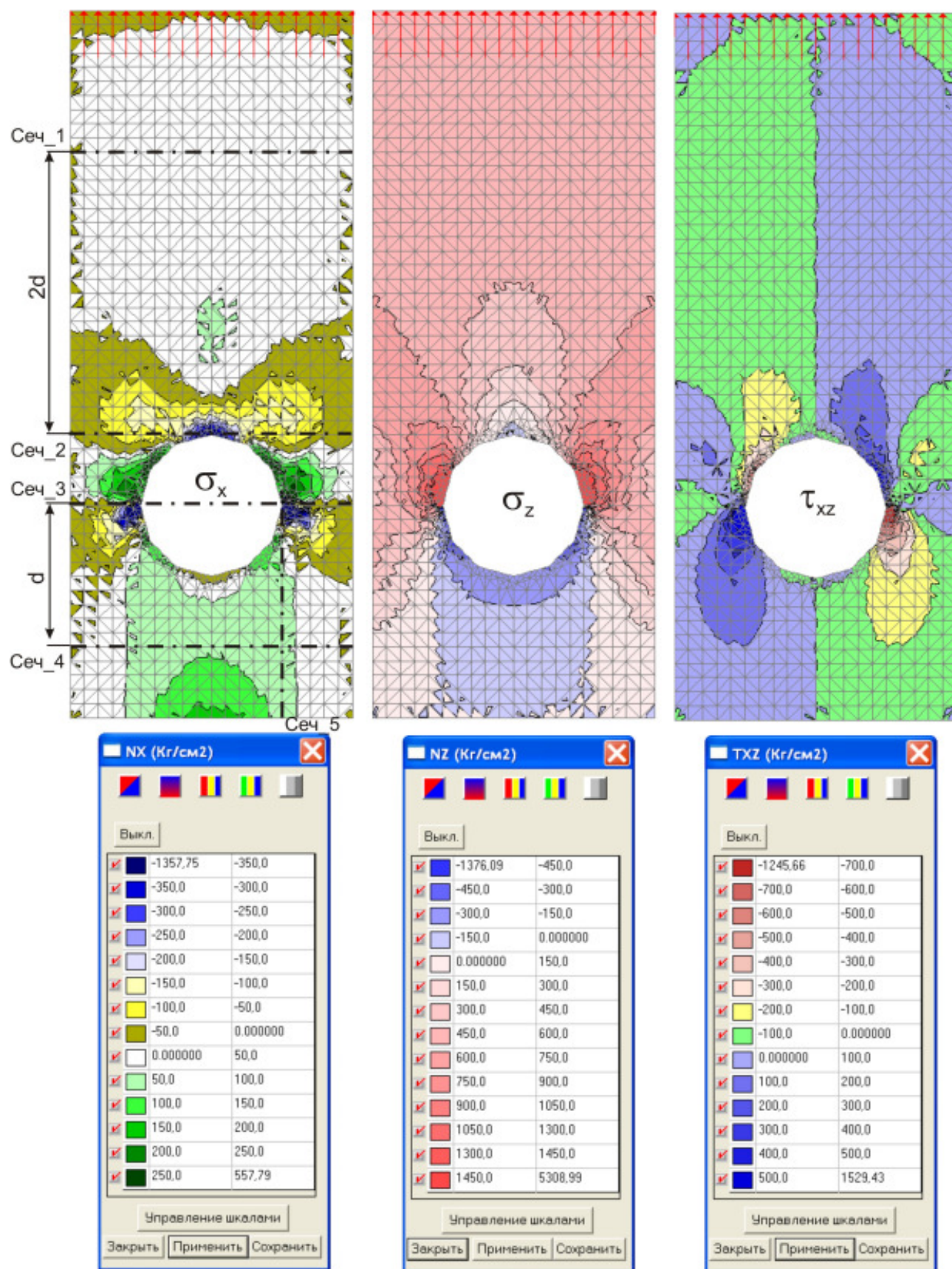


Рис.196

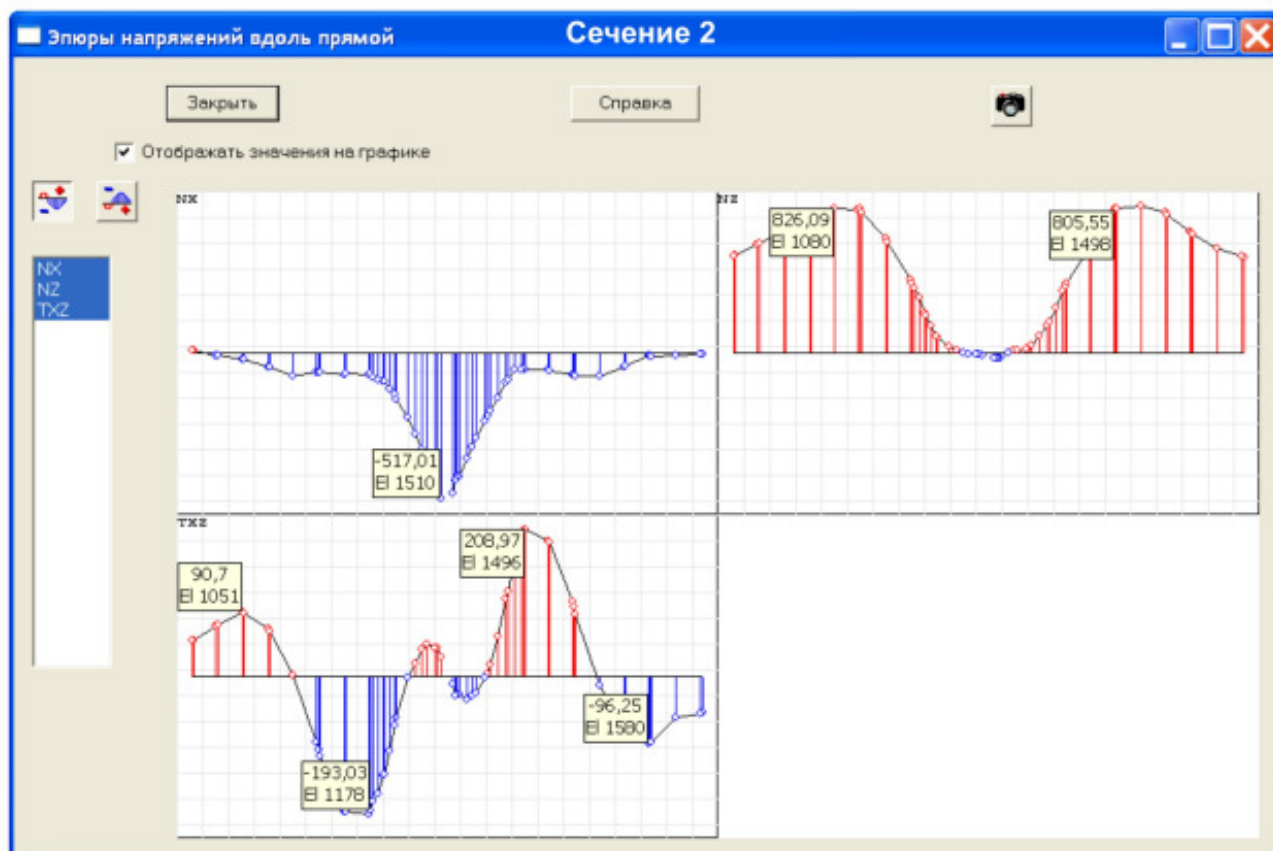
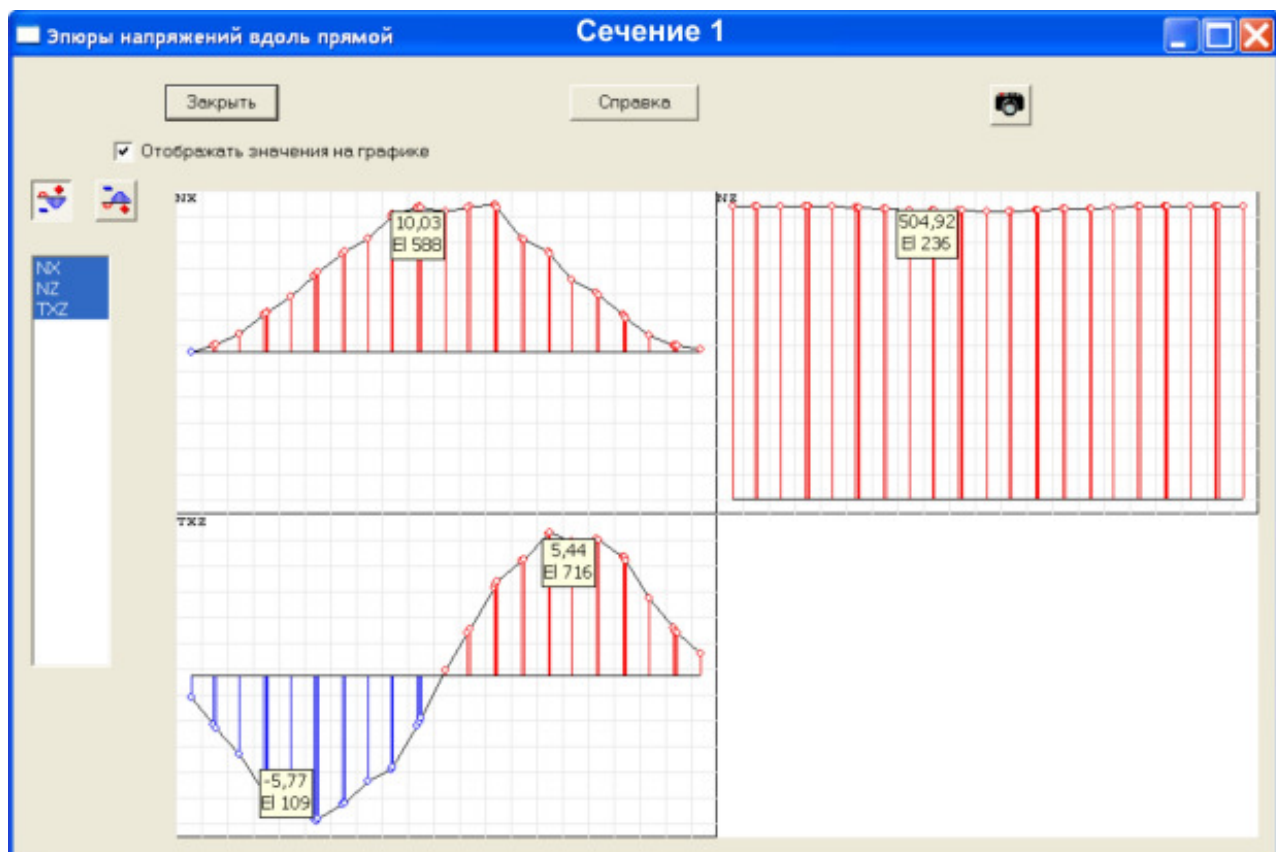


Рис.197

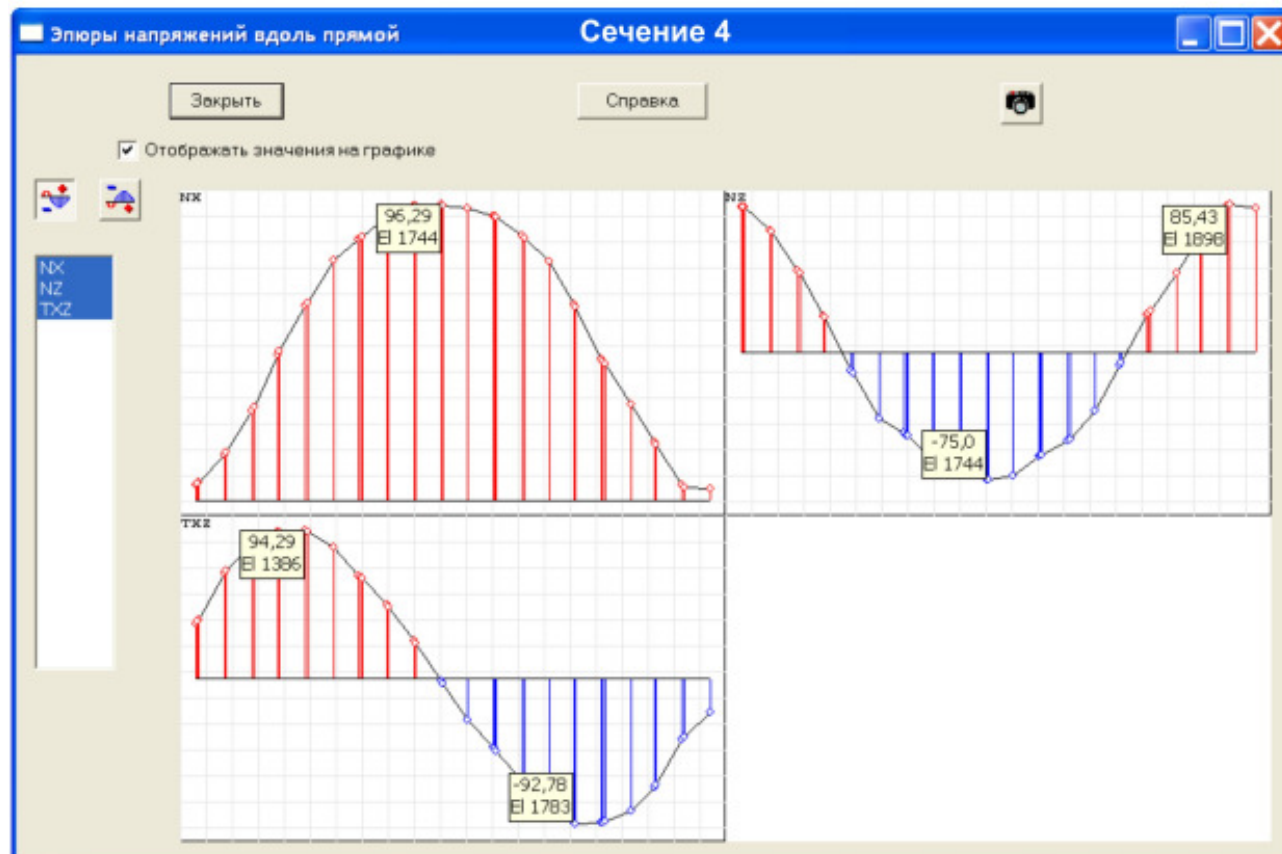
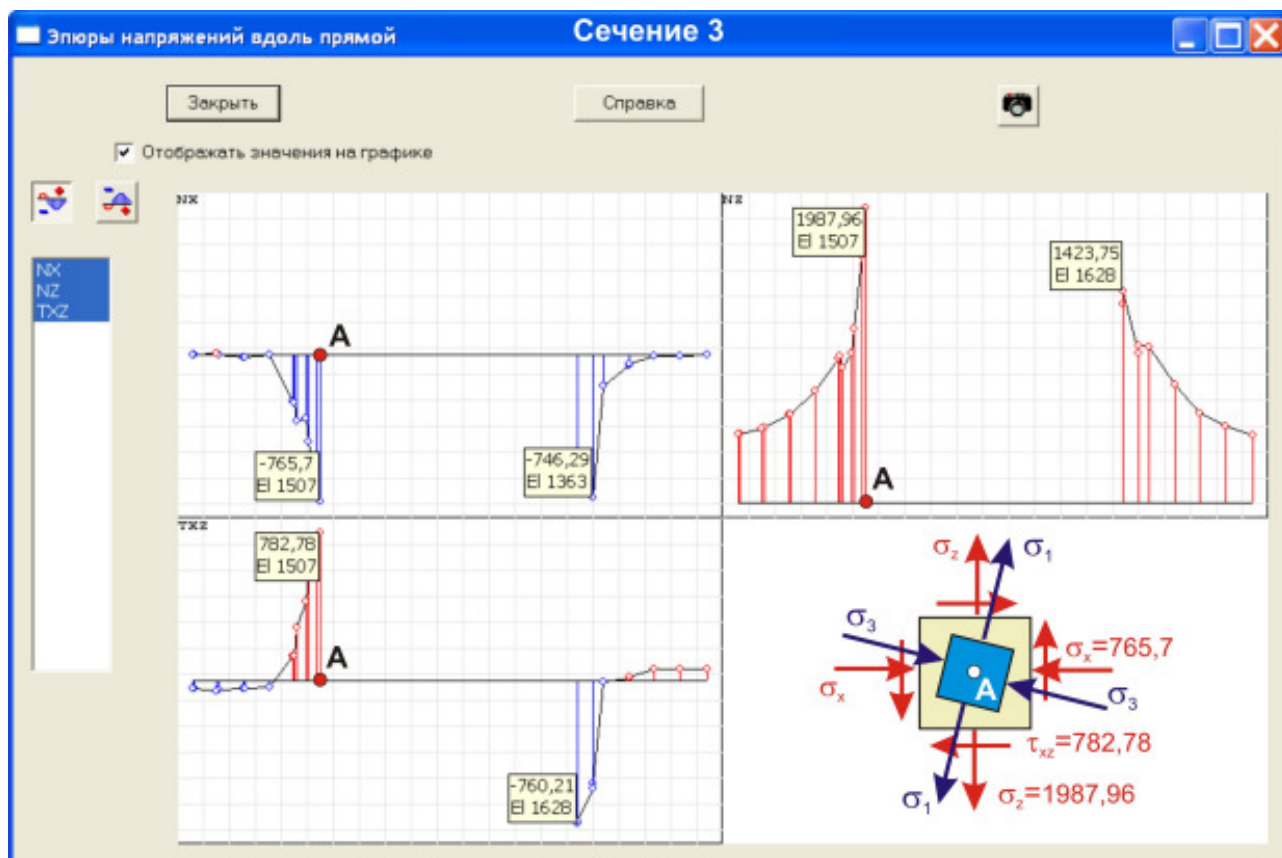


Рис.198

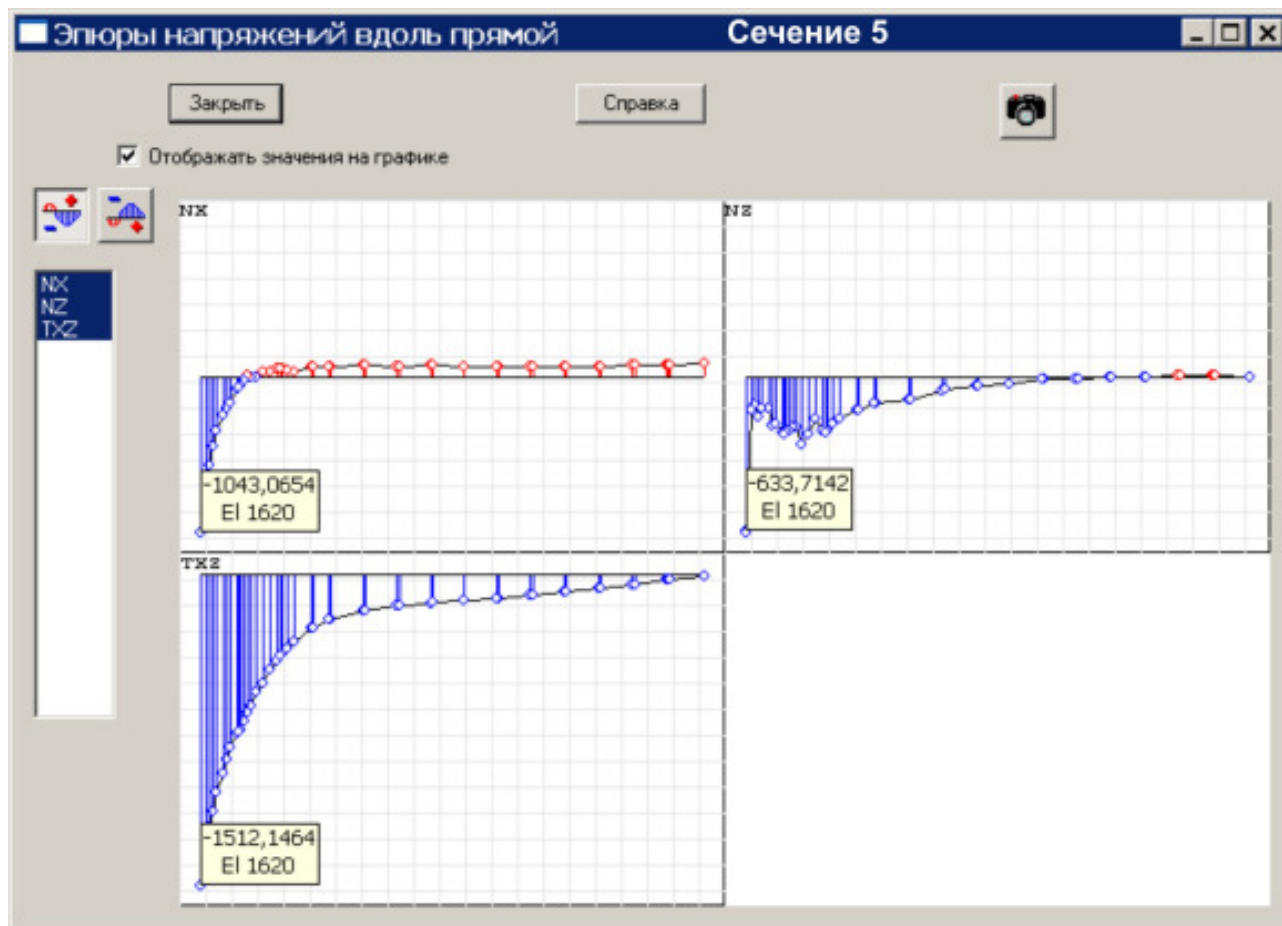


Рис.199

17. Активизируем раздел **Постпроцессоры** инструментальной панели. На *рис.200* приведены изополя и изоуровни главных напряжений σ_I в пластине и ориентация главных площадок. Главная площадка, к которой приложено напряжение σ_I , ориентировочно повернута на угол 14° в направлении по ходу часовой стрелки.

3.2.2.4. Расчет штифтового соединения в программном комплексе MSC.Patran-Nastran 2005

- A. Загружаем программный комплекс **MSC.Patran-Nastran**.
- B. Создаём новую базу данных.
- C. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.
- D. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
Action► Create
Object► Point
Method► XYZ.
- E. Существует много способов создания конечно-элементной сетки. На данном этапе изучения пакета **MSC.Patran-Nastran** мы не будем расширять число способов создания пластин, а воспользуемся знакомым – созданием пластин по 4 кромкам (4 Edge). В связи с этим заданную в задаче пластину с отверстием мы должны разбить на области, ограниченные четырьмя кромками. Это разбиение определит число точек, которое необходимо ввести в графическом окне. Разобьём рассчитываемую пластину на подобласти, как показано на *рис.201*.

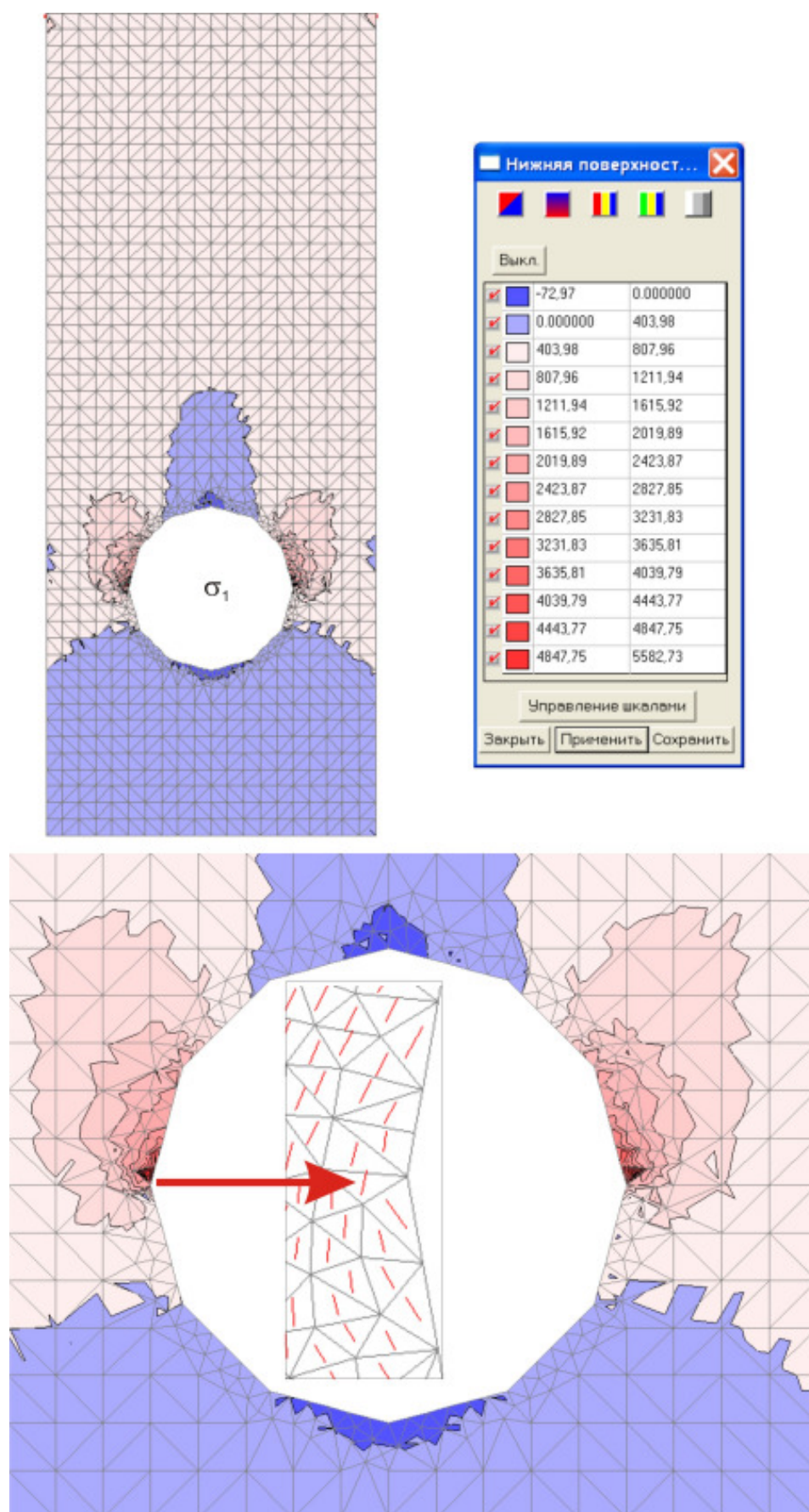


Рис.200

F. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты 14 точек: $[-0.2 -0.3 0]$, $[-0.2 0 0]$, $[-0.2 0.3 0]$, $[0.2 0.3 0]$, $[0.2 0 0]$, $[0.2 -0.3 0]$, $[0 -0.3 0]$, $[0 -0.1 0]$, $[-0.1 0 0]$, $[0 0.1 0]$, $[0.1 0 0]$, $[-0.2 0.7 0]$, $[0 0.7 0]$, $[0.2 0.7 0]$. Для контроля положения вве-

денных точек активизируем кнопку 

Положение точек.

G. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**.


H. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам.

I. На панели **Geometry** в разделе **Object** активизируем опцию **Surface**, в разделе **Method** активизируем опцию **Edge**. Панель **Geometry** изменит вид (рис.175), на ней выбираем опцию **4 Edge** – для областей 1...6 и опцию **3 Edge** - для областей 7 и 8.

J. В графическом окне щелкаем левой клавишей мыши по кривым, что приводит к последовательному заполнению окон **Surface Edge n List**. После нажатия на клавишу **Apply** создается пластина. Эти операции повторяем для всех созданных подобластей пластины.

K. Открываем форму приложения **Materials** и задаём имя материала – **st** и его физико-механические характеристики: **Elastic Modulus** = $2e11$, **Poisson Ratio** = 0.3 . Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options** и по кнопке **Apply** на панели **Materials**.

L. Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем объекты **2D**, тип элементов – **Shell**. В окне **Property Set Name** задаём имя **plast** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала: щёл-

каем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **st**. Щелчок левой клавишей мыши по имени материала приводит к появлению записи **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. В поле **Thickness** задаем толщину пластины **1 см** и нажимаем последовательно на клавиши **OK** и **Apply**.

M. Открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели (рис.54).

N. Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели пластины. В поле **Number** задаем число элементов вдоль границ пластины (в нашем случае: на **10 мм** участках - **10**, на **20 мм** – **20**, на **30 мм** – **30**, на **40 мм** – **40**, на кромках, наклоненных под углом 45° к вертикальной оси - **28** элементов).

O. Переходим к созданию сетки. Активизируем команду **Object►Mesh**. Панель **Finite Elements** примет вид, как на рис.105.

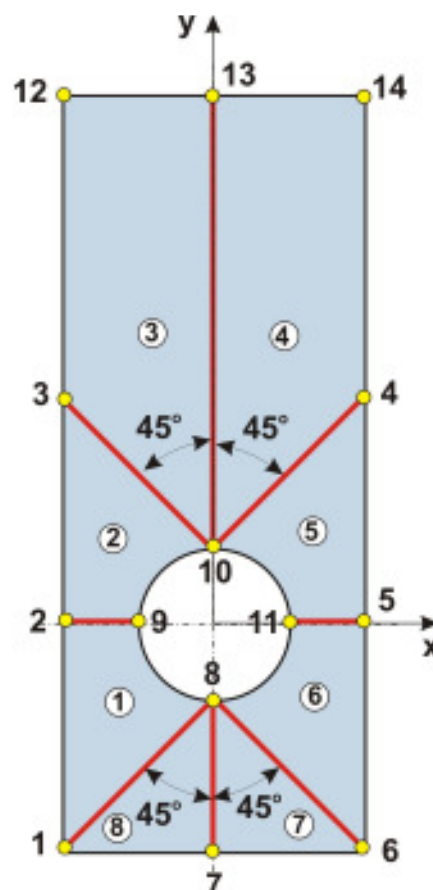


Рис.201

- P.** Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элементов – **plast**. Панель **Property Sets** закроем и активной станет панель **Element Properties**.
- Q.** В графическом окне устанавливаем курсор мыши последовательно на каждую пластину и нажимаем левую клавишу мыши. После обхода всех под областей в графическом окне появится изображение конечно-элементной сетки (рис.202).

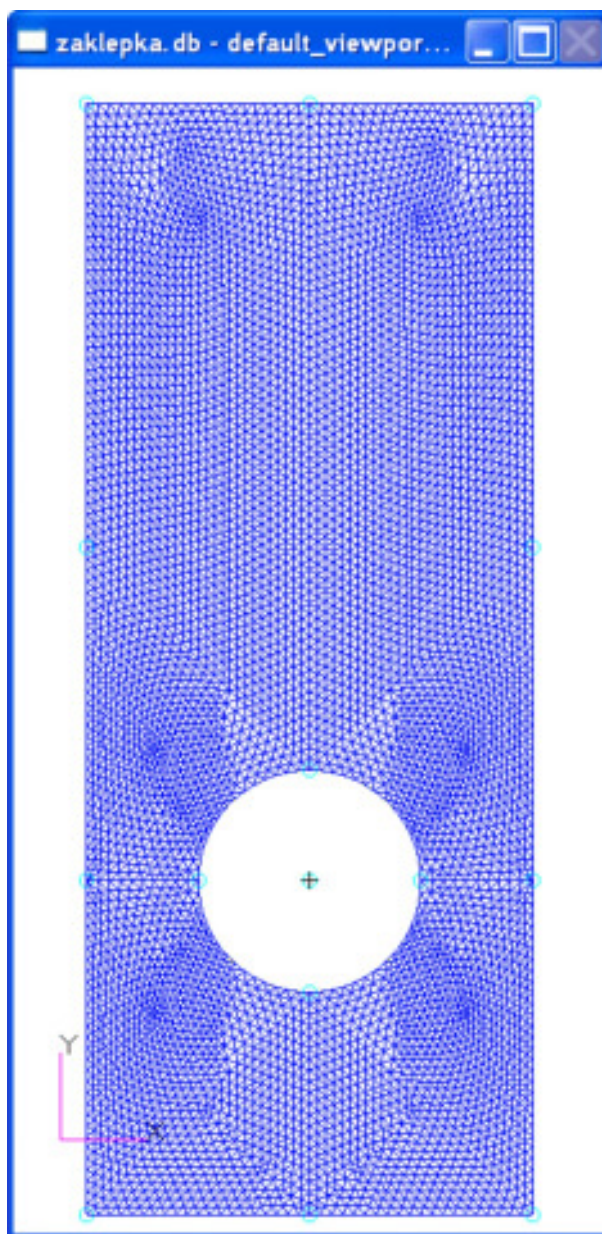


Рис.202

- R.** Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action► Create
Object► Displacement
Type► Nodal

и в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия: запрещаем поступательное перемещение **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**. Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активизиру-

ем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. В графическом окне выделяем все узлы. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. Вводим вторую кинематическую связь **d2**: запрещаем все поступательные перемещения и два вращательных перемещения относительно осей x и y . В графическом окне выделяем узлы, лежащие на нижней полуокружности, которые контактируют с заклёпкой, и нажимаем клавишу **Apply**.

Для задания силовых граничных условий активизируем команду: **Object ► Force**. В окне **New Set Name** задаем имя распределенной нагрузки **f**. Щелкаем по кнопке **Input Data...** Открывается одноименная панель, в окне которой вводим сосредоточенную силу **<0 5000 0>**. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. В графическом окне выделяем крайний правый верхний ряд узлов пластины. На панели **Select Application Region** щелкаем по кнопке **OK**, на панели **Loads/Boundary Conditions** - по кнопке **Apply**. В графическом окне появится условное изображение введенной нагрузки.

- S.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. В окне **Job Name** задаём имя расчета. Нажимаем клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.
- T.** После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.
- U.** Анализируем информацию о напряженно-деформированном состоянии пластины.

Отображение деформированного состояния пластины

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► Create;
Object ► Quick Plot;
 вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase;*
 тип результата: *Displacements, Translational;*
 величину: *X Component* (или *Y Component*).

На рис 203 показаны изополя перемещений в направлении оси x - u , и в направлении оси y - v .

Отображение напряженного состояния балки-стенки

При нажатой клавише  - **Select Results** выберем:

Action ► Create;
Object ► Quick Plot;
 вариант расчета – *Default A1: Static Subcase;*
 тип результата: *Stress Tensor;*
 количество (компонента тензора напряжений σ_x): **X**.

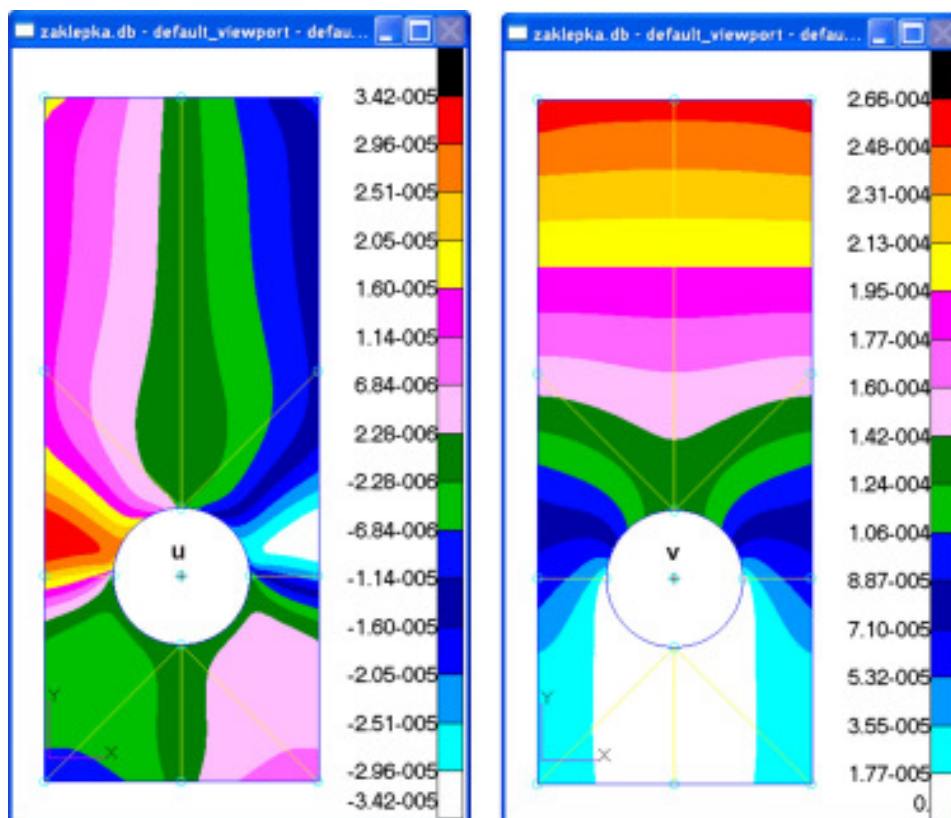


Рис.203

Нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение изополей поля напряжения σ_x при разбивке диапазона изменения этих напряжений на **15** уровней (рис.204). Аналогичным образом выводим изополя напряжений σ_y , τ_{xy} , τ_{max} , σ_1 , σ_3 (рис.204-206).

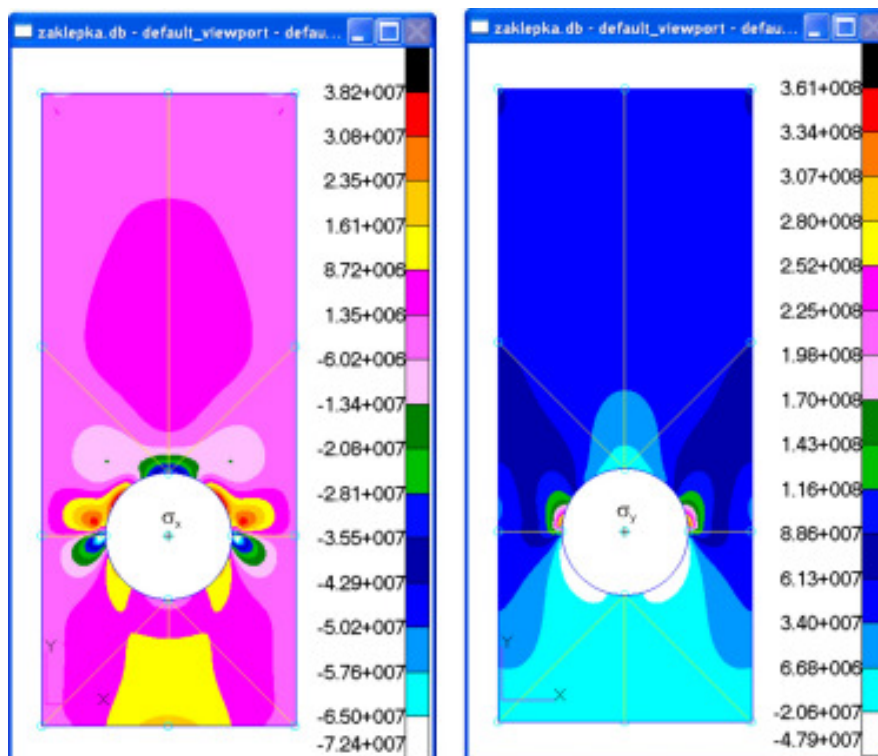


Рис.204

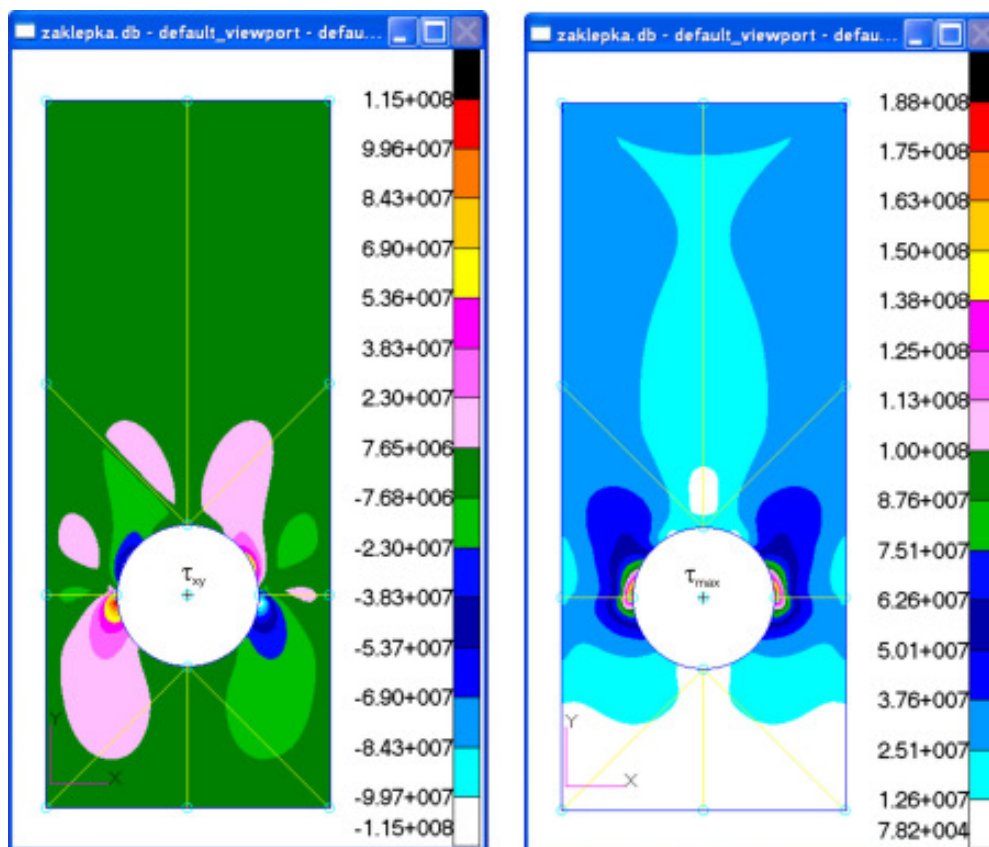


Рис.205

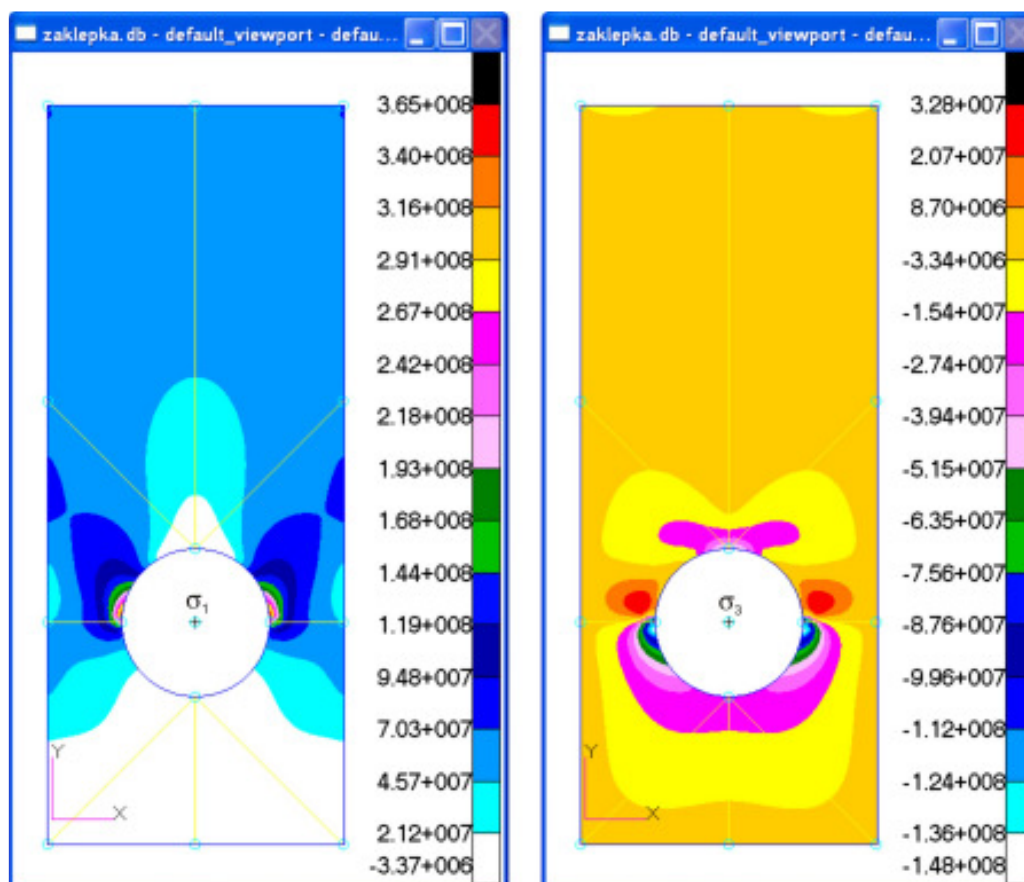


Рис.206

3.2.3. Расчет клевого нахлесточного соединения

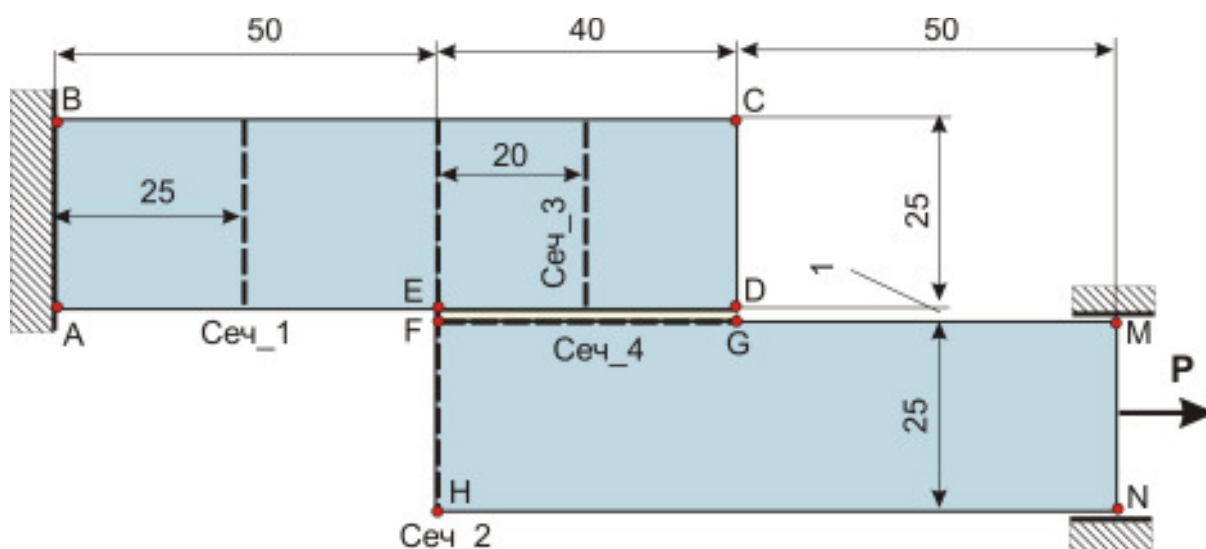


Рис.207

Пусть требуется исследовать напряженное состояние нахлесточного клевого соединения (рис.207), изготовленного из алюминиевой полосы с размерами поперечного сечения 25×10 мм², нагруженную растягивающей нагрузкой $P = 100$ кг. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в четырех сечениях, изображенных на рис.207.


Методами сопротивления материалов данную задачу решить невозможно.


Различают два предельных случая работы клевого соединения:

- слой клея тонкий и жесткий, так, что его влиянием на напряженно-деформированное состояние конструкции можно пренебречь;
- слой клея податливый, так, что его влиянием на напряженно-деформированное состояние конструкции пренебречь нельзя.

Рассмотрим первый случай.

3.2.3.1. Расчет клевого соединения в программном комплексе SCAD

1. Загружаем программный комплекс **SCAD**. Нажимаем кнопку **Создание нового проекта**. Вводим название проекта **Плоская задача** и название объекта **Клеевое соединение**. Щелкаем по кнопке **Единицы измерения** и устанавливаем в разделе **Линейные размеры** – см, в разделе **Силы** – кг. Щелкаем по кнопке **ОК**, задаём имя файла **Нахлестка** и снова нажимаем клавишу **ОК**. Откроется главное окно конечно-элементного пакета **SCAD**, содержащее дерево проекта.
2. Установим курсор мыши на раздел **Расчетная схема** дерева и нажмем левую клавишу мыши. Управление будет передано графическому препроцессору.
3. Активируем на инструментальной панели раздел **Узлы и элементы** и щелкаем по кнопке **Узлы**.
4. Вводим координаты точек **A, B, C, D, E, F, G, H, M, N** (рис.208).
5. Активируем на инструментальной панели раздел **Схема**.
6. Нажимаем на кнопку  **Генерация сетки произвольной формы на плоскости**.

7. Нажимаем кнопку **Задание контура**  и обводим «резиновой нитью» опорные узлы внешнего контура A, B, C, E, G, H, M, N (обратите внимание: мы пропустили точки F, D); на *рис. 208* приведен вид полученного контура.

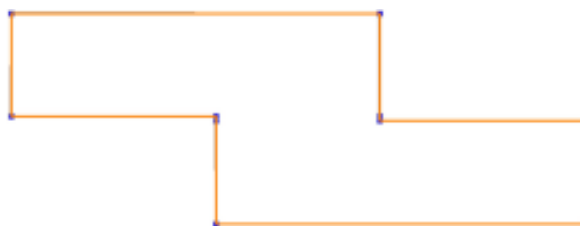



Рис.208

8. Нажимаем кнопку **Указание линий сгущения сетки**  и щелкаем по опорным узлам E, D и F, G (*рис.209*).

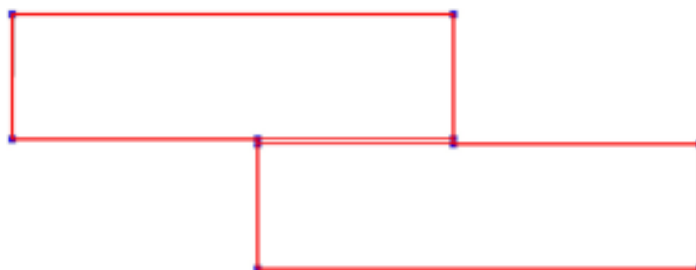


Рис.209

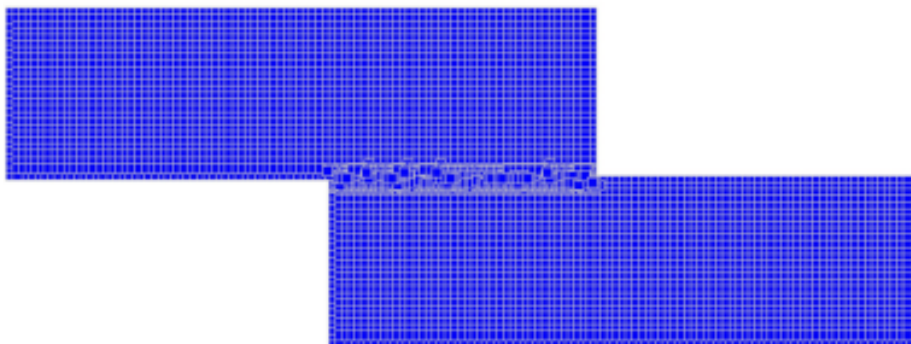
9. Нажимаем кнопку **Генерация сетки конечных элементов** . Появится панель **Автоматическая триангуляция**, в окнах которой устанавливаем параметры триангуляции – шаг триангуляции 0.1 см; нажимаем клавишу **Жесткости** и в окнах открывшейся панели **Жесткости** пластин указываем материал и толщину пластины - 1 см. После выхода из диалогового окна нажатием кнопки **ОК** выполняется разбиение заданной области на треугольные конечные элементы
10. Устанавливаем на место схему, созданную в результате триангуляции, нажимая на кнопку  – **Установка сформированной схемы по месту**.
11. Отжимаем кнопку  **Генерация сетки произвольной формы на плоскости**. Вид конечно-элементной сетки приведен на *рис.210,а*, а её фрагмент в зоне клеевого шва - на *рис.210,б*.
12. Связи в узлах расчетной схемы назначаются в диалоговом окне **Связи**, которое вызывается нажатием на соответствующую кнопку  в разделе **Назначение**. Левый торец верхней пластины клеевого соединения защемляем, а правому торцу нижней пластины разрешаем перемещаться только в направлении оси x .

13. Нагрузку на пластину задаём в разделе **Загружения**. Активируем кнопку



Узловые нагрузки. Появится панель **Ввод узловых нагрузок**, в полях ввода которой назначаем направление и величину нагрузки (-4 кг), которую прикладываем к узлам правого торца нижней пластины, исключая два крайних узла. Для них вводим нагрузку (-2 кг).

а)



б)

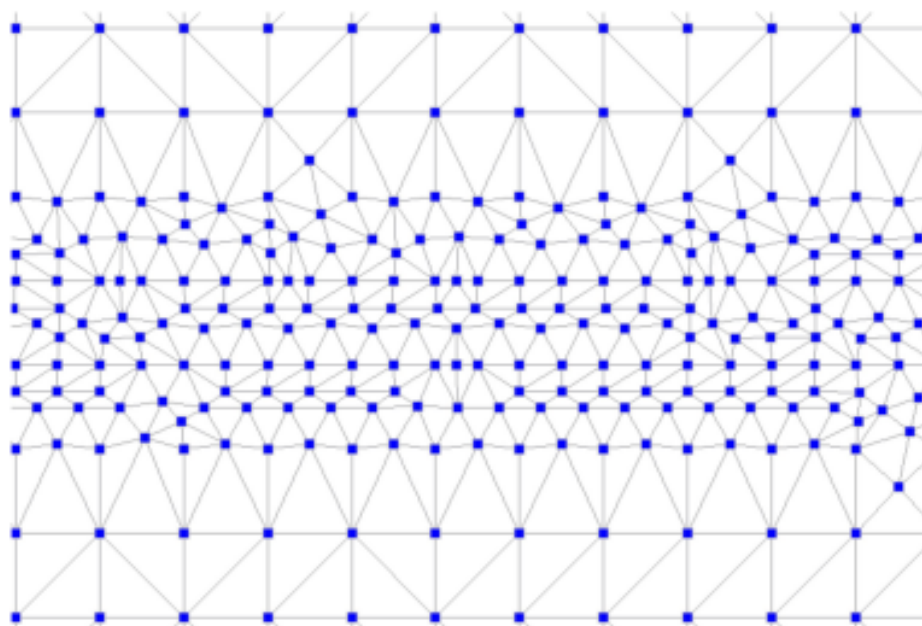





Рис.210

14. Переходим в раздел **Управление** и нажимаем кнопку  **Выйти в экран управления проектом**. Раскрываем список **Специальные исходные данные** и активируем команду **Главные и эквивалентные напряжения**, на появившейся панели **Расчет главных и эквивалентных напряжений** задаем тип теории прочности.

15. Щелкаем по кнопке **Линейный** и после завершения расчета «переходим» в раздел **Графический анализ**.



16. В разделе **Деформации** щелкаем по кнопке  **Совместное отображение исходной и деформированной схемы** и устанавливаем коэффициент масштабирования перемещений 2 . На *рис.211* показано деформированное состояние пластины.

17. Активизируем кнопку  - **Отображение изополей и изолиний перемещений**. Отображаем поля перемещений в направлении осей x (рис.212) и z (рис.213).
18. В разделе **Поля напряжений** инструментальной панели выводим изолинии и изополя напряжений σ_x , σ_z и τ_{xz} (рис.214-216) и распределение напряжений в сечениях **1–4** (рис.217-219).

Деформированный вид клеевого соединения

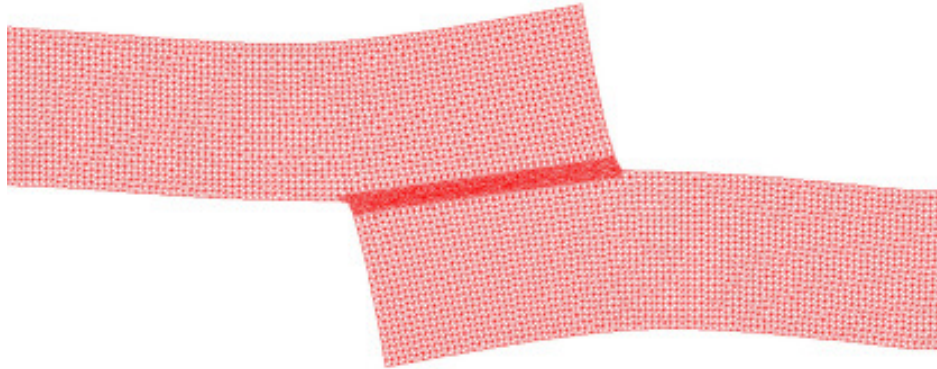


Рис.211

Изополя и изолинии поля перемещения u

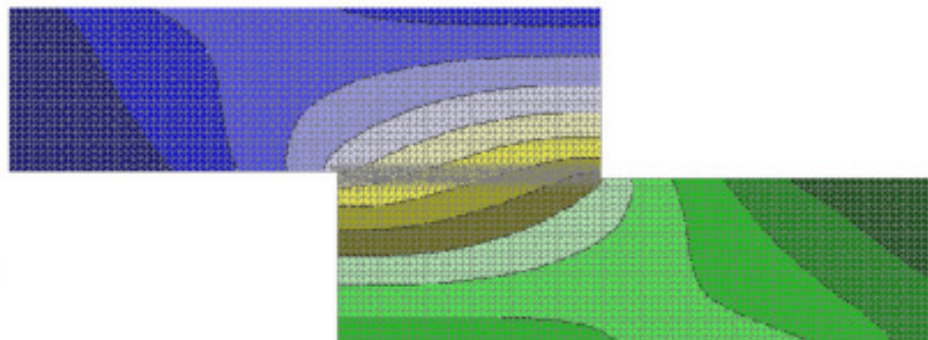


Рис.212

Изополя и изолинии поля перемещения w

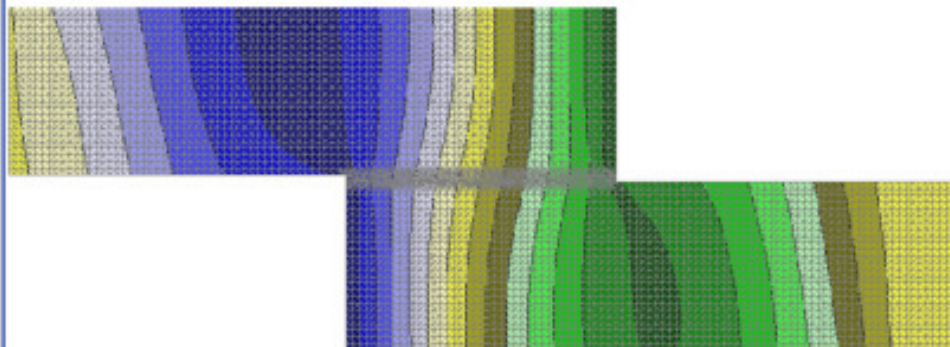
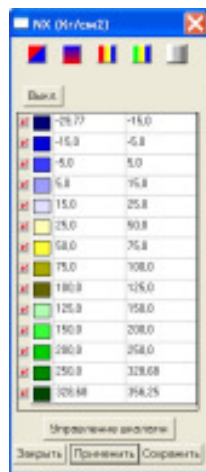


Рис.213



Изополя и изоуровни поля напряжения σ_x

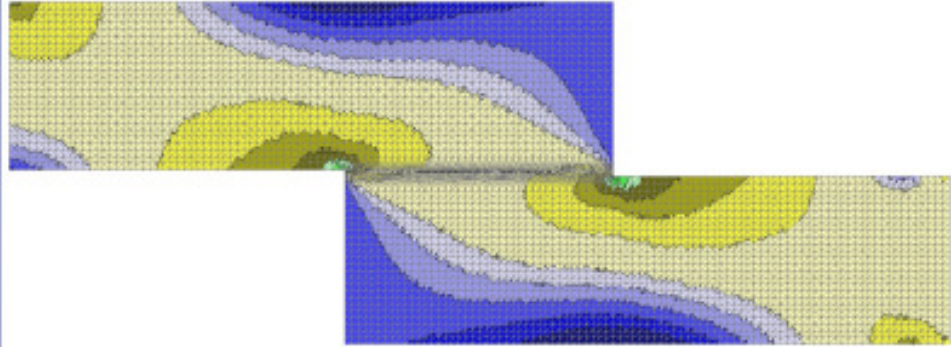
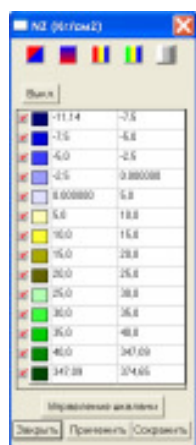


Рис.214



Изополя и изоуровни поля напряжения σ_z

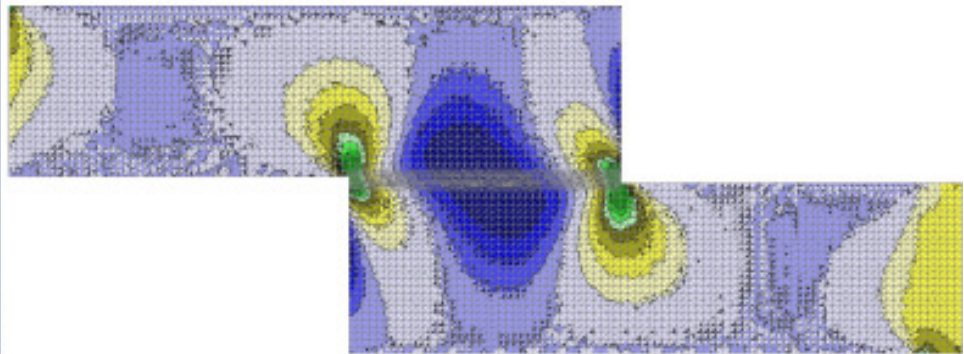
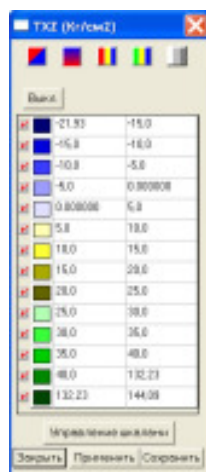


Рис.215



Изополя и изоуровни поля напряжения τ_{xz}

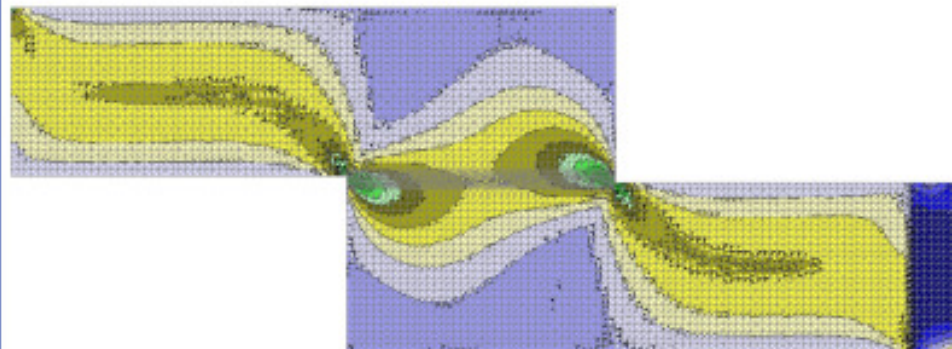


Рис.216

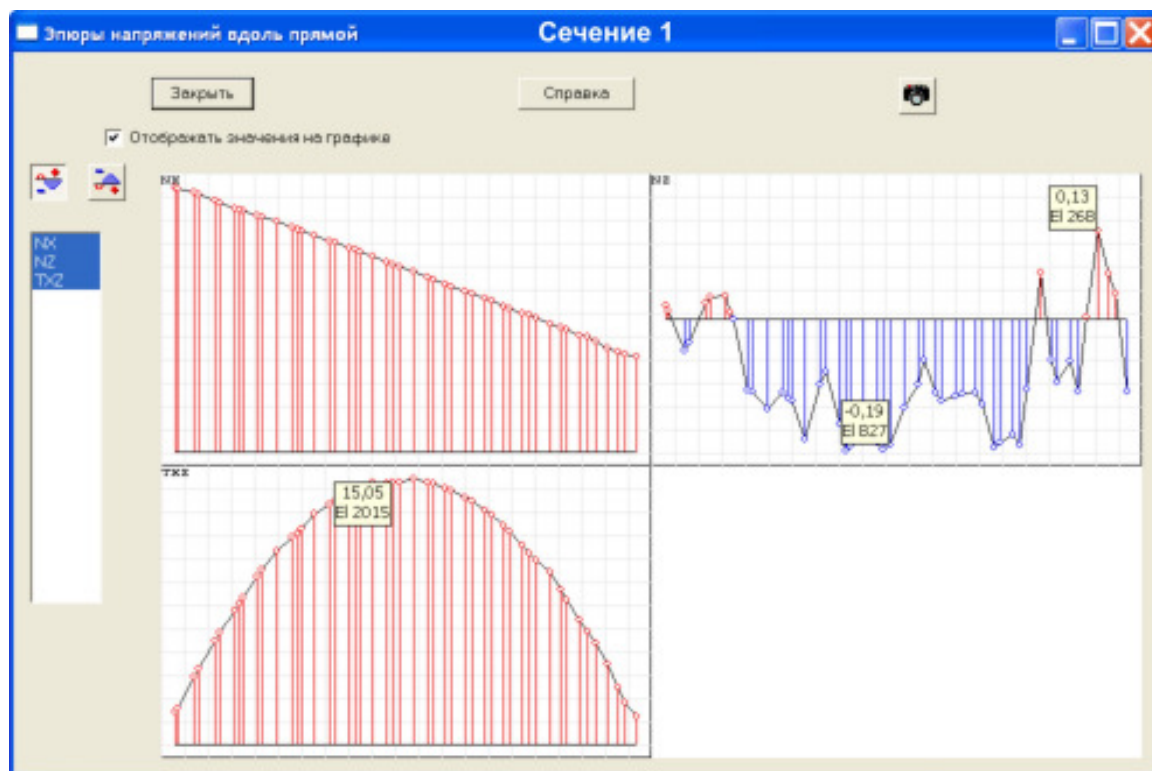


Рис.217


Из *рис.217* следует, что верхний лист испытывает внецентренное растяжение-сжатие и в этой зоне можно применить формулы сопротивления материалов.

В сечении 2 (в зоне перехода от толстой части бруса к тонкой) наблюдается значительная концентрация напряжений. Этот участок является опасным сточки зрения прочности клеевого соединения.

Эпюры напряжений в клеевом слое приведены на *рис.220*. Внешний вид эпюр совпадает с аналитическими решениями, приводимыми в специальной литературе.

19. Активизируем раздел **Постпроцессоры** инструментальной панели. На *рис.221* приведены изополя и изоуровни главных напряжений σ_1 в пластине.

3.2.3.2. Расчет клеевого соединения в программном комплексе MSC.Patran-Nastran 2005

- A. Загружаем программный комплекс **MSC.Patran-Nastran**.
- B. Создаём новую базу данных.
- C. Открываем приложение **Geometry**.
- D. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
Action► Create
Object► Point
Method► XYZ.
- E. Разобьём рассчитываемую пластину на подобласти, как показано на *рис.222*.
- F. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты 12 точек: $[0\ 0\ 0]$, $[0\ 0.01\ 0]$, $[-0.5\ 0.01\ 0]$, $[-0.5\ 0.26\ 0]$, $[0\ 0.26\ 0]$, $[0.4\ 0.26\ 0]$, $[0.4\ 0.01\ 0]$, $[0.4\ 0\ 0]$, $[0.9\ 0\ 0]$, $[0. - 0.25\ 0]$, $[0.4 - 0.25\ 0]$, $[0.9 - 0.25\ 0]$. Для контроля положения введенных точек активизируем кнопку  **Положение точек**.

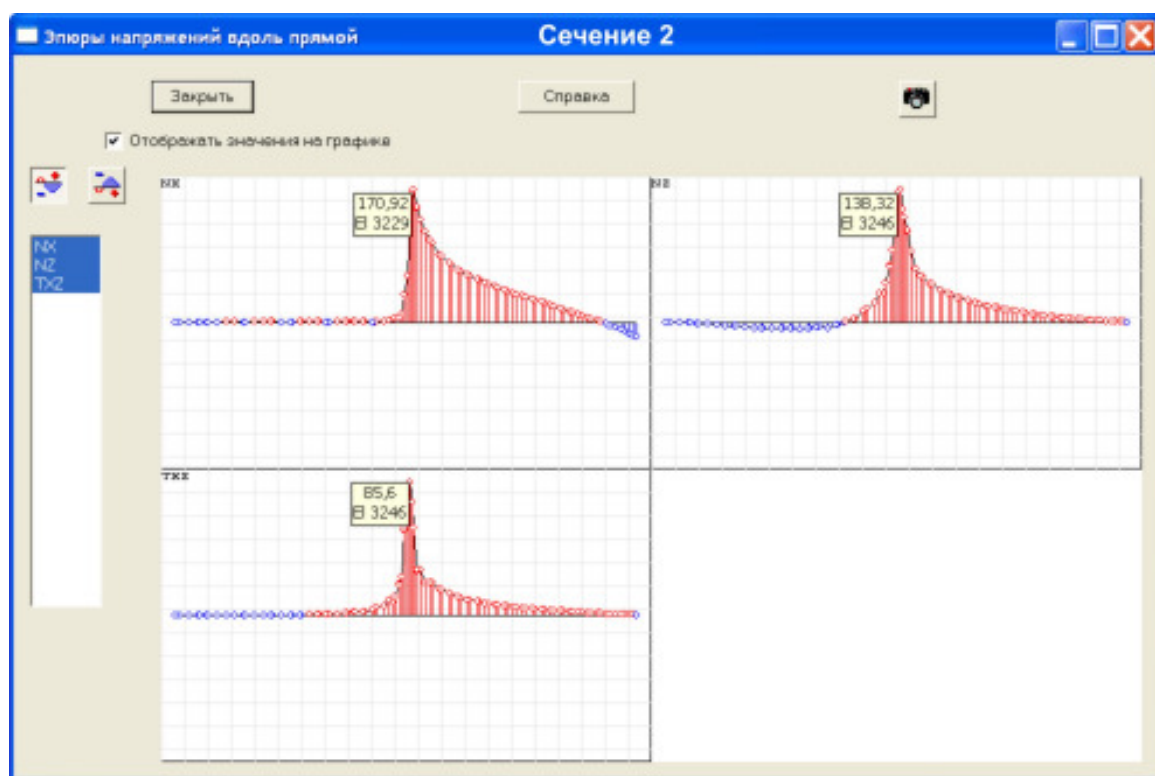


Рис.218

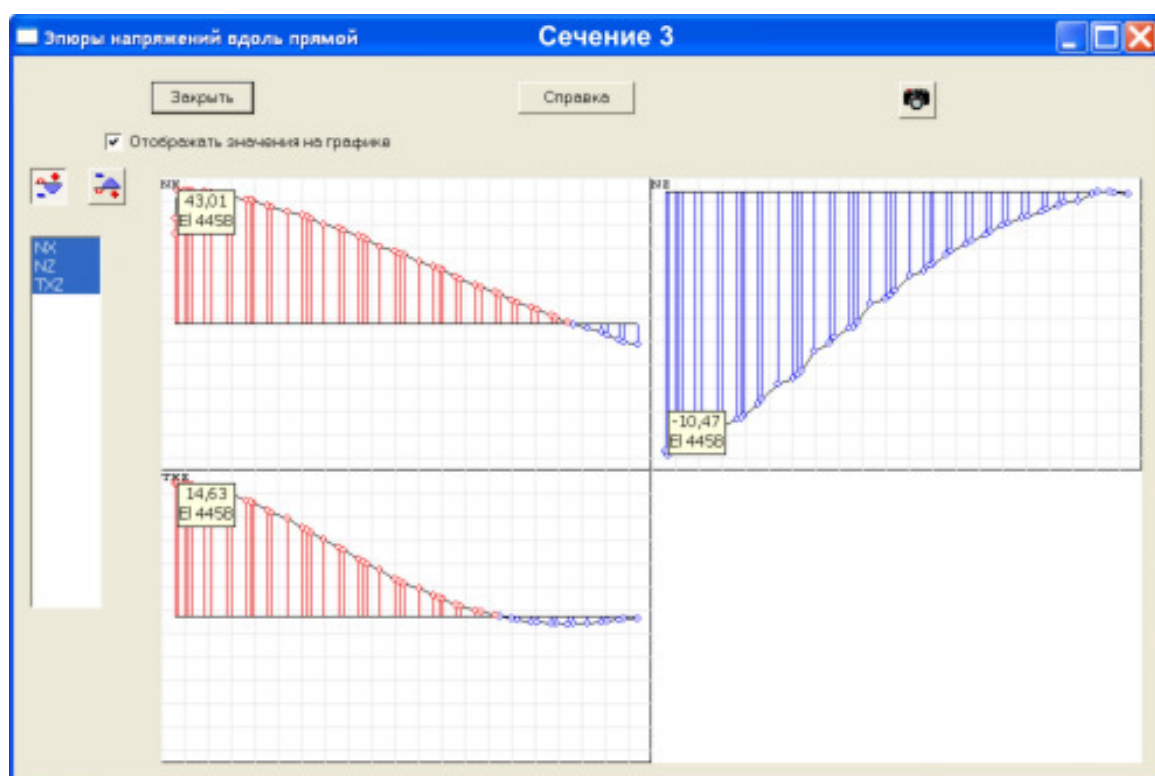


Рис.219

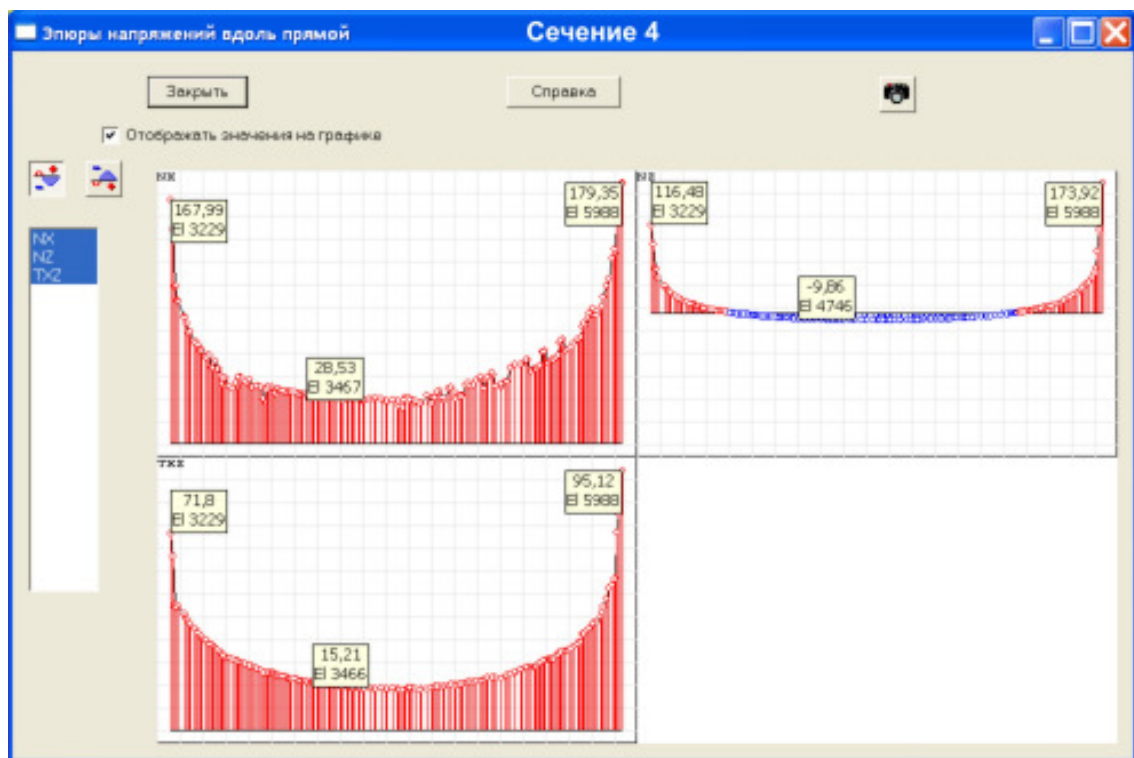


Рис.220

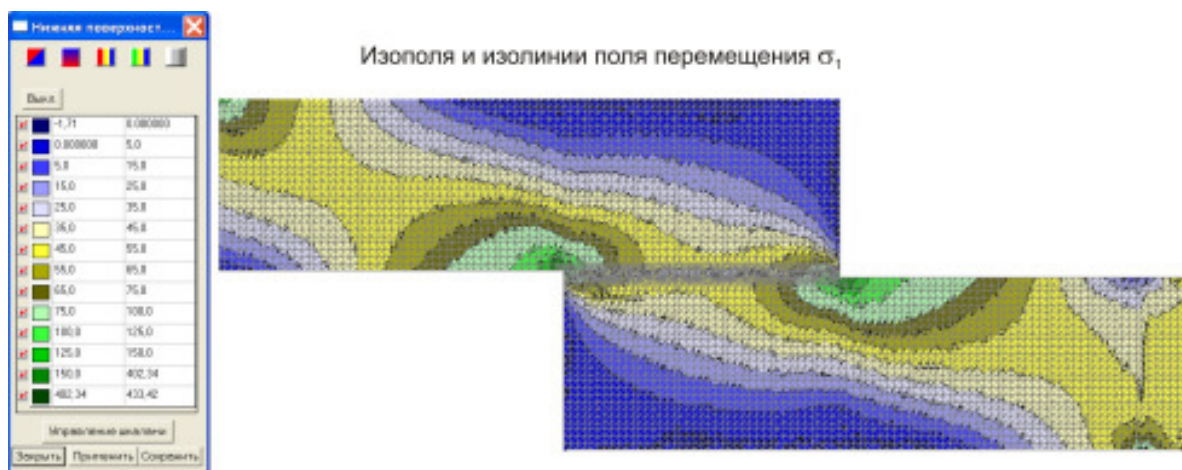


Рис.221

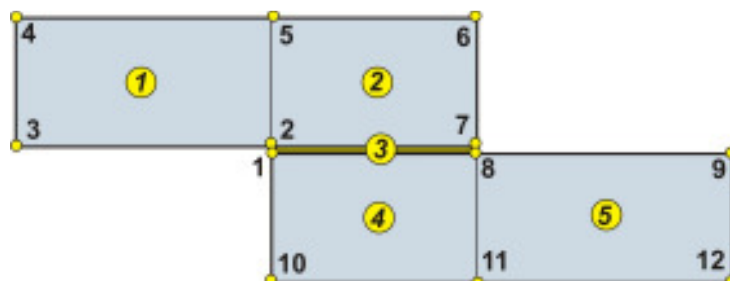



Рис.222

- G. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**.
- H. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам.

- I. На панели **Geometry** в разделе **Object** активизируем опцию **Surface**, в разделе **Method** - опцию **Edge**. Панель **Geometry** изменит вид (рис.175), на ней выбираем опцию **4 Edge** для областей 1...6 и опцию **3 Edge** - для областей 7 и 8.
- J. В графическом окне щелкаем левой клавишей мыши по кривым, что приводит к последовательному заполнению окон **Surface Edge n List**. После нажатия на клавишу **Apply** создается пластина. Эти операции повторяем для всех созданных подобластей пластины.
- K. Открываем форму приложения **Materials** и задаём имя материала – **st** и его физико-механические характеристики: **Elastic Modulus = 2e11**, **Poisson Ratio = 0.3**. Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options** и по кнопке **Apply** на панели **Materials**. Повторяем все вышеописанные операции для материала клеевого слоя **sm**: **Elastic Modulus = 2e9**, **Poisson Ratio = 0.35**.
- L. Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **2D**, тип элементов – **Shell**. В окне **Property Set Name** задаём имя **plast_st** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала: щёлкаем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **st**. Щелчок левой клавишей мыши по имени материала приводит к появлению записи **m:st** в окне **Material Name** панели **Input Properties**. В поле **Thickness** задаем толщину пластины **1 см** и нажимаем последовательно на клавиши **OK** и **Apply**. Повторяем все описанные операции для элементов клеевого слоя, задав имя свойств **plast_sm**.
- M. Открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели (рис.54).
- N. Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели пластины. В поле **Number** задаем число элементов вдоль границ пластины (в нашем случае: на **10** мм участках - **10**, на **20** мм – **20**, на **30** мм – **30**, на **40** мм – **40**, на кромках, наклоненных под углом **45°** к вертикальной оси - **28** элементов).
- O. Переходим к созданию сетки. Активизируем команду **Object►Mesh**. Панель **Finite Elements** меняет вид (рис.105).
- P. Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элементов – **plast_st**. Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**. В графическом окне устанавливаем курсор мыши последовательно на верхнюю и нижнюю пластины и нажимаем левую клавишу мыши. Щелкаем по клавише **Apply**. В графическом окне эти области покроются конечно-элементной сеткой. Для клеевого слоя выбираем свойства **plast_sm** и повторяем операции. После обхода всех подобластей в графическом окне появится изображение конечно-элементной сетки (рис.223).
- Q. Операцией **Equivalence** объединяем совпадающие узлы.
- R. Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action►Create
Object►Displacement
Type►Nodal

и в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия: запрещаем поступательное перемещение **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**. Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активизируем

ем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. В графическом окне выделяем все узлы. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. Вводим вторую кинематическую связь **d2**: запрещаем все угловые и линейные перемещения для крайних левых узлов модели. В графическом окне выделяем эти узлы и нажимаем клавишу **Apply**. Вводим третью кинематическую связь **d3**: запрещаем семи узлам, наиболее удаленным от средней линии нижней пластины и отсчитываемым от её правого торца, линейные перемещения в направлении осей y и z .

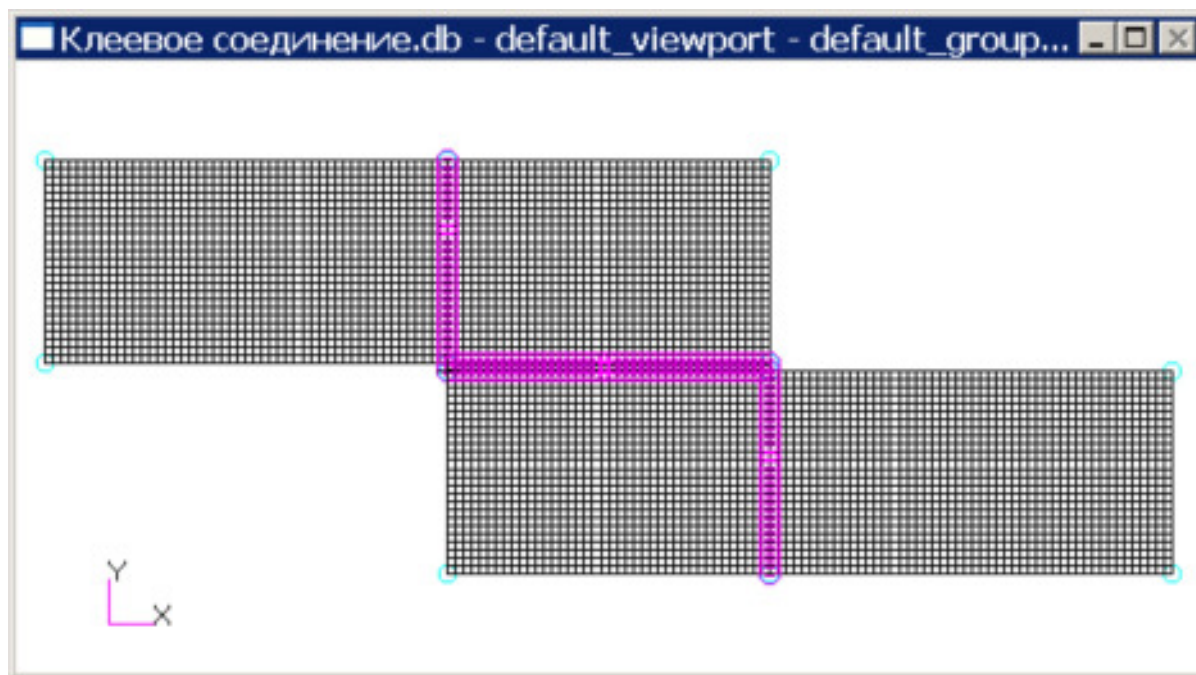


Рис.223

Для задания силовых граничных условий активизируем команду: **Object►Force**. В окне **New Set Name** задаем имя распределенной нагрузки **f**. Щелкаем по кнопке **Input Data...** Открывается одноименная панель, в окне которой вводим сосредоточенную силу **<40 0 0>**. Щелкаем по кнопке **OK**. Активизируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель. В графическом окне выделяем крайний правый ряд узлов пластины, за исключением двух крайних узлов. На панели **Select Application Region** щелкаем по кнопке **OK**, на панели **Loads/Boundary Conditions** - по кнопке **Apply**. Для двух крайних узлов назначаем нагрузку **<20 0 0>** и повторяем все описанные операции.

- S.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. В окне **Job Name** задаём имя расчета. Нажимаем клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.
- T.** После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ►Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.
- U.** Определяем напряженно-деформированное состояние клеевого соединения.

Отображение деформированного состояния клеевого соединения

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Quick Plot*;

вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase*;

тип результата: *Displacements, Translational*;

величину: *X Component* (или *Y Component*).

На *рис 224* приведен деформированный вид клеевого соединения, а на *рис 225* - изополя перемещений в направлении оси $x - u$, и в направлении оси $y - v$.

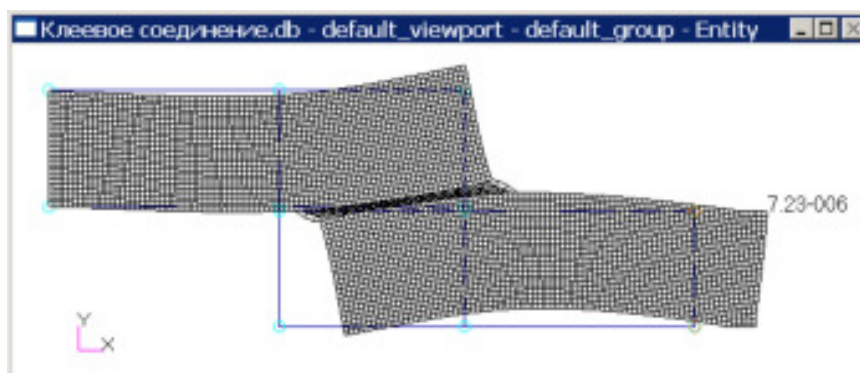


Рис.224

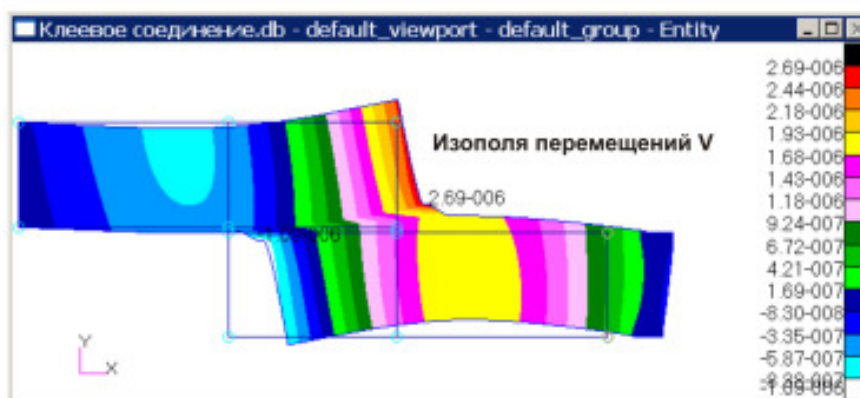
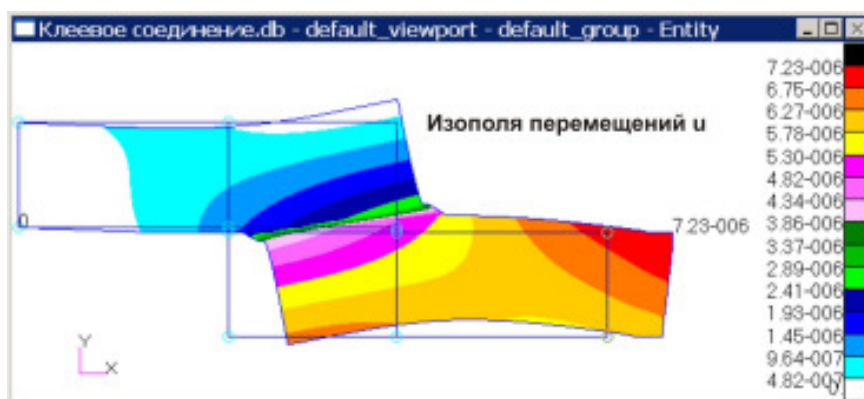


Рис.225

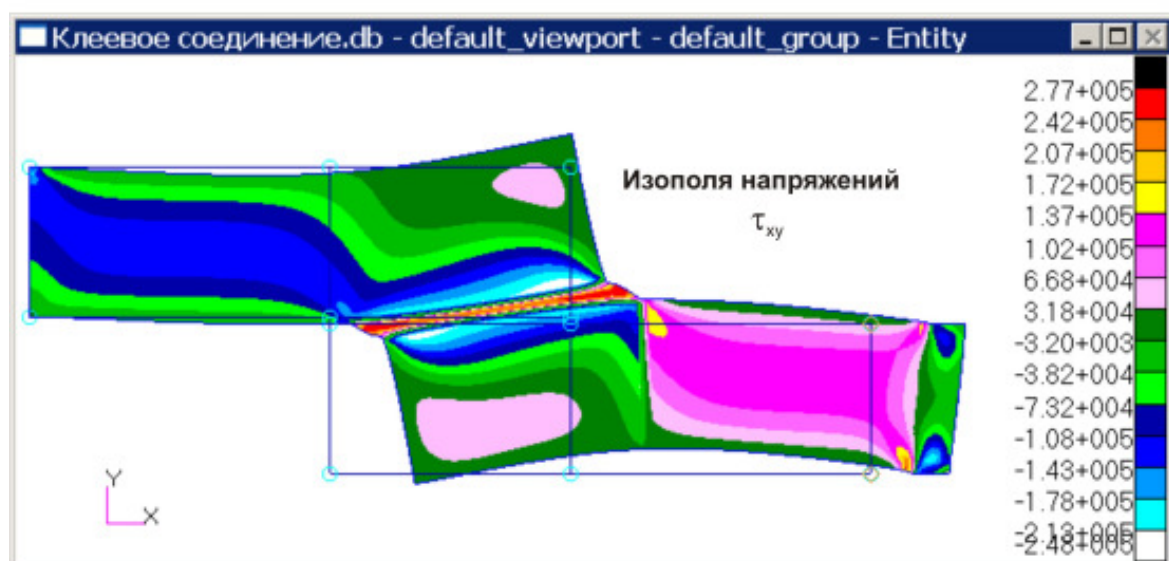
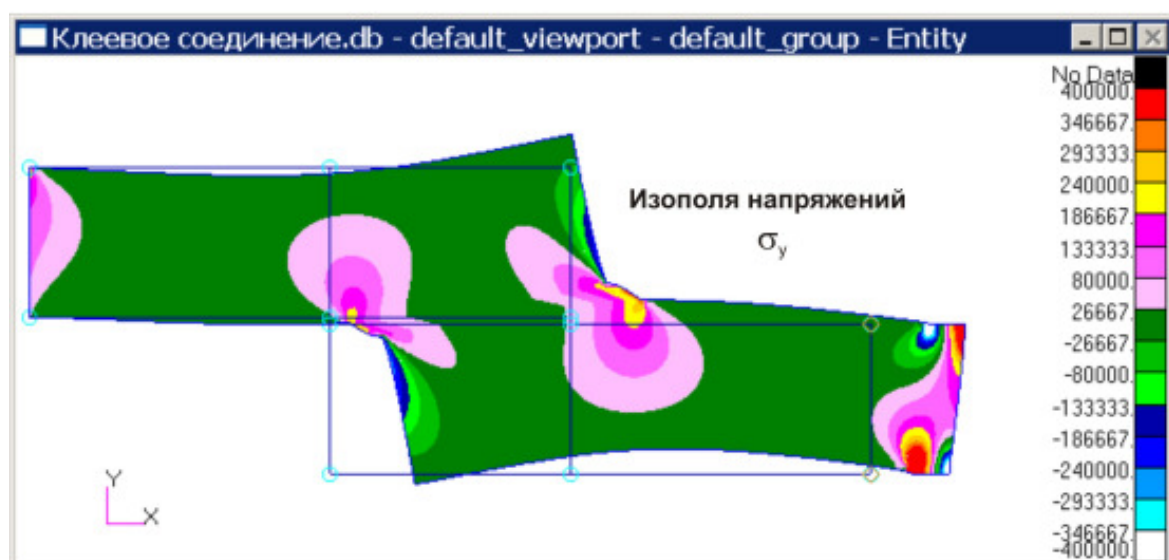
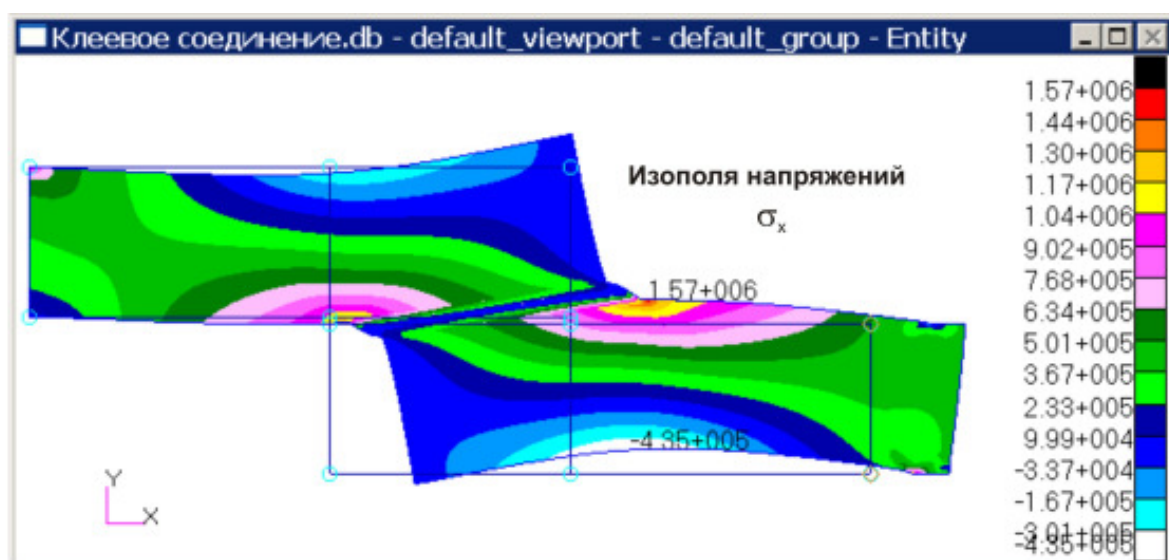


Рис.226

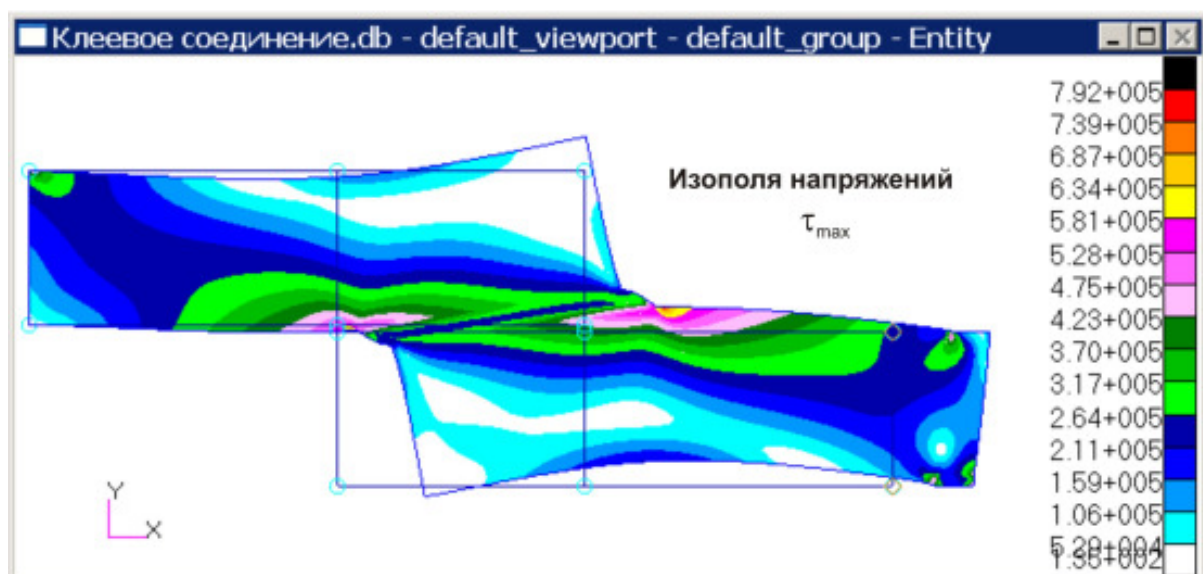
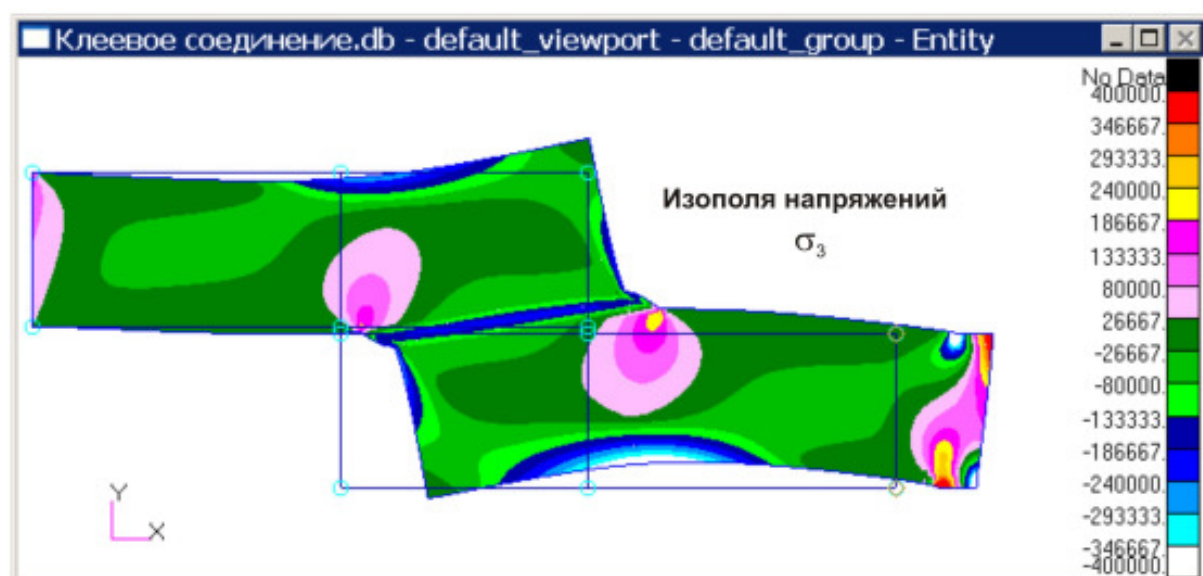
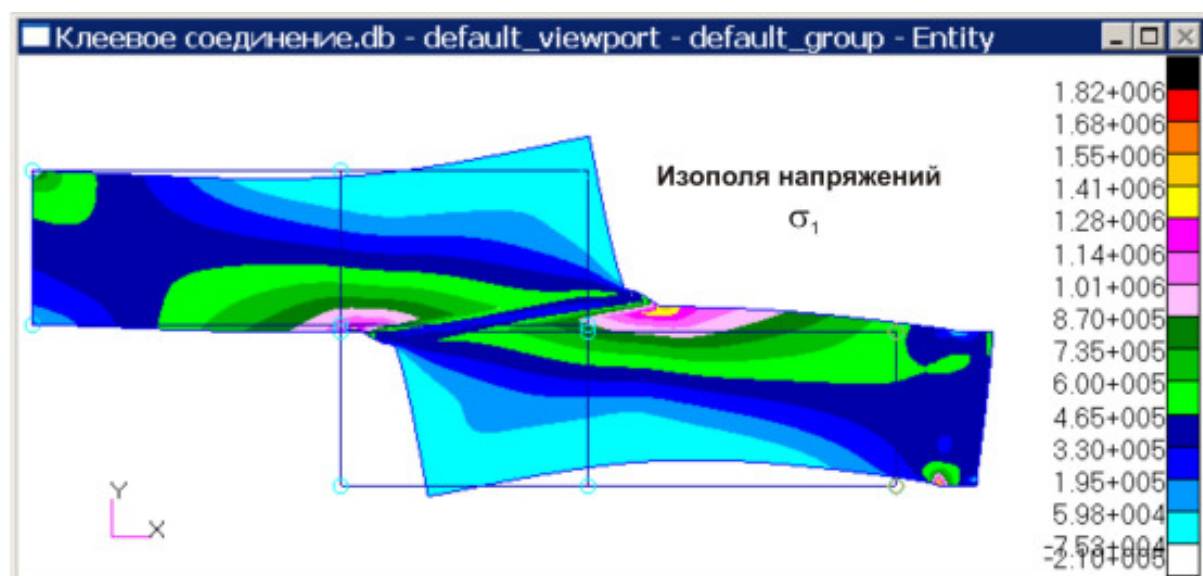


Рис.227

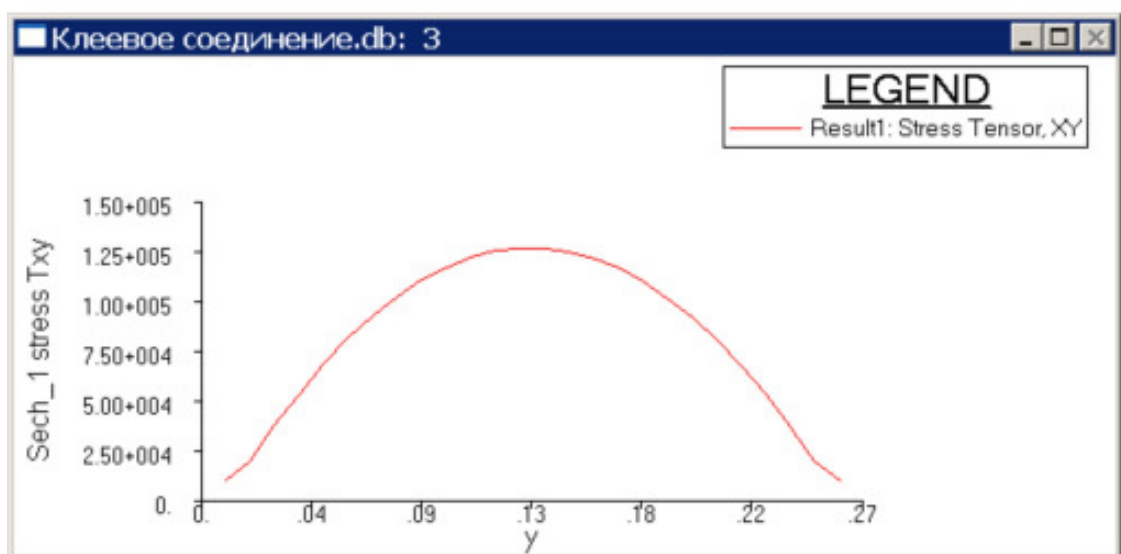
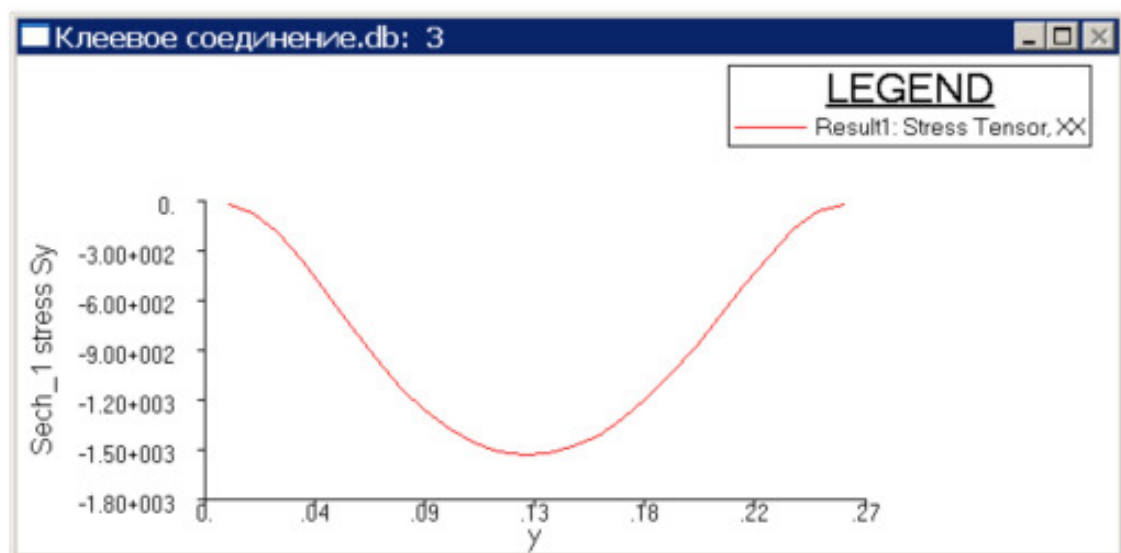
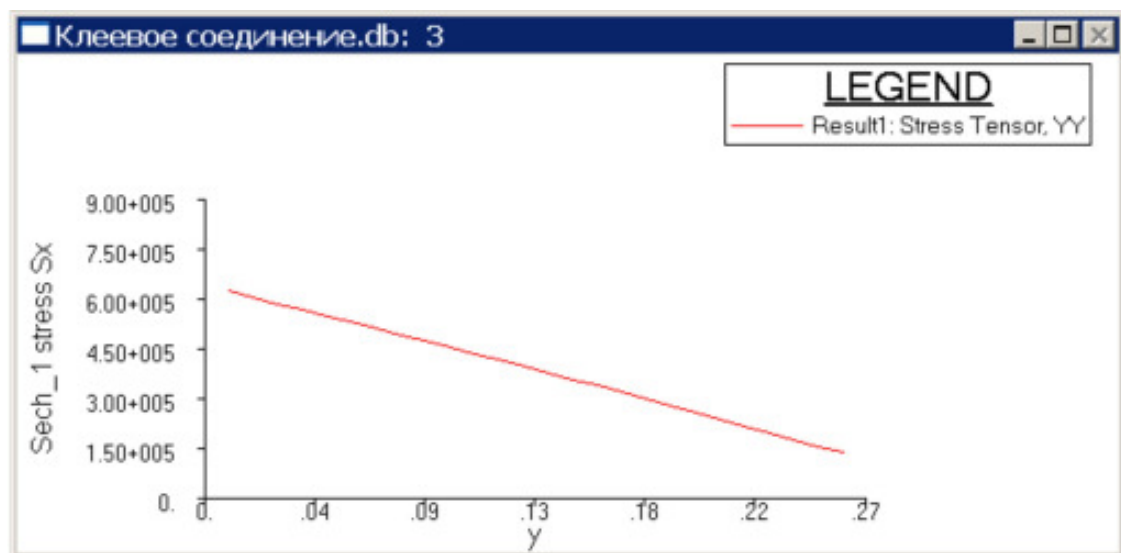


Рис.228

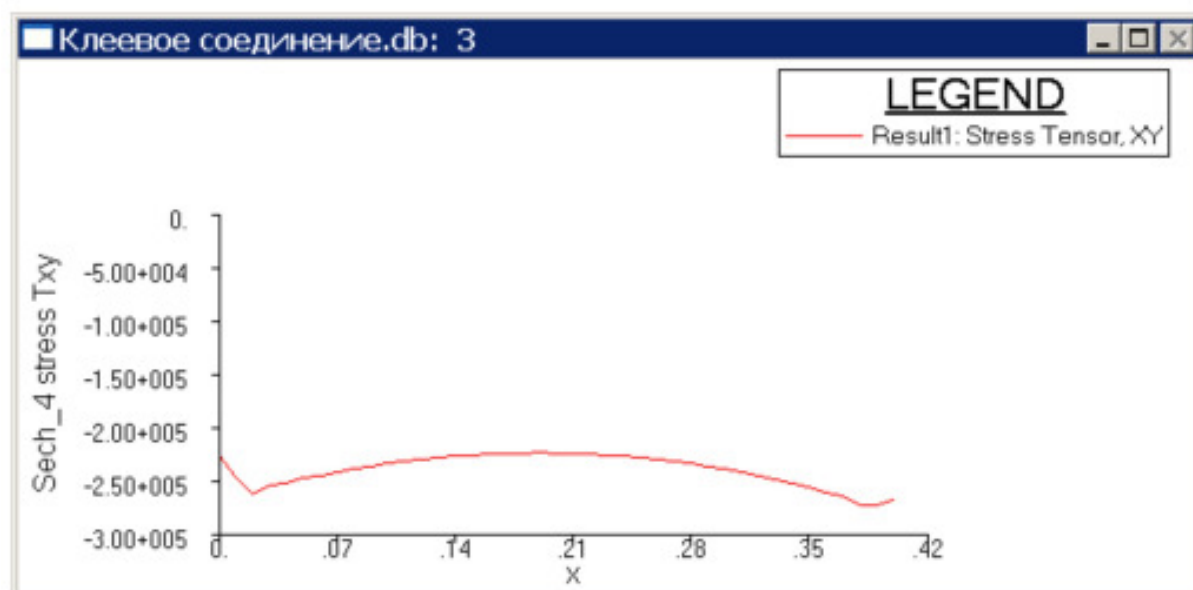
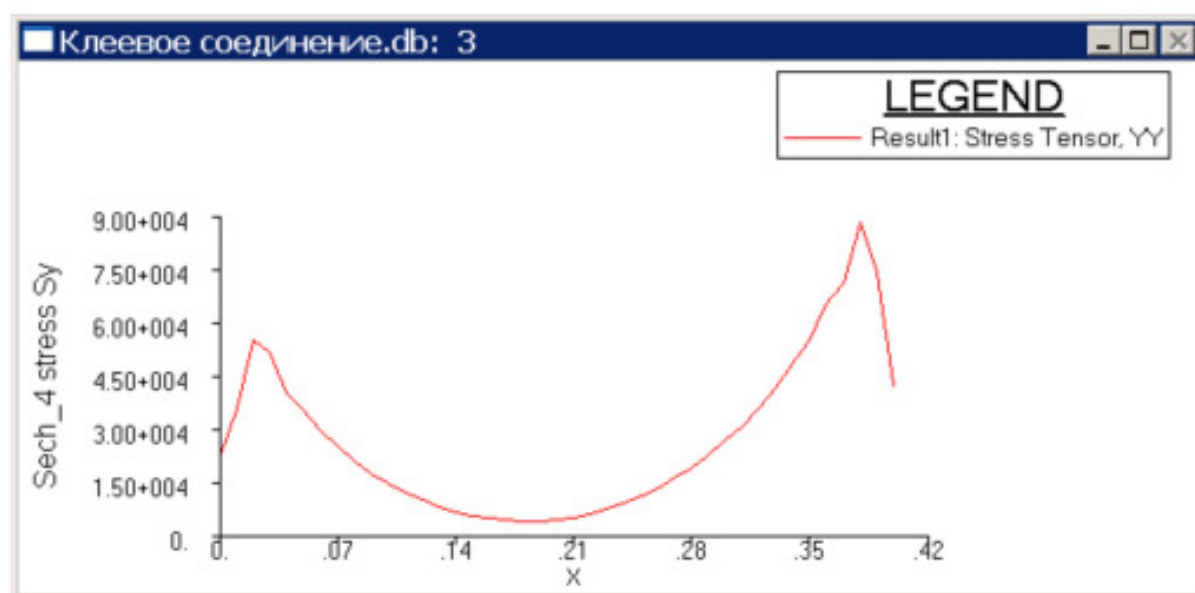
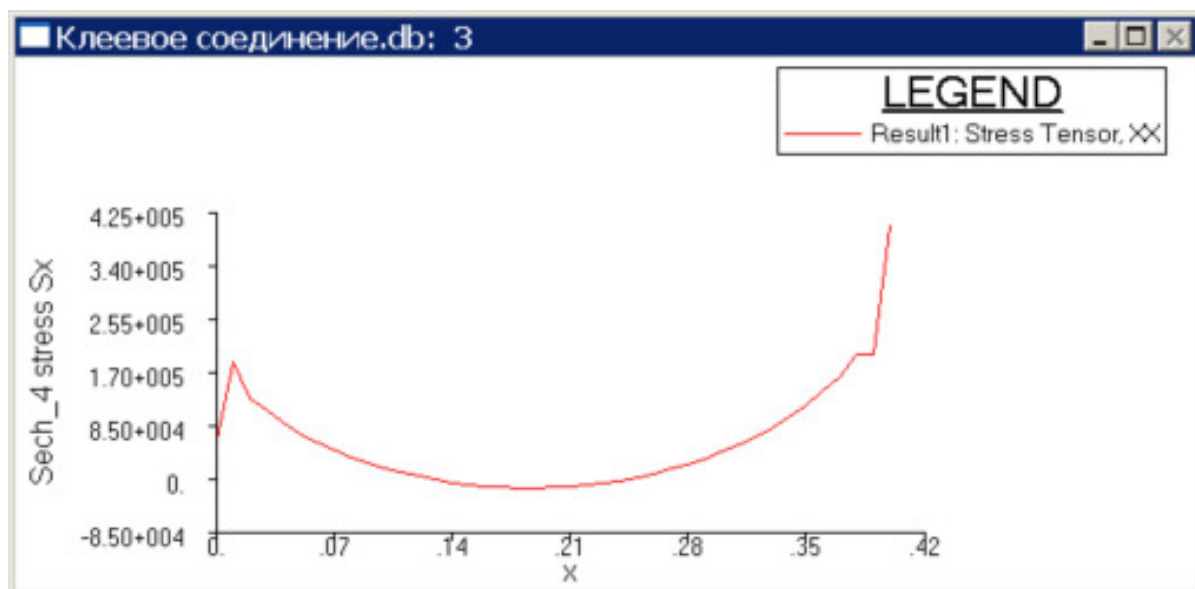


Рис.229

Отображение напряженного состояния клеевого соединения

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Quick Plot*;

вариант расчета – *Default A1: Static Subcase*;

тип результата: *Stress Tensor*;

количество (компонента тензора напряжений σ_x): X.

Нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение изополей поля напряжения σ_x при разбивке диапазона изменения этих напряжений на **15** уровней (рис.226). Аналогичным образом выводим изополя напряжений σ_y , τ_{xy} , τ_{max} , σ_1 , σ_3 (рис.226-227).

На рис. 228 и 229 приведены эпюры напряжений в сечениях **1** и **4**.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРУЖИН И УПРУГИХ СВЯЗЕЙ

Для перекрестно расположенных балок **AB** и **CD** балка **CD** является упругой связью для балки **AB** (рис.230 а). Расчетная схема балки **AB** приведена на рис.230 б. Расчетной моделью упругой колонны может служить пружина одинаковой с ней жесткости (рис.230 в, г).

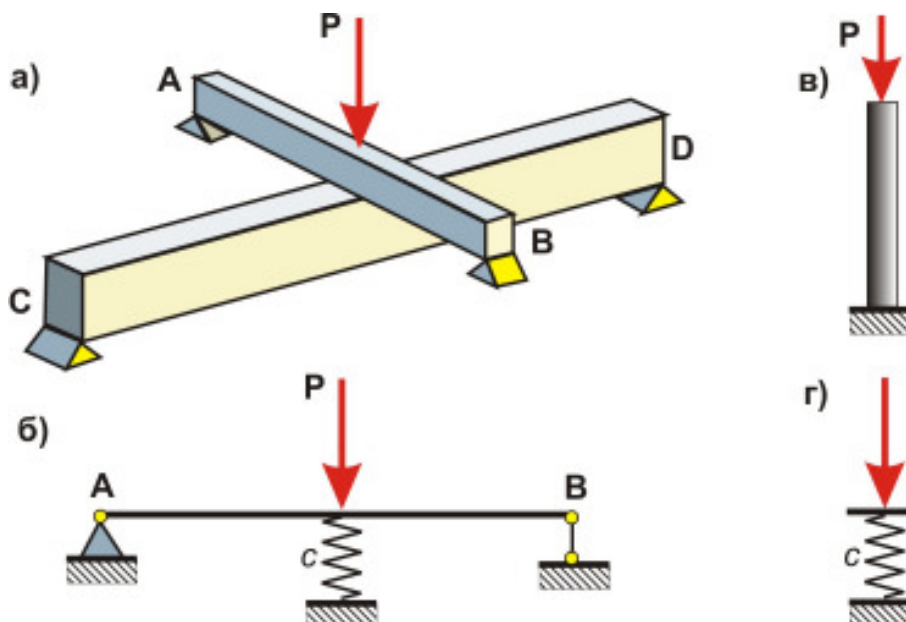


Рис.230

4.1.1. Моделирование пружин и упругих связей в системе MSC.Patran-Nastran


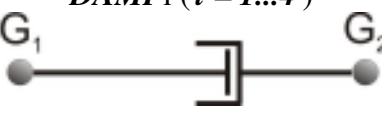

Нуль-элементы

Скалярный элемент связывает две степени свободы либо одну степень свободы и основание (жесткую плиту). Степень свободы может быть любой из шести степеней свободы узловой точки или скалярной точки, имеющей один компонент. В отличие от одно-, двух- и трехмерных элементов скалярный элемент не требует геометрического описания, поэтому он не имеет и элементной координатной системы (координатной системы, принадлежащей элементу).

Скалярные элементы обычно используются совместно с обычными конечными элементами для моделирования тех участков, где физический объект неизвестен, либо его задание не обязательно. Типовые примеры таких объектов - это демпфер, упругая связь в соединении, изолирующая прокладка и т.п. Если используются скалярные элементы для связи узловых точек, то рекомендуется, чтобы данные узловые точки совпадали. Если точки не совпадают, то силы, возникающие в узловой точке от действия скалярных элементов, могут вызвать появление значительных моментов, искажающих реальное состояние.

Для статических расчетов используются элементы типа линейной пружины ($CELASi$, $i = 1...4$) и сосредоточенной массы ($MASSi$, $i = 1...4$) (табл.4.1).

Таблица 4.1

Названия и изображения элементов	Примечание
<p>$ELASi$ ($i = 1...4$)</p> 	<p>Не имеющий размерности скалярный двухузловой элемент. Этот элемент подобен простой растягиваемой, сжимаемой или закручиваемой пружине; он воспринимает силовую или моментную нагрузку. Сила вызывает аксиальные деформации, а момент вызывает угловые деформации. Используется в качестве скалярной пружины в структурном анализе и проводника тепла в задачах теплопередачи</p>
<p>Демпфер $DAMPi$ ($i = 1...4$)</p> 	<p>Не имеющий размерности скалярный двухузловой элемент. Используется в качестве скалярного демпфера в структурном анализе ($i = 1...4$) и сосредоточенной тепловой емкости в задачах теплопередачи.</p>
<p>$MASSi$ ($i = 1...4$)</p> 	<p>Элемент скалярной массы</p>

Существуют четыре способа определения пружины и массы как скалярных элементов, в которых указываются материал, тип элемента, номера узловых или скалярных точек (для $CELAS1$ и $CELAS2$), номера скалярных точек (для $CELAS3$ и $CELAS4$), степени свободы, жесткость скалярной пружины K , коэффициент напряжений S ($CELAS2$), коэффициент демпфирования GE ($CELAS2$).

Под жесткостью упругой системы понимают силу, вызывающую перемещение точки приложения силы на единицу длины. Зная жесткость упругой системы (в отечественной литературе жесткость упругой системы обозначается буквой c) и перемещение точки приложения силы δ , можно вычислить силу: $F = c\delta$.

Для некоторых упругих систем формулы для вычисления жесткости приведены в курсах сопротивления материалов и строительной механики:

- **жесткость стальной цилиндрической винтовой пружины** (с радиусом проволоки r , средним радиусом витков пружины R , количеством витков n)

$$c = \frac{Gr^4}{4R^3n}, \quad (4.1)$$

где G - модуль сдвига материала проволоки пружины;

- **жесткость центрально растягиваемого стержня** длиной L и площадью поперечного сечения A

$$c = \frac{EA}{L}, \quad (4.2)$$

где E - модуль упругости материала стержня;

- **жесткость шарнирно опертой балки**, загруженной в середине пролета длиной L , сосредоточенной силой F :

$$c = \frac{48EJ}{L^3}, \quad (4.3)$$

где J - момент инерции поперечного сечения балки.

В **Patran** используется коэффициент напряжения S - это податливость p упругой системы, определяемая как величина обратная жесткости:

$$p = 1/c. \quad (4.4)$$

Перемещение точки приложения силы F вычисляется по формуле

$$\delta = pF. \quad (4.5)$$

Коэффициент демпфирования GE - коэффициент в выражении силы сопротивления, стоящий перед относительной скоростью движения тела.

В системе **MSC.Patran** скалярные элементы задаются в приложении **Finite Elements**. На *рис.231* приведены панели **Finite Elements, Elements Properties, Input Properties**, всплывающие меню; последовательность появления панелей на *рис.231* обозначена цифрами **1, 2, 3**. Как следует из рисунка, можно задать четыре типа одноузловых скалярных элемента: **Mass** (масса), **Grounded Spring** (пружина, прикрепленная к земле), **Grounded Damper** (демпфер, прикрепленный к земле), **Grounded Bush** (элемент, сочетающий в себе демпфер и пружину, прикрепленную к земле).

4.1.1.1. Использование элемента **Grounded Spring**

А. Моделирование растяжения-сжатия стержней

Пусть чугунная колонна высотой **3 м** имеет кольцевое поперечное сечение с наружным диаметром **25 см** и внутренним диаметром **20 см**. Она нагружена сжимающим усилием **500 кН**. Найти внутреннее усилие и абсолютное укорочение колонны.

Колонна воспринимает сжимающую нагрузку. Один торец колонны защемлен, к другому торцу приложена нагрузка. В зоне упругой работы материала колонны её можно рассматривать как упругую пружину, один конец которой защемлен, а к другому приложена сжимающая сила **500 кН**.

Создадим конечно-элементную модель колонны в системе **MSC.Patran**.

А. В приложении **Geometry** активизируем команды:

Action ► Create;
Object ► Point ;
Method ► XYZ ,

создаем точку с координатами [0 0 0] и нажимаем на клавишу **Apply** (рис.232, а).

В. Создаём в этой точке узел в приложении **Elements**. Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► Node ;
Method ► Edit.

Подводим указатель мыши к точке и щелкаем левой клавишей. В окне **Node Location List** появится запись **Point 1** (рис.232, б).

С. Переходим к приложению **Loads\ Boundary Conditions**. Задаем имя геометрическому условию в окне **New Set Name** и щелкаем по клавише **Input Data**. На появившейся панели задаем степени свободы узлу. Оставляем только одну степень свободы в направлении оси x и щелкаем по кнопке **OK**. На главной панели (рис.232, в) нажимаем клавишу **Select Application Region**. На открывшейся панели в области геометрического фильтра устанавливаем опцию **FEM** (рис.233, а). В графическом окне подводим указатель мыши к точке и щелкаем по ней левой кнопкой. На панели **Select Application Region** в окне **Select Nodes** появится запись **Node 1**. Последовательно щёлкаем по клавишам **Add** (запись **Node 1** переместится в окно **Application Region**), **OK** и на панели **Select Application Region - Apply**. В графическом окне у точки появится изображение установленных связей

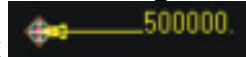


Примечание. В данном случае можно было бы и не закреплять узел, так как мы присоединяем к нему **Grounded Spring**, который прикрепляется к земле.

Д. Зададим силу $F = 500000$ Н. На панели **Loads\ Boundary Conditions** активируем команды (рис.233, б):

Action ► Create ;
Object ► Force ;
Type ► Edit.

В окне **New Set Name** задаем имя нагрузки **f** и щелкаем по клавише **Input Data**. На появившейся панели задаем компоненты вектора силы **<-500000 0 0>** (рис.233, в). Щелкаем по кнопке **OK**. На главной панели (рис.232, в) нажимаем клавишу **Select Application Region**. На открывшейся панели (рис.233, а) так же, как и при задании кинематических условий, указываем узел **Node 1**. Последовательно щёлкаем по клавишам **Add** (запись **Node 1** переместится в окно **Application Region**), **OK** и **Apply** на панели **Select Application Region**. В графическом окне у точки



появится изображение заданной силы

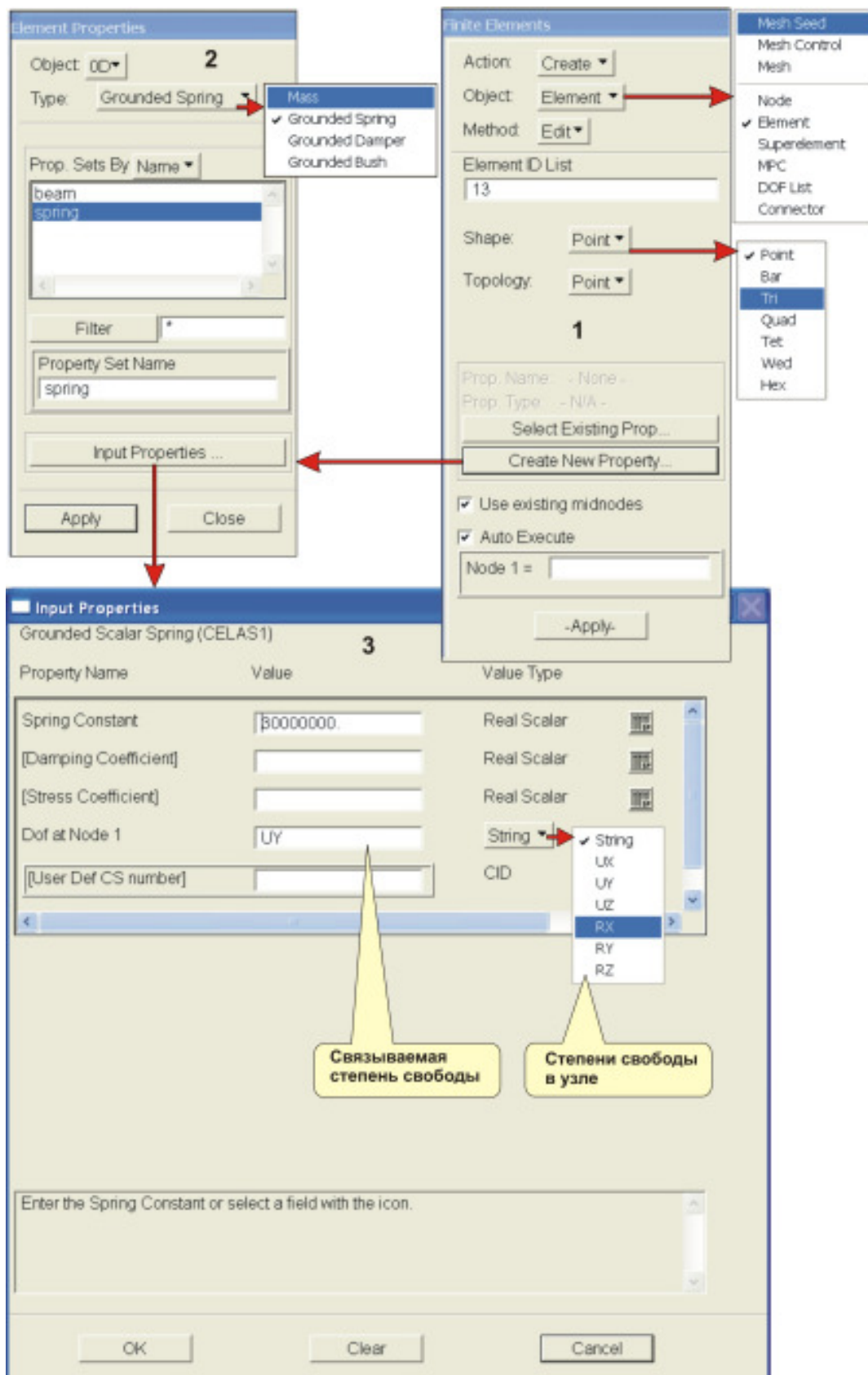


Рис.231

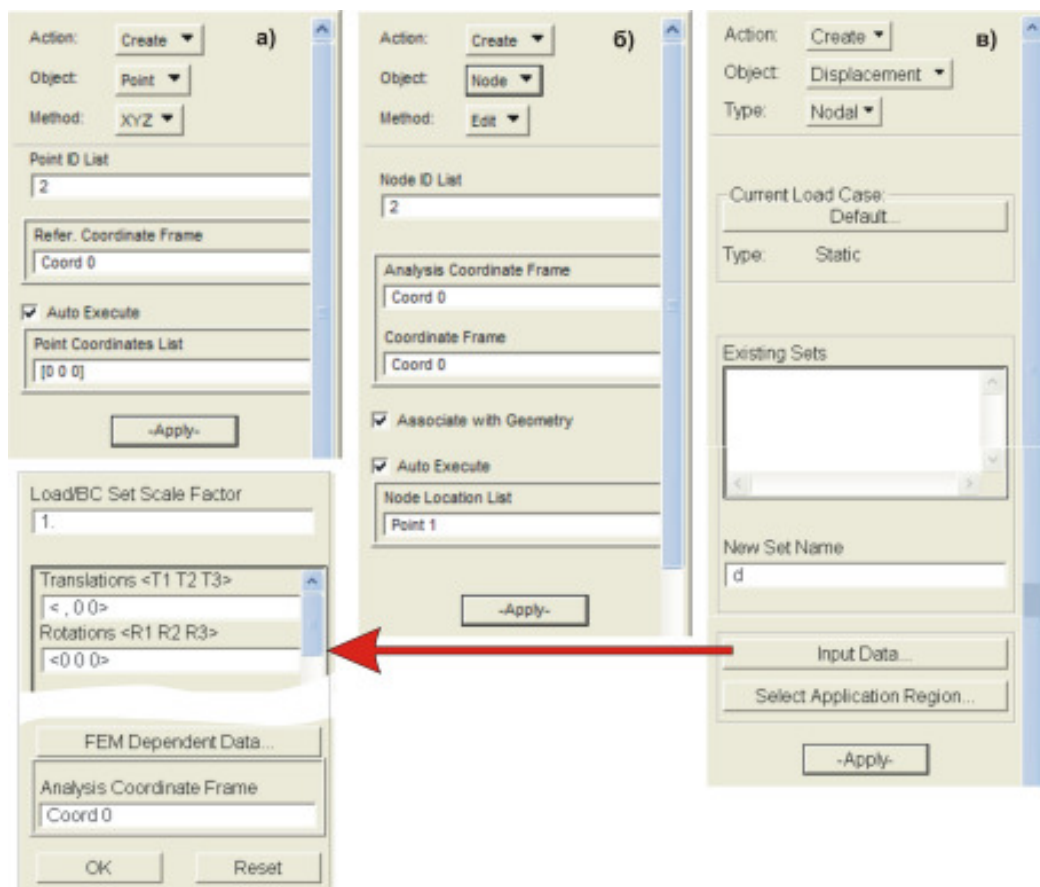


Рис.232

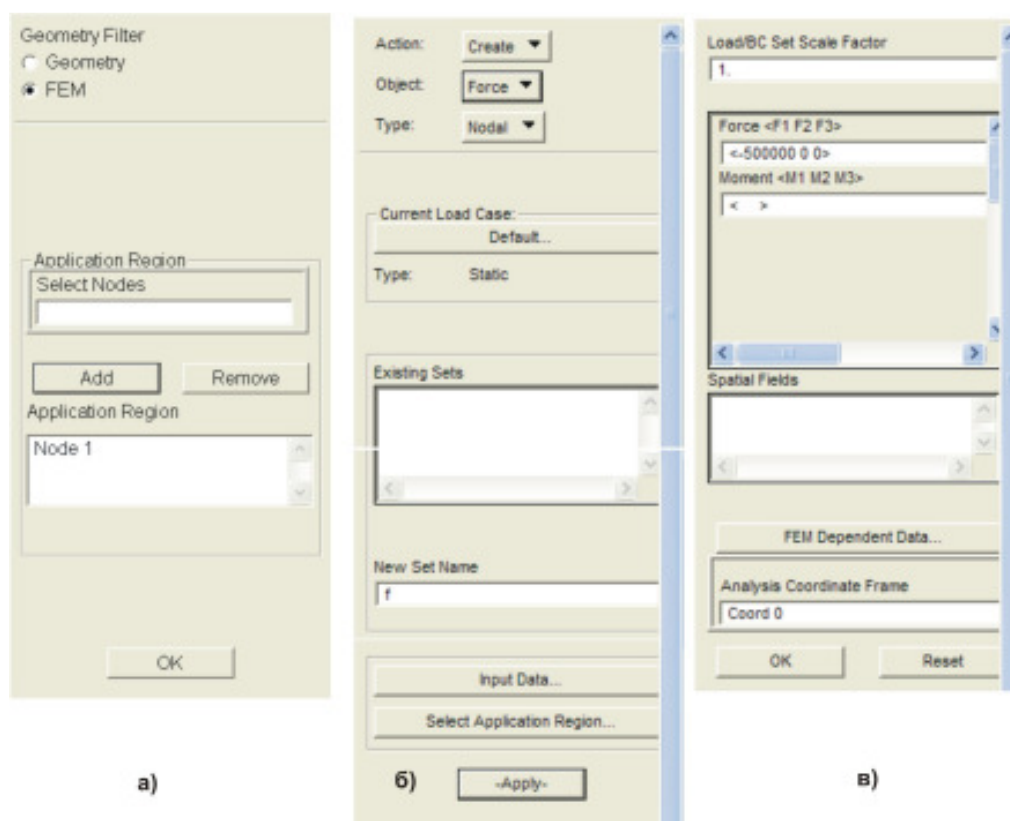


Рис.233

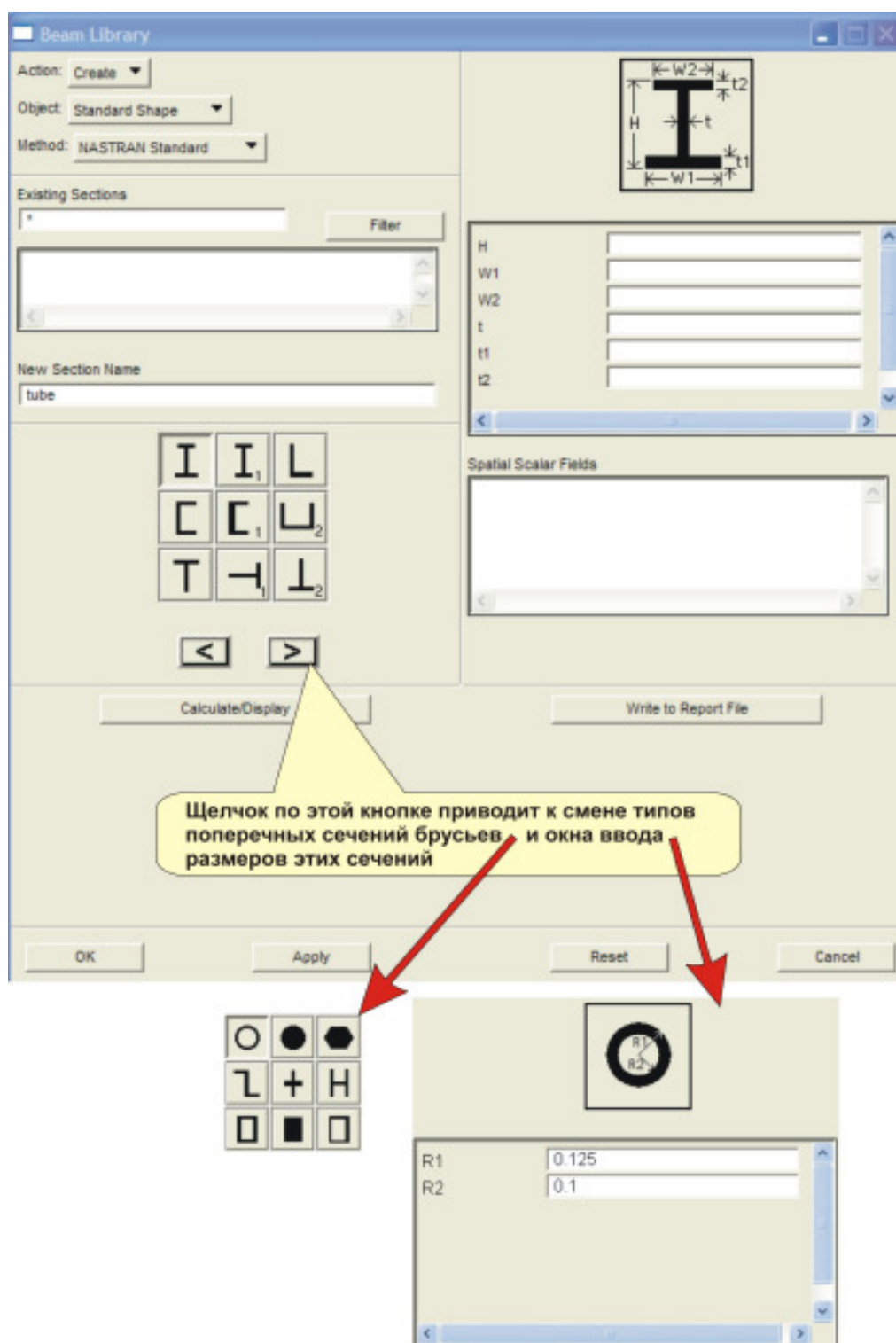



Рис.234

- Е.** Вычислим геометрические характеристики поперечного сечения колонны, жесткость и податливость пружины. В главном меню **MSC.Patran** в разделе **Tools** выбираем команду **Beam Library**. Появится одноименное окно (рис.234), в котором щелкаем по кнопке , что приведет к смене типов поперечных сечений брусьев. Выбираем трубу и задаём радиусы: наружный - **0.125**, внутренний - **0.1**. Щелкаем по клавише **Calculate/Display**. Появится панель **Section Display** (рис.235), на которой приведены результаты вычисления всех геометрических характеристик поперечных сечений. Нас интересует только площадь поперечного сечения

чения трубы: $A = 0.01767146 \text{ м}^2$. Учитывая, что модуль упругости чугуна $E = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, по формулам (3.6) и (3.10) вычисляем жесткость и податливость трубы (пружины):

$$c = \frac{EA}{L} = \frac{1.2 \cdot 10^{11} \cdot 1.767 \cdot 10^{-2}}{3} = 7.068 \cdot 10^8; \quad p = \frac{1}{c} = 1.415 \cdot 10^{-9}.$$

- F. Задаём свойства элемента **Grounded Spring** в приложении **Elements Properties**. Активизируем команды:

Action ► Create ;

Object ► 0D ;

Type ► Grounded Spring.

В окне **Property Set Name** задаём имя свойствам пружины - **Spring** и щелкаем по клавише **Input Properties**. В появившейся одноименной панели задаём коэффициенты: **Spring Constant - 7.068E+008; Stress Coefficient - 1.415E-009** и степень свободы в направлении оси x . Завершаем операцию последовательным нажатием на клавиши **OK** и **Apply** (рис.236).

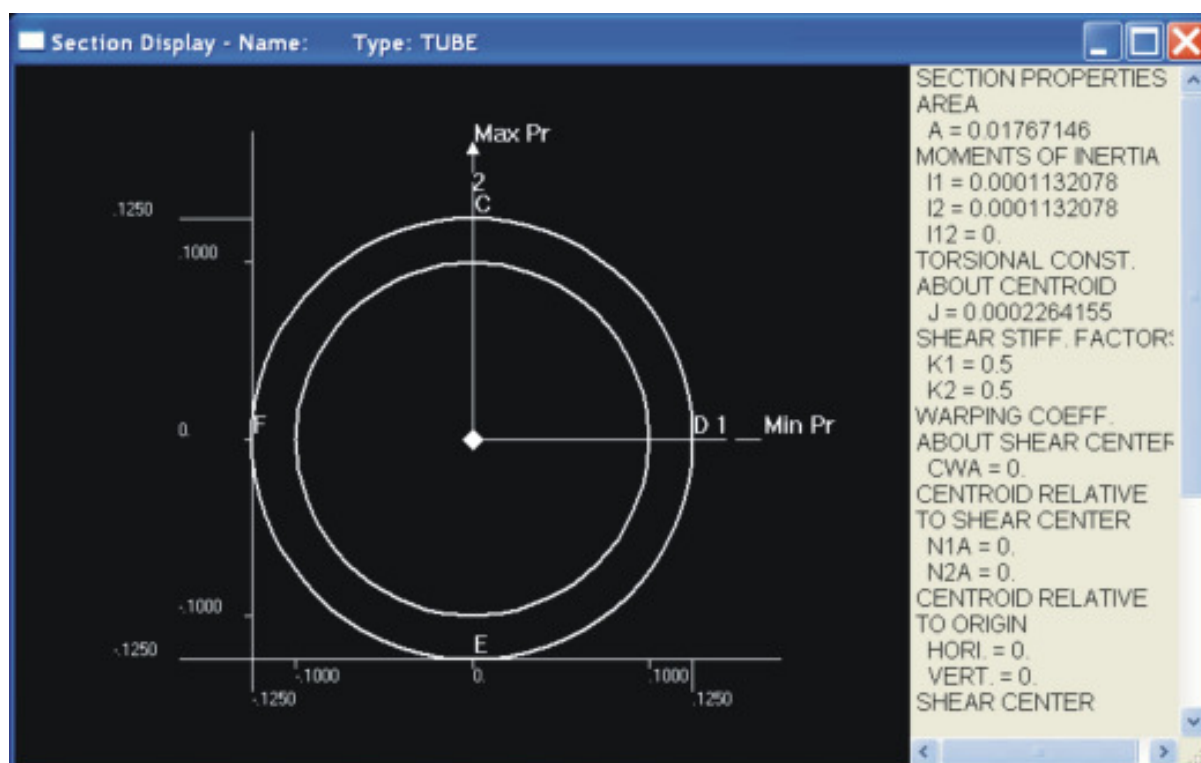


Рис.235

- G. Создаем элемент **Grounded Spring** в приложении **Elements**. Активизируем команды:

Action ► Create ;

Object ► Element;

Method ► Edit ;

Shape ► Point ;

Topology ► Point.

Нажимаем на клавишу **Select Existing Prop...** Появится панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элемента **spring** и щелкаем по кнопке **Cancel**. Под-

водим указатель мыши к точке и щелкаем левой клавишей. В окне **Node 1** появится запись **Node 1**. Нажимать на клавишу **Apply** не надо, т.к. в окне **Auto Execute** установлен флажок (рис.237).

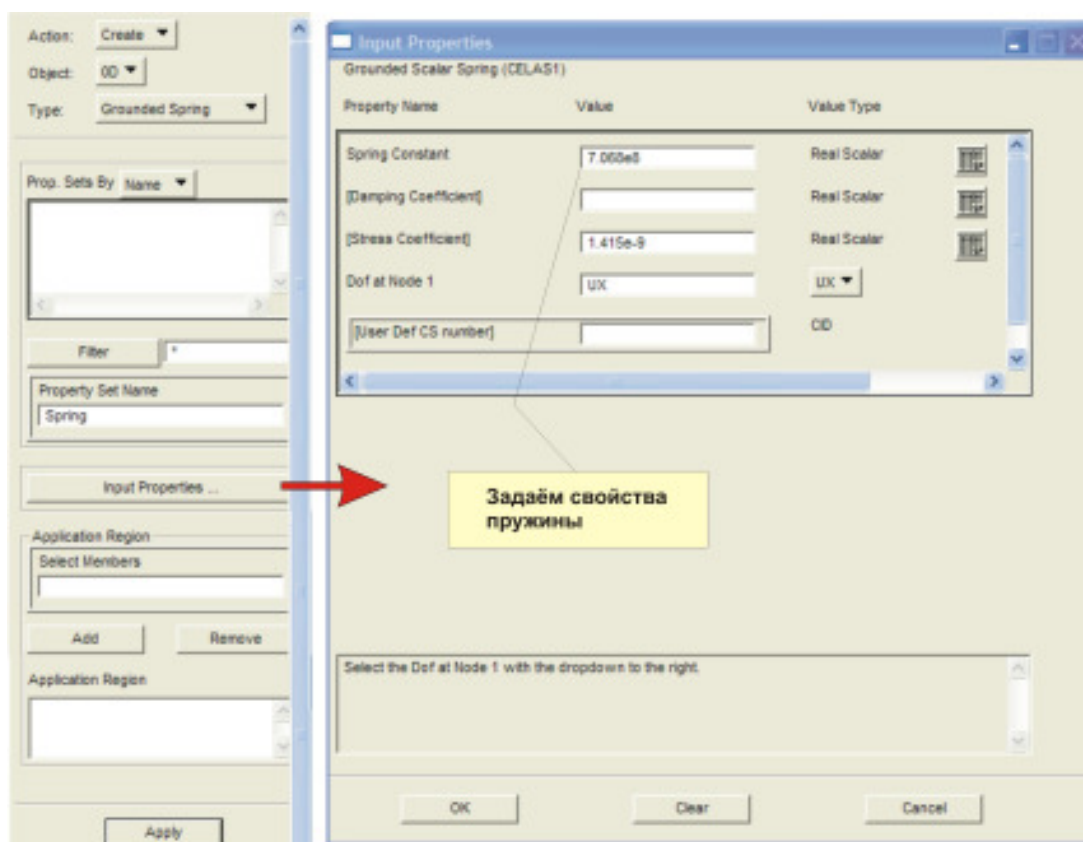


Рис.236

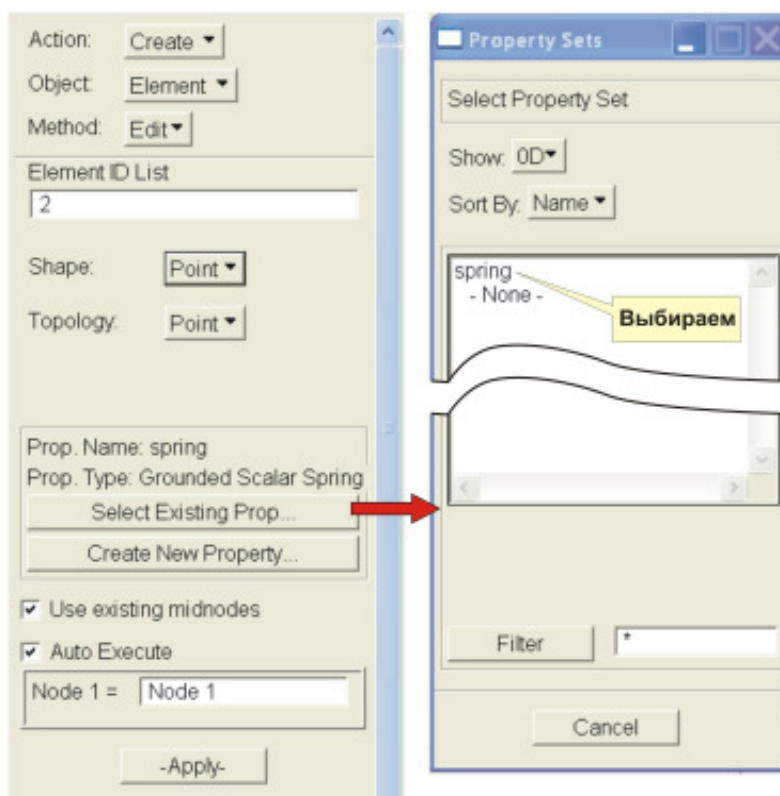


Рис.237

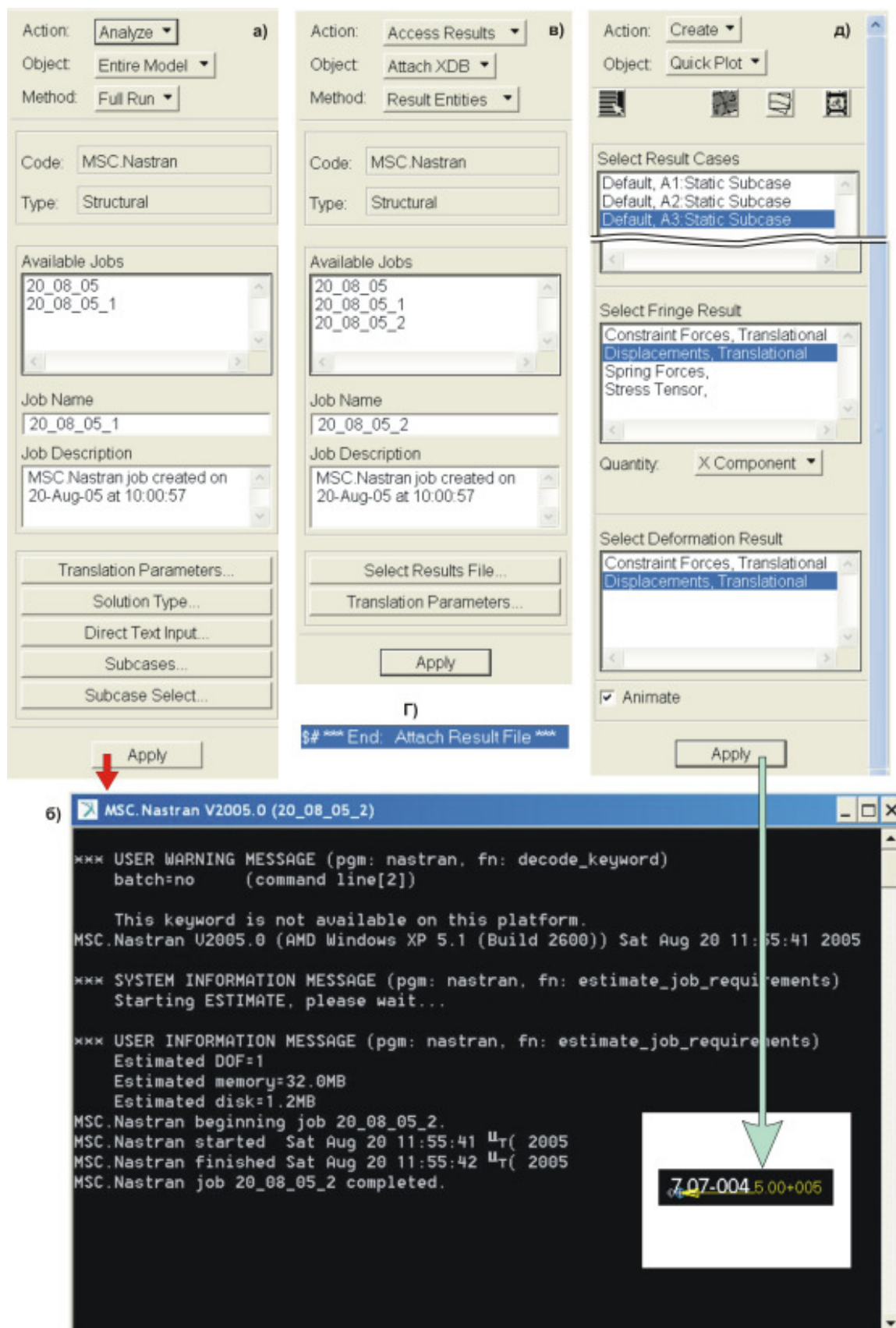
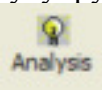


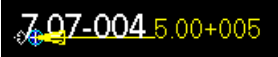


Рис.2.38

Н. Переходим к расчету упругой системы. Открываем приложение **Analysis**, т.е.

щелкаем по кнопке . Появляется одноименная панель (рис.238, а), на кото-

рой в поле **Job Name** записываем имя выполняемой работы (операции) и щелкаем по клавише **Apply**, что приведет к запуску вычислительного блока MSC.Nastran (рис.238, б). После окончания вычислений устанавливаем опцию **Action ► Access Results**, при этом вид панели изменится (рис.238, в). Нажимаем клавишу **Apply**. Если в информационной строке появляется запись , это означает, что конечно-элементная модель не противоречива, расчет выполнен и результаты расчета переданы для дальнейшей работы в систему MSC.Patran (рис.238, г).

- I. Анализируем результаты расчета. Щелкаем по кнопке . Появится одноименная панель (рис.238, д), в окнах которой выделяем расчетный случай - **Default, A3: Static Subcase** и результат расчета, подлежащий анализу – **Displacements, Translational**. В опции Quantity выбираем **X Component** и нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне у точки появится результат расчета перемещения точки приложения силы . Если включить анимацию, то цифры **7.07 – 004** начнут совершать колебательные движения в горизонтальном направлении относительно точки **Point 1**.

Б. Моделирование упругих связей

Пусть требуется определить прогибы шарнирно опертой балки длиной $L = 1$ м, загруженной в середине пролёта сосредоточенной силой $P = 10000$ Н и опирающейся на одну упругую шарнирно неподвижную, а другую жесткую шарнирно подвижную опоры. Размеры поперечного сечения балки приведены на рис.239. Жесткость пружины 30000000 Н/м.

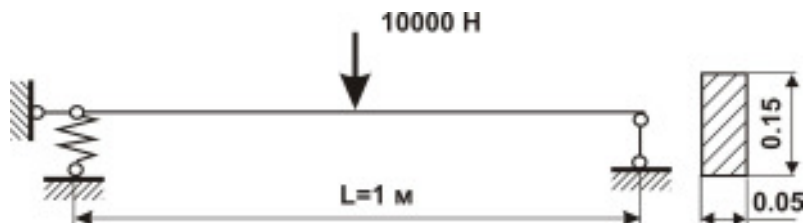


Рис.239

Создадим конечно-элементную модель балки в системе **MSC.Patran**.

- A. В приложении **Geometry** активизируем команды:
Action ► Create;
Object ► Point ;
Method ► XYZ
и создаем точки с координатами $[0 \ 0 \ 0]$, $[1 \ 0 \ 0]$. Нажимаем на клавишу **Apply**.
- B. Щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**. Панель **Geometry** примет вид, изображенный на рис.52.
- C. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам.
- D. В приложении **Materials** задаём свойства материала балки: модуль упругости - $E = 2e11$ Н/м², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Нажимаем последовательно клавиши **OK** и **Apply**.

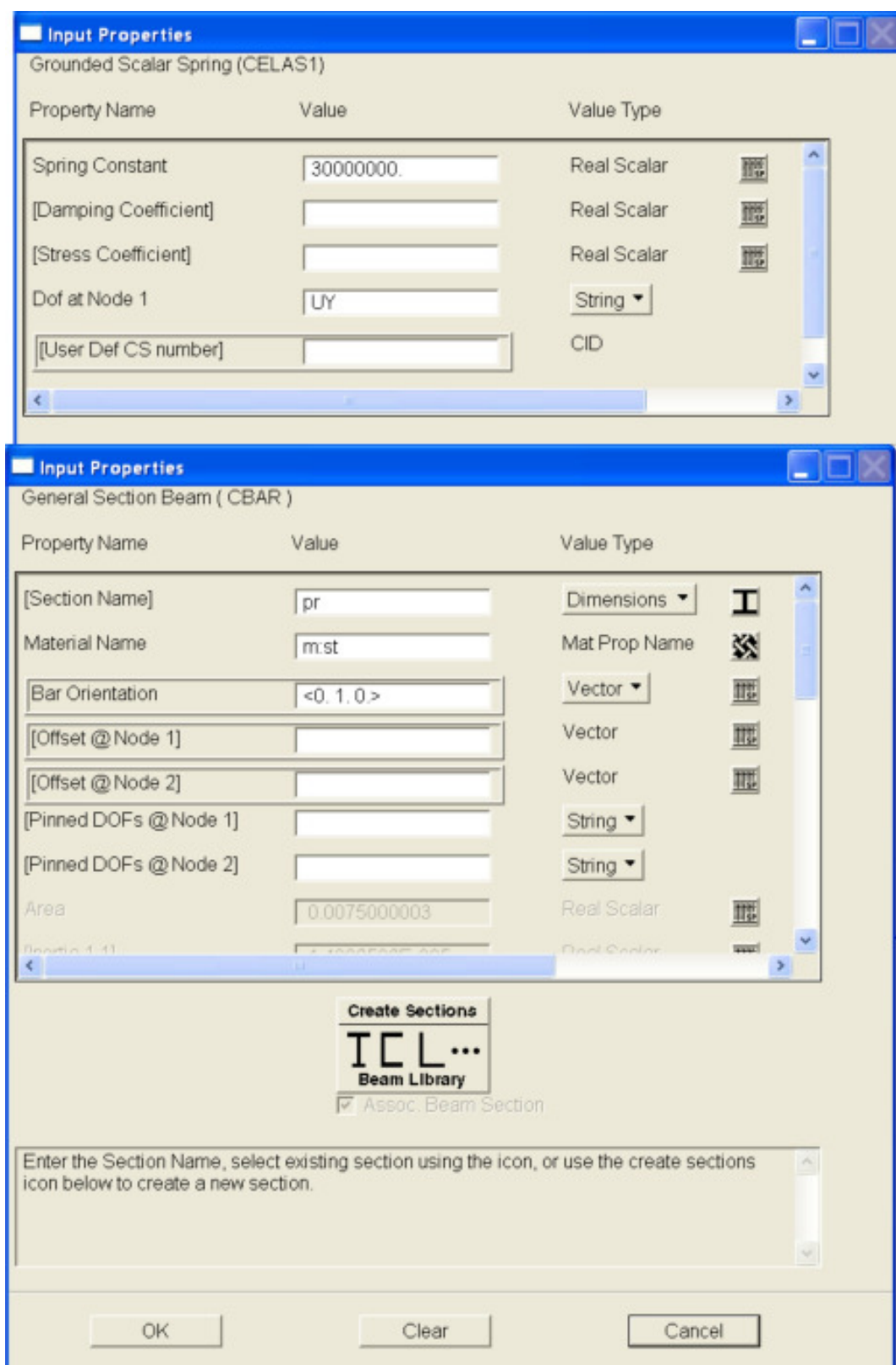


Рис.240

Е. В приложении **Elements Properties** задаём свойства элемента **Grounded Spring**
Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► 0D ;
Type ► Grounded Spring.

В окне **Property Set Name** задаём имя свойствам пружины - **Spring** и щелкаем по клавише **Input Properties**. В появившейся одноименной панели задаём коэф-

фициент **Spring Constant** - **30000000** и степень свободы в направлении оси *y* (рис.240). Завершаем операцию последовательным нажатием на клавиши **OK** и **Apply**.

Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► 1D ;
Type ► Beam.

В окне **Property Set Name** задаём имя свойствам балки - **Beam** и щелкаем по клавише **Input Properties**. В появившейся одноименной панели задаём профиль поперечного сечения балки и имя (**pr**), материал и ориентацию поперечного сечения балки. Завершаем операцию последовательным нажатием на клавиши **OK** и **Apply** (рис.240).

- F. Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**, что приводит к открытию соответствующей панели.
- G. Используем команду **Object ► Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели балки. В поле Number задаем число элементов на кривой (в нашем случае - **10**).
- H. Переходим к созданию сетки. Активизируем команду **Object ► Mesh**. Панель **Finite Elements** изменит вид (рис.105).
- I. Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элементов – **Beam**. Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**.
- J. В графическом окне устанавливаем курсор мыши на кривую и нажимаем её левую клавишу. В окне **Surface List** появится запись **Curve 1** (если в окне **Automatic Calculation** установлен «флажок», нажимать на клавишу **Apply** не надо). Если мы всё сделали правильно, в графическом окне появится изображение конечно-элементной сетки.
- K. Создаем элемент **Grounded Spring** в приложении **Elements**. Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► Element;
Method ► Edit ;
Shape ► Point ;
Topology ► Point.

Нажимаем на клавишу **Select Existing Prop...** Появится панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элемента **Spring** и щелкаем по кнопке **Cancel**. Подводим указатель мыши к точке и щелкаем левой клавишей. В окне **Node 1** появится запись **Node 1**.

- L. Переходим к приложению **Loads \ Boundary Conditions**. Задаем имя геометрическому условию в окне **New Set Name** и щелкаем по клавише **Input Data**. На появившейся панели задаем степени свободы узлу. Оставляем только одну поступательную степень свободы в направлении оси *y* и одну вращательную вокруг оси *z*. Щелкаем по кнопке **OK**. Нажимаем клавишу **Select Application Region**. На открывшейся панели в области геометрического фильтра устанавливаем опцию **FEM** (рис.2.33, а). В графическом окне подводим указатель мыши к точке и щелкаем по ней левой кнопкой. На панели **Select Application Region** в окне **Select Nodes** появится запись **Node 1**. Последовательно щёлкаем по клавишам **Add** (запись **Node 1** переместится в окно **Application Region**), **OK** и **Apply** на панели **Select Application Region**. В графическом окне у точки появится изображение



установленных связей. Аналогичным образом закрепляем правый торец балки, оставляя степени свободы вдоль оси x и вокруг оси z .

М. Зададим силу $F = 10000$ Н. На панели **Loads\ Boundary Conditions** активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► Force ;
Type ► Edit.

В окне **New Set Name** задаем имя нагрузке – **f** и щелкаем по клавише **Input Data**. На появившейся панели задаем компоненты вектора силы **<0 -10000 0>**. Щелкаем по кнопке **OK**. На главной панели нажимаем клавишу **Select Application Region**. На открывшейся панели так же, как и при задании кинематических условий, указываем номер узла, к которому приложена сила. Последовательно щелкаем по клавишам **Add**, **OK** и **Apply** на панели **Select Application Region**. В графическом окне появится изображение заданной силы.

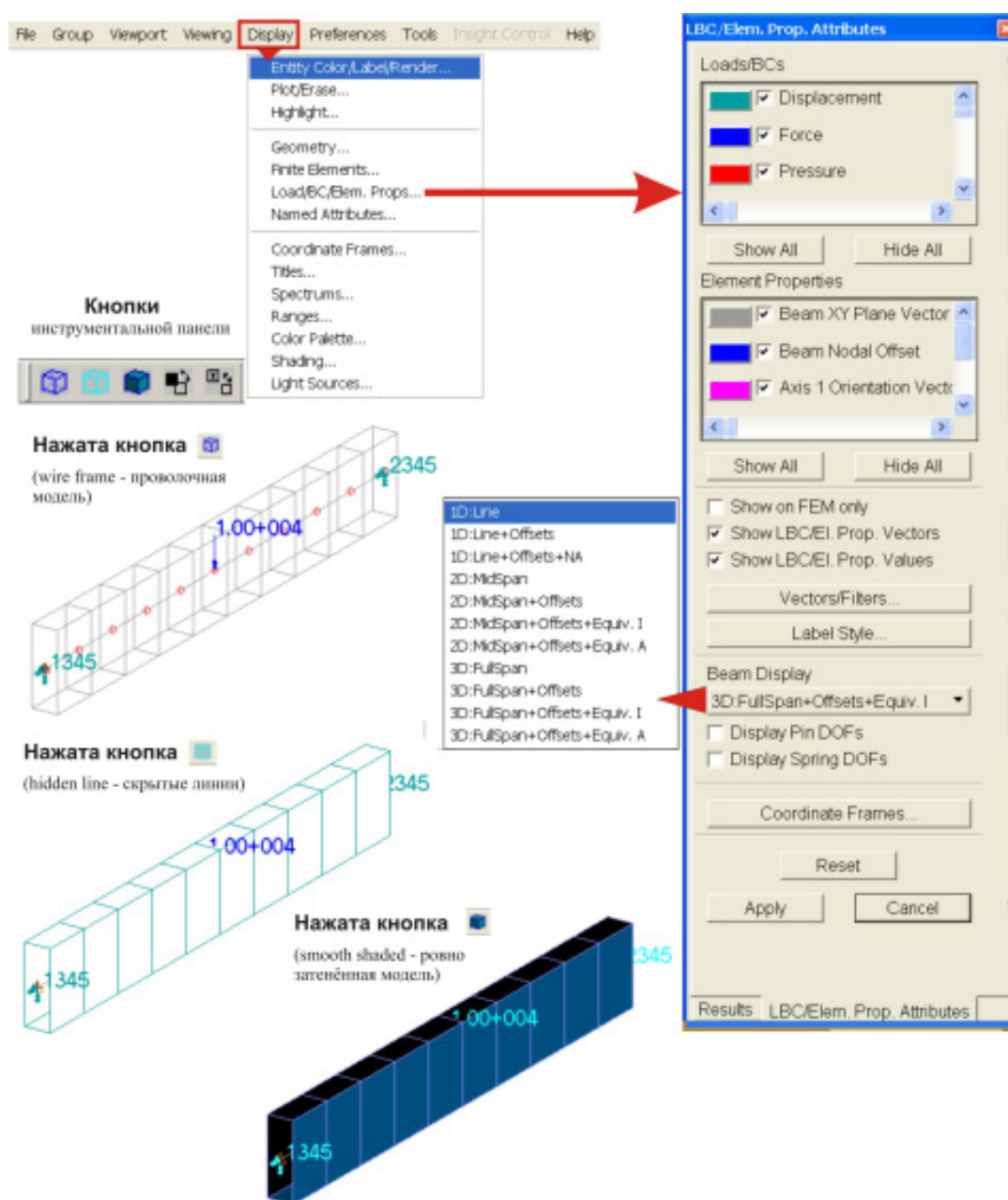





Рис.241

N. Для визуализации созданной расчетной схемы балки в главном меню нажимаем команду **Display** и в выпадающем меню команду **Load/BC/Elem.Props...** Откроется одноименная панель, на которой в разделе **Beam Display** щелкаем по клавише **1D:Line** и выбираем из открывшегося списка команду **3D:Full-Span+Offsets+Equiv.I.** В зависимости от того, какая кнопка инструментальной панели нажата, в графическом окне будет представлено то или иное трехмерное изображение балки (рис. 241).

O. Переходим к расчету упругой системы. Открываем приложение **Analysis**. Появляется одноименная панель, на которой в поле **Job Name** записываем имя выполняемой работы (операции) и щелкаем по клавише **Apply**, что приведет к запуску вычислительного блока MSC.Nastran. После окончания вычислений устанавливаем опцию **Action ► Access Results**, при этом вид панели изменится. Нажимаем клавишу **Apply**. Если в информационной строке появляется запись  End: Attach Result File , значит, конечно-элементная модель не противоречива, расчет выполнен и результаты расчета переданы для дальнейшей работы в систему **MSC.Patran**.

P. Анализируем результаты расчета. Щелкаем по кнопке . Появится одноименная панель, в окнах которой выделяем расчетный случай - **Default, A3: Static Subcase** и результат расчета, подлежащий анализу – **Displacements, Translational**. В опции **Quantity** выбираем **Y component** и нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится результат расчета перемещений оси балки (рис.242). При выборе результата расчета Bar Stresses, Bending и опции **Quantity: X component** в графическом окне появится изображение деформированной балки с картиной изополос напряжений σ_x (рис.243). Внизу рисунков 242 и 243 приведены табличные значения соответствующих параметров деформированной балки, полученные при активизации команд

**Action ► Create,
Object ► Cursor,
Method ► Scalar.**



Ввиду симметрии нагрузки опорные реакции равны **5000 Н**. Под этой нагрузкой осадка пружины



$$\delta = \frac{5000}{30000000} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$




MSC.Patran выдает в первом узле балки эту же величину (рис.242).

4.1.2. Моделирование пружин и упругих связей в системе SCAD

Алгоритм решения задачи

- A.** Создаём новый проект. В окна панели **Создание нового проекта** вводим: наименование проекта, название объекта; выбираем: тип схемы и единицы измерения и щелкаем по кнопке **OK**. Сохраняем новый проект в некотором файле.
- B.** В главном окне конечно-элементного пакета **SCAD** активизируем раздел **Расчетная схема**.
- C.** Активизируем раздел **Узлы и элементы**.
- D.** Щелкаем по кнопке  **Узлы**. Воспользовавшись кнопкой  **Ввод узлов** с помощью диалогового окна **Ввод узлов**, зададим узлы со следующими коор-

динатами: $(0,0,0)$, $(0,0,0.1)$ $(1,0,0)$ м. Для отображения на экране вводимых узлов необходимо активизировать фильтр  Узлы. На панели **Фильтры отображения** нажимаем кнопку  номера узлов.

- Е. Активируем кнопку  **Элементы** и кнопку  **Номера элементов** панели **Фильтры отображения**. Щелкаем левой клавишей мыши по кнопке  **Добавление стержней** и затем последовательно по узлам **1** и **2**. В результате этих операций узлы будут соединены прямыми линиями.

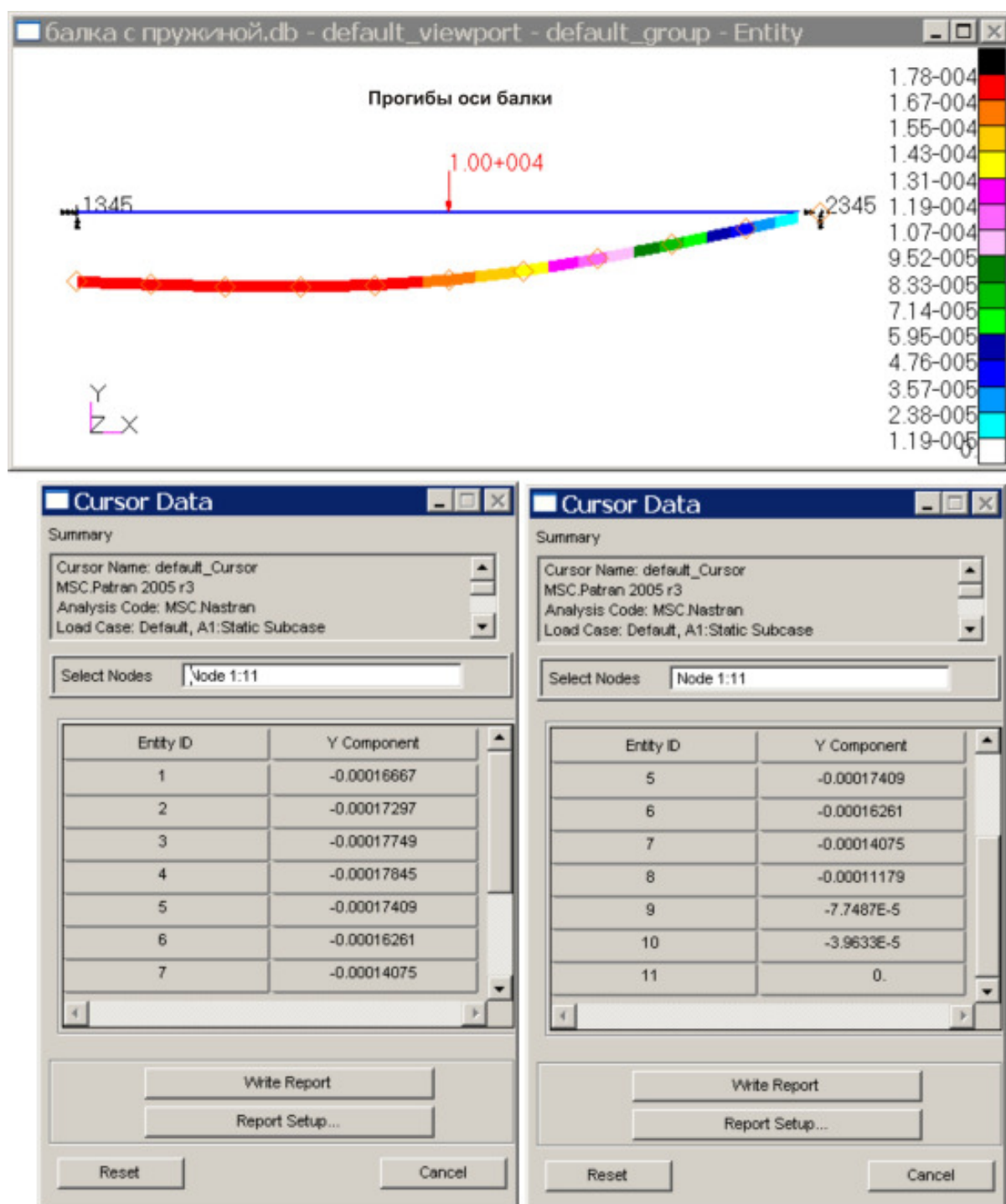


Рис.242

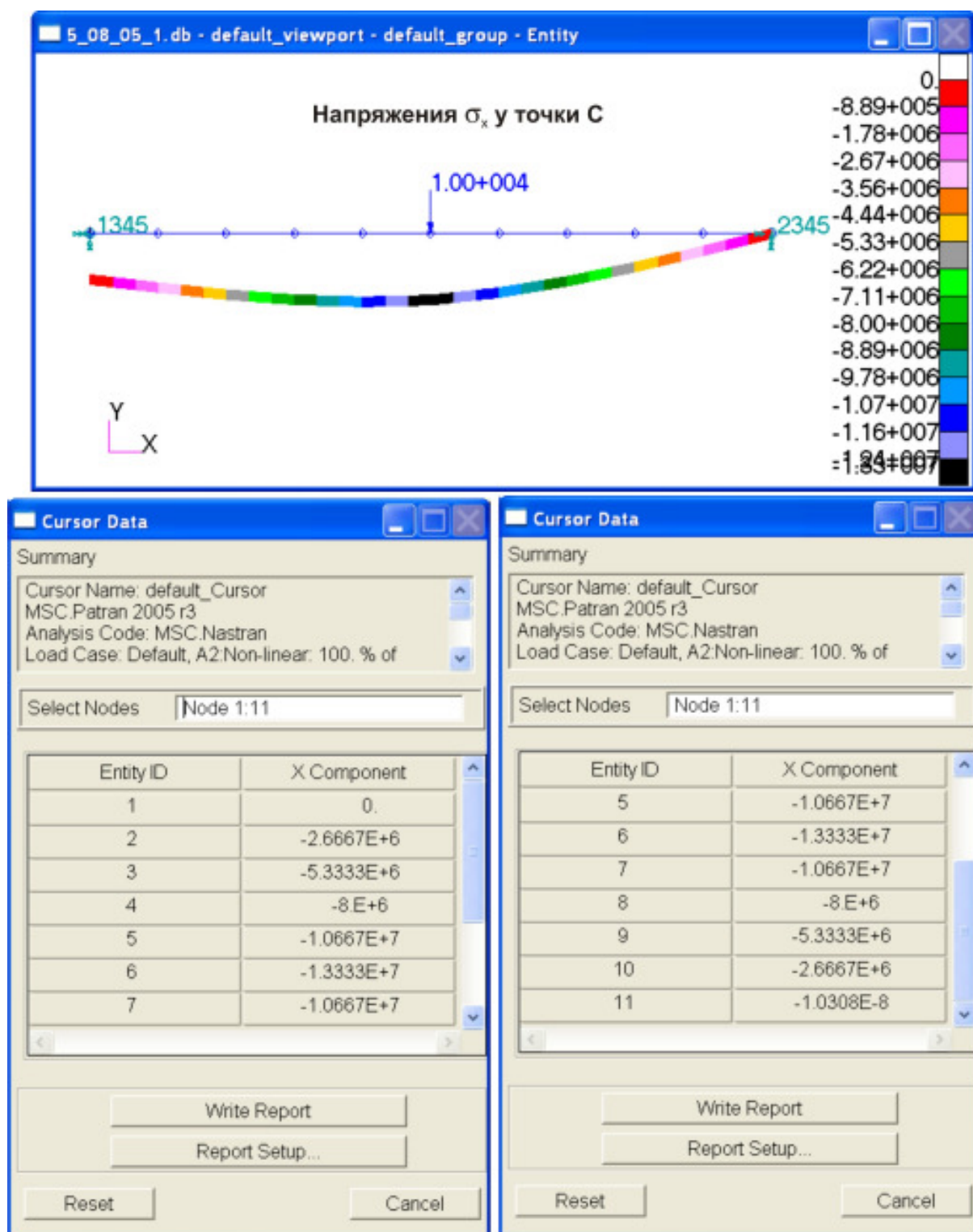



Рис.243

F. Разобьём стержень на **10** элементов.

G. В разделе **Назначения** задаём жесткость балки. Активируем кнопку  и в окне **Жесткости стержневых элементов** в разделе **Способ задания** выбираем **Численно-параметрическое описание** и нажимаем на клавишу **Параметрические сечения** (рис.244). Панель **Жесткости стержневых элементов** изменит вид. Задаём материал, тип поперечного сечения и его размеры. Нажимаем клавишу **ОК**.

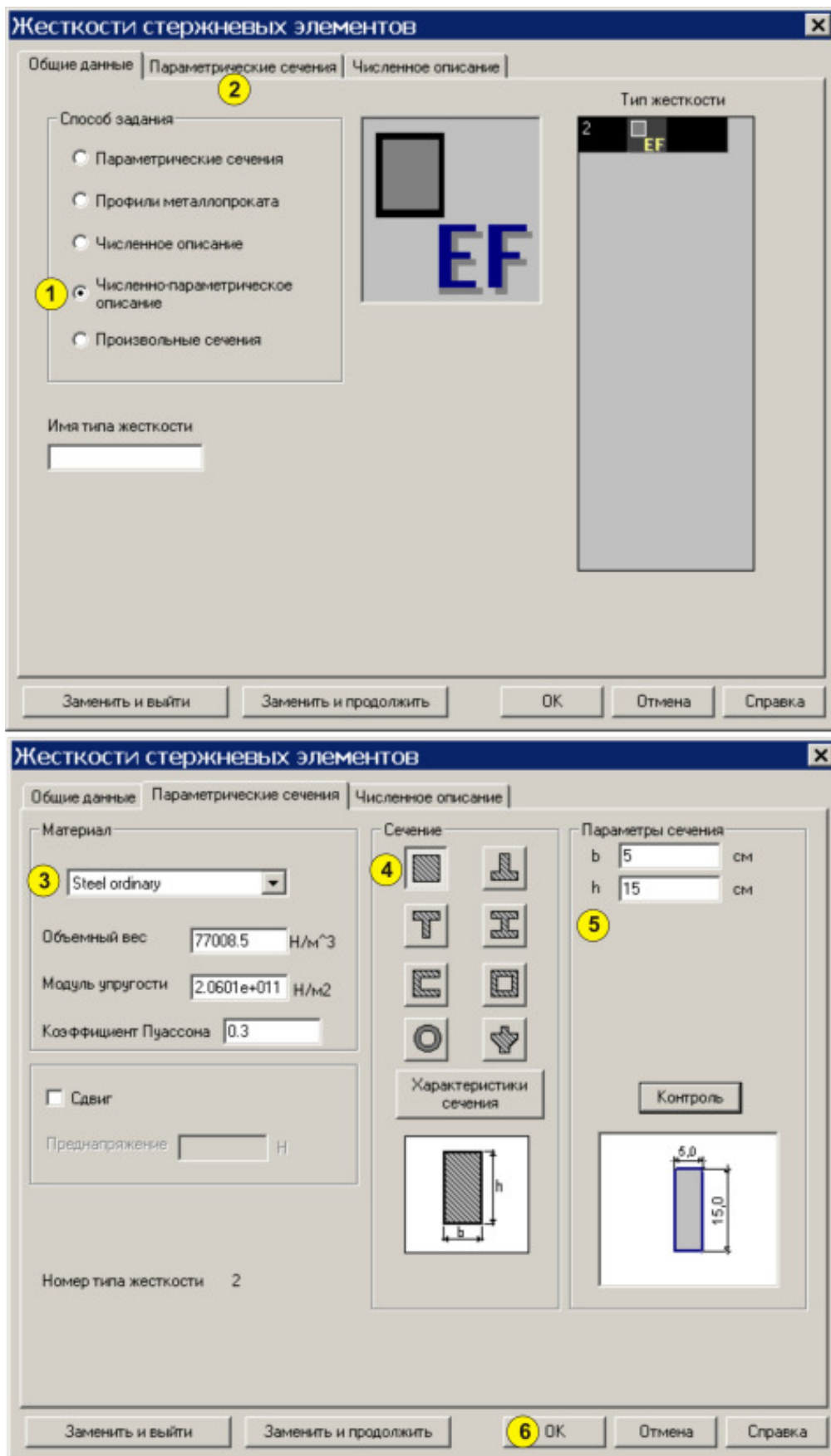


Рис.244




- Н. В рабочем окне выделяем элементы балки и щелкаем по кнопке  **ОК** главного меню.
- И. В разделе «Узлы и элементы» задаём жесткость упругой связи. Нажимаем кнопку  **Специальные элементы** и кнопку  **Ввод упругой связи**. Откроется панель **Упругие связи** (рис.245), в окне **Z** которой задаём жесткость пружины и нажимаем клавишу **ОК**.



Рис.245

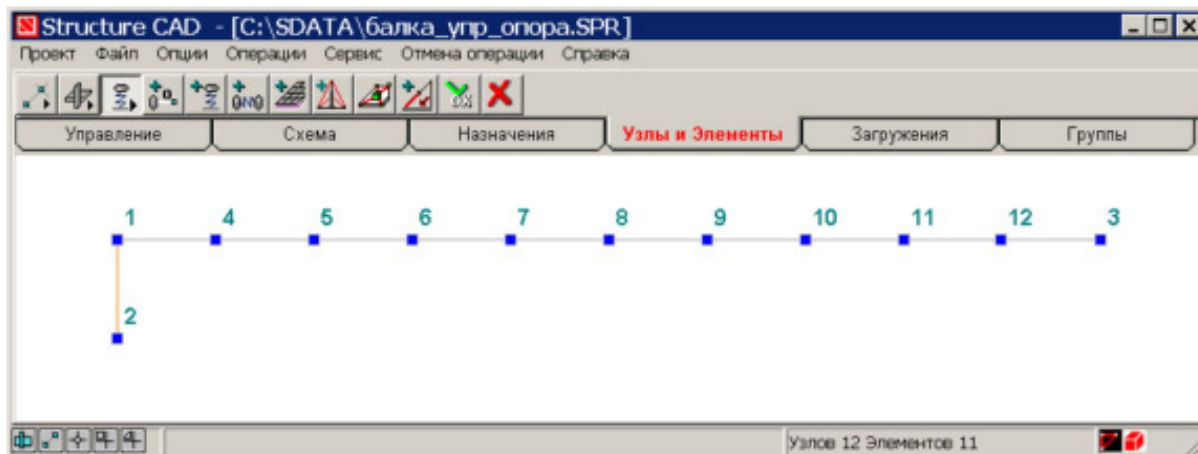







Рис.246


- Ж. В рабочем окне щелкаем левой клавишей мыши по узлам **1** и **2**. Подтверждаем наши действия, нажимая на клавишу  **ОК** главного меню. В результате в рабочем окне модель балки будет иметь вид, приведённый на рис. 246.
- К. Запретим все перемещения узла **2**, узлу **1** разрешим перемещаться в направлении оси **Z** и поворачиваться относительно оси **Y**, узлу **3** разрешим перемещаться в направлении оси **X** и поворачиваться относительно оси **Y**.
- Л. Нагрузку на балку задаем в разделе **Загружения**. Прикладываем к **8** узлу нагрузку **10000 Н**.
- М. После выполнения всех этих операций переходим в раздел **Управление** и нажимаем кнопку  **Выйти в экран управления проектом**. Открывается главное окно конечно-элементного пакета **SCAD**. В разделе расчетная схема щелкаем по знаку . Откроется список элементов расчетной схемы. Если после


значка  не стоит знак вопроса (за исключением **Условия примыкания**), то можно приступить к расчету.

Н. Щелкаем по кнопке **Линейный**, после выполнения расчета появится окно с информацией о результатах расчета. Нажимаем на клавишу **Выход**.

О. Результаты расчета можно посмотреть в разделе **Графический анализ**. Щел-

чок по значку  **Графический анализ** открывает рабочее окно **SCAD**, имеющее разделы: **Управление**, **Деформации**, **Эпюры усилий**, **Поля напряжений**, **Постпроцессоры** и **Группы**, которые позволяют проанализировать напряженное и деформированное состояние балки.

Р. Открываем раздел **Деформации**. Нажимаем кнопку  **Совместное изображение исходной и деформированной схемы** (рис.247, а), затем

кнопку  **Ввод значений перемещений в узлах** (рис.247,б). Как следует из рис.247, б, полученные значения перемещений совпадают с ранее найденными в системе **MSC.Patran**.

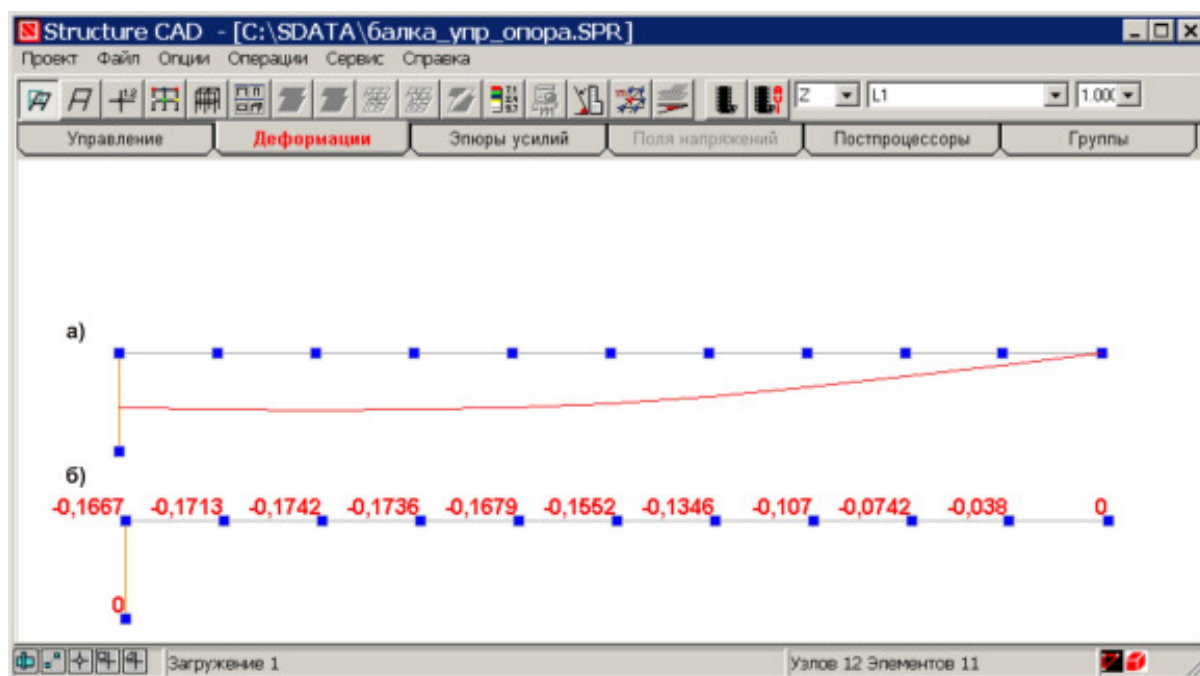


Рис.247

4.2 МОДЕЛИРОВАНИЕ МАСС В СИСТЕМЕ MSC.PATRAN-NASTRAN 2005

Пусть при равномерном спуске груза массой $M = 2 \text{ т}$ со скоростью $V = 5 \text{ м/с}$ произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока (рис.248). Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $c = 4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$.¹²

¹² Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 448 с.

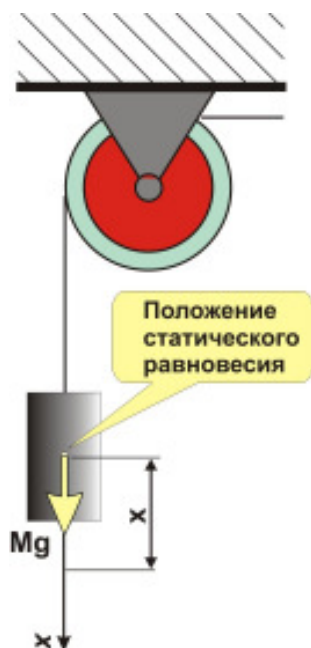


Рис.248

Из курса теоретической механики известно, что если начало координат помещено в положение статического равновесия, то перемещение груза описывается выражением¹³

$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{V_0}{k} \sin(kt),$$

где x_0 , V_0 - начальное перемещение и начальная скорость груза; $k = \sqrt{\frac{c}{M}} = 44.721 \text{ рад/с}$ - круговая частота (частота собственных колебаний $\nu = \frac{k}{2\pi} = 7.118 \text{ 1/с}$).

Так как в рассматриваемом случае $x_0 = 0$, то амплитуда перемещения груза $\frac{V_0}{k} = 0.112$. Натяжение троса, обусловленное колебаниями груза, составит $c \cdot \frac{V_0}{k}$. Полное натяжение троса

$$N = Mg + c \cdot \frac{V_0}{k} = 1.962 \cdot 10^4 + 4.472 \cdot 10^5 = 4.668 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

Создадим конечно-элементную модель упругой системы в **MSC.Patran**.

1. В приложении **Geometry** активизируем команды

Action ► Create ,
Object ► Point ,
Method ► XYZ

и создаем точку с координатами **[0 0 0]**, нажав на клавишу **Apply**.

2. Создаём в этой точке узел в приложении **Finite Elements**. Активизируем команды:

Action ► Create ,
Object ► Node ,
Method ► Edit.

Подводим указатель мыши к точке и щелкаем по ней левой клавишей. В окне **Node Location List** появится запись **Point 1**. Нажимать на клавишу **Apply** не надо, т.к. в окне **Auto Execute** установлен флажок.

3. Создаем свойства пружины и массы в приложении **Elements Properties**. Активизируем команды:

Action ► Create
Object ► 0D
Type ► Mass
Options ► Grounded

В окне **Property Set Name** задаем имя **Massa** и щелкаем по клавише **Input Properties**. В окнах появившейся одноименной панели задаём массу **2000 кг** и степень свободы **UY**, в направлении которой перемещается масса (рис.249).

¹³ Жилкин В.А. Динамика материальной точки. – Челябинский государственный агроинженерный университет.- Челябинск, 2002.- 331 с.

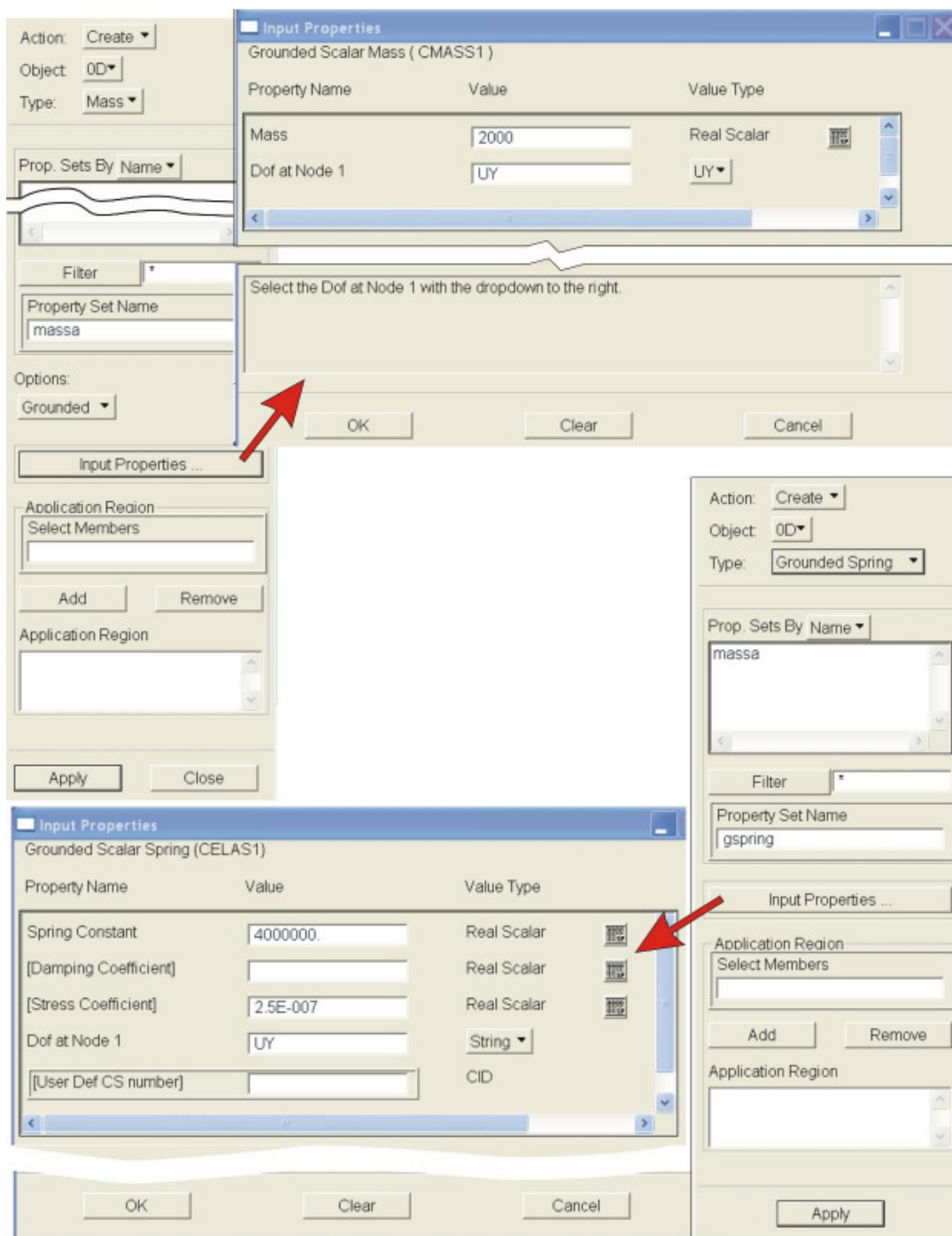


Рис.249

Щелкаем по клавише **OK** панели **Input Properties** и клавише **Apply** панели **Elements Properties**.

Скорректируем тип элемента:

Type ► Grounded Spring.

Это приведет к изменению вида панели **Input Properties** (рис.249). В окне **Property Set Name** задаем имя свойств пружины **gspring** и щелкаем по клавише **Input Properties**. В открывшейся панели в окне **Spring Constant** задаём жесткость пружины $4 \cdot 10^6$ Н/м, в окне **Stress Coefficient** – податливость пружины $2.5 \cdot 10^{-7}$, указываем степень свободы **UY** и щелкаем по клавишам: **OK** на панели **Input Properties** и **Apply** на панели **Elements Properties**.

4. Переходим к приложению **Loads\ Boundary Conditions**. Задаем имя геометрическому условию в окне **New Set Name – d** и щелкаем по клавише **Input**

Data. На появившейся панели задаем степени свободы узлу. Оставляем только одну степень свободы в направлении оси **y** и щелкаем по кнопке **OK**. На главной панели нажимаем клавишу **Select Application Region**. На открывшейся панели в области геометрического фильтра устанавливаем опцию **FEM**. В графическом окне подводим указатель мыши к точке и щелкаем по ней левой кнопкой. На панели **Select Application Region** в окне **Select Nodes** появится запись **Node 1**. Последовательно щелкаем по клавишам **Add** (запись **Node 1** переместится в окно **Application Region**), **OK** и на панели **Select Application Region** - **Apply**. В графическом окне у точки появится изображение уста-



новленных связей

5. Задаём инерционную нагрузку. Активизируем команды:

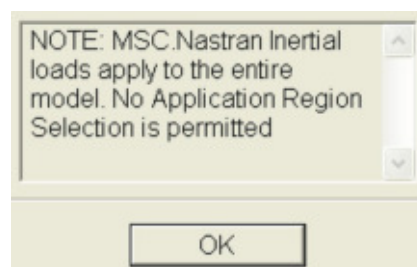
Action ► Create ,
Object ► Inertial Load,
Type ► Element Uniform .

В окне **New Set Name** задаем имя инерциальной нагрузке - **g** и щелкаем по клавише **Input Properties**. В окне **Trans Accel <A1 A2 A3>** (линейного ускорения) появившейся панели **Input Data** записываем **<0 -9.81 0>** (рис.250). Щелкаем по клавише **OK** панели **Input Data** и клавише **Apply** панели **Loads\Boundary Conditions**. В графическом окне у точки появится изображение ус-



тановленной инерциальной нагрузки

Если на панели **Loads\Boundary Conditions** щелкнуть по клавише **Select Application Region**, появится информация о том, что данная инерционная нагрузка применяется ко всей модели одновременно.



6. Открываем приложение **Finite Elements** и активизируем команды:

Action ► Create,
Object ► Node,
Method ► Edit,
Shape ► Point,
Topology ► Point.

Нажимаем на клавишу **Select Existing Prop...** Появится панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элемента **massa**, в графическом окне подводим указатель мыши к точке и щелкаем по ней левой клавишей. В окне **Node 1** появится запись **Node 1**. Нажимать на клавишу **Apply** не надо, если в окне **Auto Execute** установлен флажок.

Снова щелкаем по клавише **Select Existing Prop...** и на появившейся панели **Property Sets** выбираем свойства элемента **gspring**, подводим указатель мыши к точке и щелкаем по ней левой клавишей. В окне **Node 1** появится запись **Node 1**. В результате наших действий в точке будут установлены два элемента (рис.251).

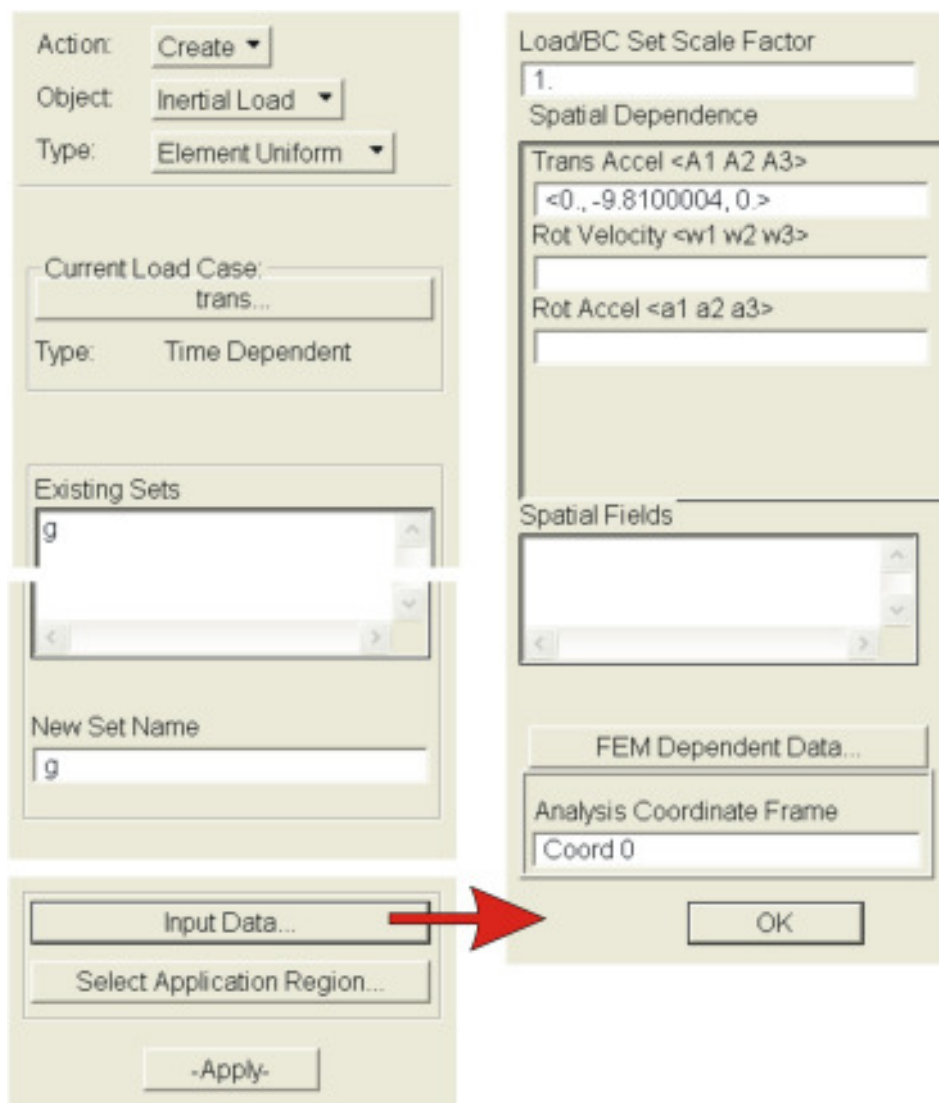


Рис.250

Show Element Attributes Information						
Element ID	Topology	Parent Geom	Elem Nodes	Loads/BCs	Matl Props	Elem Props
1	Point1	Unassociated	1	0	--	Massa
2	Point1	Unassociated	1	0	--	GSpring

Рис.251

- Открываем приложение **Analysis** и на одноименной панели в поле **Job Name** записываем имя выполняемой работы **26-08-05-oszillajtor**, щелкаем по клавише **Solution Type**. Откроется одноименная панель. Вначале рассчитаем частоту свободных колебаний упругой системы, поэтому из списка **Solution Type** выбираем **Normal Modes** и щелкаем по кнопке **OK** (рис.252). Панель **Solution Type** закрывается и открывается панель **Analysis**, на которой щелкаем по клавише **Apply**, что приведет к запуску вычислительного блока **MSC.Nastran**. После окончания вычислений устанавливаем опцию **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**.

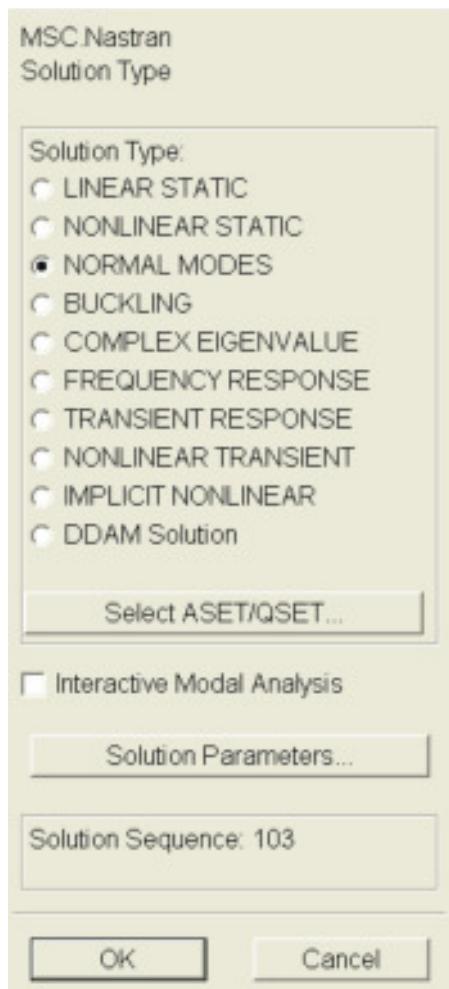


Рис.252

8. Анализируем результаты расчета. Щелкаем



по кнопке **Results**. Появится одноименная панель, в окне **Select Result Case** которой появятся результаты расчета: - **Default, A1: Mode 1 Freq.=7.11**, что совпадает с ранее проведенным расчетом.

9. Выполним статический расчет упругой системы. Возвращаемся в приложение **Analysis**. Устанавливаем тип расчета **Linear Static**. Щелкаем по клавише **Subcases** и на появившейся одноименной панели - по клавише **Output Requests**. Появится панель **Output Requests**, в окне **Select Result Type** которой выбираем **Element Forces** и щелкаем по кнопке **OK**. Эта панель закроется. На панели **Output Requests** в окне **Subcase Name** вводим имя расчетного случая – **static** и щелкаем по клавишам **Apply** и **Cancel**. Возвращаемся к панели **Analysis**. Щелкаем по клавише **Subcase Select** и на появившейся одноименной панели в окне **Subcase for Solution Sequence: 101** выбираем расчетный случай **static** и щелкаем по клавише **OK**. На панели **Analysis** в поле ввода **Job Name** задаём новое имя численному расчету упругой системы - **26_08_05_static** и щелкаем по клавише **Apply**, что приведет к запуску вы-

числительного блока **MSC.Nastran**. После окончания вычислений устанавливаем опцию **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**.

10. Анализируем результаты расчета. Открываем приложение **Results**. Появится одноименная панель. Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► Cursor ;
Method ► Scalar.

В окне **Select Result Case** приводятся результаты расчетов:

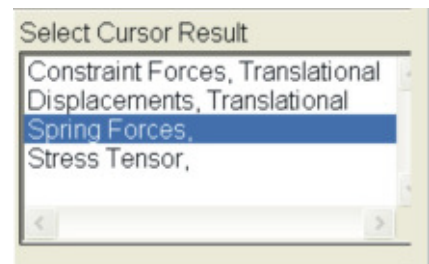
Default, A1: Mode 1 Freq = 7.11
 Default, A2: Static Subcase

. Выбираем - **Default, A2: Static Subcase**. В окне **Select Cursor Results** выбираем **Spring Forces**. В списке **Target Entity** выбираем **Elements** и щелкаем по клавише **Apply**. В графическом окне у точки появится

величина усилия в пружине **1.96+004**, что соответствует статическому нагружению пружины усилием **Mg**.

11. Выполним динамический расчет упругой системы. Снова возвращаемся к приложению **Loads\ Boundary Conditions**. Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► Initial Velocity;
Method ► Nodal.



В окне **New Set Name** задаем имя начальной скорости - **velocity** и щелкаем по клавише **Input Data** (рис.253). В окне **Trans Veloc <V1 V2 V3>** задаем вектор начальной скорости **<0 -5 0>** и щелкаем по клавише **OK**. На панели **Loads\ Boundary Conditions** нажимаем клавишу **Select Application Region**, в графическом окне щелкаем по точке, что приводит к появлению записи **Node 1** в окне **Select Nodes** панели **Select Application Region**. Последовательно нажимаем кнопки **Add**, **OK** и **Apply**. В графическом окне появится изо-



бражение начальной скорости материальной точки массой **2000 кг**.

Открываем приложение **Analysis**. В окне **Job Name** задаем новое имя расчету - **26_08_05_dinamica**. Щелкаем по клавише **Solution Type** и задаём тип расчета **Transient Response**. Из списка **Formulation** выбираем команду **Direct** и щелкаем по клавише **OK**. Нажимаем на клавишу **Subcases...**. На открывшейся одноименной панели щелкаем по клавише **Subcase Parameters...** Открывается одноименная панель, на которой нажимаем клавишу **Define Time Steps**, что приведет к открытию соответствующей панели, в окне ввода которой задаём число шагов и величину интервала по времени для одного шага (рис.254).

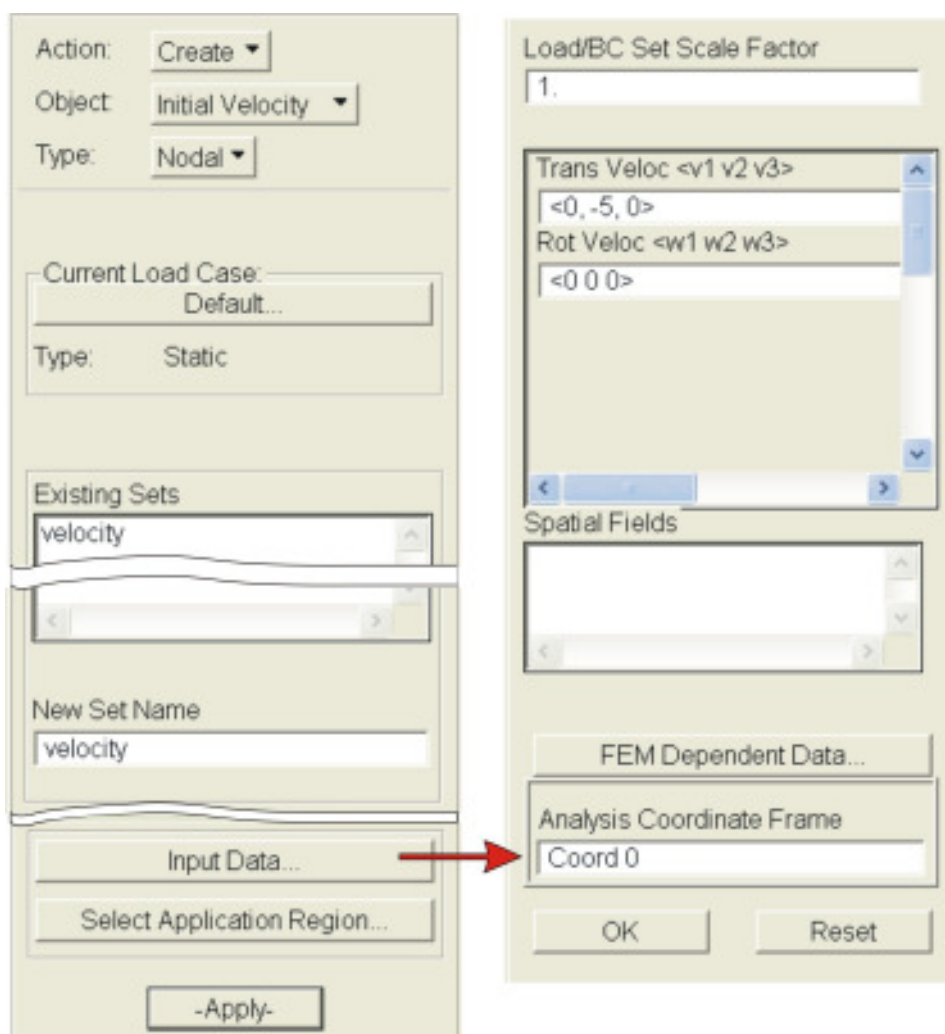


Рис.253

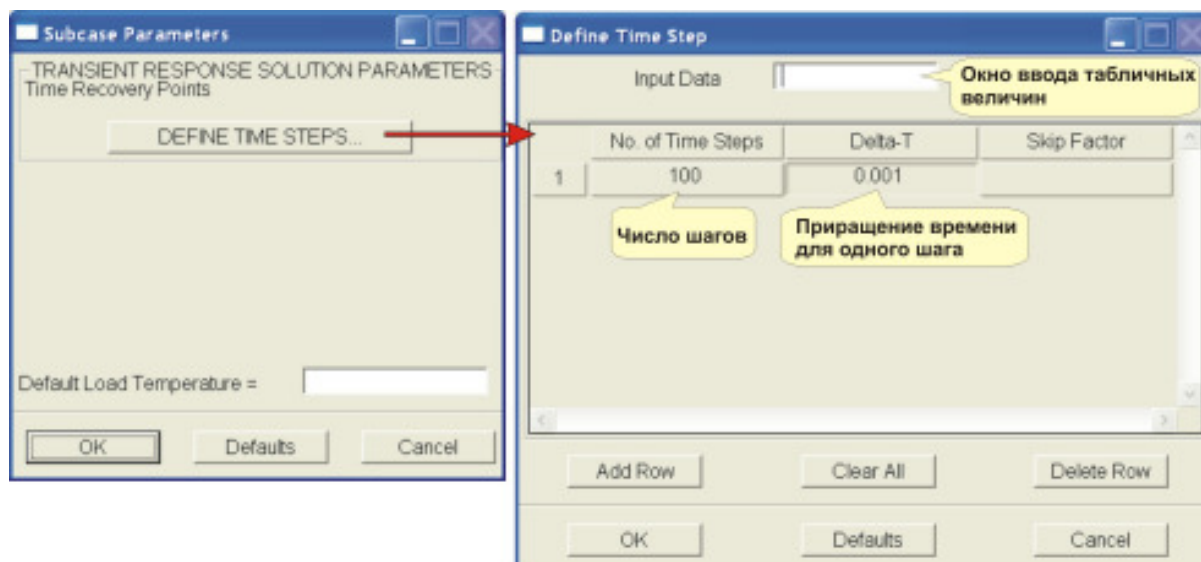


Рис.254

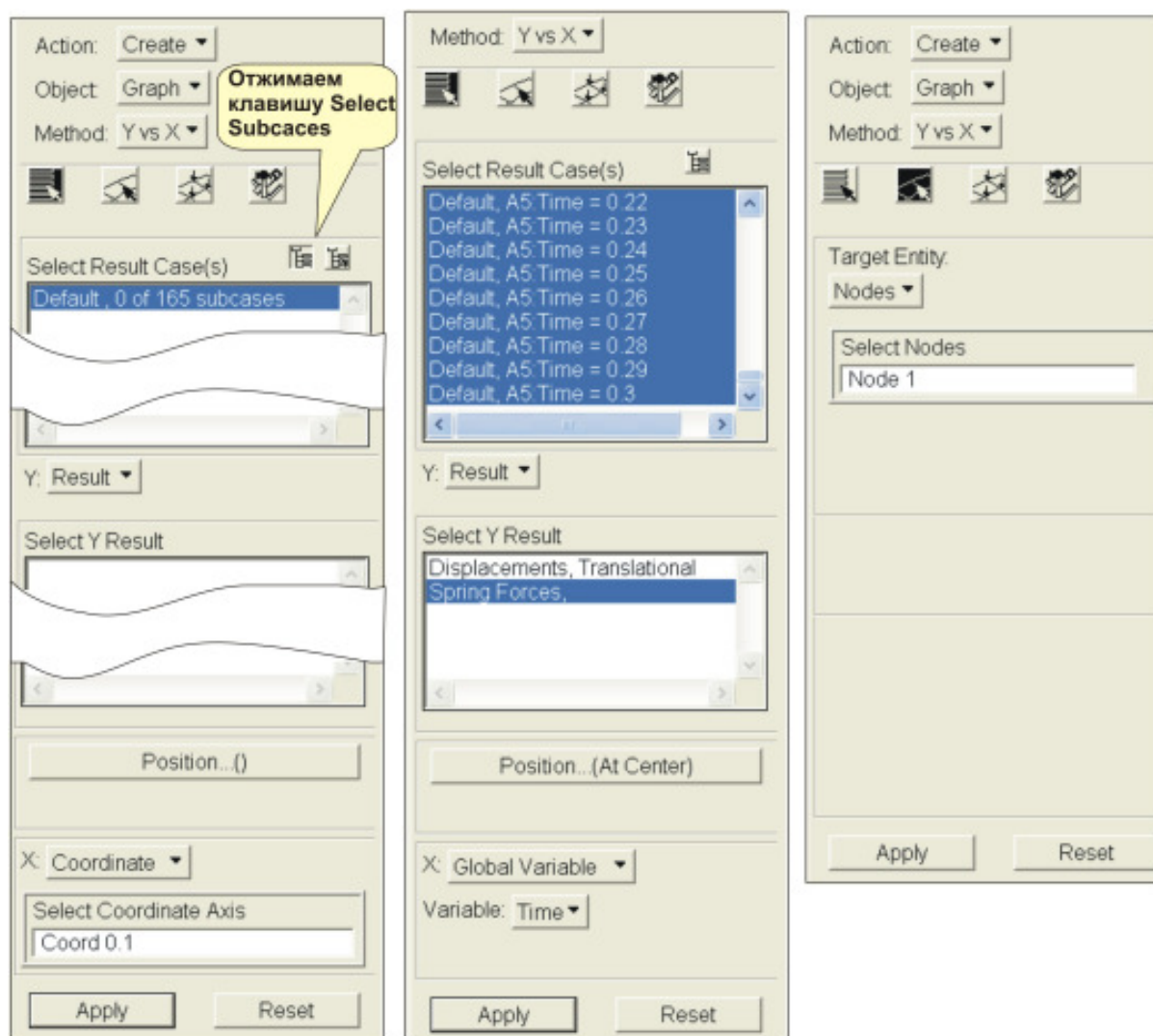


Рис.255

Задаём **100** шагов с интервалом **0.001** с. Последовательно щелкаем по двум клавишам **OK**. На панели **Subcases** в окне **Subcase Name** записываем имя случая нагружения - **sila_dinamica** и щелкаем по клавишам **Apply** и **Cancel**. На панели **Analysis** нажимаем клавишу **Subcase Select...** и на открыв-

шейся панели выбираем расчетный случай **сила_динамическая**. Щелкаем по клавишам **OK** на панели **Subcase Select** и **Apply** на панели **Analysis**. На панели **Analysis** в поле ввода **Job Name** задаём новое имя численному расчету упругой системы - **26_08_05_динамическая** и щелкаем по клавише **Apply**, что приведет к запуску вычислительного блока **MSC.Nastran**. После окончания вычислений устанавливаем опцию **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**.

Анализируем результаты расчета. Открываем приложение **Results**. Активизируем команды:

Action ► Create ;
Object ► Graph ;
Method ► Y vs X.

Отжимаем кнопку **Select Subcases** (рис.255), на панели останется только одна кнопка, а в окне **Select Result Subcase(s)** появятся случаи нагружения для фиксированных моментов времени. Выделим эти результаты.

В окне **Select Y Result** выделим **Spring Forces**, установим опции: по оси **Y - Results**, по оси **X – Global Variable, Variable ► Time**. Щелкнем по кнопке **Target Entities** и на открывшейся панели в окне **Select Nodes** введём номер узла, щелкнув по точке в графическом окне. Последовательно два раза нажимаем клавиши **Apply** и в демонстрационном окне появится график изменения внутренней силы в пружине в зависимости от времени (рис.256).

Для определения максимального усилия надо установить опции **Object ► Cursor, Target Entity ► Elements**, выделить расчетный случай и щелкнуть по клавише **Apply** и в графическом окне по точке, выделив элемент. Пролитав все расчетные случаи, можно найти максимум. Для приведенного примера это будет величина $4.19 \cdot 10^5$ Н, что достаточно близко к ранее полученному значению динамического усилия. Величина погрешности зависит от величины шага численного расчета.

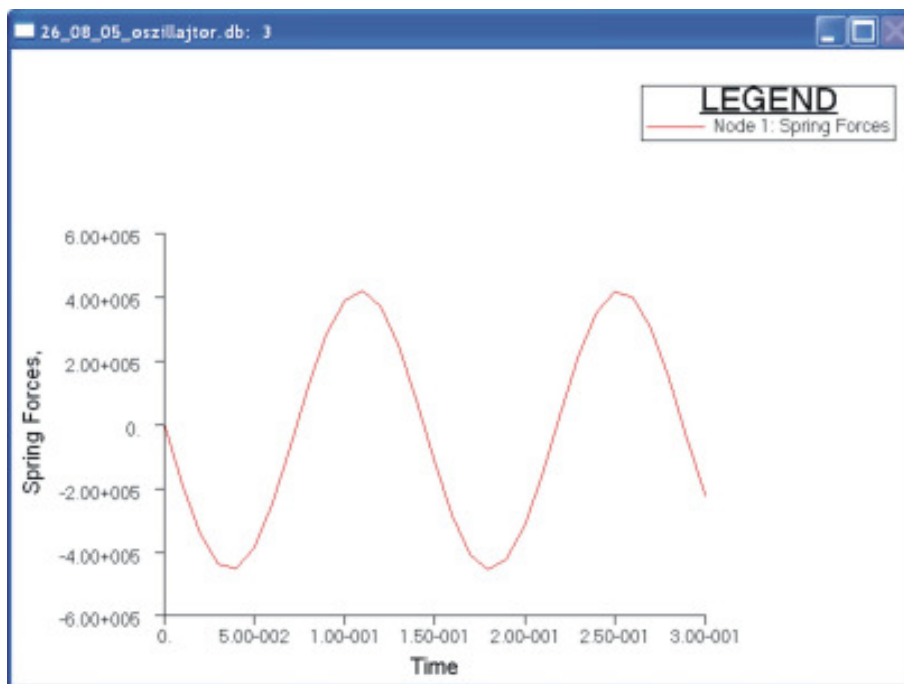


Рис.256

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЗЕМЛЕДЕЛЬЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Теория большинства почвообрабатывающих рабочих органов основывается на теории взаимодействия трехгранного клина с почвой. Для удобства расчетов и объяснения механизма протекающих процессов зачастую пространственный трехгранный клин условно расчлняют на три простых, так как деформация почвы, производимая трехгранным клином, подобна таковой при работе двухгранного клина. Поэтому закономерности, присущие работе двухгранного клина, могут быть, с соответствующими уточнениями, распространены на случай работы трехгранного клина.

Взаимодействие клина с почвой существенно зависит от механического состава и состояния почвы, от положения клина относительно поверхности обрабатываемого поля, от формы и параметров клиновых рабочих органов.

Исследования показывают, что на тяговое сопротивление лаповых рабочих органов влияет угол α установки клина к горизонту. Тяговое сопротивление плоских клиньев, работающих на глубине до 12 см, имеет при скоростях 6...9 км/ч минимум при угле α от 20 до 25°. На энергетический оптимум влияют рабочая скорость, глубина хода и ширина клина. С повышением скорости угол α , обеспечивающий минимум тягового сопротивления, уменьшается.

Вопрос о механизме разрушения пласта под воздействием клиновидных рабочих органов почвообрабатывающих машин обсуждается, по меньшей мере, 100 лет¹⁴. Однако до сих пор он остается нерешенным, так как в настоящее время нет даже приближенной математической модели почв, позволяющей описывать результаты многочисленных экспериментов.

Численные методы решения задач контактного взаимодействия клина с почвой позволяют с минимальными финансовыми затратами исследовать различные математические модели этого взаимодействия и выбрать наиболее подходящую модель для описания экспериментальных результатов, полученных в поле.

Далее рассмотрим чисто учебные задачи, которые ни в коей мере не соответствуют реальному взаимодействию клина с почвой, но позволяют проиллюстрировать последовательность операций при создании конечно-элементной модели и назначении граничных условий.

При более корректном решении подобных задач их следует рассматривать как нелинейные упруго-пластические задачи, а для реализации контактного взаимодействия двух тел использовать специальные контактные элементы. Мы этого делать пока не будем, так как не знаем теоретических основ решения таких задач.

Рассмотрим процедуры создания конечно-элементных моделей взаимодействия плоского и пространственного клина с упругой средой: $E = 37,5$ МПа и $\mu = 0,35$ (угол трения $\varphi = 19,29^\circ$), предполагая, что клину задано только горизонтальное перемещение u см. В этом случае, при принятой модели взаимодействия клина и почвы, изложенной в учебниках по сельскохозяйственным машинам¹⁵, перемещение точек почвы, контактирующих с клином, составят: в горизонтальном направлении – $0,668 \cdot u$ см, в вертикальном направлении – $0,58 \cdot u$ см.

¹⁴ Акад. В. П. Горячкин. Собр. соч. тт. III, IV, VI. Сельхозгиз, 1940; В. А. Желиговский. Основы теории технологического процесса вспашки. Доклады ВАСХНИЛ, в. II, 1947; Г. Н. Синееков. Экспериментальное определение сопротивления рабочих органов плугов и культиваторов. ВИСХОМ, сб. н.-и. работ № 4. Машгиз, 1949, с.180-234; А. Н. Зеленин. Физические основы теории резания грунтов, 1950; Т. М. Гологурский. Технологические процессы в почве при ее обработке. Петроград, 1917.

¹⁵ Акад. В. А. Желиговский. Элементы теории почвообрабатывающих машин и механической технологии сельскохозяйственных материалов. Тбилиси, 1960. – 146 с.

5.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОГО ДВУХГРАННОГО КЛИНА С УПРУГОЙ СРЕДОЙ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Так как плоская деформация отличается от плоского напряженного состояния только упругими характеристиками, то исследуем плоское напряженное состояние пластины толщиной 5 см под воздействием поступательного перемещения в направлении оси x двухгранного клина с углом при вершине $60,255^\circ$. Предположим, что клин, двигаясь на глубине 21 см , переместился на 1 см в направлении оси x . В соответствии с принципом Сен-Венана размеры пластины выберем так, чтобы границы области не влияли на напряженное состояние в зоне деформирования материала пластины. Расчетная схема пластины приведена на *рис.257*, на ней указаны области пластины $1, 2, 3, 4$, используемые в дальнейшем для создания конечно-элементной сетки. Размеры пластины заданы в сантиметрах.

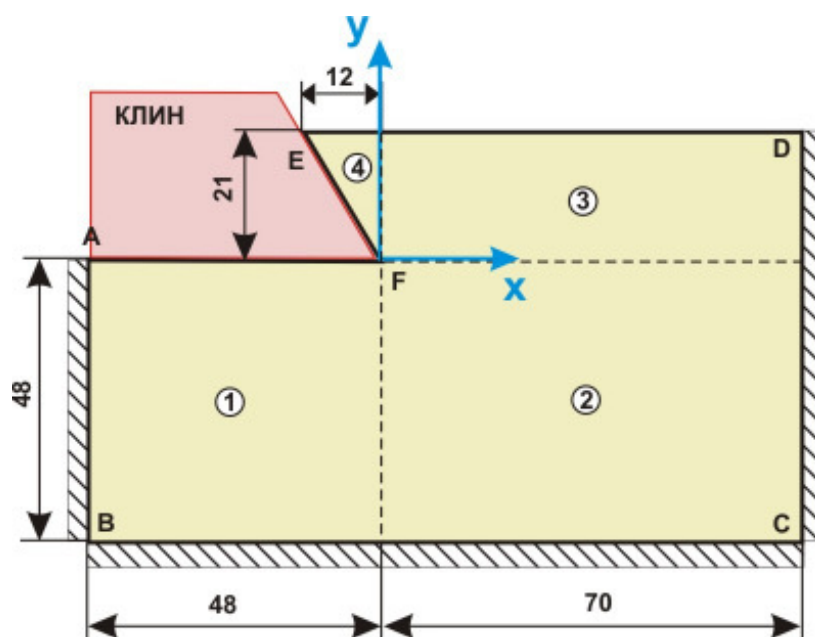



Рис.257

5.1.1. Исследование взаимодействия двухгранного клина с «почвой» в программном комплексе MSC.Patran-Nastran

- A. Загружаем программный комплекс **MSC.Patran-Nastran**.
- B. Создаём новую базу данных.
- C. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.
- D. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:
 Action► Create
 Object► Point
 Method► XYZ.
- E. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты угловых точек пластины: $[0\ 0\ 0]$, $[0\ 0.21\ 0]$, $[-0.12\ 0.21\ 0]$, $[0.7\ 0.21\ 0]$, $[0.7\ 0\ 0]$, $[0.7\ -0.48\ 0]$, $[0\ -0.48\ 0]$, $[-0.48\ -0.48\ 0]$, $[-0.48\ 0\ 0]$. Для контроля положения введенных точек активизируем кнопку  «Положение точек».

- F. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**.
- G. Соединяем точки линиями, последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам.
- H. На панели **Geometry** в разделе **Object** активизируем опцию **Surface**, в разделе **Method** активизируем опцию **Edge**. Панель **Geometry** изменит вид, на ней для областей пластины 1, 2, 3 выбираем опцию 4 **Edge**, для области 4 - опцию 3 **Edge**.
- I. В графическом окне щелкаем левой клавишей мыши по кривым, что приводит к последовательному заполнению окон **Surface Edge n List**. После нажатия на клавишу **Apply** будет создана пластина. На *рис.258* приведены номера узлов, кривых и пластины.

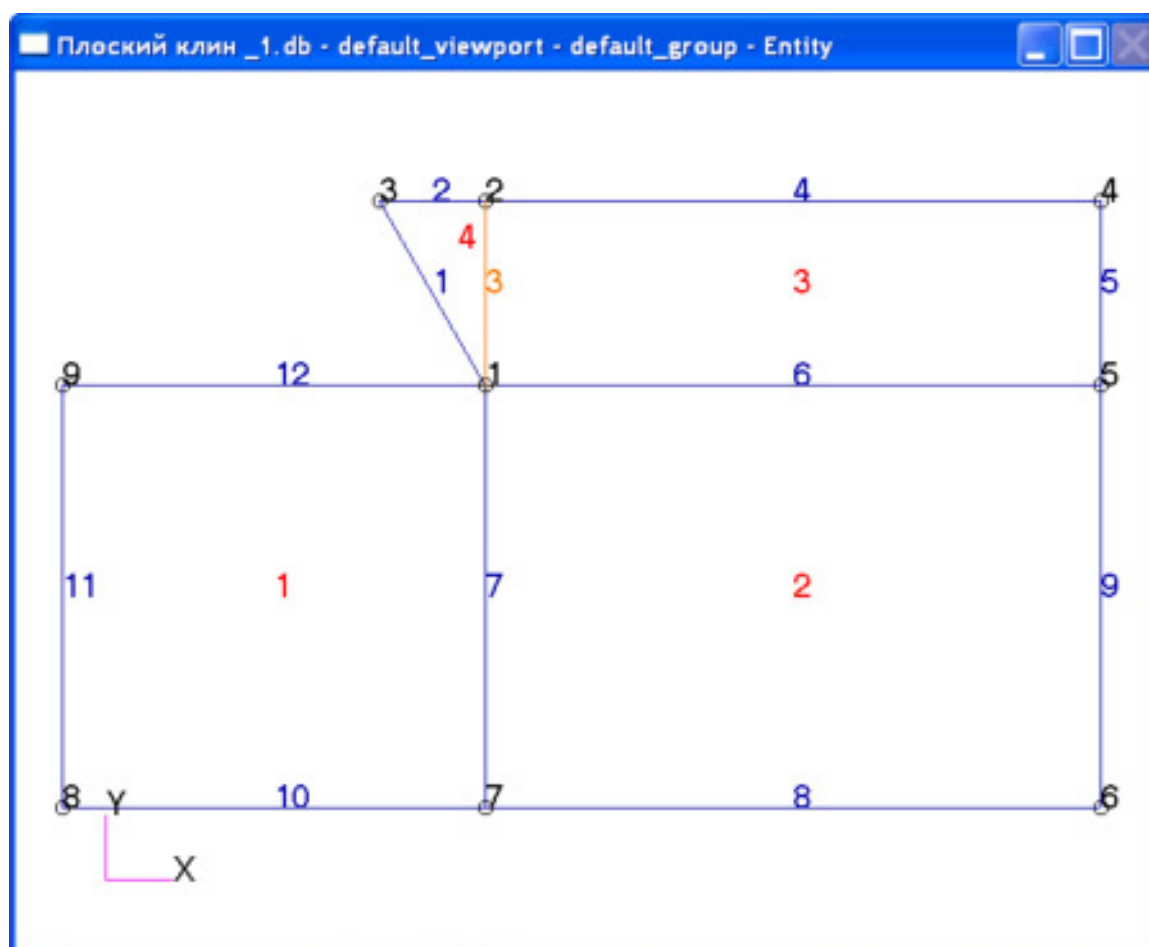


Рис.258

- J. Открываем форму приложения **Materials** и задаём имя материала – **grunt** и его физико-механические характеристики: **Elastic Modulus** = $37,5e6$, **Poisson Ratio** = 0.35 . Щелкаем по кнопке **OK** на панели **Input Options** и по кнопке **Apply** на панели **Materials**.
- K. Открываем форму приложения **Properties**. На появившейся панели **Element Properties** выбираем: объекты **2D**, тип элементов – **Shell**. В окне **Property Set Name** задаём имя **massiv** и щелкаем левой клавишей мыши по кнопке **Input Properties**. На появившейся одноименной панели задаём имя материала: щёлкаем по кнопке , появляется панель выбора материала **Select Material**, в окне которой указан заданный нами материал **grunt**. Щелчок левой клавишей мыши по имени материала приводит к появлению записи: **m: grunt** в окне

- «**Material Name**» панели **Input Properties**. В поле **Thickness** задаем толщину пластины **5 см** и нажимаем последовательно на клавиши **OK** и **Apply**.
- L.** Для создания конечных элементов открываем приложение **Elements**.
- M.** Используем команду **Object►Mesh Seed** для предварительной разметки конечно-элементной сетки на геометрической модели пластины. В поле **Number** задаем число элементов вдоль границ пластины, соответствующее их длинам в сантиметрах.
- N.** Переходим к созданию сетки. Активируем команду **Object►Mesh**.
- O.** Нажимаем клавишу **Select Existing Prop....** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элементов – **massiv**. Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**.
- P.** В графическом окне устанавливаем курсор мыши на пластину и нажимаем её левую клавишу. В окне **Surface List** появится запись **Surface 1** (если в окне **Automatic Calculation** установлен «флажок», то нажимать на клавишу **Apply** не надо). Выполняем команду **Action ► Equivalence**. Если всё сделано правильно, в графическом окне появится изображение конечно-элементной сетки (рис.259).

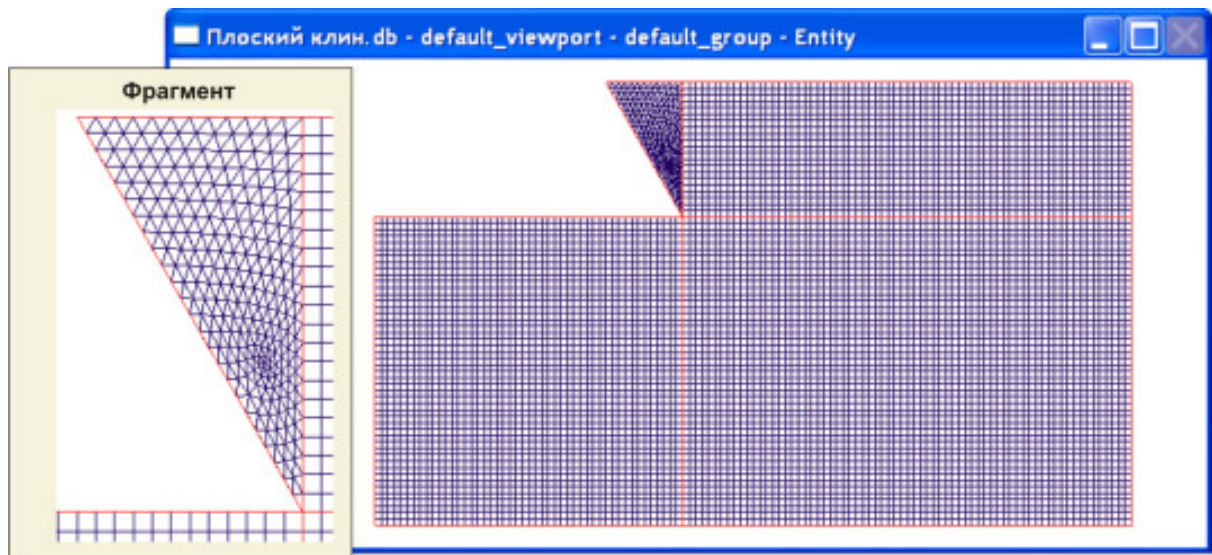


Рис.259

- Q.** Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активируем команды:
- Action►Create**
Object►Displacement
Type►Nodal
- и в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём граничные условия: запрещаем поступательное перемещение **w** и два вращательных перемещения относительно осей **x** и **y**. Щелкаем по кнопке **OK**. Затем активируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. В графическом окне выделяем все узлы. Затем щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, а на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**. Вводим вторую кинематическую связь **d1** для жесткого защемления торцов пластины. Вдоль границы **EF** задаем всем узлам перемещения **<0.00668 0.0058 0>**.

- R.** Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Для расчета пластины выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. Для того чтобы изменить вычисляемые решателем **Nastran** параметры, нажимаем клавиши **Subcase** (подблока), **Output Request** (запрос на вывод), открывается панель **Output Request**. Для того чтобы вывести информацию об усилиях в отсеченной части пластины щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команду **Element Force, Applied Loads, Grid Point Force Balance**. Нажимаем клавишу **OK**. В окне **Subcase Name** панели **Subcase** задаём имя «**s1**»; устанавливаем указатель мыши на клавише **Apply** и щелкаем левой клавишей мыши.
- S.** Нажимаем клавишу **Subcase Select** на панели **Analysis**. Откроется одноименная панель, на которой выбираем подблок «**s1**» и нажимаем клавишу **OK** и клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.
- T.** После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, то в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.
- U.** Определяем информацию о напряженно-деформированном состоянии пластины.

Отображение деформированного состояния пластины

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► Create;

Object ► Quick Plot;

вариант расчета – *Default, A1: Static Subcase;*

тип результата: *Displacements, Translational;*

величину: *Magnitude*, а затем последовательно *U* и *V*.

На *рис. 260* и *261* показаны изополя модуля вектора перемещения и перемещения в направлении осей *x* и *y* соответственно.

Отображение напряженного состояния пластины

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► Create;

Object ► Quick Plot;

вариант расчета – *Default A1: Static Subcase;*

тип результата: *Stress Tensor;*

количество (компонента тензора напряжений σ_x): *X*.

Нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение изополей поля напряжения σ_x при разбивке диапазона изменения этих напряжений на 25 уровней. Картина изополей поля напряжений σ_x приведена на *рис.262*. Аналогичным образом выводим изополя напряжений σ_y (*рис.262*), τ_{max} (*рис.262*), σ_1 и σ_3 (*рис.263*).

Из приведённых картин полос следует, что вдоль границы **AF** пластины после прохода клина будут наблюдаться углубления, вызванные разрушением материала

пластины из-за больших растягивающих напряжений σ_x и σ_y . В зоне острия клина наблюдаются значительные сжимающие напряжения, что приведет к смятию материала пластины и образованию в этой зоне ядра с механическими характеристиками отличными от исходных механических характеристик материала пластины. Возможное разрушение пластины произойдет вдоль направления, составляющего с осью x угол 45° .

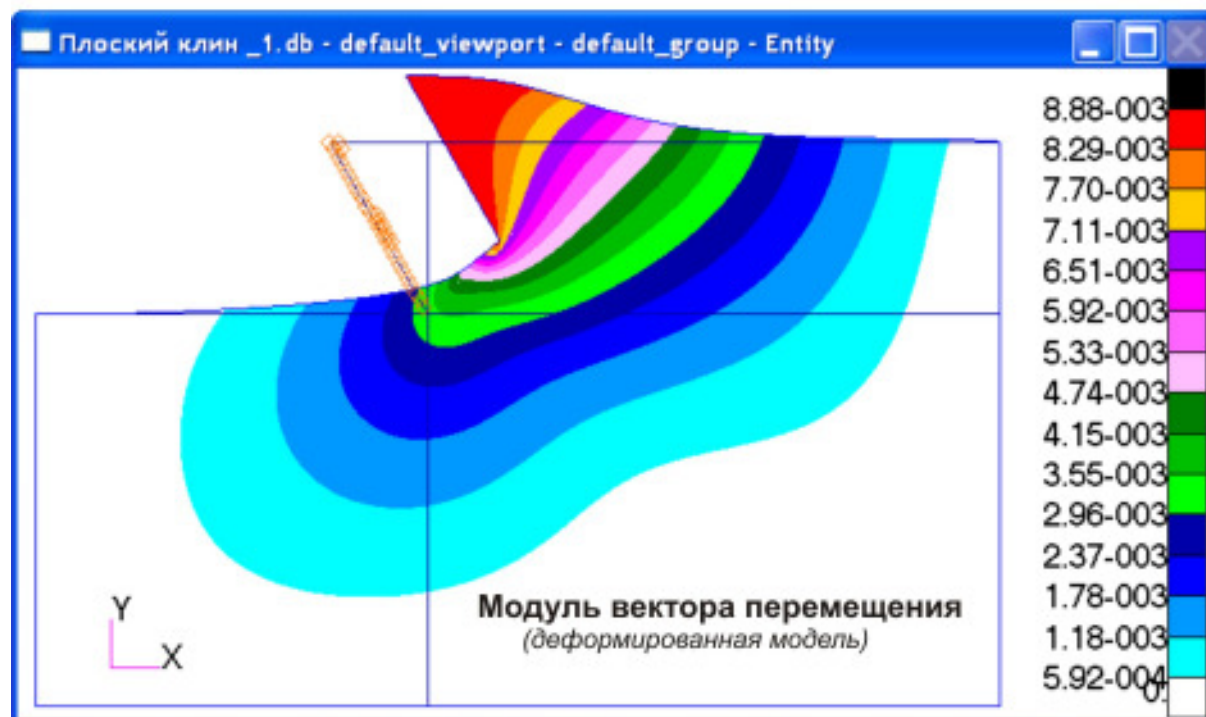
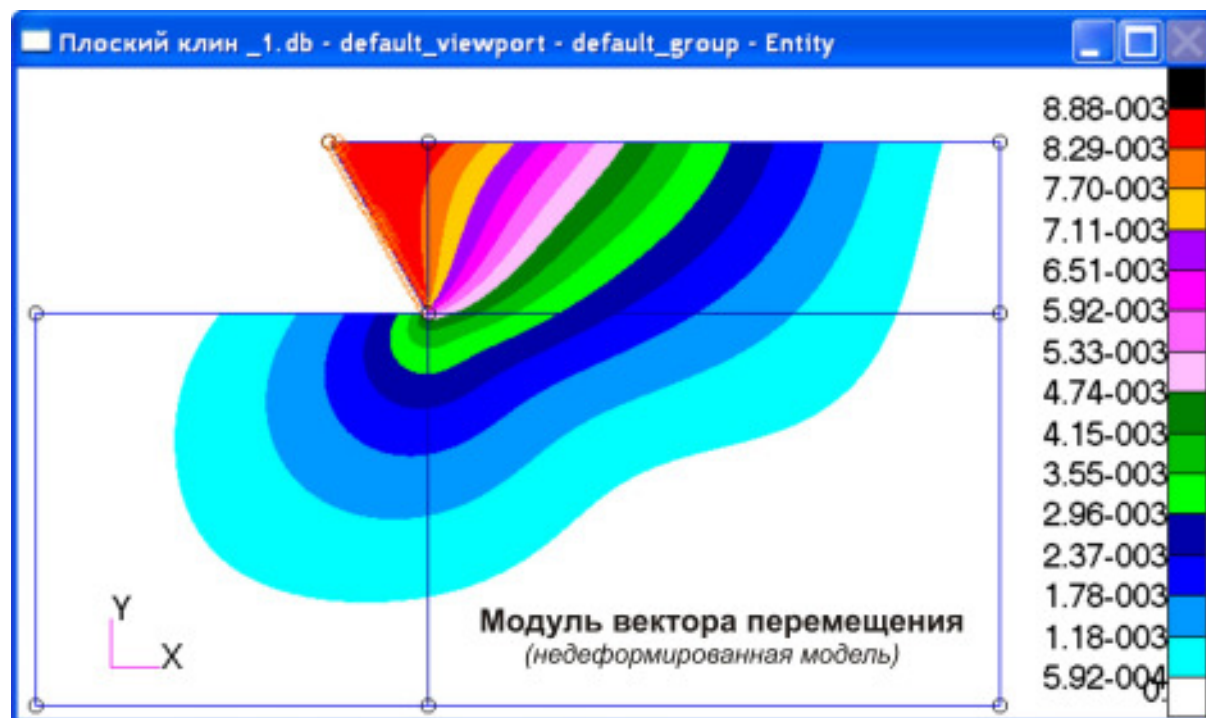


Рис.260

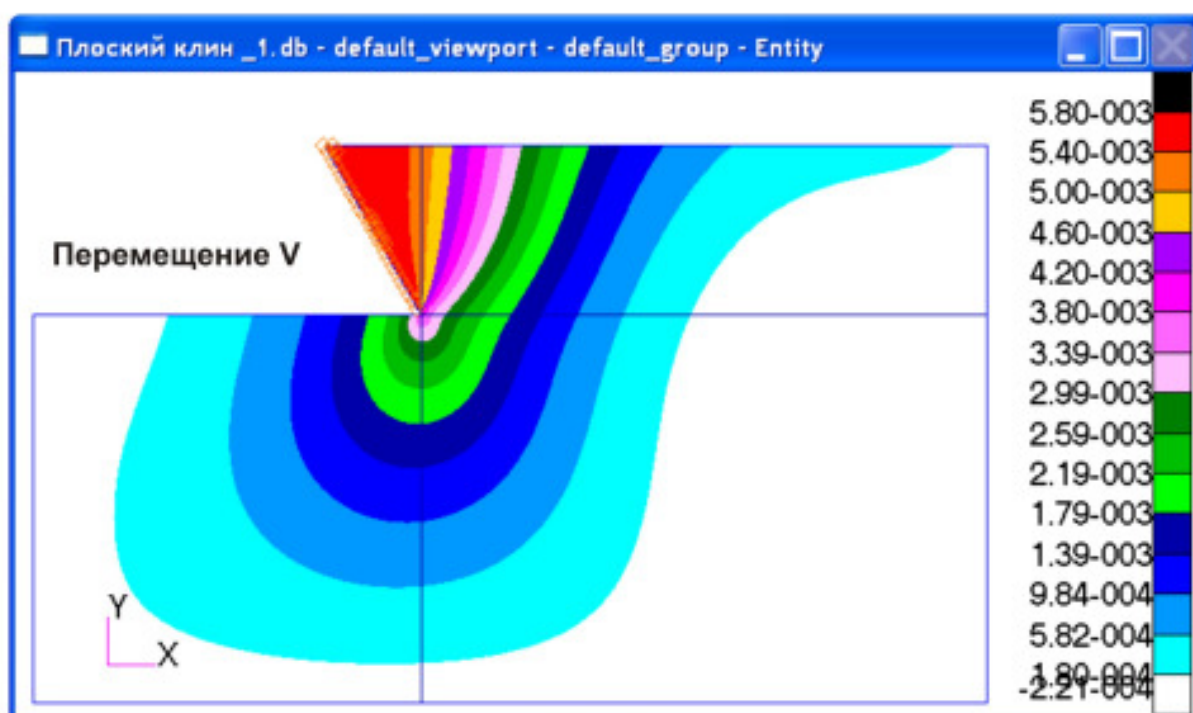
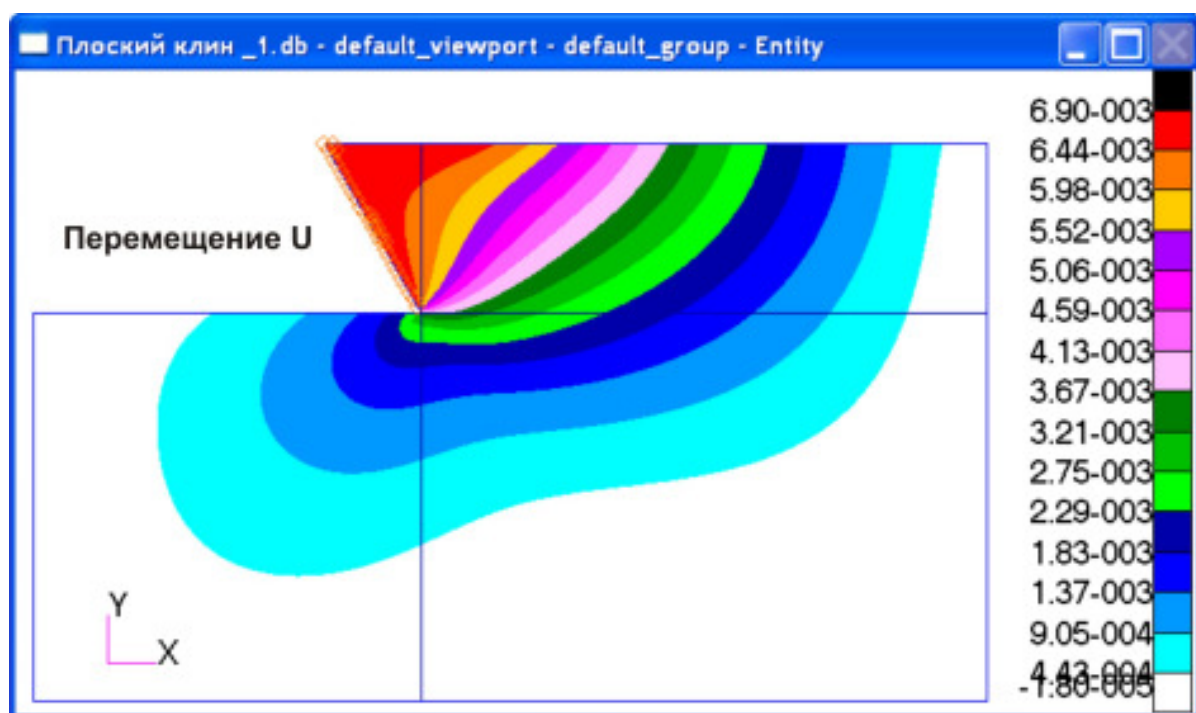


Рис.261

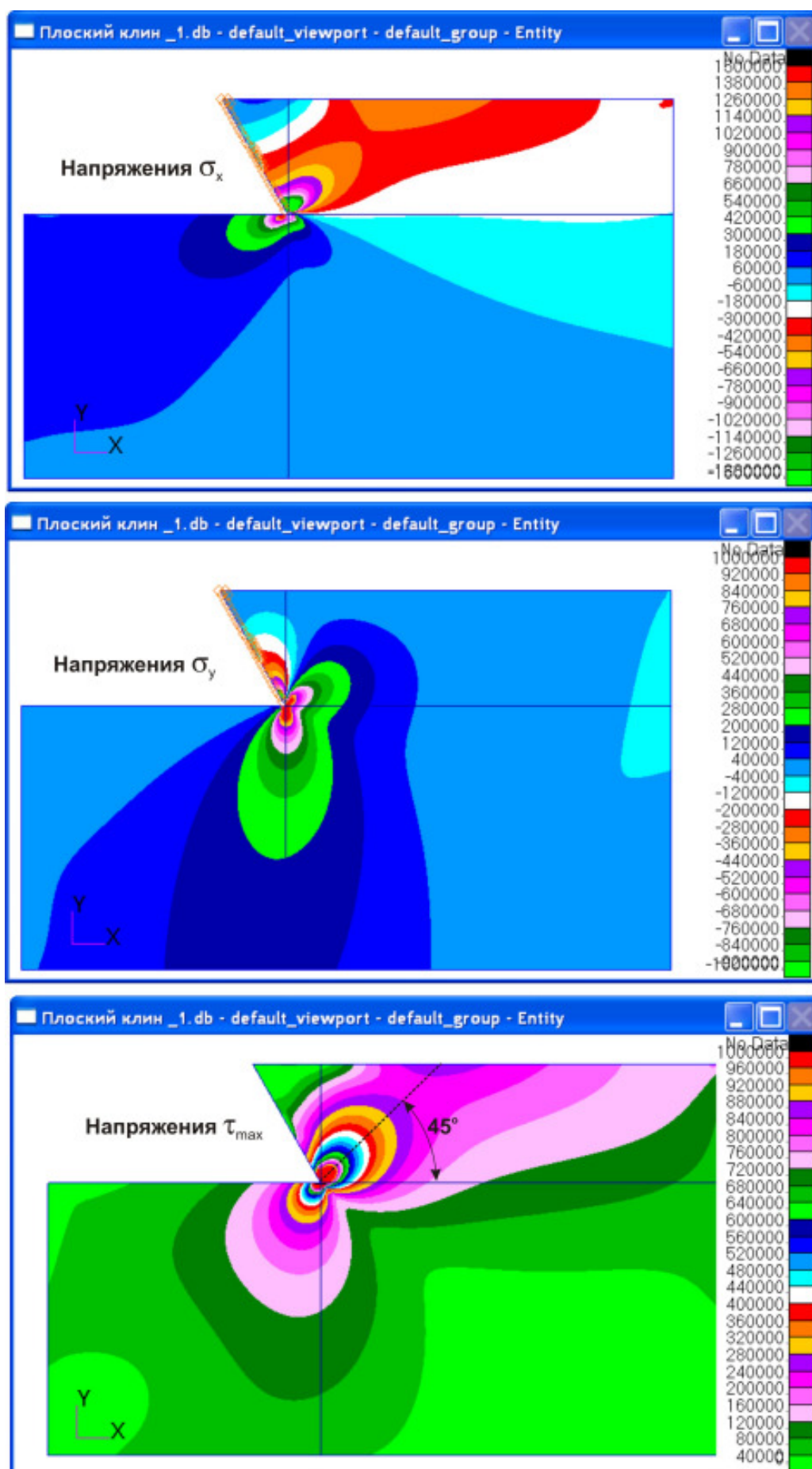


Рис.262

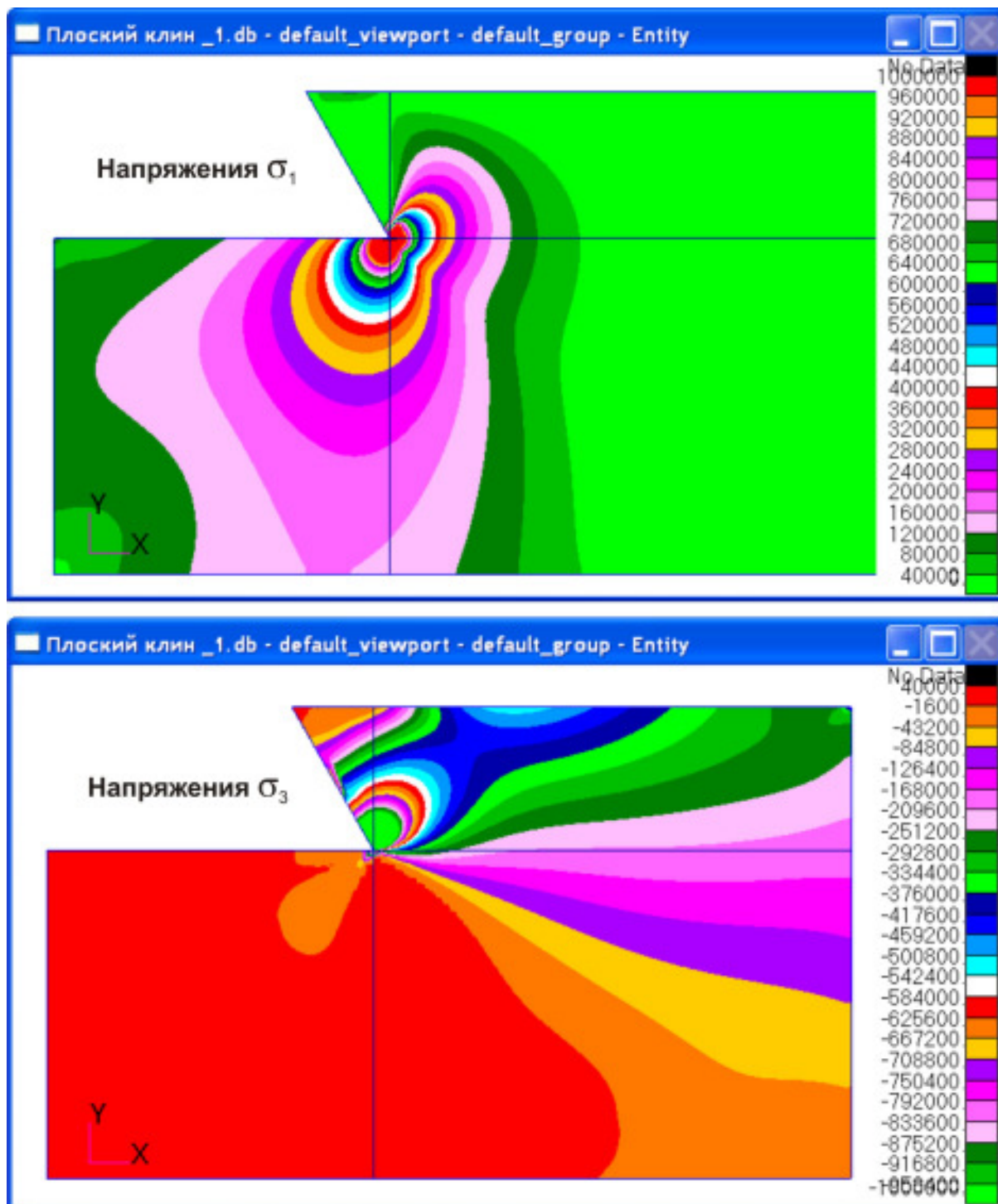



Рис.263

Рассмотрим равновесие отсеченной четвертой области пластины. При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;


Object ► *Freebody*;

Method ► *Loads*.

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.1)*;

тип результата: *Freebody Loads*.

Активируем кнопку  **Target Entities**. Вид панели **Results** изменится.

Щелкаем по кнопке  и затем, при нажатой левой клавише мыши, в графическом окне выделяем четвертую область пластины. Нажимаем клавишу **Apply**. В результате этих действий в графическом окне к выделенной области будут приложены все активные силы и реакции связей (рис.264). Из рисунка следует, что в верхней части клина действуют растягивающие усилия, чего быть не должно, так как в действительности связи между клином и «почвой» односторонние. Мы же при создании модели все связи приняли двухсторонними. Поэтому появление растягивающих усилий является следствием того, что в этой зоне «почва» отошла от поверхности клина.

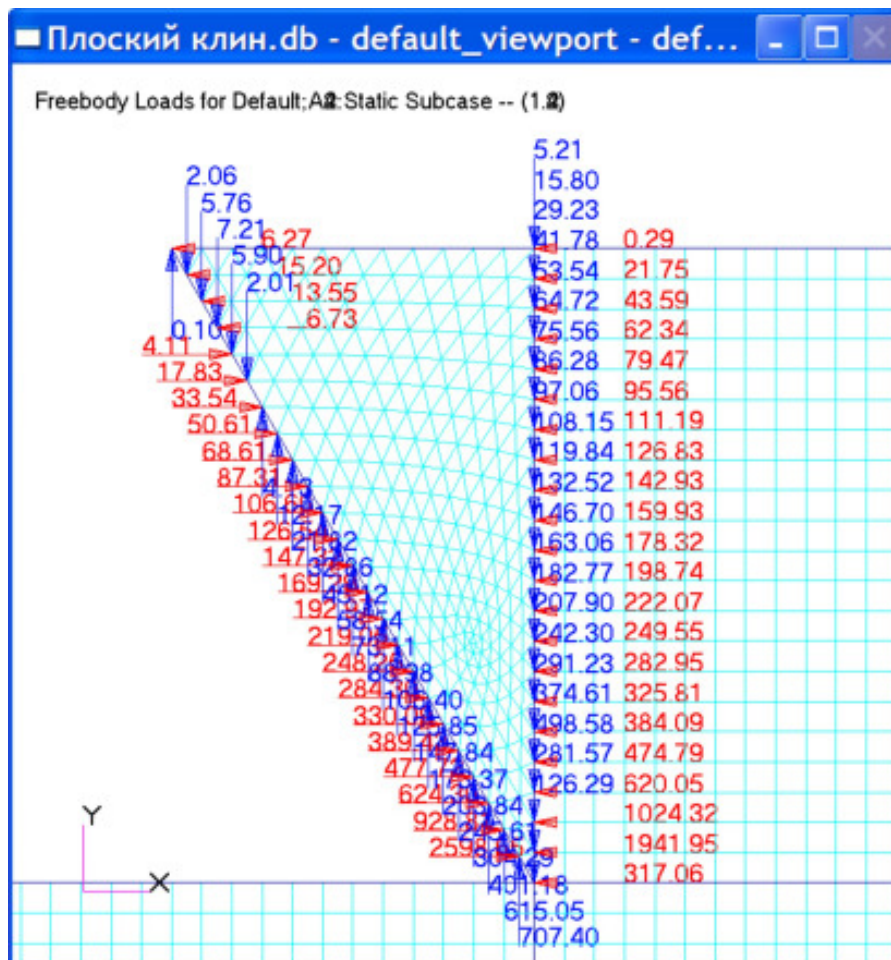



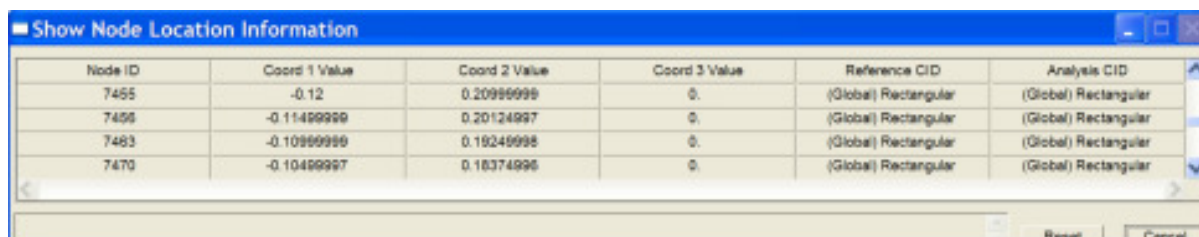
Рис.264

Для определения номеров узлов, в которых приложены силы, активируем раздел **Elements** и выберем:

Action ► *Show*;
Object ► *Node*;
Info ► *Location*.

Выберем интересующие нас узлы (в окне **Node List** появятся номера этих узлов) и нажмем клавишу **Apply**. Появится всплывающая панель (рис.265), содержащая информацию о номерах и координатах узлов. Если на панели **Finite Elements** в окне **Write to Report** стоит «галочка», то вам будет предложена записать эту информацию в файл. Вид этого файла (klin_koordinati.rpt.01) приведен на рис.266. Оставляем в этом файле только интересующую нас информацию и перезаписываем файл, который позднее выведем в MathCAD как вектор координат \vec{X} .

Нас будет интересовать горизонтальное усилие, действующее на клин при его перемещении на **1** см. На панели **Results** нажмем на кнопку  **Показ электронной таблицы**. Появится электронная таблица с информацией о силах, приложенных в узлах (рис.267). Если на этой панели нажать на клавишу **Report**, то эта информация будет записана в файл с расширением **.dat**. На рис.268 интересующая нас информация в этом файле выделена красными прямоугольниками. Перенесем эту информацию в **MathCAD** и вычислим горизонтальное усилие, передаваемое на клин. Соответствующая программа приведена на рис.269.



Node ID	Coord 1 Value	Coord 2 Value	Coord 3 Value	Reference CID	Analysis CID
7455	-0.12	0.2099999	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
7456	-0.1149999	0.20124997	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
7483	-0.1099999	0.19249998	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular
7470	-0.10499997	0.18374996	0.	(Global) Rectangular	(Global) Rectangular

Рис.265

```

*****
                                NODE LOCATION REPORT
*****
MSC.Patran 2005 r3
File: F:\Nastran\Термех_статика\Плоский клин.db
Date: 09-Jan-07
Time: 09:40:20

Node Locations
Node ID  Coord 1 Value  Coord 2 Value  Coord 3 Value  Reference CID
7455      -0.120000      0.210000      0.000000      (Global) Rectangular
7456      -0.115000      0.201250      0.000000      (Global) Rectangular
7463      -0.110000      0.192500      0.000000      (Global) Rectangular
7470      -0.105000      0.183750      0.000000      (Global) Rectangular
7477      -0.100000      0.175000      0.000000      (Global) Rectangular
7483      -0.095000      0.166250      0.000000      (Global) Rectangular
7491      -0.090000      0.157500      0.000000      (Global) Rectangular
7498      -0.085000      0.148750      0.000000      (Global) Rectangular
7505      -0.080000      0.140000      0.000000      (Global) Rectangular
7512      -0.075000      0.131250      0.000000      (Global) Rectangular
7523      -0.070000      0.122500      0.000000      (Global) Rectangular
7530      -0.065000      0.113750      0.000000      (Global) Rectangular
7539      -0.060000      0.105000      0.000000      (Global) Rectangular
7549      -0.055000      0.096250      0.000000      (Global) Rectangular
7559      -0.050000      0.087500      0.000000      (Global) Rectangular
7569      -0.045000      0.078750      0.000000      (Global) Rectangular
7579      -0.040000      0.070000      0.000000      (Global) Rectangular
7591      -0.035000      0.061250      0.000000      (Global) Rectangular
7603      -0.030000      0.052500      0.000000      (Global) Rectangular
7620      -0.025000      0.043750      0.000000      (Global) Rectangular
7635      -0.020000      0.035000      0.000000      (Global) Rectangular
7652      -0.015000      0.026250      0.000000      (Global) Rectangular
7666      -0.010000      0.017500      0.000000      (Global) Rectangular
7678      -0.005000      0.008750      0.000000      (Global) Rectangular

```

Рис.266

Freebody Spreadsheet									
Node ID	Coord ID	Force	Moment	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
7620	0	460.42	0.00	389.43	245.81	0.00	0.00	0.00	-0.00
7635	0	566.40	0.00	477.72	304.29	0.00	0.00	0.00	0.00
7652	0	742.09	0.00	624.30	401.18	0.00	0.00	0.00	-0.00
7666	0	1113.99	0.00	928.81	615.05	0.00	0.00	0.00	0.00
7678	0	2693.21	0.00	2598.65	707.40	0.00	0.00	0.00	0.00
Totals	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00

"Freebody Loads" for Result Case [Default], Subcase [A4-Static Subcase], using method [Freebody Loads] Values shown in the Analysis Coordinate Frames. Summation point shown in Rectangular

Report Close

Рис.267

Плоский клин _1_freebody_data.dat - Блокнот									
Файл Правка Формат Вид Справка									
7433, 0, 193.06, 0.00, -159.93, -108.15, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7434, 0, 172.78, 0.00, -142.93, -97.06, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7435, 0, 153.40, 0.00, -126.83, -86.28, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7436, 0, 134.44, 0.00, -111.19, -75.56, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7437, 0, 115.42, 0.00, -95.56, -64.72, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7438, 0, 95.82, 0.00, -79.47, -53.54, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7439, 0, 75.05, 0.00, -62.34, -41.78, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7440, 0, 52.48, 0.00, -43.59, -29.23, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7441, 0, 26.88, 0.00, -21.75, -15.80, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7442, 0, 5.22, 0.00, -0.29, -5.21, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7455, 0, 6.27, 0.00, -6.27, 0.10, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7456, 0, 15.34, 0.00, -15.20, -2.06, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7463, 0, 14.72, 0.00, -13.55, -5.76, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7470, 0, 9.87, 0.00, -6.73, -7.21, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7477, 0, 7.19, 0.00, 4.11, -5.90, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7483, 0, 17.94, 0.00, 17.83, -2.01, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7491, 0, 33.79, 0.00, 33.54, 4.13, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7498, 0, 52.05, 0.00, 50.61, 12.17, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7505, 0, 72.00, 0.00, 68.61, 21.82, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7512, 0, 93.28, 0.00, 87.31, 32.86, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7523, 0, 115.76, 0.00, 106.60, 45.12, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7530, 0, 139.43, 0.00, 126.54, 58.54, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7539, 0, 164.47, 0.00, 147.32, 73.11, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7549, 0, 191.25, 0.00, 169.29, 88.98, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7559, 0, 220.36, 0.00, 192.97, 106.40, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7569, 0, 252.63, 0.00, 219.05, 125.85, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7579, 0, 288.94, 0.00, 248.25, 147.84, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7591, 0, 332.99, 0.00, 284.30, 173.37, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7603, 0, 387.96, 0.00, 330.09, 203.84, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7620, 0, 460.42, 0.00, 389.43, 245.81, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7635, 0, 566.40, 0.00, 477.72, 304.29, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7652, 0, 742.09, 0.00, 624.30, 401.18, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									
7666, 0, 1113.99, 0.00, 928.81, 615.05, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
7678, 0, 2693.21, 0.00, 2598.65, 707.40, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00									
Totals, 0, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, -0.00									

Рис.268

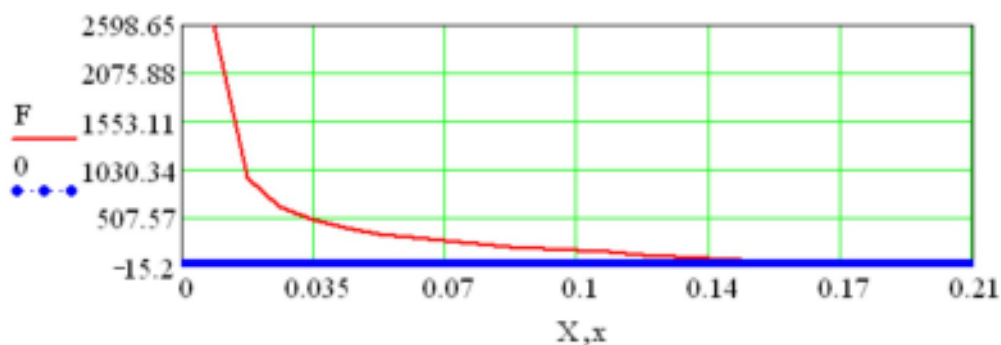
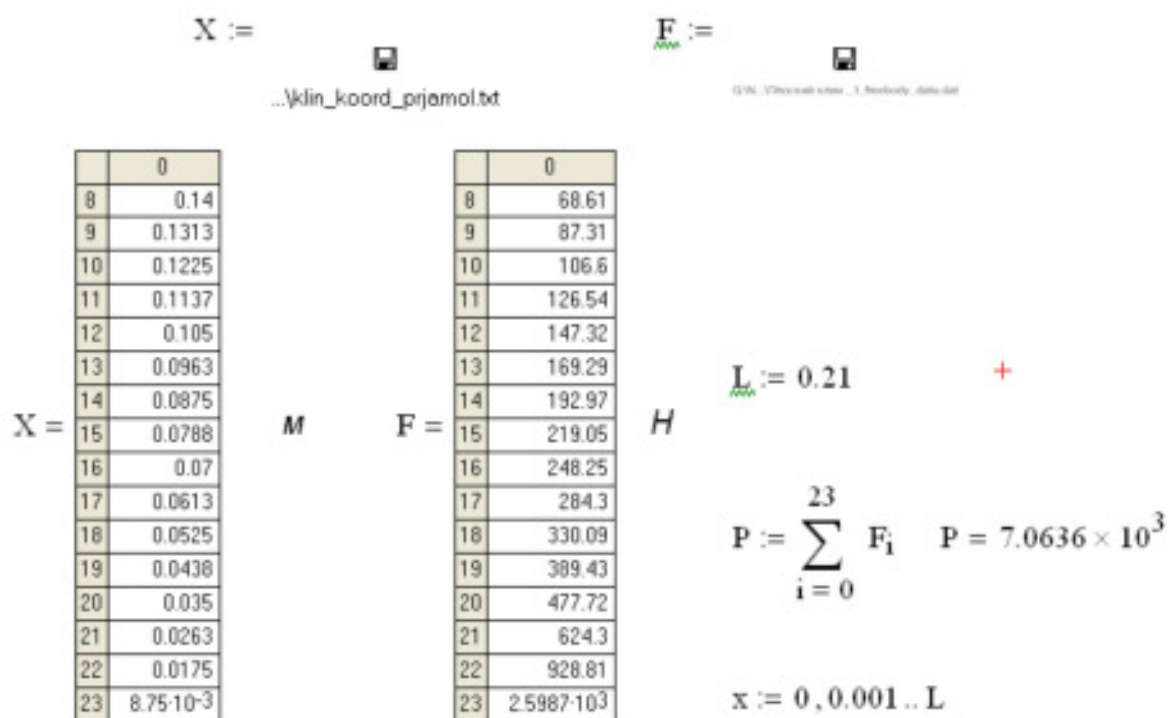


Рис.269

Внешний вид полученной эпюры давления почвы на пластину (двухгранный клин) не противоречит экспериментальным данным¹⁶. Полученное горизонтальное усилие действует на пластину толщиной **5 см**. Если принять ширину захвата корпуса плуга **35 см**, то на корпус плуга будет действовать усилие **$7063,6 \cdot 7 = 49455$ Н**, что существенно превышает нормативную нагрузку на корпус плуга **8500 Н** для вспашки средних почв с удельным сопротивлением почвы **$0,9 \text{ кГ/см}^2$** . Это несоответствие обусловлено различием механических характеристик материала модели и почвы – почва не упругий материал!

¹⁶ Новиков Ю.Ф. Некоторые вопросы теории деформирования и разрушения пласта под воздействием двухгранного клина. Почвообрабатывающие машины и динамика агрегатов. Тр. ЧИМЭСХ, вып.46. – Челябинск, 1969. – с.21-28.

Виноградов В.И., Подскребко М.Д. Влияние скорости на величину нормальных и касательных сил, действующих на поверхности плоского клина. ЦИНТИ АМ. Сб. «Повышение рабочих скоростей тракторов и сельскохозяйственных машин». М. 1963.


5.1.2. Исследование взаимодействия двухгранного клина с криволинейной поверхностью контакта и «почвы» в программном комплексе MSC.Patran-Nastran 2005

Преобразуем конечно-элементную модель пластины, рассмотренную в предыдущем параграфе. Удалим четвертую пластину, а вместо нее поместим на это место пластину, у которой граница **EF** круговая с радиусом **0.21 м**.

В разделе **Geometry** выберем:

Action ► Delete;

Object ► Any.

Нажимаем на инструментальной панели кнопку  **Увеличенный фрагмент** и в графическом окне выделяем четвертую пластину. В окне **Geometric Entity List** панели **Geometry** появится информация о выделенных геометрических объектах (рис.270). Нажимаем на клавишу **Apply** и удаляем эти объекты.

Переходим в раздел **Elements** и повторяем только что описанную процедуру для удаления элементов (рис.271).

Снова активизируем раздел **Geometry** и выбираем:

Action ► Create

Object ► Point

Method ► XYZ,

и вводим точку **[-0.21 0.21 0]**. Далее выбираем:

Action ► Create

Object ► Curve

Method ► 2D ArcAngles

и вносим информацию о дуге кривой в окна появившейся панели (рис.272). Нажимаем на клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение дуги окружности.

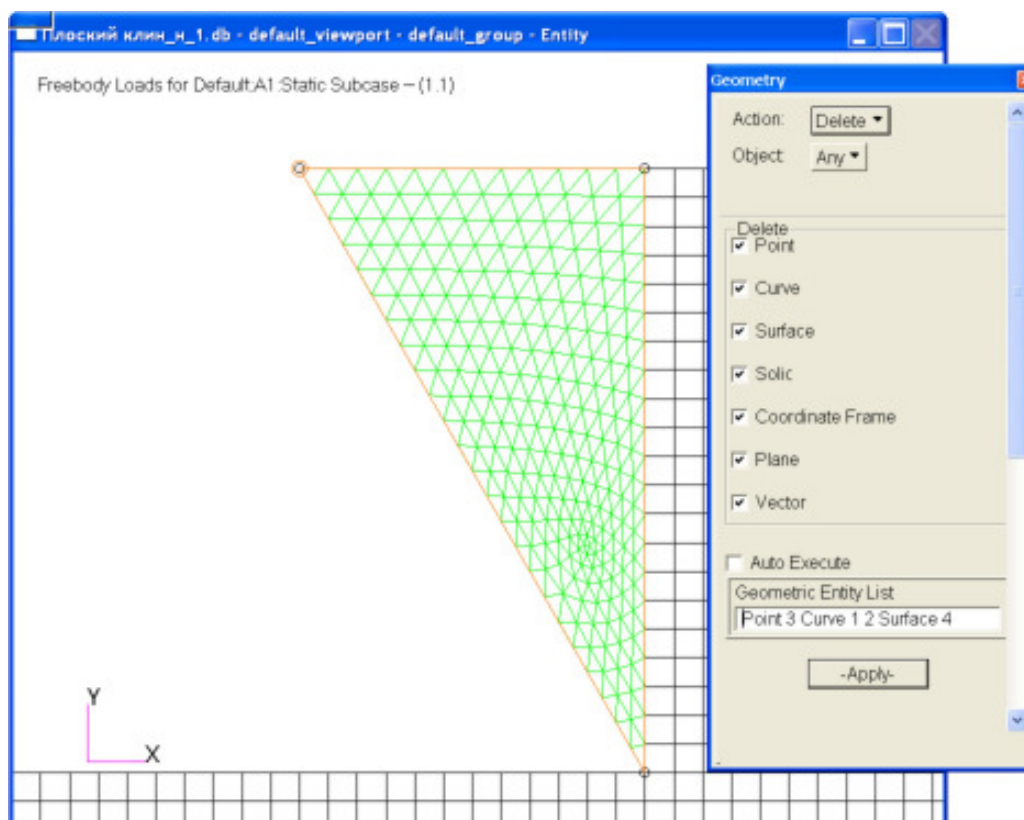


Рис.270

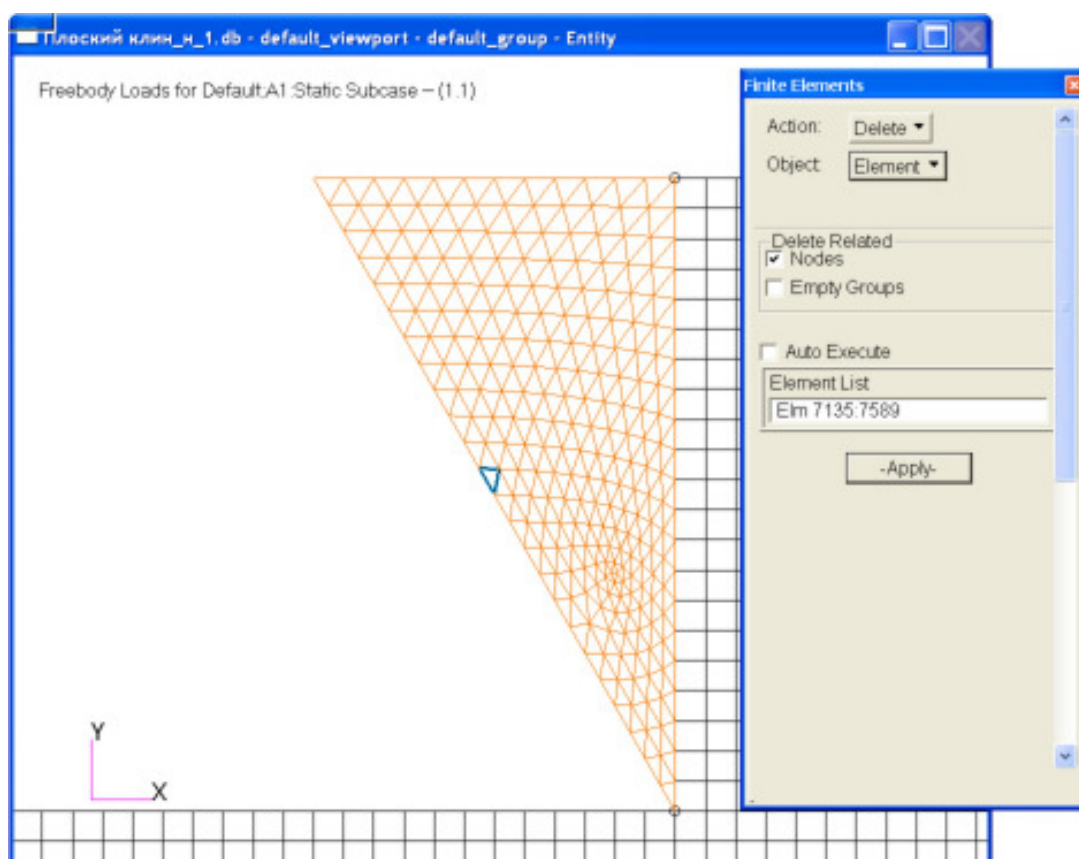


Рис.271

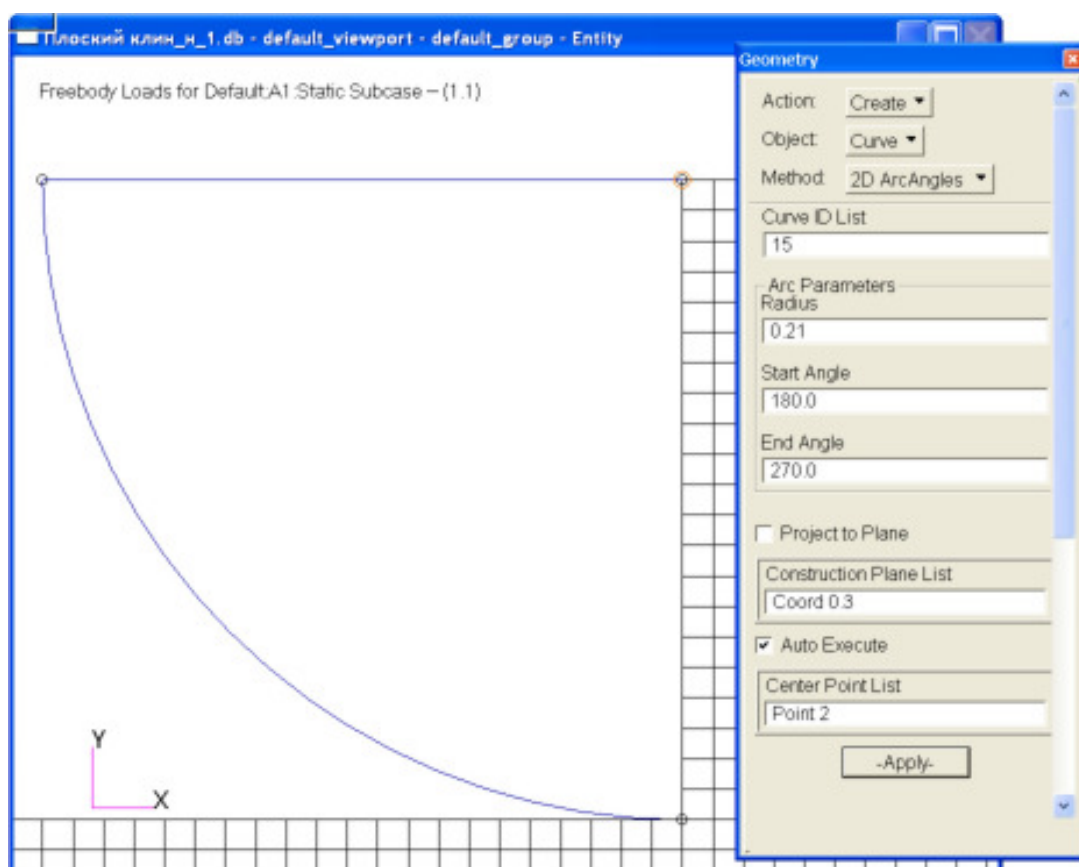


Рис.272

Выбираем:

Action► Create
Object► Surface
Method► Edge

и на изменившейся панели **Geometry** устанавливаем опцию **3 Edge** и в графическом окне последовательно отмечаем границы области. Нажимаем на клавишу **Apply**. В результате этих действий будет создана новая четвертая область исходной пластины (рис.273).

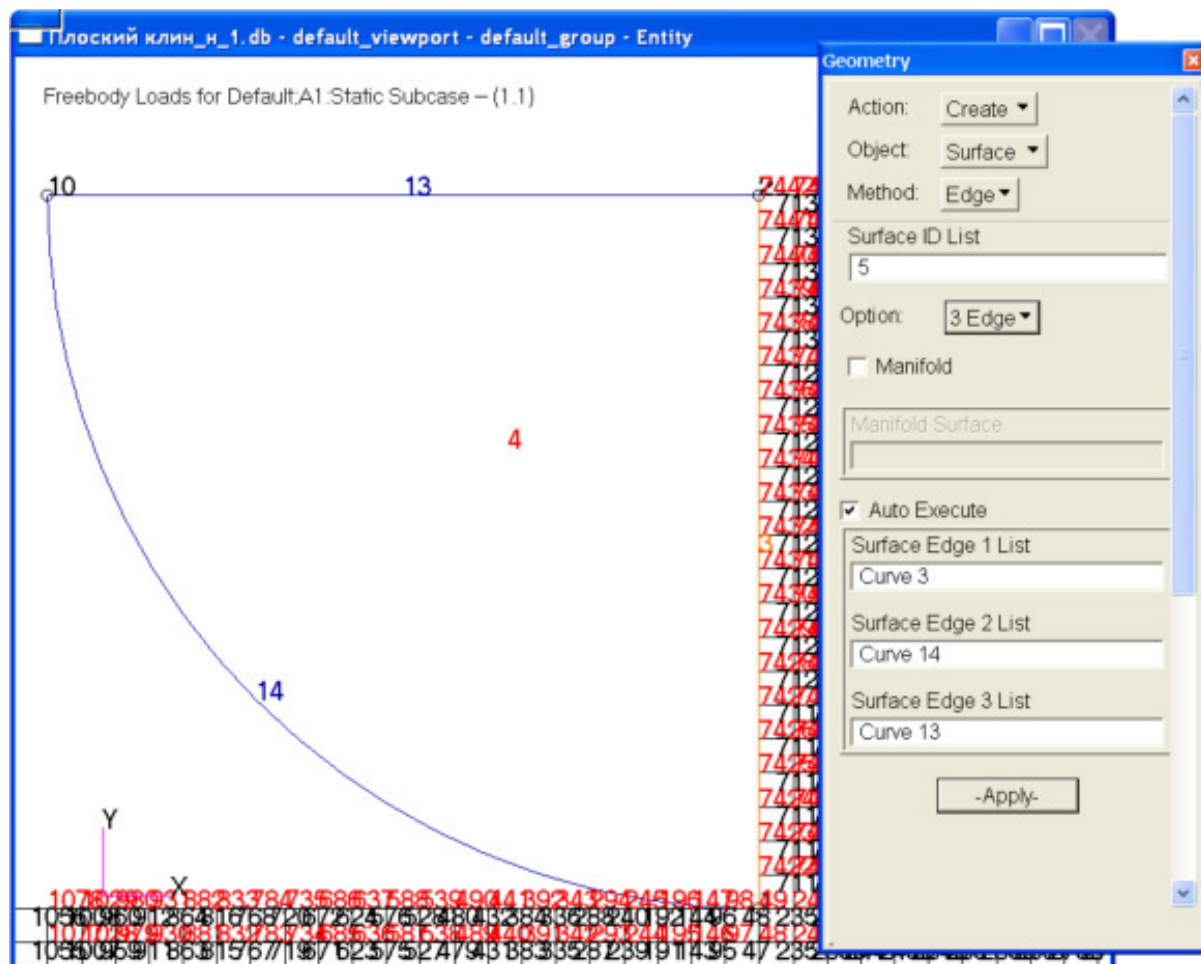


Рис.273

Для создания конечно-элементной сетки в четвертой области открываем приложение **Elements**. Используем команду **Object► Mesh Seed** для предварительной разметки этой сетки на геометрической модели пластины. В поле **Number** задаем число элементов вдоль границ пластины, соответствующее их длинам в сантиметрах.

Переходим к созданию сетки. Активизируем команду **Object► Mesh**. Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем свойства элементов – **massiv**. Панель **Property Sets** закроется, активной станет панель **Element Properties**. В графическом окне устанавливаем курсор мыши на пластину и нажимаем её левую клавишу. В окне **Surface List** появится запись **Surface 4** (если в окне **Automatic Calculation** установлен «флажок», то нажимать на клавишу **Apply** не надо). Выполняем команду **Action ► Equivalence**. Если всё сделано правильно, в графическом окне появится изображение конечно-элементной сетки (рис.274).

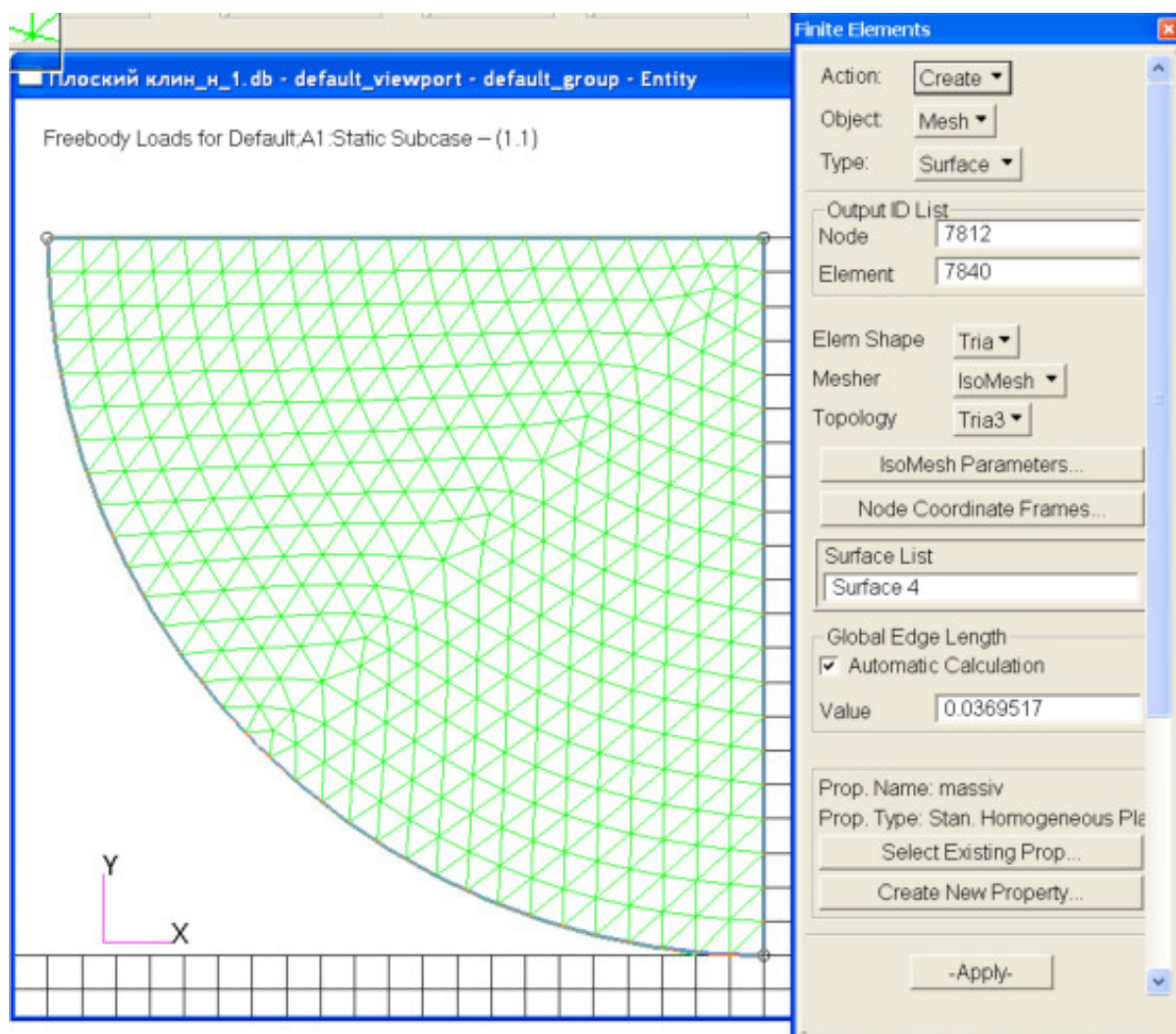


Рис.274

Задаём кинематические граничные условия на криволинейной границе. Открываем форму приложения **Loads/BCs**. В открывшейся одноименной панели активизируем команды:

Action► Create
Object► Displacement
Type► Nodal

и в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** В появившейся панели **Input Data** задаём вдоль границы **EF** всем узлам перемещения **<0.00668 0.0058 0>**. Щелкаем по кнопке **OK**. Активируем кнопку **Select Application Region**. Появится одноименная панель, на которой отмечаем флажок **FEM**. В графическом окне выделяем все узлы границы **EF**. Щелкаем по кнопкам **Add** и **OK**. Панель **Select Application Region** закроется, на панели **Loads/Boundary Conditions** щелкаем по кнопке **Apply**.

Расчет конечно-элементной модели проводится в приложении **Analysis**. Для расчета пластины выбираем опцию **Analysis** в разделе **Action**. Нажимаем клавиши **Subcase** (подблока), **Output Request** (запрос на вывод), открывается панель **Output Request**. Для того чтобы вывести информацию об усилиях в отсеченной части пластины, щелкаем в окне **Select Result Type** панели **Output Requests** команду **Element Force, Applied Loads, Grid Point Force Balance**. Нажимаем клавишу **OK**. В окне **Subcase Name** панели **Subcase** задаём имя «**s1**»; устанавливаем указатель мыши на клавише **Apply** и щелкаем левой клавишей мыши.

Нажимаем клавишу **Subcase Select** на панели **Analysis**. Откроется одноименная панель, на которой выбираем подблок «**s1**» и нажимаем клавишу **OK**, и клавишу **Apply** панели **Analysis**. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**.

После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, то в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.

Определяем информацию о напряженно-деформированном состоянии пластины.

Отображение напряженного состояния пластины

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► Create;


Object ► Quick Plot;

вариант расчета – *Default A1: Static Subcase;*

тип результата: *Stress Tensor;*

количество (компонента тензора напряжений σ_x): *max principal*.

Нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение изополей поля напряжения σ_1 при разбивке диапазона изменения этих напряжений на 25 уровней. Картина изополей напряжений σ_1 приведена на *рис.275*. Аналогичным образом выводим изополя напряжений σ_3 и τ_{max} (*рис.275*). Из приведённых картин полей следует, что и при криволинейной границе **EF** вдоль границы **AF** пластины после прохода клина будут наблюдаться углубления, вызванные разрушением материала пластины из-за больших растягивающих напряжений σ_1 . В этом случае в зоне острия клина наблюдается локальное напряженное состояние, подобное напряженному состоянию в задаче Буссинеска в окрестности точки приложения силы¹⁷. Указать возможное направление разрушения пластины в рассматриваемой её конечно-элементной модели для данного клина не удастся.

Рассмотрим равновесие отсеченной четвертой области пластины. При нажатой клавише  **Select Results** выберем:


Action ► Create;

Object ► Freebody;

Method ► Loads.

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.1);*

тип результата: *Freebody Loads.*

Активизируем кнопку  **Target Entities**. В графическом окне выделяем четвертую область пластины. Нажимаем клавишу **Apply**. В результате этих действий в графическом окне к выделенной области будут приложены все активные силы и реакции связей (*рис.276*).

Определим горизонтальное усилие, которое надо приложить к клину, чтобы он переместился на 1 см в направлении оси x . Все вычисления, как и в предыдущем параграфе, выполняем в системе MathCAD (*рис.277*).

Усилие, деформирующее пласт, в этом случае меньше по сравнению с предыдущим случаем: $6,88 \cdot 10^3$ Н.

¹⁷ В.А. Жилкин. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. Часть I. Теоретические основы проектирования элементов сельхозмашин. Челябинск, ЧГАУ, 2005. – 427 с.

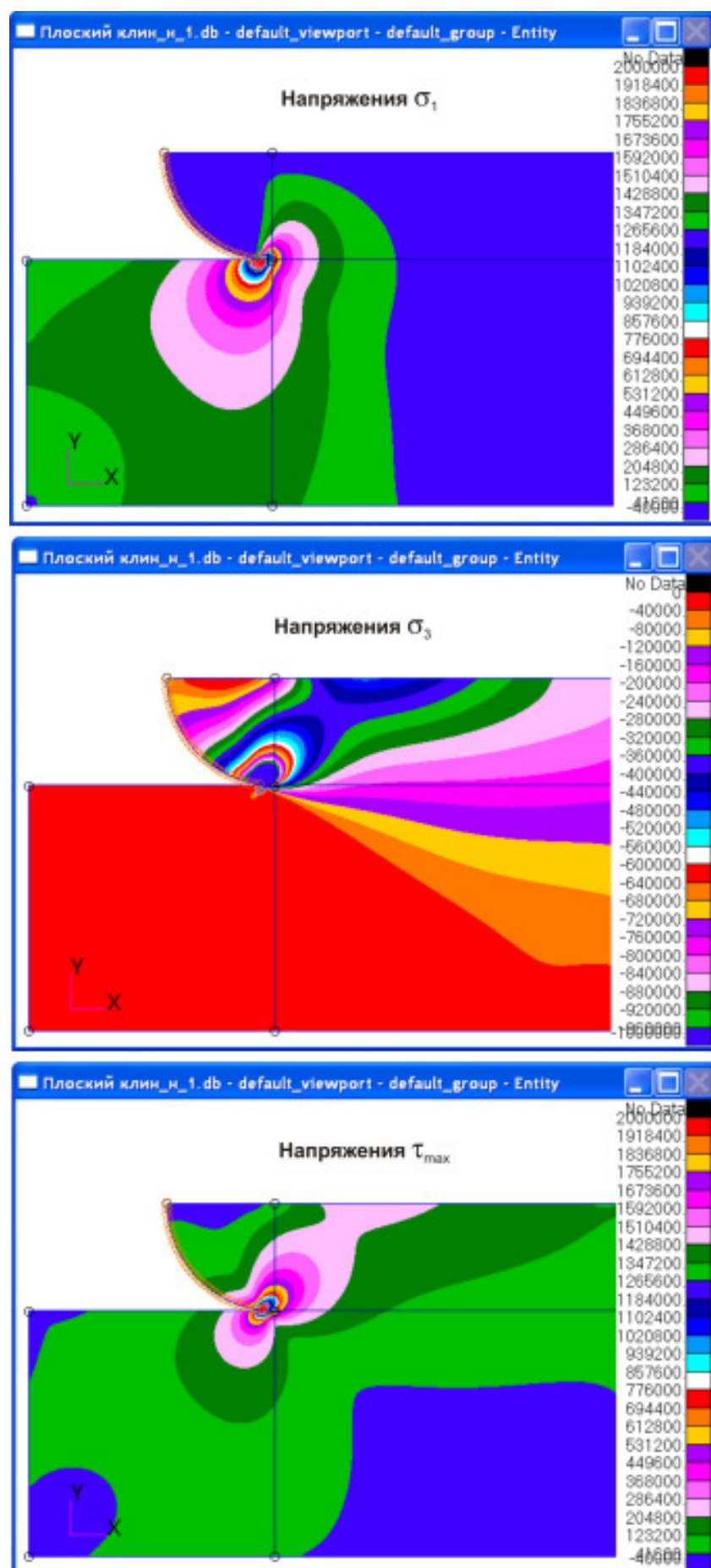


Рис.275

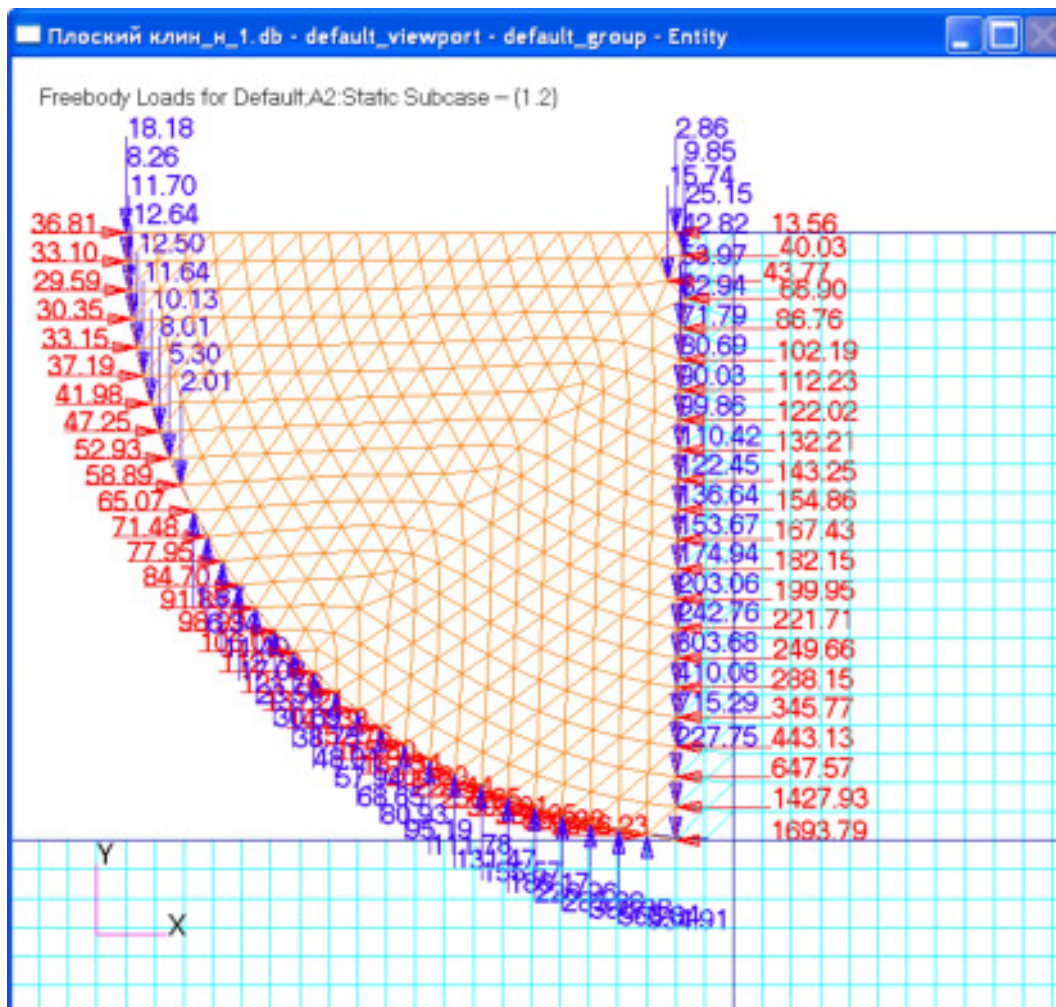


Рис.276

X :=



G:\N... \koordinati krivolapt.txt

F :=



G:\... \Freebody Loads_n_1_freebody_data.dat

X =

	0
15	0.07
16	0.07
17	0.06
18	0.05
19	0.04
20	0.04
21	0.03
22	0.03
23	0.02
24	0.02
25	0.02
26	0.01
27	$8.5 \cdot 10^{-3}$
28	$5.91 \cdot 10^{-3}$
29	$3.79 \cdot 10^{-3}$
30	$2.13 \cdot 10^{-3}$

M

F =

	0
15	98.99
16	106.03
17	112.78
18	121.76
19	131.21
20	141.38
21	152.76
22	165.8
23	181.34
24	200.6
25	225.44
26	258.95
27	308.01
28	388.05
29	553.38
30	$2.95 \cdot 10^3$

H

L := 0.21

$$P := \sum_{i=0}^{30} F_i \quad P = 6.88 \times 10^3$$

x := 0, 0.001 .. L

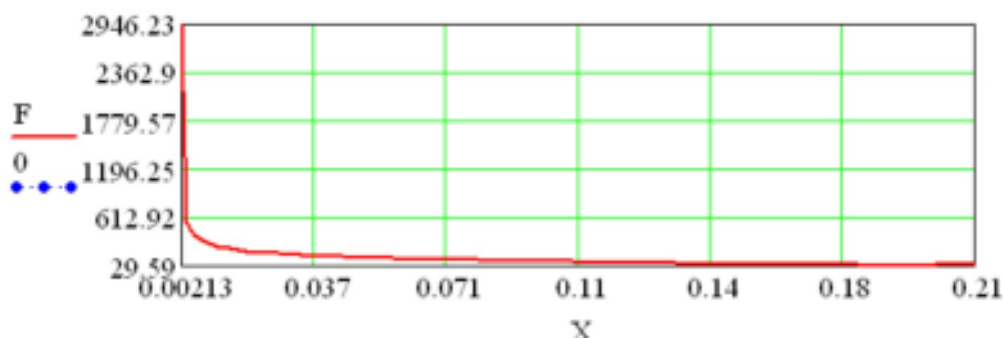



Рис.277

5.1.3. Исследование взаимодействия двухгранного клина с «почвой», имеющей у вершины клина «трещину», в программном комплексе MSC.Patran-Nastran

Для создания конечно-элементной модели пластины с «трещиной» у вершины клина воспользуемся моделью, рассмотренной в параграфе 5.1.1, в которой удалим пять элементов вдоль границы **AF**. После удаления элементов активизируем раздел **Analysis** и выполняем расчет новой модели.

Картины изополос полей напряжений σ_1 , σ_3 и τ_{max} приведены на рис.278. Из картин полос следует, что характер распределения напряжений, практически такой же, как и в первом случае, только относительно нового концентратора (вершины «трещины»).

Рассмотрим равновесие отсеченной четвертой области пластины. При нажатой клавише  **Select Results** выберем:


Action ► *Create*;

Object ► *Freebody*;

Method ► *Loads*.

вариант расчета - *A3: Static Subcase--(1.1)*;

тип результата: *Freebody Loads*.

Активируем кнопку  **Target Entities**. В графическом окне выделяем четвертую область пластины. Нажимаем клавишу **Apply**. В результате этих действий в графическом окне к выделенной области будут приложены все активные силы и реакции связей (рис.279).

Усилие деформирования почвы составило **5740 Н** (рис.280).

5.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОГО ДВУХГРАННОГО КЛИНА С УПРУГОЙ СРЕДОЙ (ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА)

Предположим, что клин с углом при вершине 30° шириной **40 см** движется в «почве» в направлении горизонтальной оси x на глубине **20 см** и переместился в этом направлении на **1 см**. Упругие характеристики «почвы» те же, что и в предыдущем случае. Требуется определить напряженно-деформированное состояние «почвы» в зоне её взаимодействия с клином. Расчетная схема приведена на рис.281.

Ниже приводится алгоритм создания конечно-элементной модели.

1. Загружаем программный комплекс **MSC.Patran-Nastran**.
2. Создаём новую базу данных.

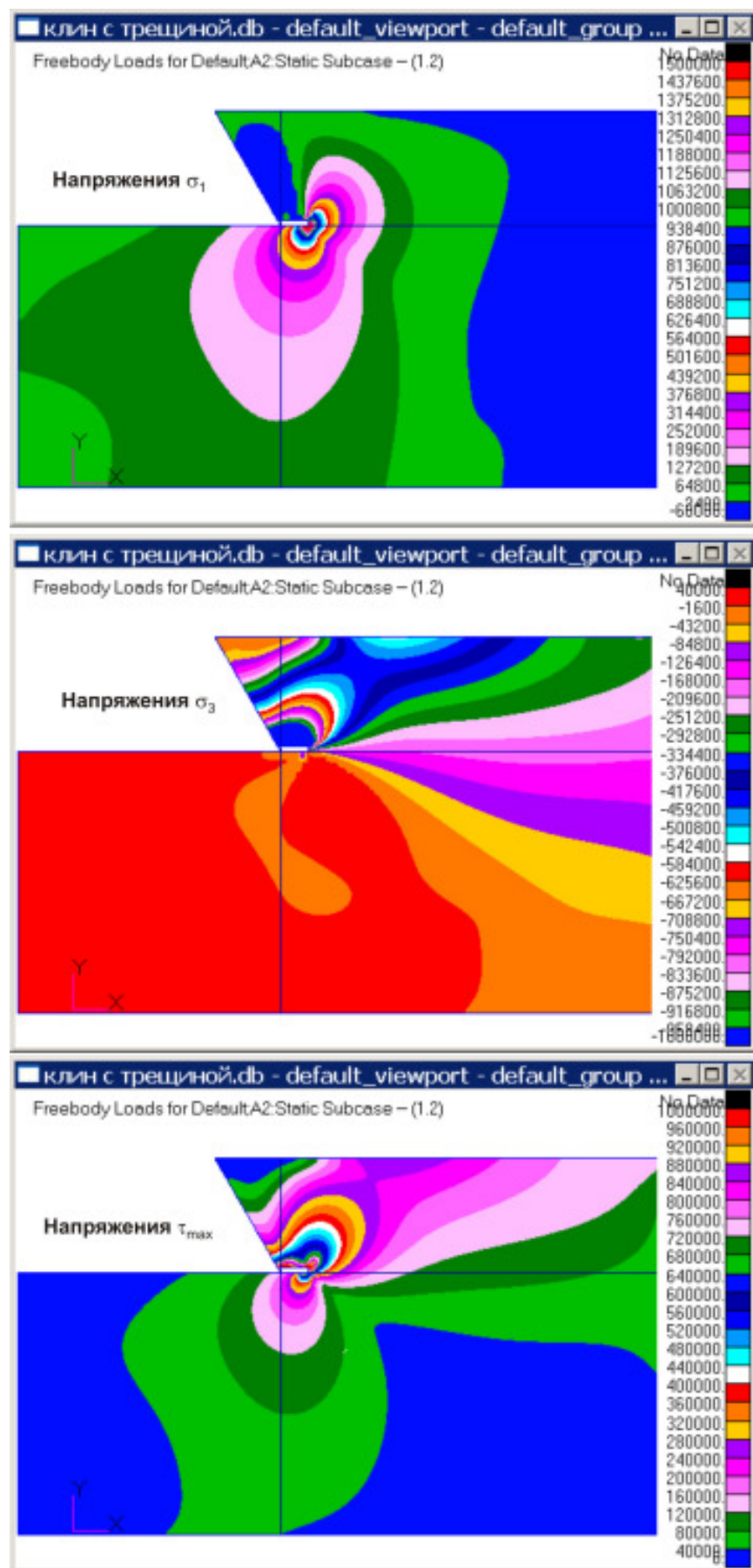


Рис.278

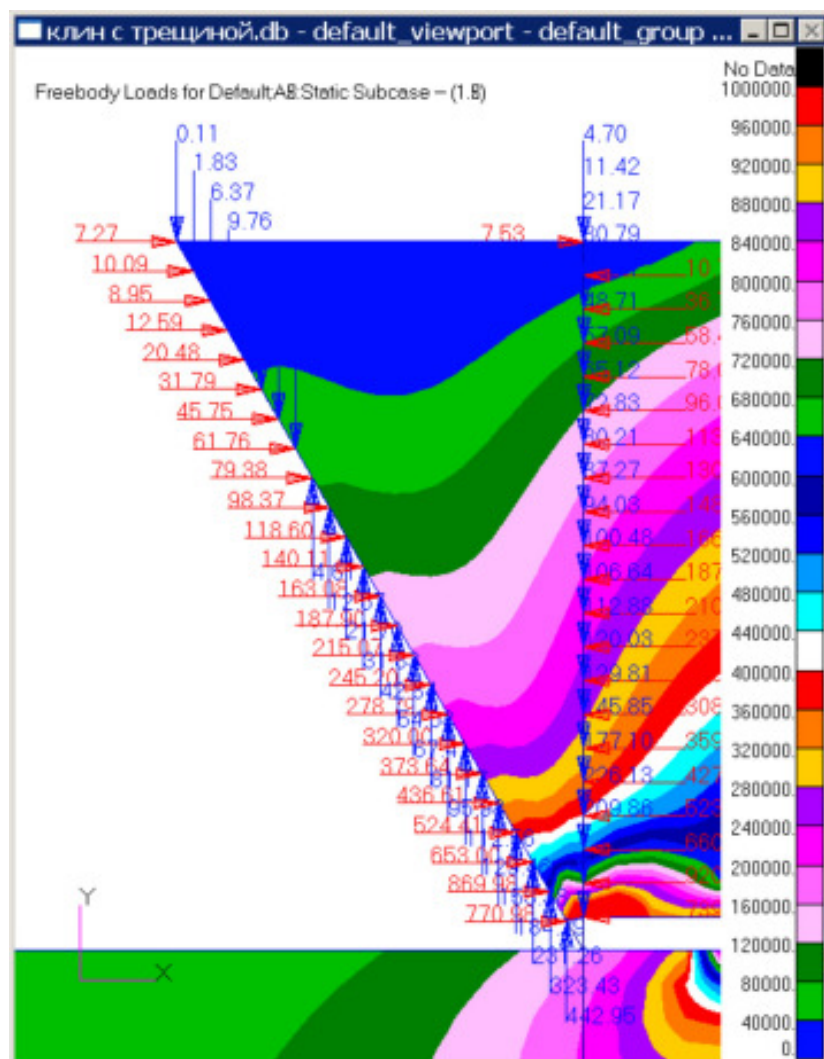


Рис.279

$X :=$

F:\Nestr...kile_koord_prjema1.txt

$F :=$

reestr...kile_koord_prjema1.txt

0	
8	0.14
9	0.13
10	0.12
11	0.11
12	0.11
13	0.1
14	0.09
15	0.08
16	0.07
17	0.06
18	0.05
19	0.04
20	0.04
21	0.03
22	0.02
23	$8.75 \cdot 10^{-3}$

M

$F =$

0	
8	79.38
9	98.37
10	118.6
11	140.11
12	163.08
13	187.9
14	215.07
15	245.2
16	278.79
17	320
18	373.64
19	436.61
20	524.41
21	653
22	869.98
23	770.98

H

$L := 0.21$

$P := \sum_{i=0}^{23} F_i$

$P = 5.74 \times 10^3$

$x := 0.01, 0.011 \dots L$

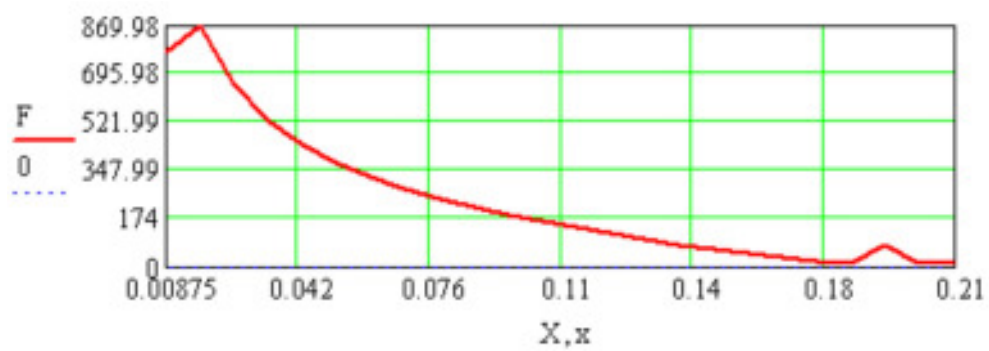


Рис.280

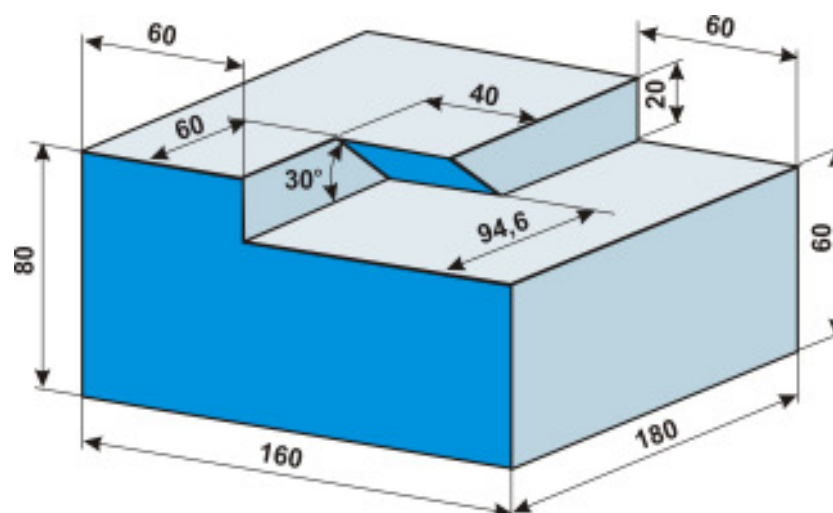


Рис.281

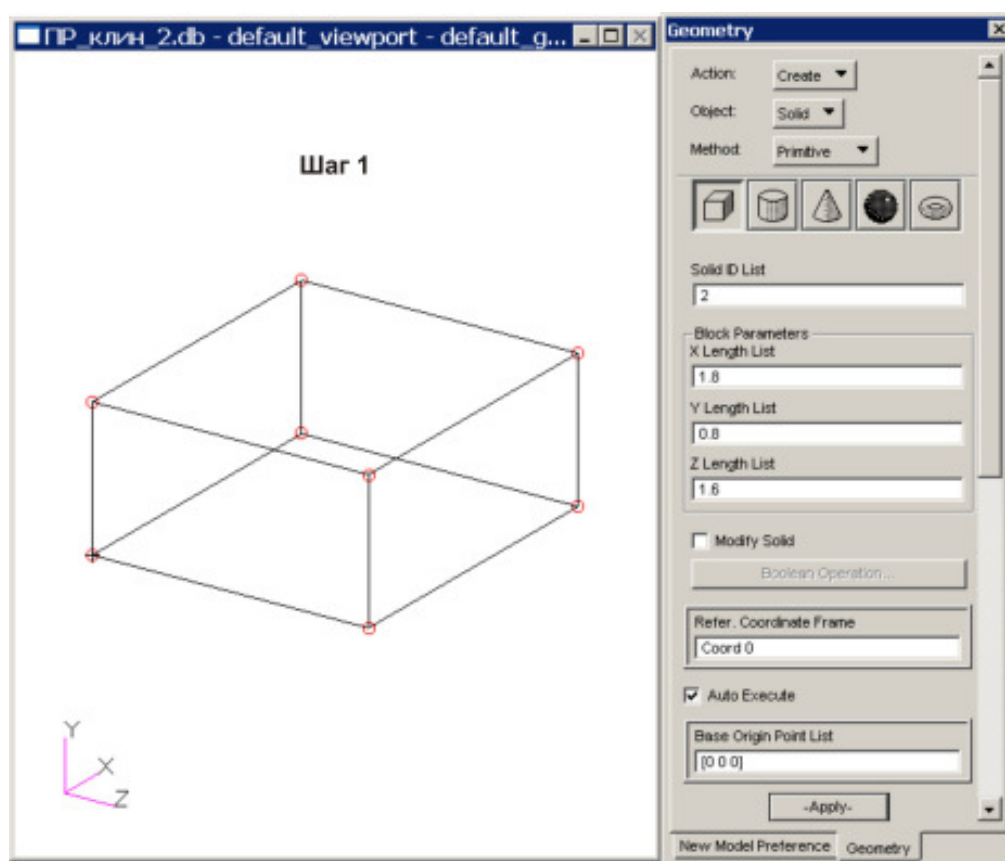


Рис.282

3. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry**.
4. В открывшейся одноименной панели активизируем команды (**шаг 1**):
Action ► Create
Object ► Solid
Method ► Primitive

В блоке параметров (**Block Parameters**) задаем исходные размеры почвенной призмы: вдоль оси x - $1,8$ м; вдоль оси y - $0,8$ м; вдоль оси z - $1,6$ м, в окне **Base Origin Point List** задаем координаты точки, от которой будет строиться данная призма.

5. Строим призму размером $1,8 \times 0,2 \times 0,6$, отстраиваемую от точки $[0 \ 0.6 \ 1]$ (**шаг 2, рис.283**).

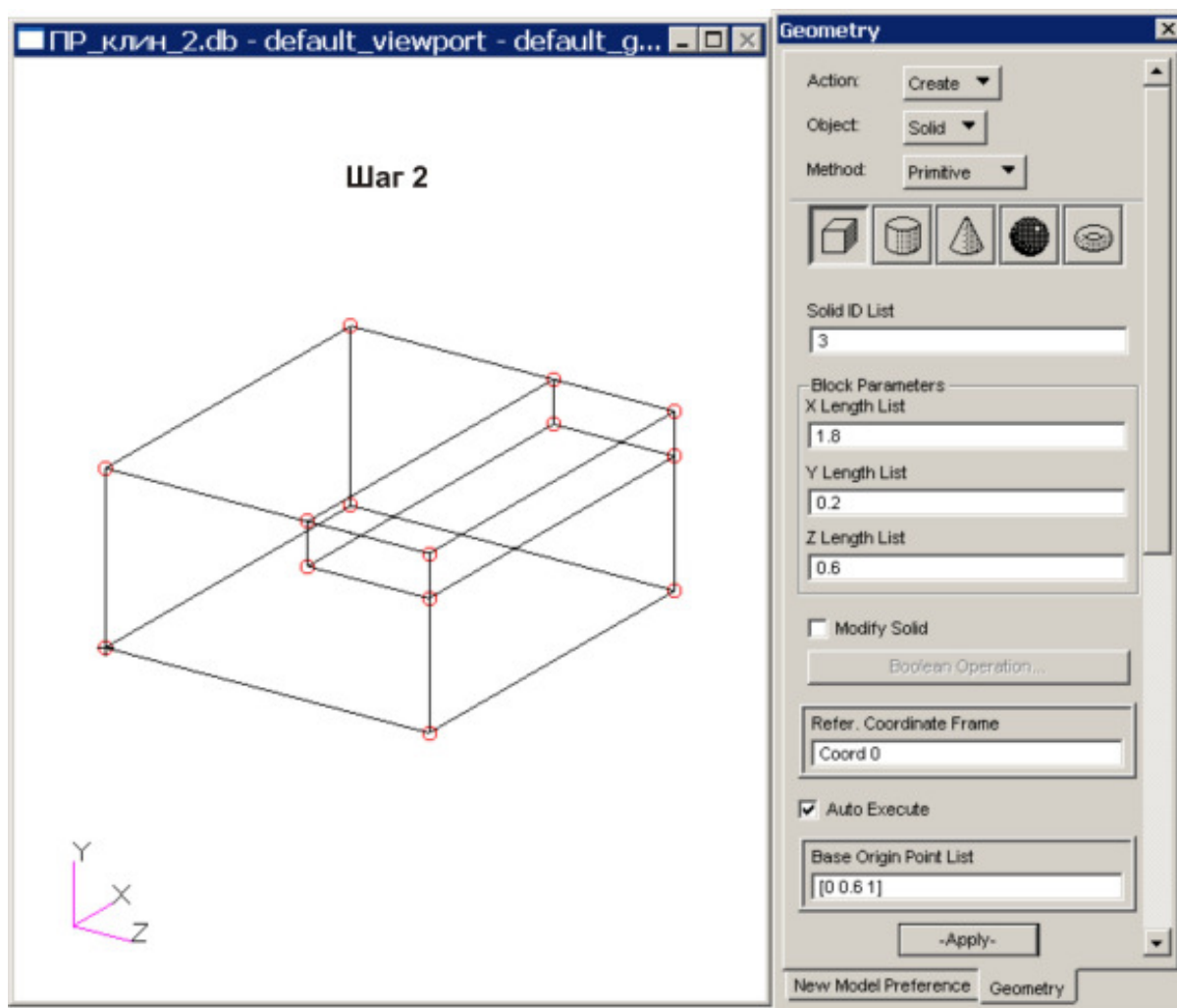


Рис.283

6. Удаляем призму размером $1,8 \times 0,2 \times 0,6$ м, отстраиваемую от точки $[0 \ 0.6 \ 1]$ (**шаг 3, рис.284**). Активизируем команды:
Action ► Edit
Object ► Solid
Method ► Boolean.



Нажимаем на кнопку **Обрезать** и последовательно щелкаем левой клавишей по исходной призме (в окне **Target Solid** появится запись **Solid 1**) и удаляемой призме (в окне **Subtracting Solid List** появится запись **Solid 2**).

Так как в поле **Auto Execute** установлен флажок, то удаление **Solid 2** произойдет автоматически.

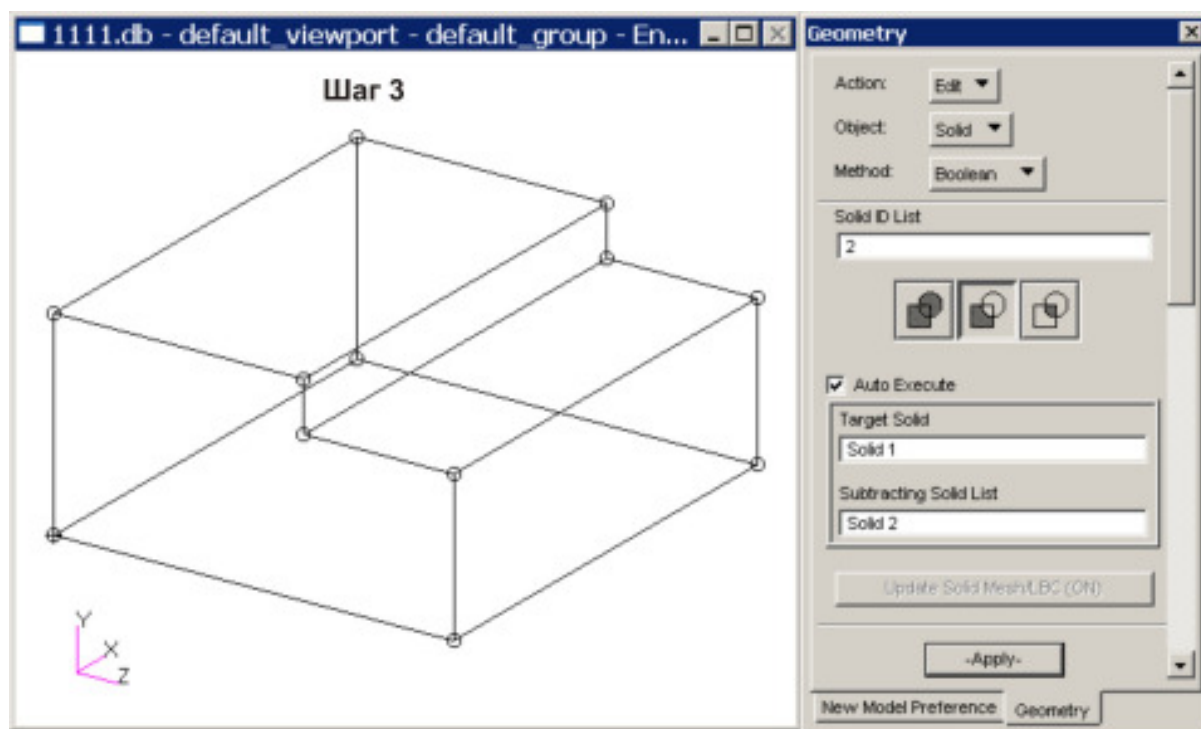


Рис.284

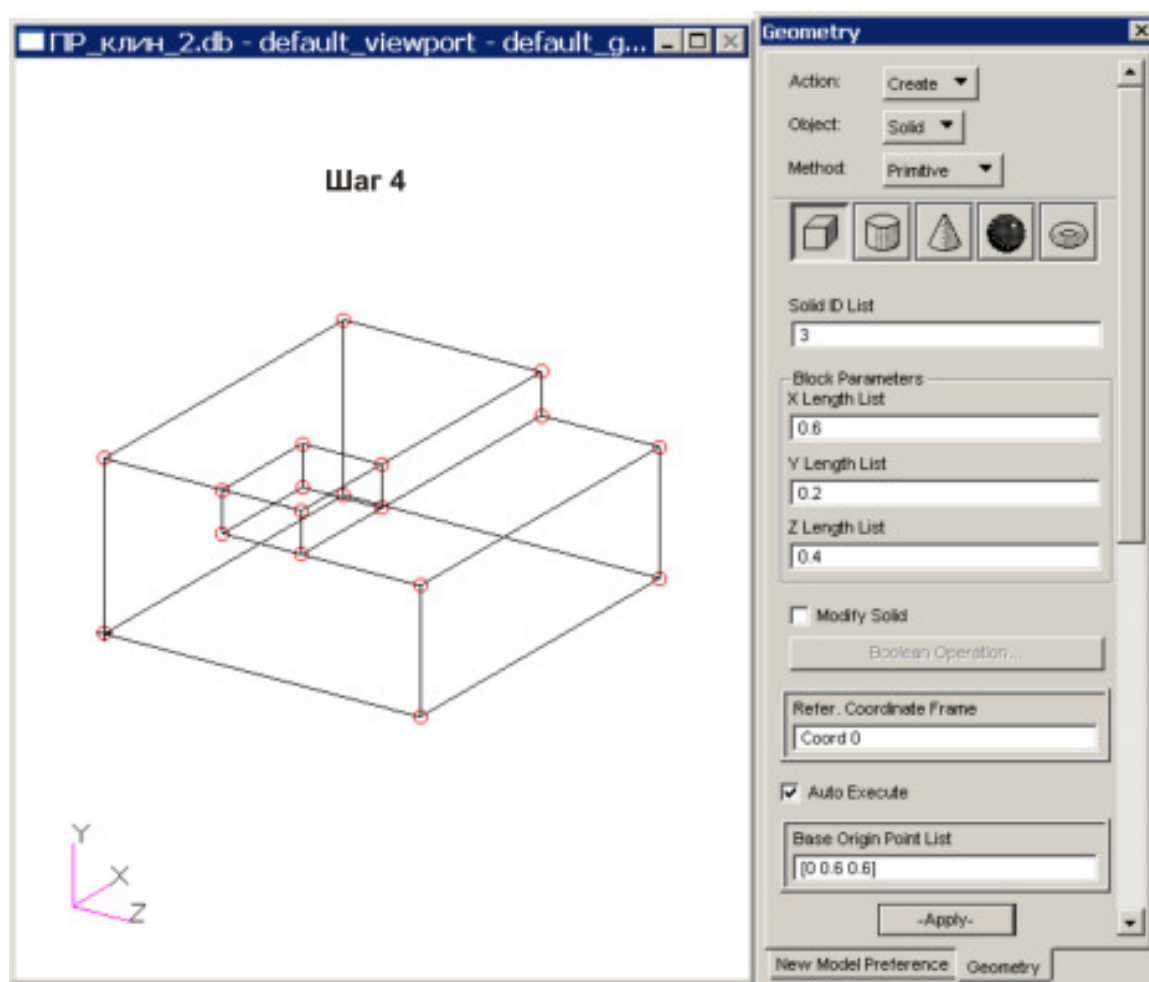


Рис.285

7. Создаём призму $0,6 \times 0,2 \times 0,4$, отстраиваемую от точки $[0\ 0.6\ 0.6]$ (шаг 4, рис.285).
8. Удаляем вновь созданную призму (шаг 5, рис.286).

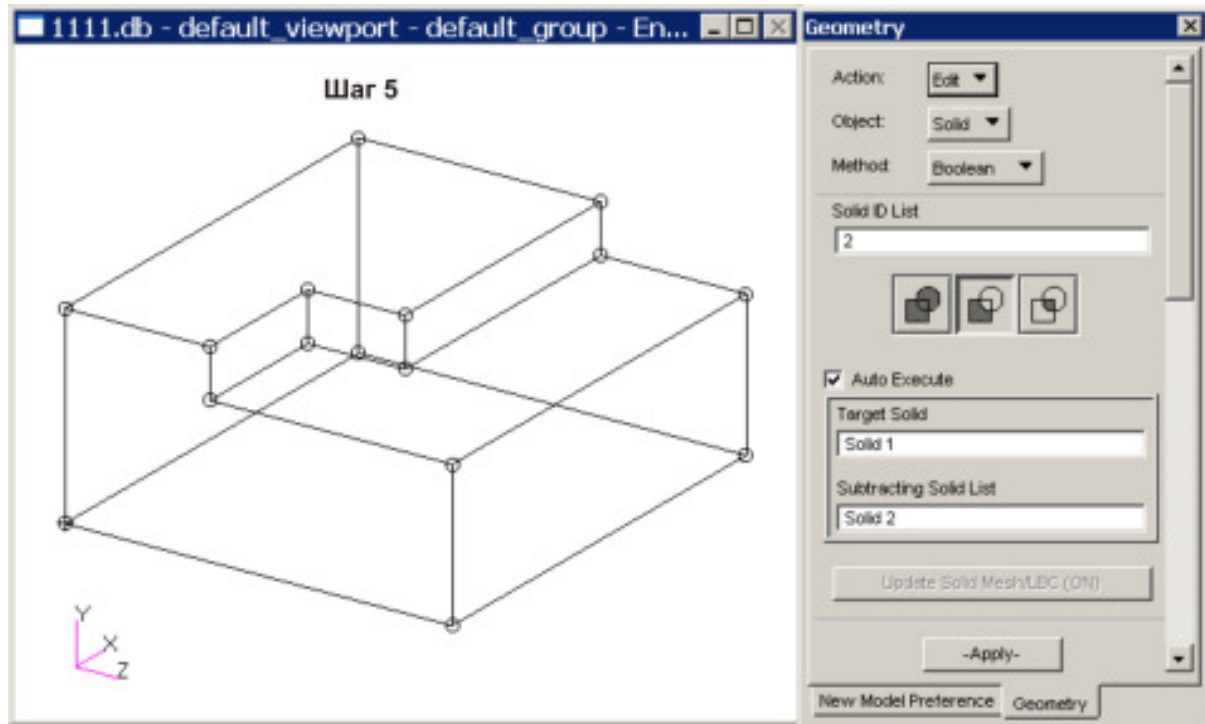


Рис.286

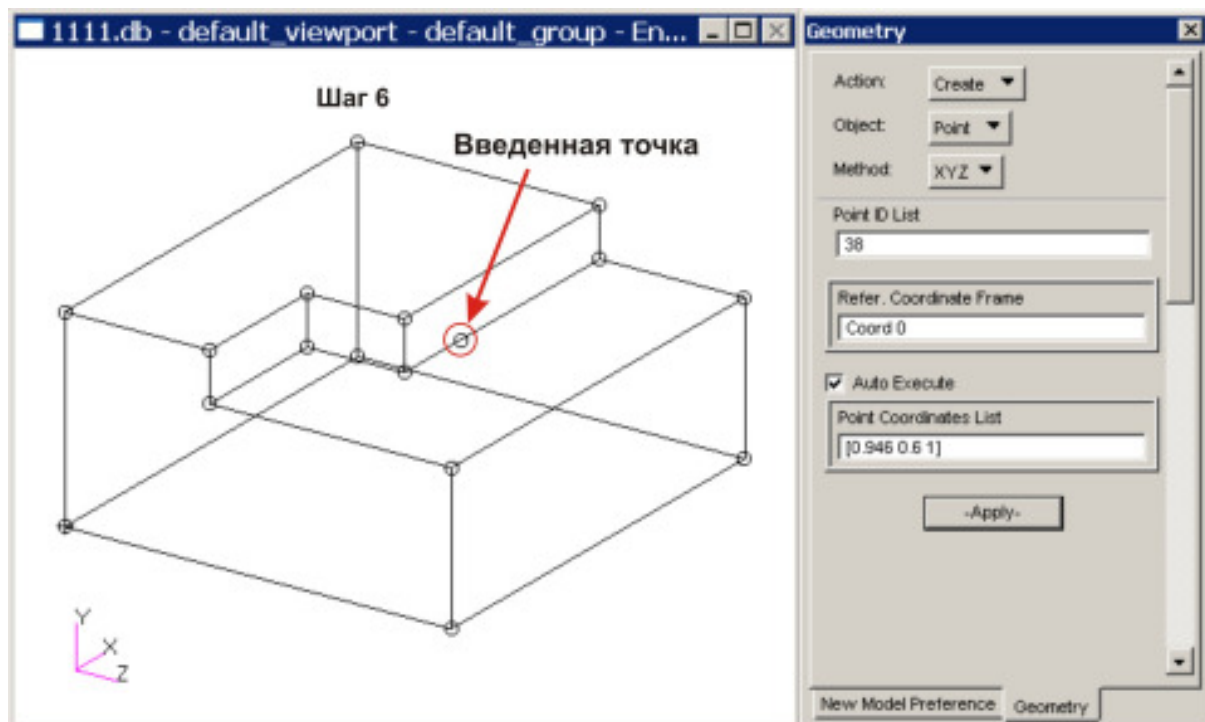


Рис.287

9. Для создания треугольной призмы нам потребуется точка, совпадающая с вершиной клина $[0.946\ 0.6\ 1]$. Активизируем команды:

Action ► Create
Object ► Point

Method ► XYZ.

В окно **Point Coordinates List** вводим координаты выше указанной точки (шаг 6, рис.287).

10. Активизируем команды:

Action ► Create

Object ► Curve

Method ► Point.

В графическом окне создаём кривые 1,2,3 (шаг 7, рис.288).

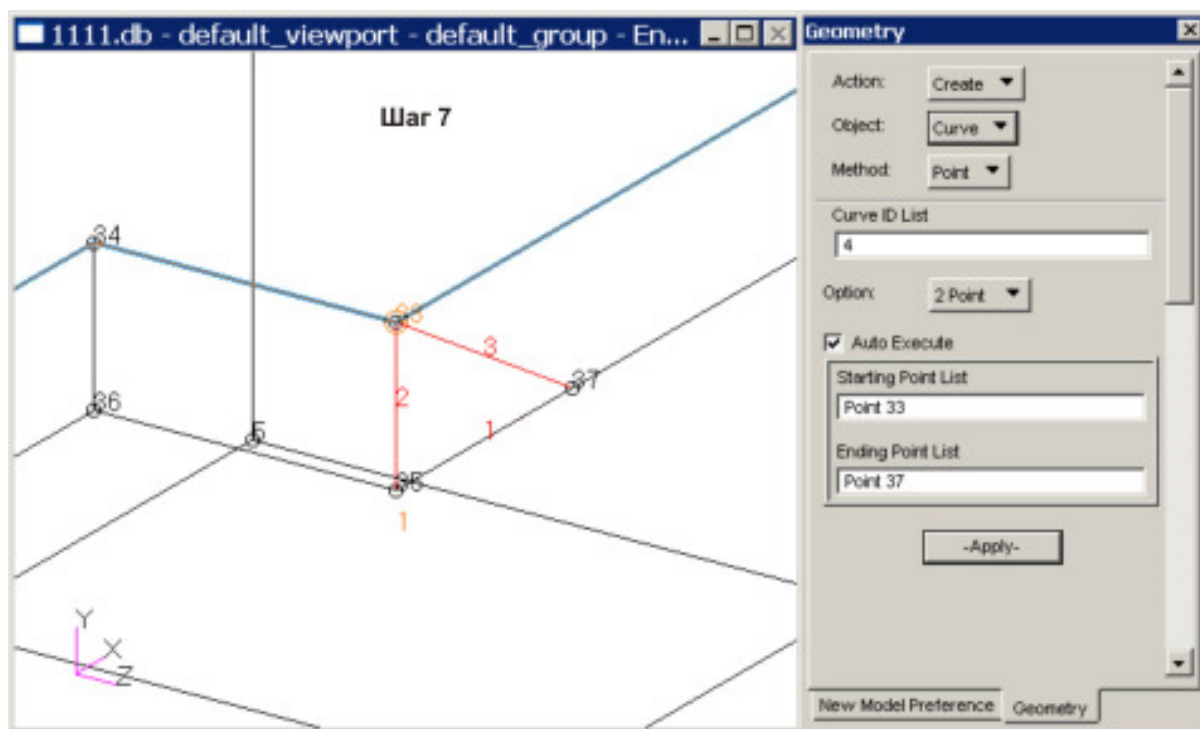


Рис.288

11. По трём границам (на кривых 1,2,3) создаём плоскость. Активизируем команды:

Action ► Create

Object ► Surface

Method ► Edge.

Устанавливаем опцию **3 Edge**. В графическом окне последовательно щелкаем левой клавишей мыши по указанным кривым (шаг 8, рис.288). По окончании операций будет создана плоскость 1.

12. Создаём треугольную призму. Активизируем команды:

Action ► Create

Object ► Solid

Method ► Extrude.



Нажимаем на клавишу **IsoMeshable**, в окне **Translation Vector** определяем вектор перемещения плоскости 1 и щёлкаем левой клавишей мыши в графическом окне по этой плоскости (шаг 9, рис.289).

13. Вырезаем треугольную призму. Активизируем команды:

Action ► Edit

Object ► Solid

Method ► Boolean.

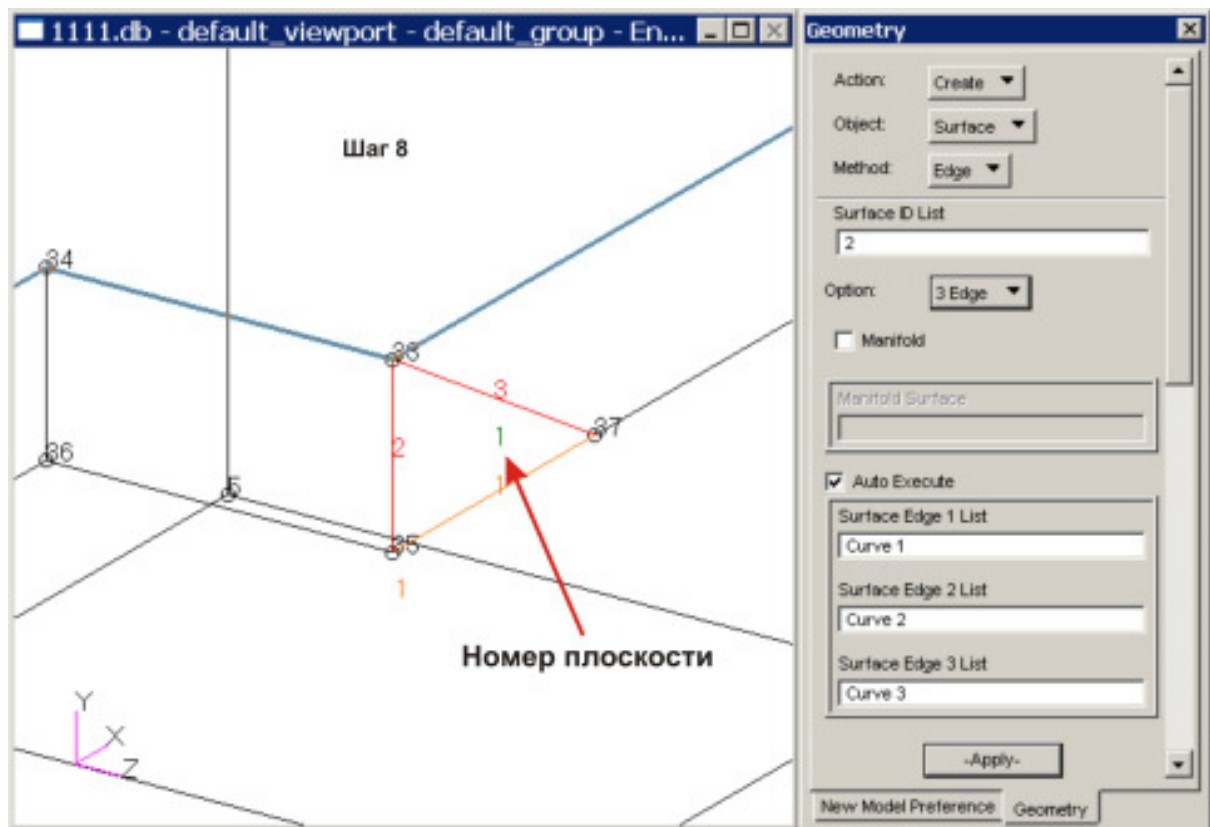


Рис.288

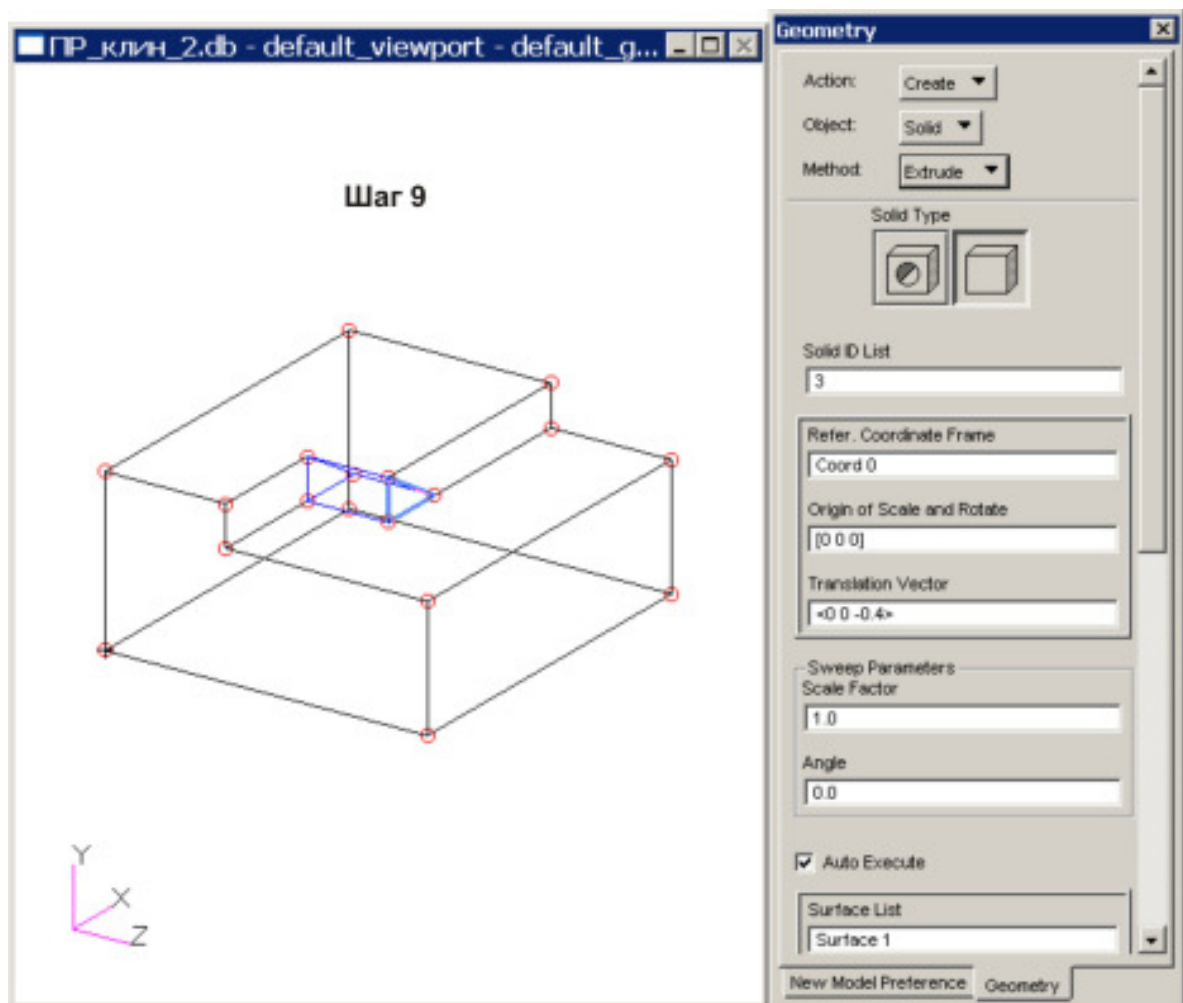


Рис.289

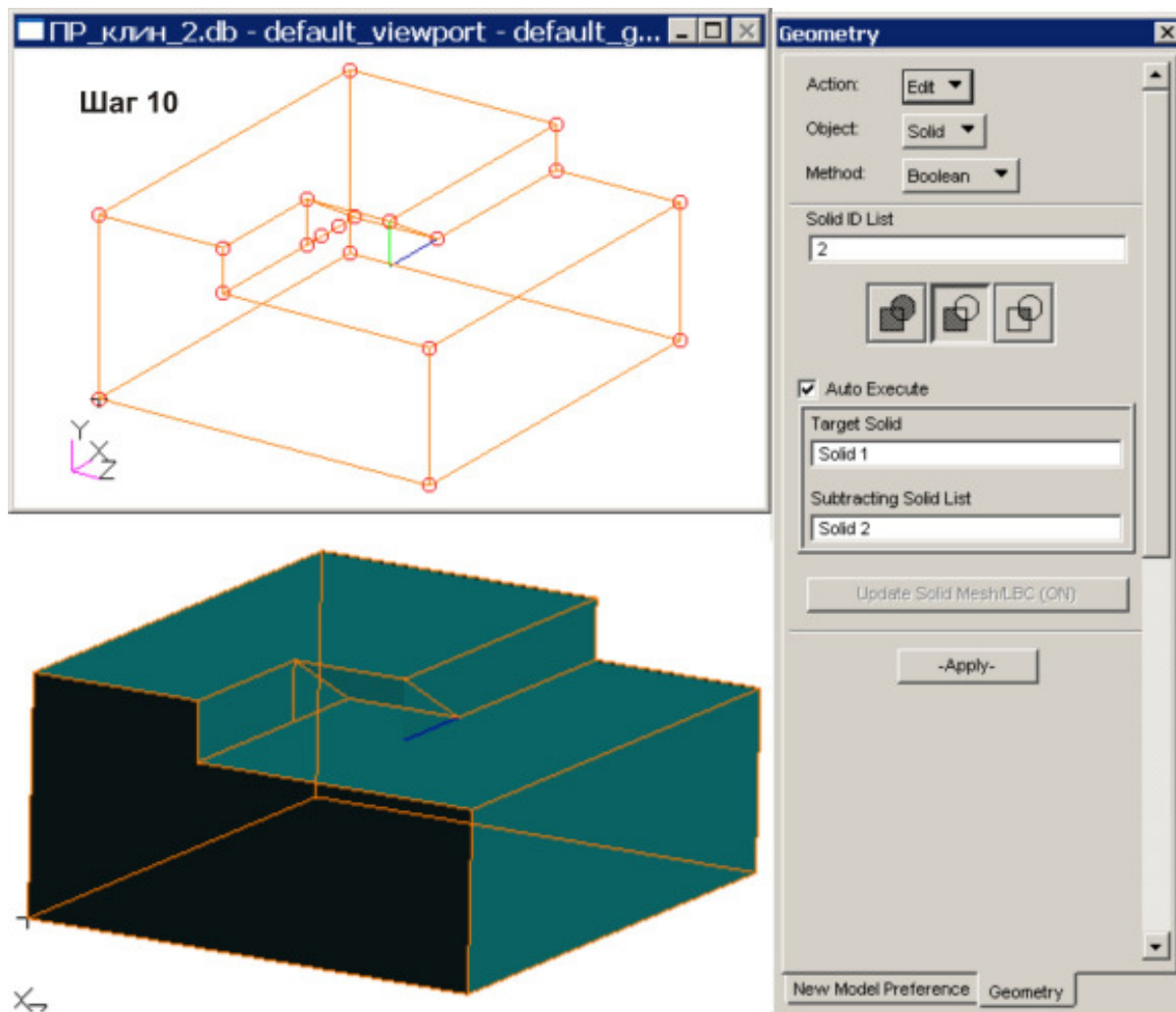


Рис.290



Нажимаем на кнопку **Обрезать** и последовательно щелкаем левой клавишей по исходной призме (в окне **Target Solid** появится запись **Solid 1**) и удаляемой призме (в окне **Subtracting Solid List** появится запись **Solid 2**) (шаг 10, рис.290).

14. Удаляем плоскость **1**. Активируем команды:

Action ► Delete
Object ► Surface.

В графическом окне щелкаем левой клавишей по плоскости **1** (шаг 11, рис.291).

15. Задаём материал (шаг 12, рис.292).

16. Задаём свойства модели (шаг 13, рис.293).

17. Создаём конечно-элементную сетку (шаг 14, рис.294, шаг 15, рис.295). Сначала в разделе **Mesh Seed** вдоль границ, где мы хотели бы иметь определенное число элементов, задаём число элементов, а затем в разделе **Mesh** устанавливаем тип элемента и их максимальный размер, задаём свойства элементов. В поле **Automatic Calculation** должен стоять флажок. Щелкаем по клавише **Apply**, в результате в автоматическом режиме будет создана конечно-элементная сетка.

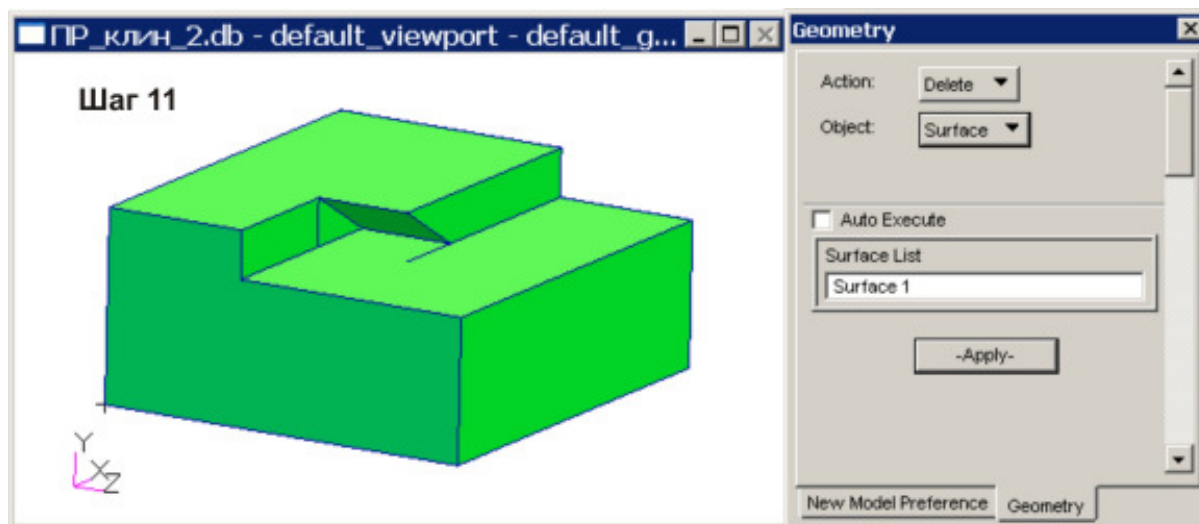


Рис.291

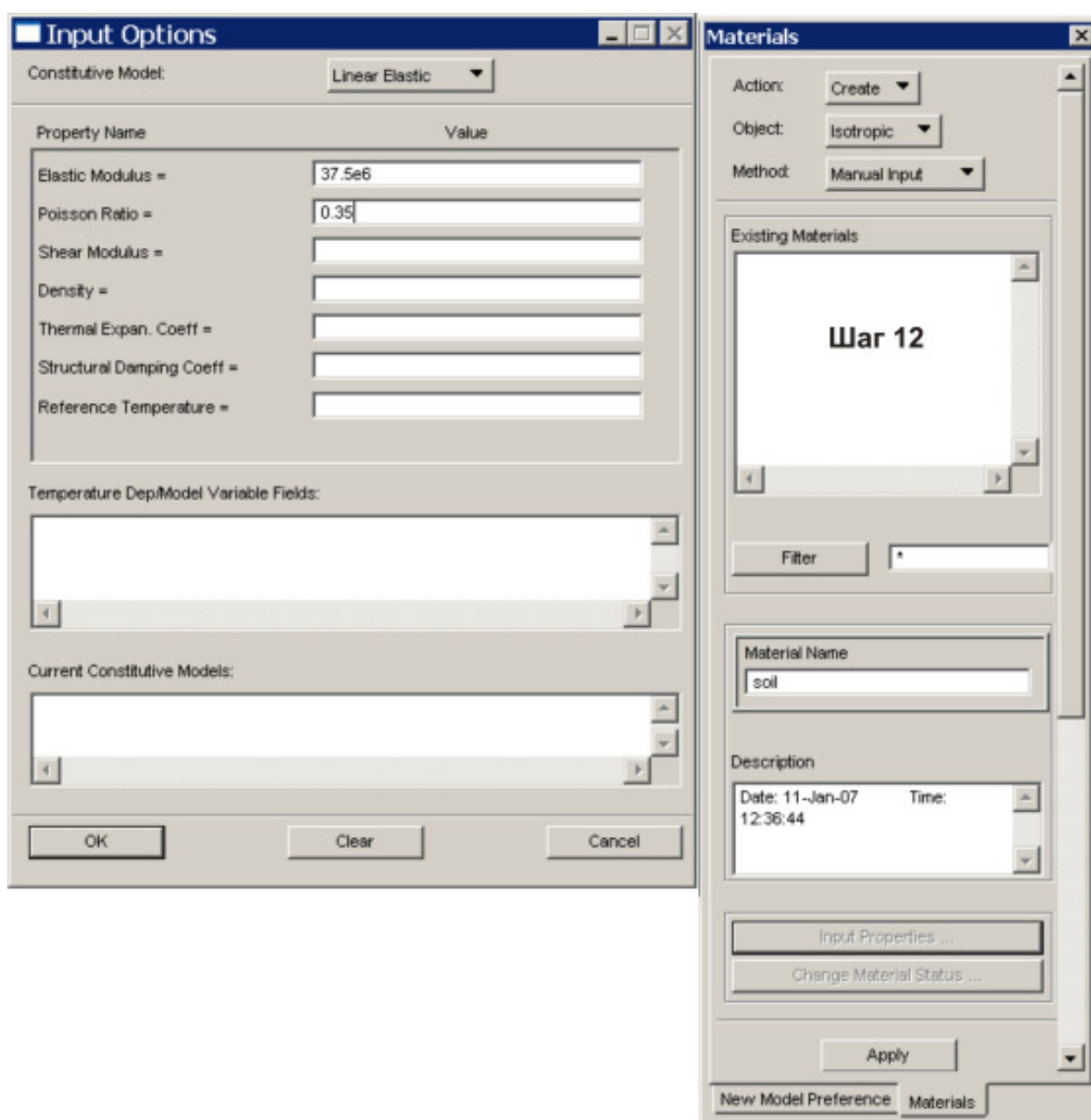


Рис.292

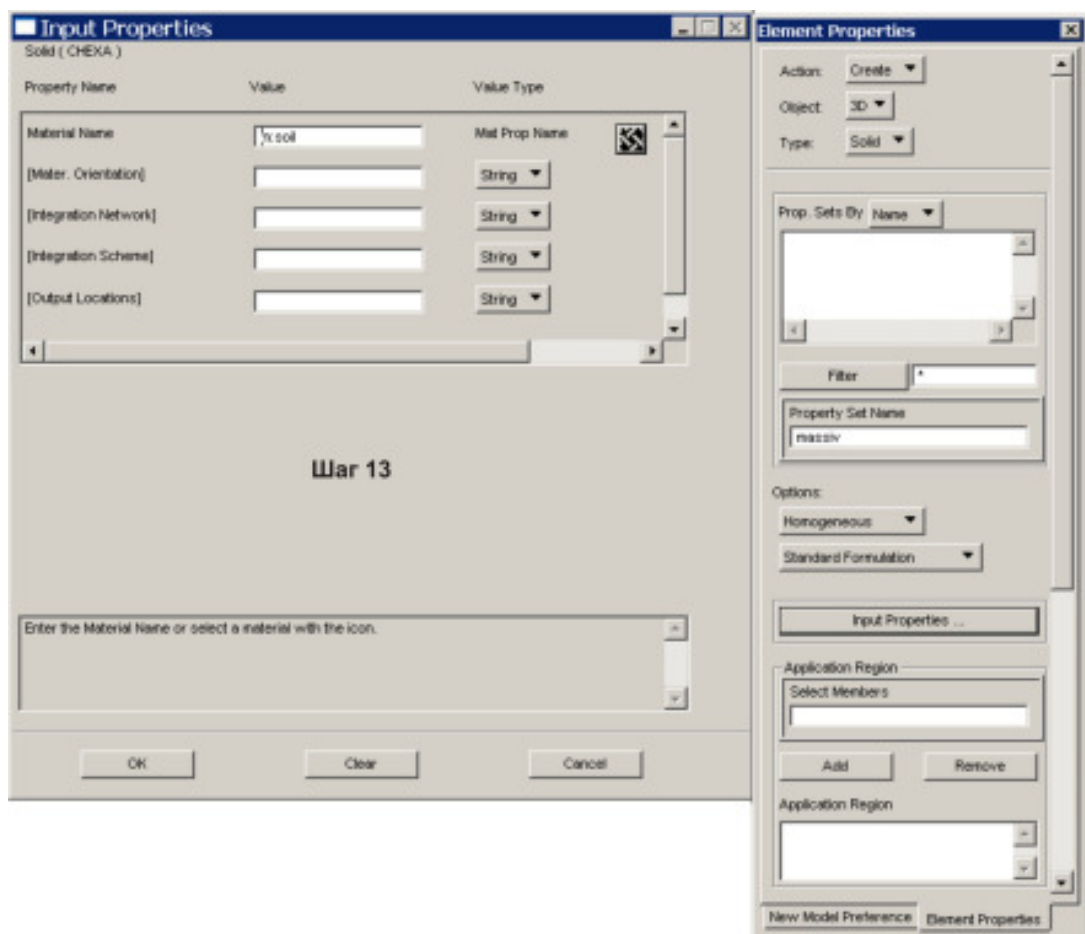


Рис.293

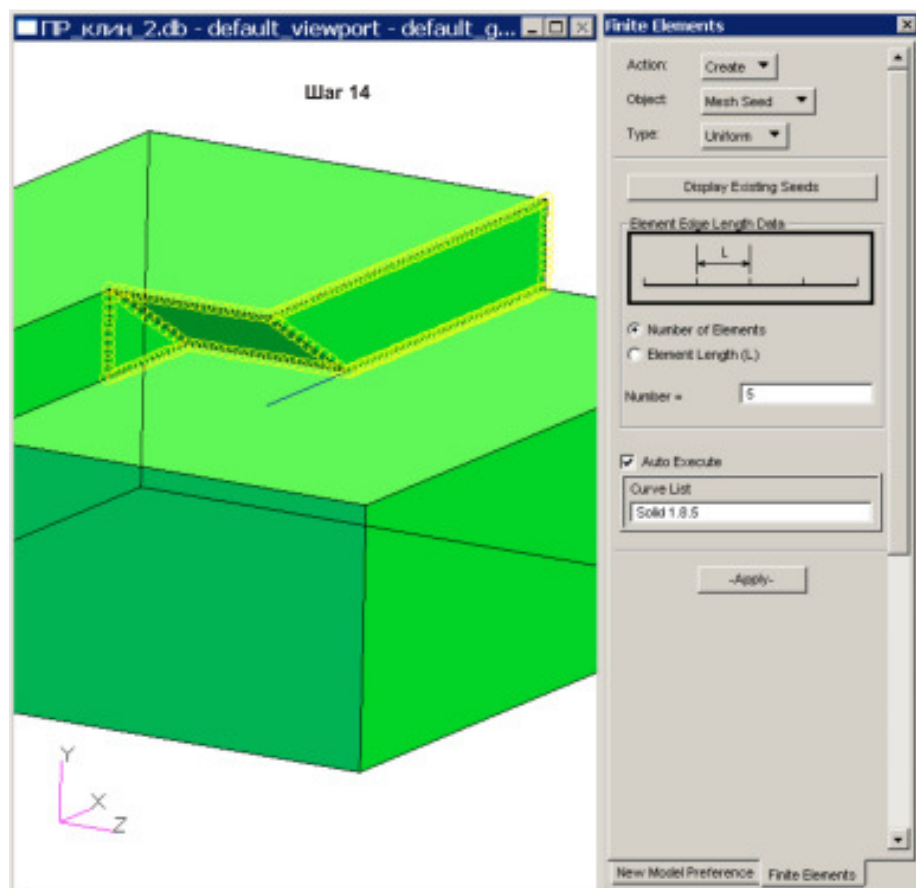


Рис.294

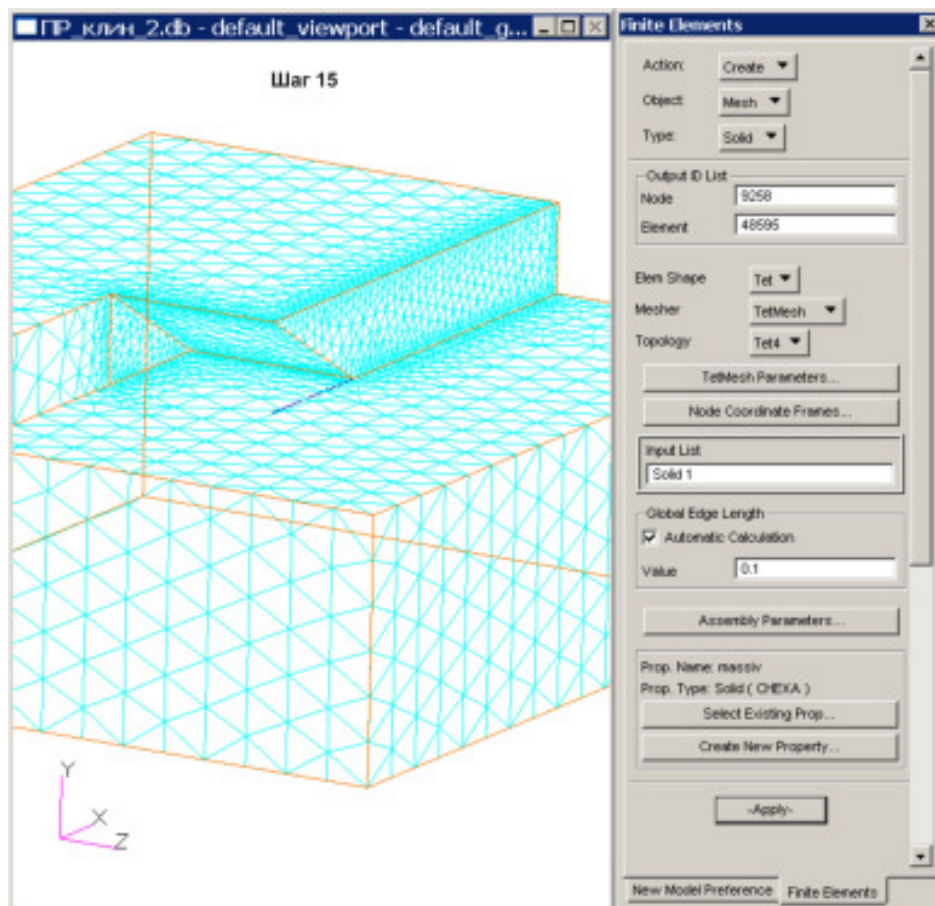


Рис.295

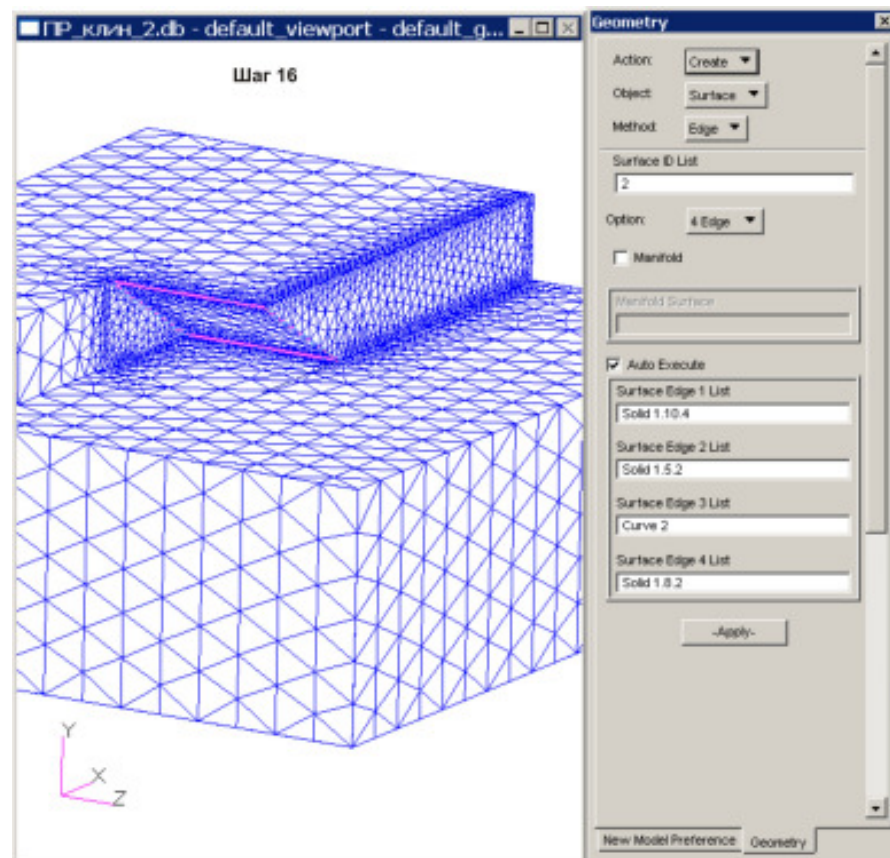


Рис.296

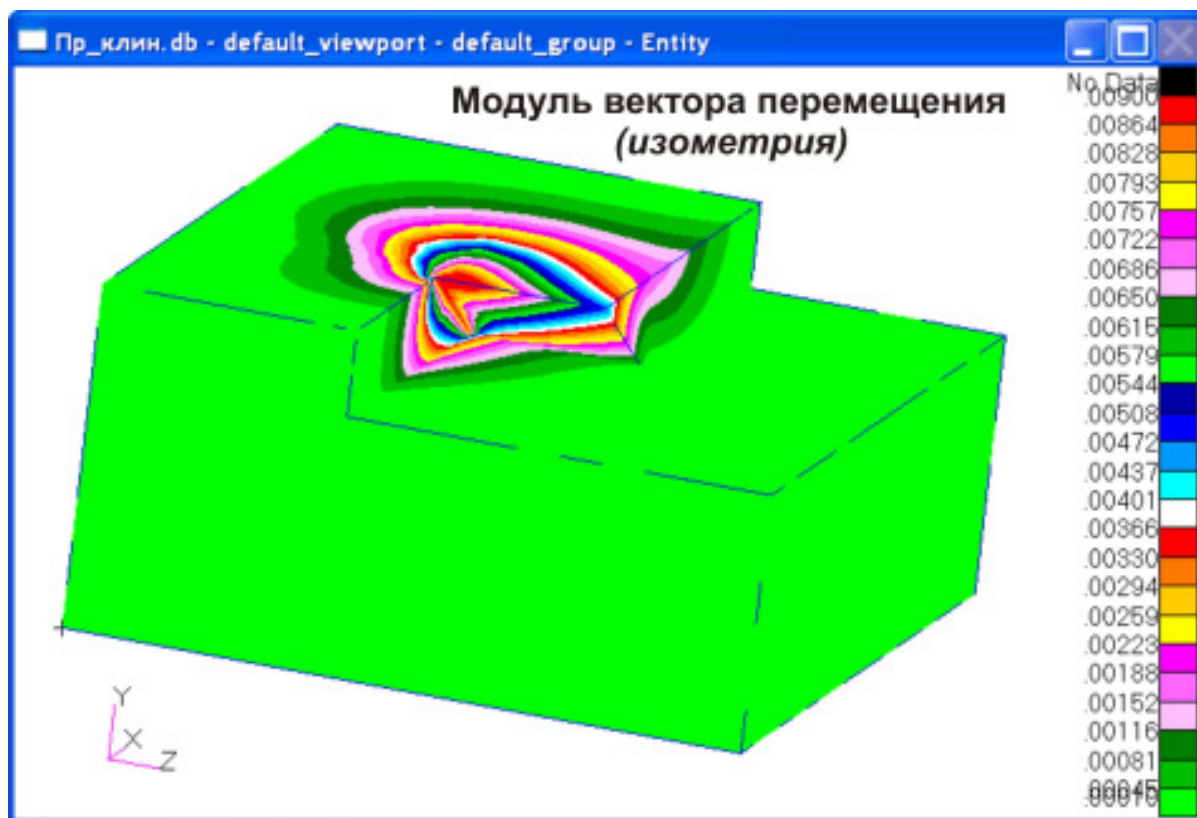


Рис.297

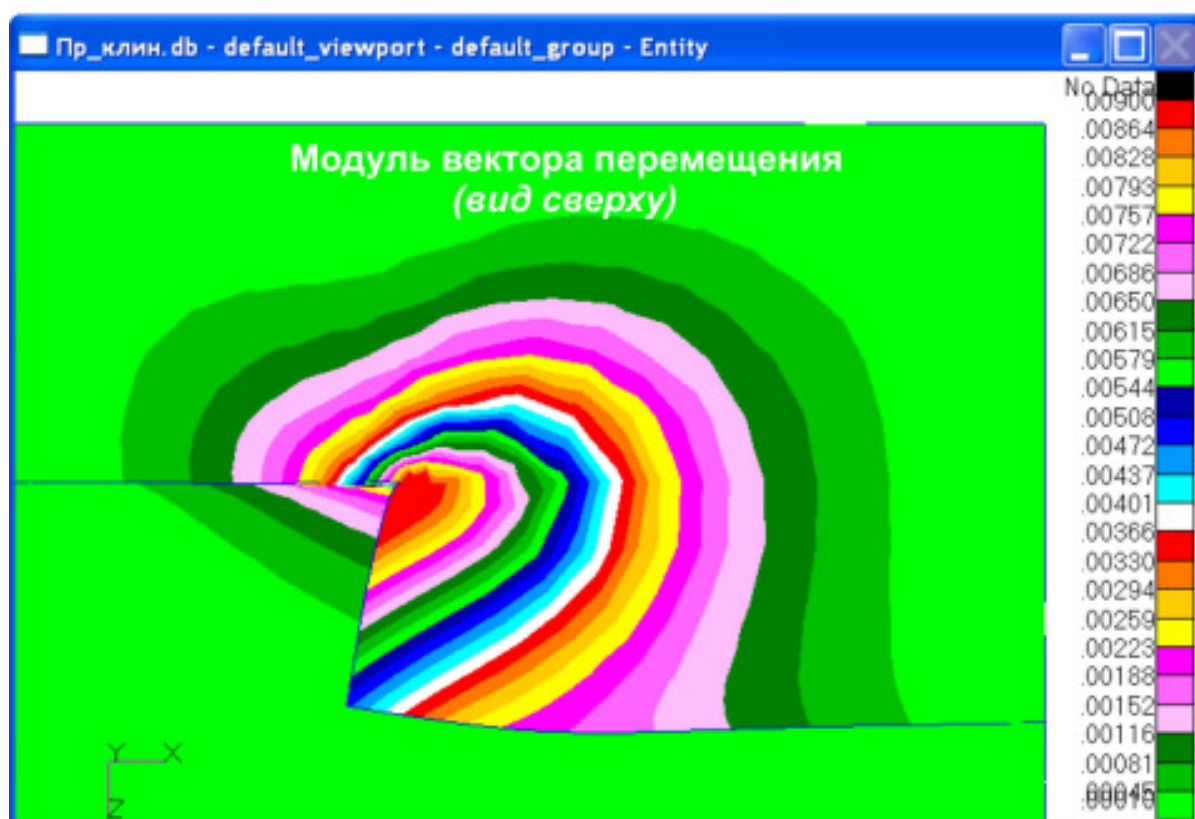
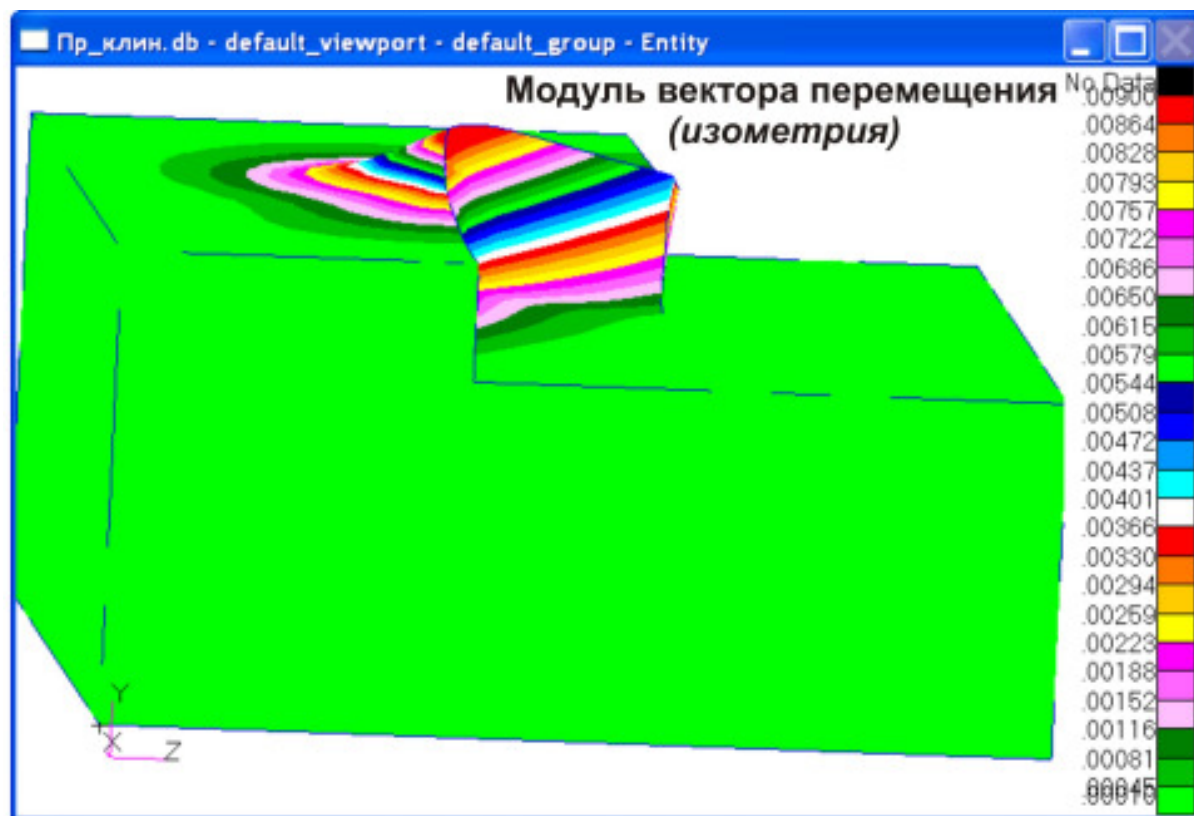


Рис.298

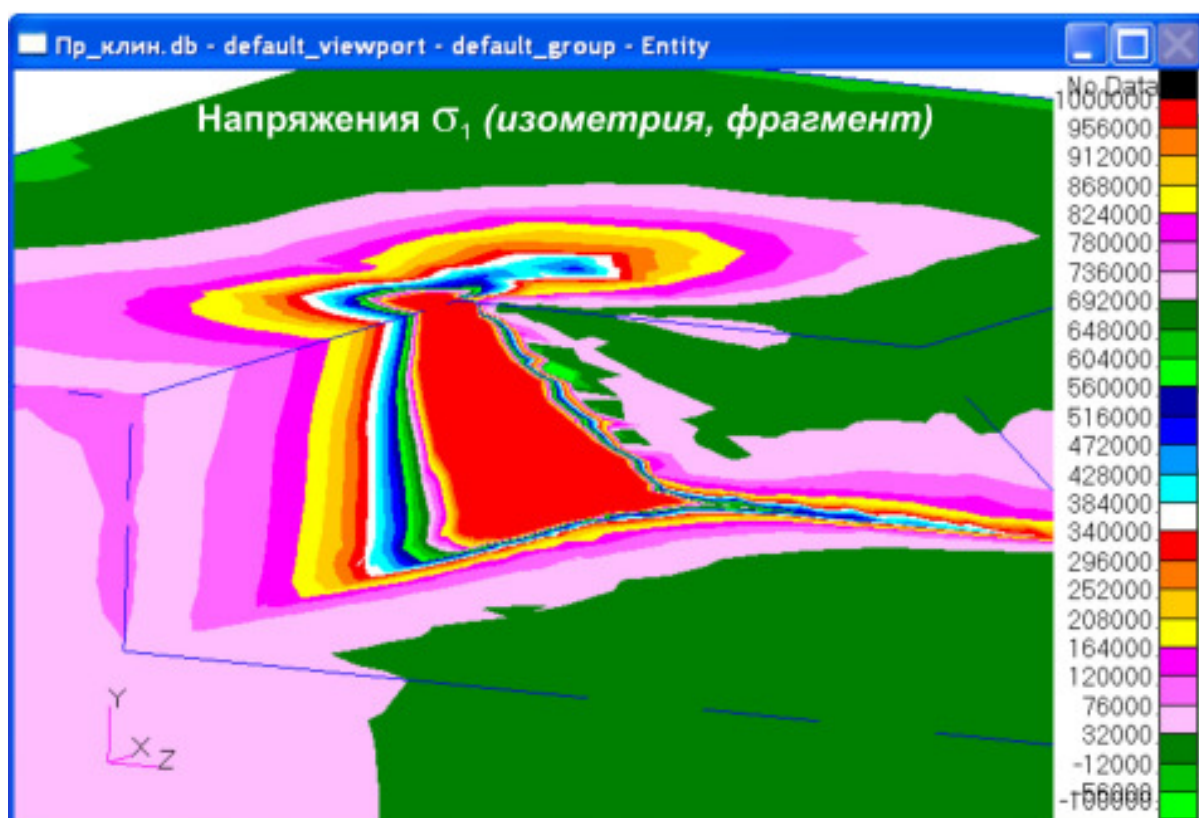
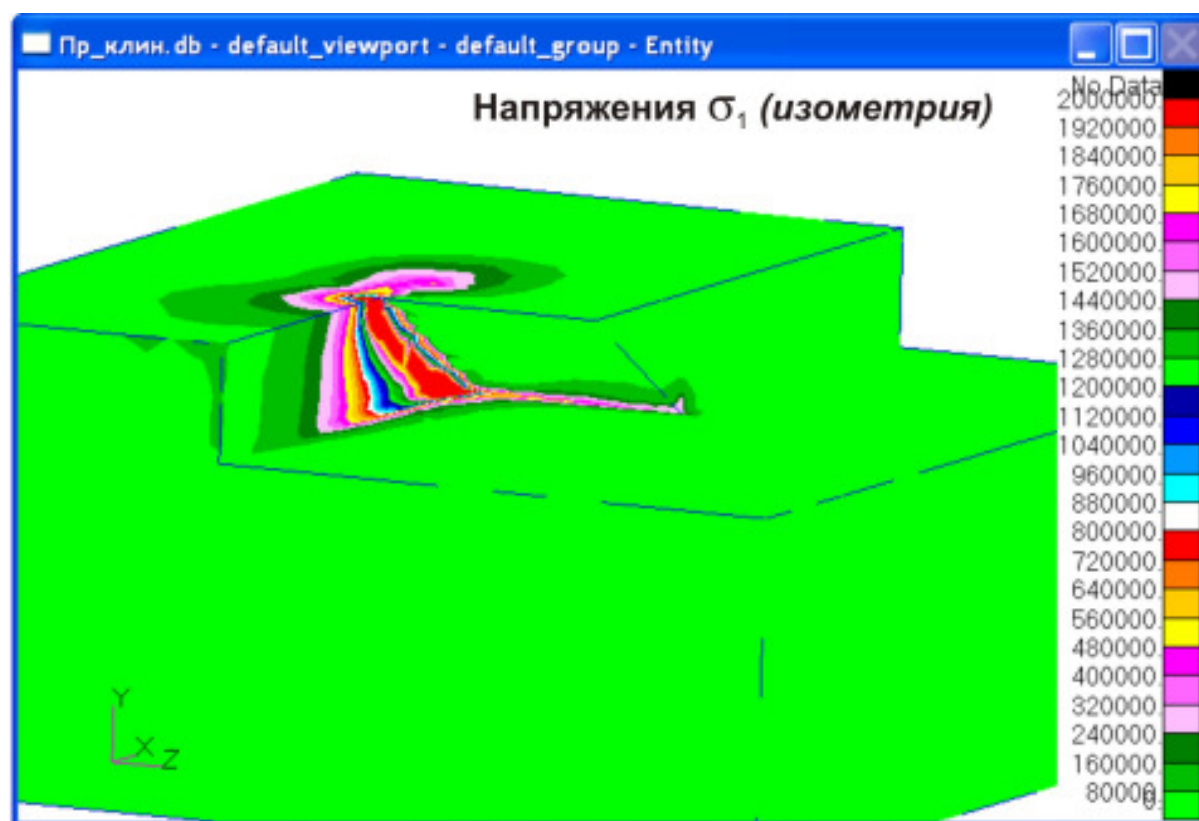


Рис.299

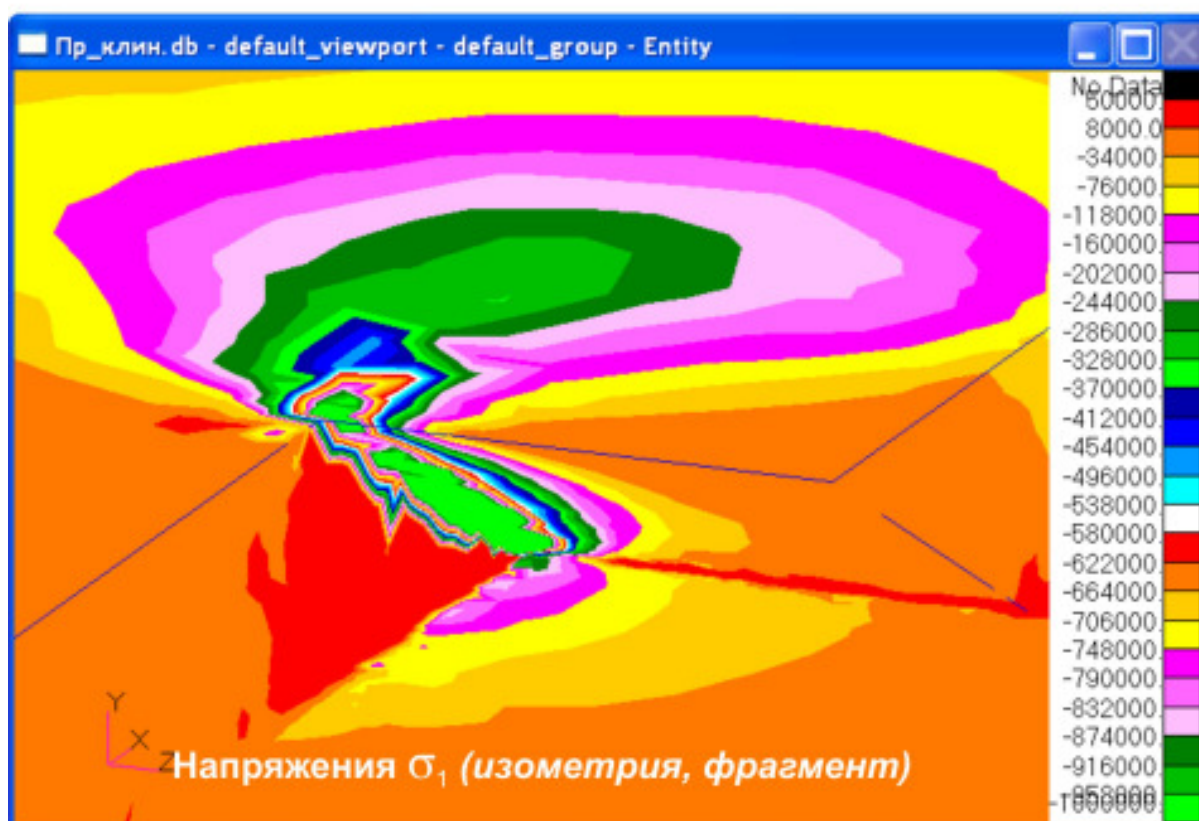
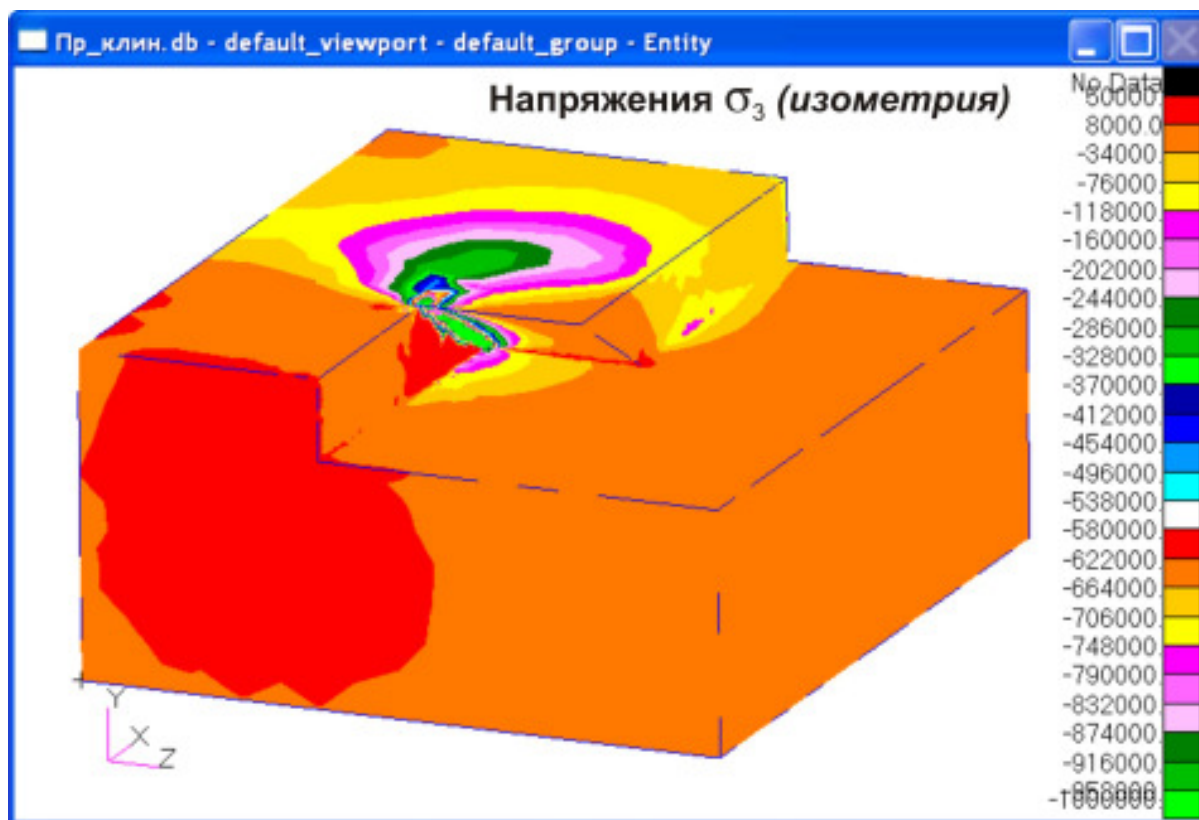


Рис.300

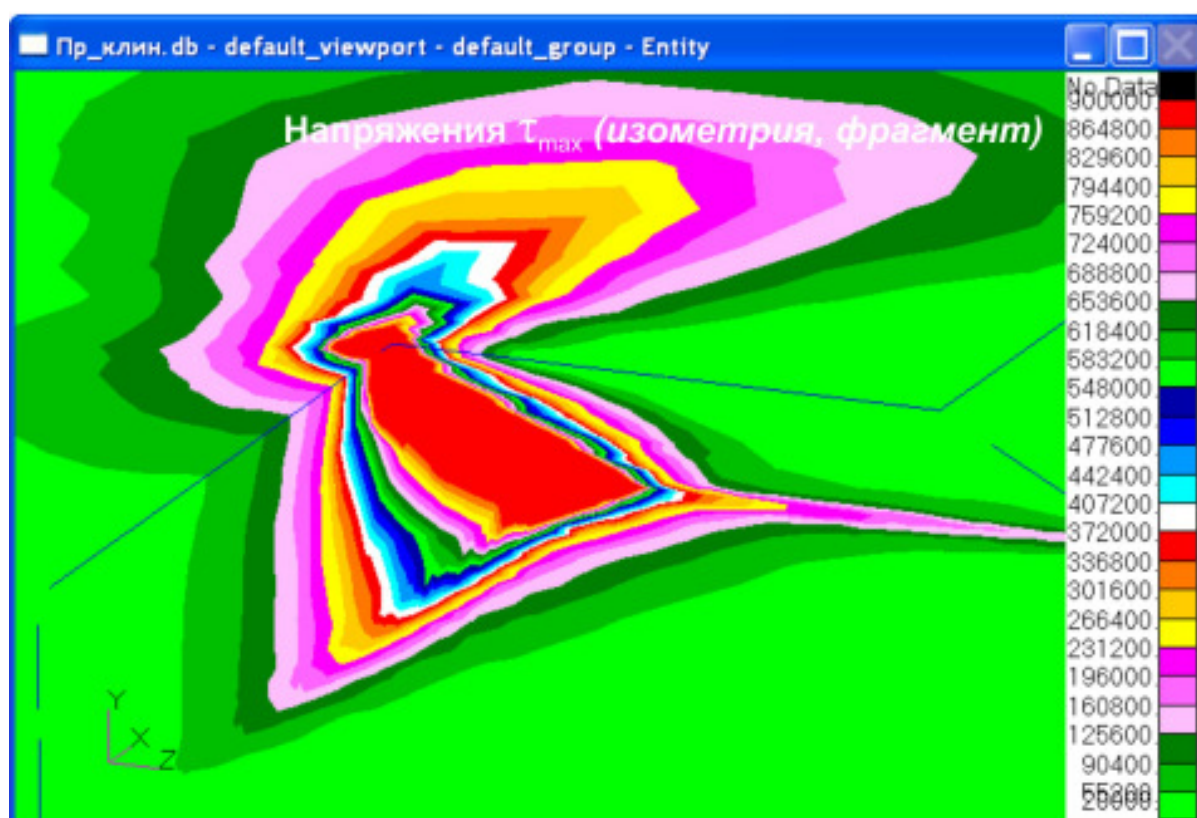
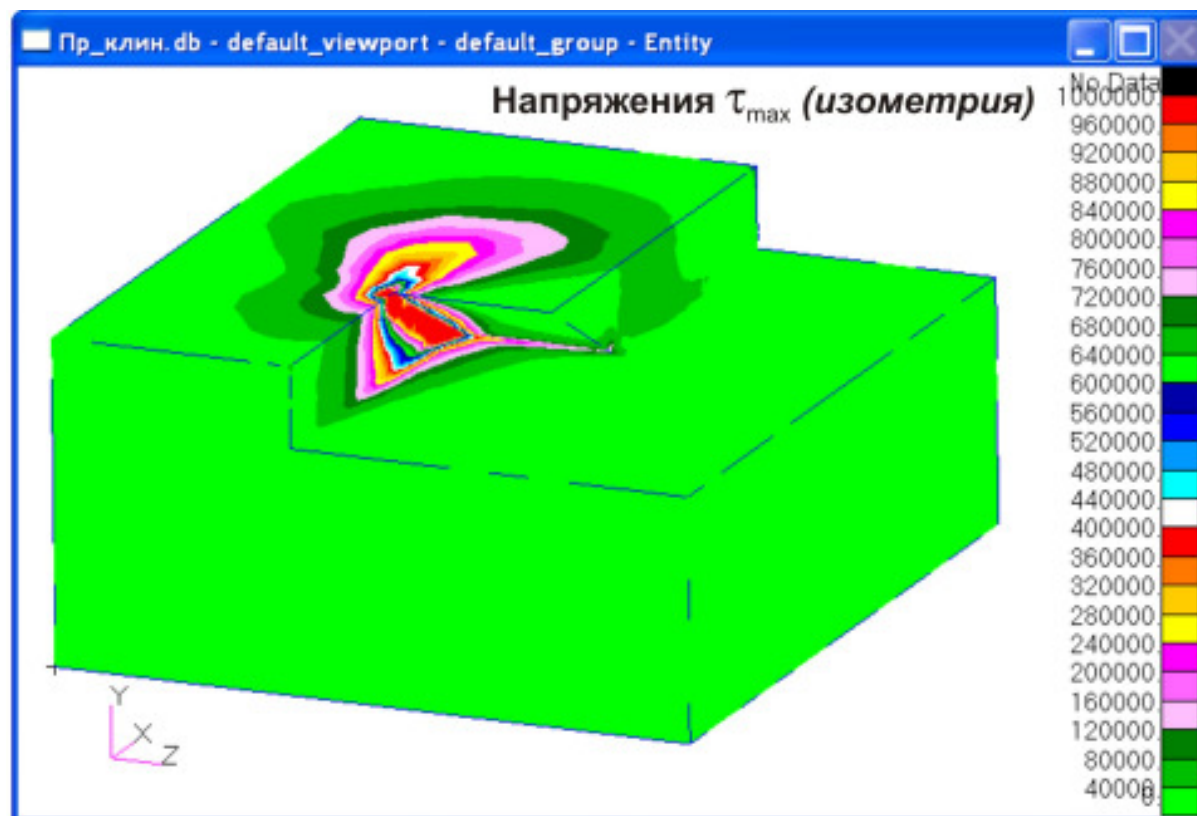


Рис.301

18. Закрепляем все грани основной призмы, находящиеся в почве, от всех перемещений.
19. По наклонной грани, взаимодействующей с клином, необходимо задать перемещения $\langle 0.00668 \ 0.0058 \ 0 \rangle$. С этой целью сначала на этой грани создадим

плоскость (**шаг 16**, *рис.296*), а затем этой плоскости зададим указанное выше перемещение.

20. В разделе **Analysis** выполняем расчет призмы.

21. В разделе **Results** анализируем результаты расчета.

На *рис.297-301* приведены изополя перемещений и напряжений. На *рис.297* приведены изополя модуля вектора перемещения, отображаемые на недеформированной модели, на *рис.298* - та же физическая величина, но отображаемая на деформированной модели. Из рисунков, отображающих напряженное состояние «почвы», следует, что наиболее напряженные зоны материала «почвы» локализируются на границе наклонной поверхности клина и дна борозды.

5.3. МЕТОДИКА РАБОТЫ С ИНСТРУМЕНТОМ INSIGHT

Возможности приложения **Insight** (*правильное представление*) в **MSC.Patran** позволяют визуализировать сложное трехмерное поведение модели. В отличие от приложения **Results**, отображающего отдельные результаты, **Insight** предназначен для их совместной оценки. Это приложение располагает множеством методов отображения результатов.

В настоящее время **Insight** является отдельной возможностью **MSC.Patran** со своим собственным экраном и своими выходными данными. Чтобы открыть это приложение, нужно нажать на кнопку **Insight** в главном меню **MSC.Patran**. Чтобы выключить его, необходимо нажать на эту кнопку повторно.

В приложении **Insight** 13 инструментов:

- **Isosurface** (*изоповерхности - поверхности постоянного значения скалярной величины или координаты*).
 - **Result isosurface** можно рассматривать как аналогию к контурному графику и заливке; это поверхность постоянных значений скалярных результатов в 3D модели.
 - **Coordinate isosurface** - это совокупность до пяти плоскостей, расположенных через равные интервалы между граничными значениями заданного отрезка изменения скалярной величины.

Изоповерхности могут быть определены в одной из трех систем координат: декартовой, цилиндрической или сферической. Другие инструментальные средства могут модифицировать инструментальные средства поверхности. Изоповерхности могут использоваться для отсечения части модели, которая в зависимости от значения, присвоенного изоповерхности, может отображаться как невидимая, прозрачная, каркасная или затененная.

- **Streamlines** (*линии тока*). Отслеживание траектории из одной или более точек через векторное поле. Траектория строится на основе векторных величин, определенных в узлах.
- **Stream Surfaces**. Поверхности вдоль линий тока векторного поля.
- **Threshold**. Представляет поверхности, обрезающие части модели выше и ниже контрольного значения, отображая внутреннее поведение модели.
- **Fringe**. Цветная заливка, сходная с возможностью приложения **Result**.
- **Contour plot**. Это сеточное представление информации, содержащейся в заливке. Цвет контура показывает расположение постоянных значений скалярных результатов, заключенных в определенном диапазоне. Такое представление можно совмещать с другими возможностями **Insight** для лучшего понимания трехмерного поведения модели.
- **Element**. Элементы раскрашиваются в соответствии со значениями результатов. Эта возможность отслеживает разрывы в результатах и усредняет результаты по центру элемента.

- **Tensor.** Отображает символы, соответствующие тензорным величинам.
- **Vector.** Отображает символы, соответствующие векторным величинам.
- **Marker.** Отмасштабированные по цвету символы, представляющие скалярные результаты.
- **Value.** Показывает текстовое отображение скалярных, векторных и тензорных результатов выбранной точки модели.
- **Deformation.** Создает график деформированных форм модели.
- **Cursor.** Присоединяет результаты к мышке на экране.

Алгоритм работы в режиме **Insight**

1. Открываем приложение **Insight**, нажав на кнопку **Insight** в главном меню **MSC.Patran** (рис.302).
2. В открывшейся панели выбираем команды (рис.303, шаги1-3):
Action ► Create ;
Tool ► Isosurface ;
Isosurface value ► Coord.
3. Нажимаем клавишу: **Coordinate selection** (рис.303, шаг 4).
4. В открывшейся панели выбираем координатную ось, перпендикулярную предполагаемому сечению (рис.304, шаг 5), в окне **Starting value** устанавливаем значение координаты (уравнение плоскости $z = 0.6$) (рис.304, шаг 6) и нажимаем клавишу **OK** (рис.304, шаг 7).
5. Нажимаем клавишу **Isosurface Attributes** (рис.303, шаг 8).
6. В открывшейся панели устанавливаем флажок **Clip at Isosurface** (рис.304, шаг 9), из списка **Display** выбираем команду **Free Edge** (рис.304, шаг 10) и нажимаем клавишу **OK** (рис.304, шаг 11).
7. Нажимаем клавишу **Apply** (рис.303, шаг 12), в рабочем поле **Insight** появляется обрезанная указанной плоскостью модель (рис. 305).
8. Из списка **Tool** выбираем команду **Fringe** (рис.306, шаг 13) и нажимаем клавишу **Results Selection** (рис.306, шаг 14). Появится одноименная панель (рис.306), в верхнем окне которой выбираем случай нагружения (шаг 15), нажимаем клавишу **Update Results** (шаг 16), в нижнем окне панели **Results Selection** появляются доступные для визуализации результаты, один из которых и выбираем (шаг 17). Нажимаем клавишу **OK** (шаг 18). Появится панель **Results Options**, на которой в окне **Current Result** выбираем результата расчет (рис.307, шаг 19), и из списка **Transform Method – Max Shear** (шаг 20). Нажатие на клавишу **OK** приведет к появлению исходной панели **Insight Imaging** (рис.306).
9. Нажимаем клавишу **Fringe Attributes** (рис.306, шаг 22).
10. В открывшейся панели **Fringe Attributes** устанавливаем флажок **Edge Display** (рис.307, шаг 23), толщину линии (шаг 24) и нажимаем клавишу **OK** (шаг 25).
11. Из списка **Target** выбираем команду **Isosurfaces** (рис.308, шаг 26), в окне **Target Isosurfaces** выбираем имя рисунка (шаг 27) и нажимаем клавишу **Apply** (шаг 28). В результате в окне **Insight** на исследуемой плоскости появятся полосы и линии уровня физического параметра модели.
12. Для того чтобы получить несколько сечений модели одновременно, необходимо после нажатия клавиши **Coordinate selection** (рис.303) в открывшейся панели выбрать: координатную ось, перпендикулярную предполагаемым сечениям (рис.309 б, шаг 5); в окне **Starting value** установить значение координат начальной (шаг 6_1), а в окне **Ending value** - значение координат конечной (шаг

6_2) плоскостей; задать число плоскостей (**шаг 6_3**) и нажать клавишу **ОК** (**шаг 7**). Появится изображение указанных сечений (рис.309 а).

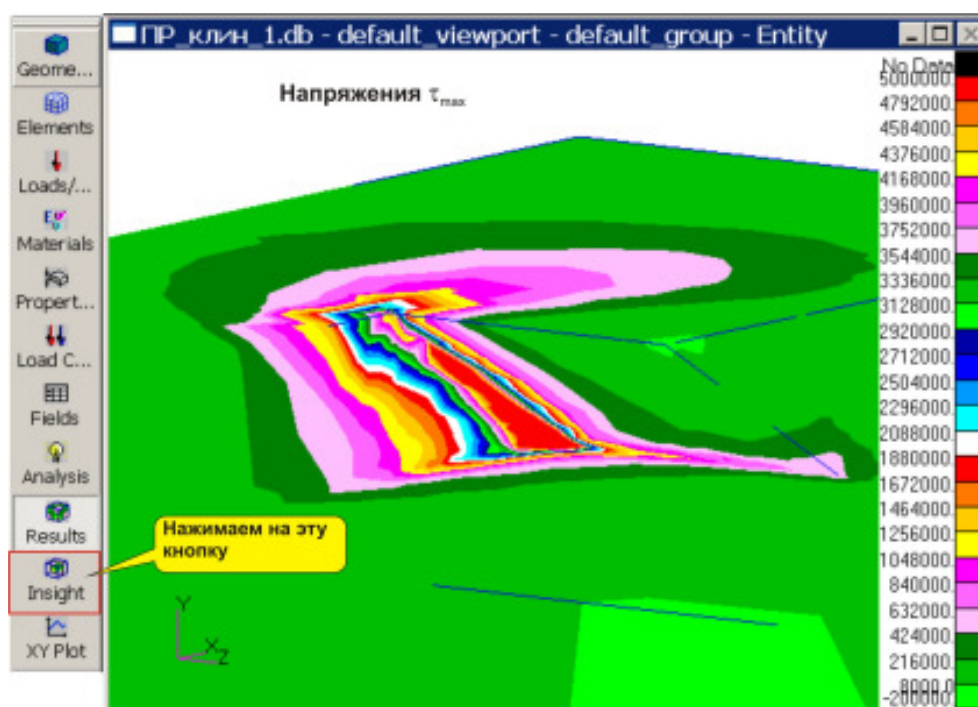


Рис.302

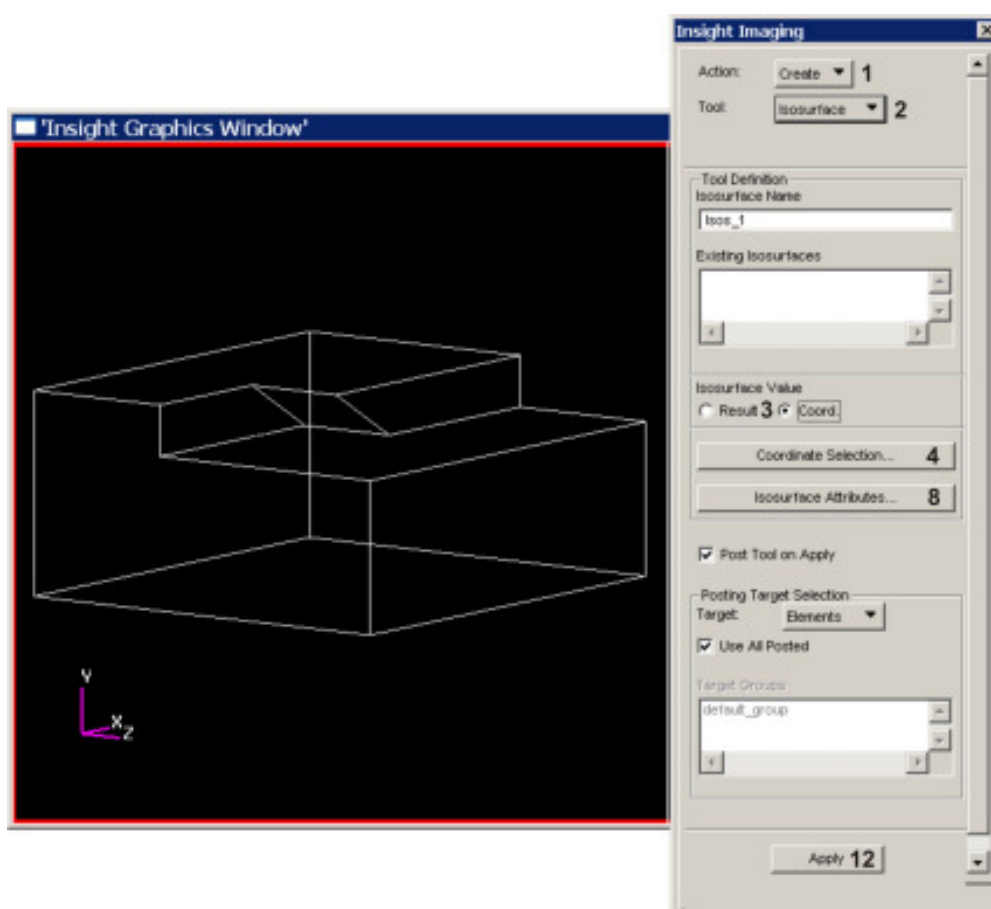


Рис. 303

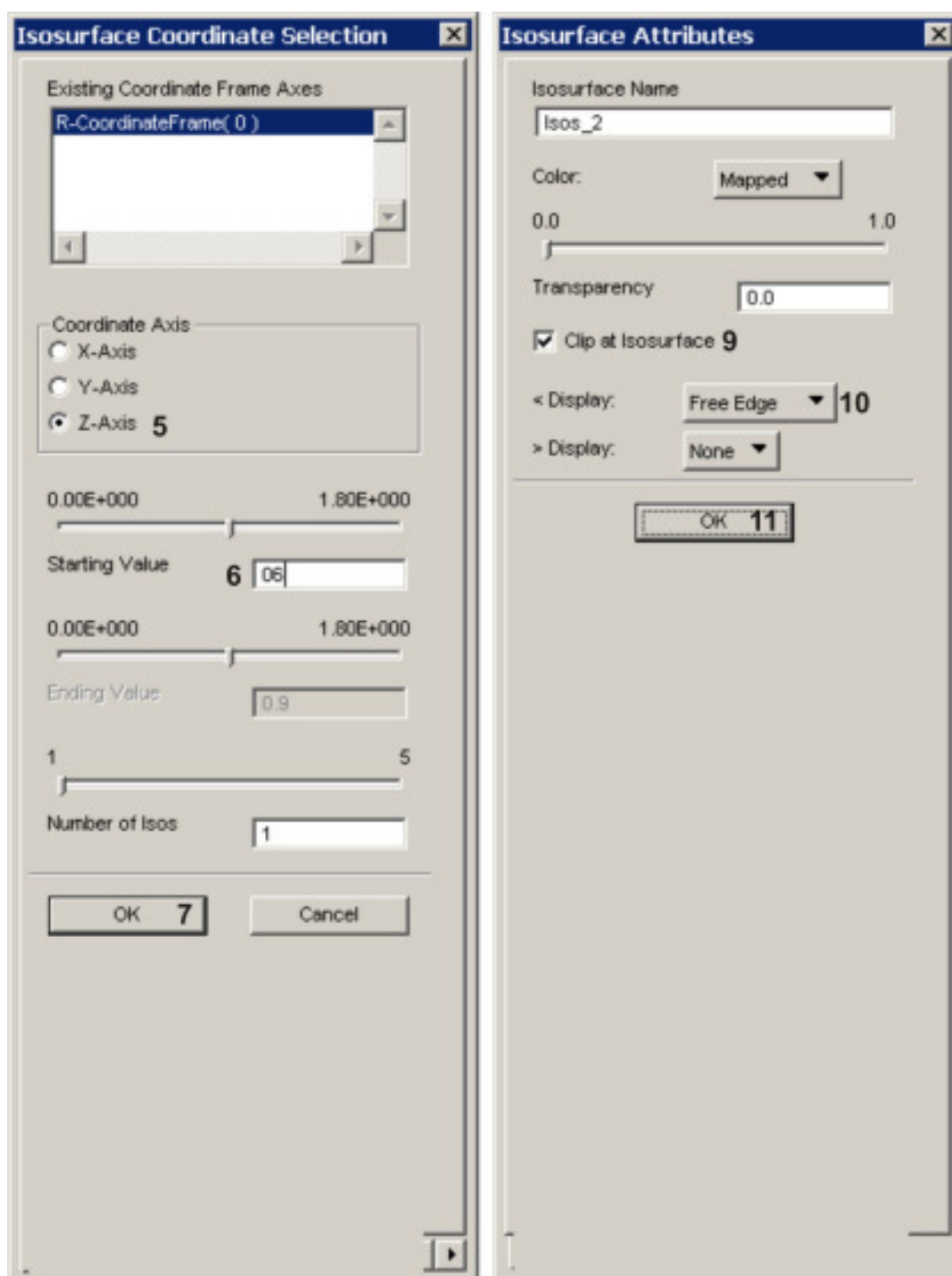


Рис.304

13. После выполнения пунктов 5-12 на экране дисплея появится изображение указанных сечений с линиями уровня исследуемого физического параметра модели (рис.310). Диапазон физического параметра, для которого строятся линии уровня, устанавливается в меню **Insight Control** (рис.311).

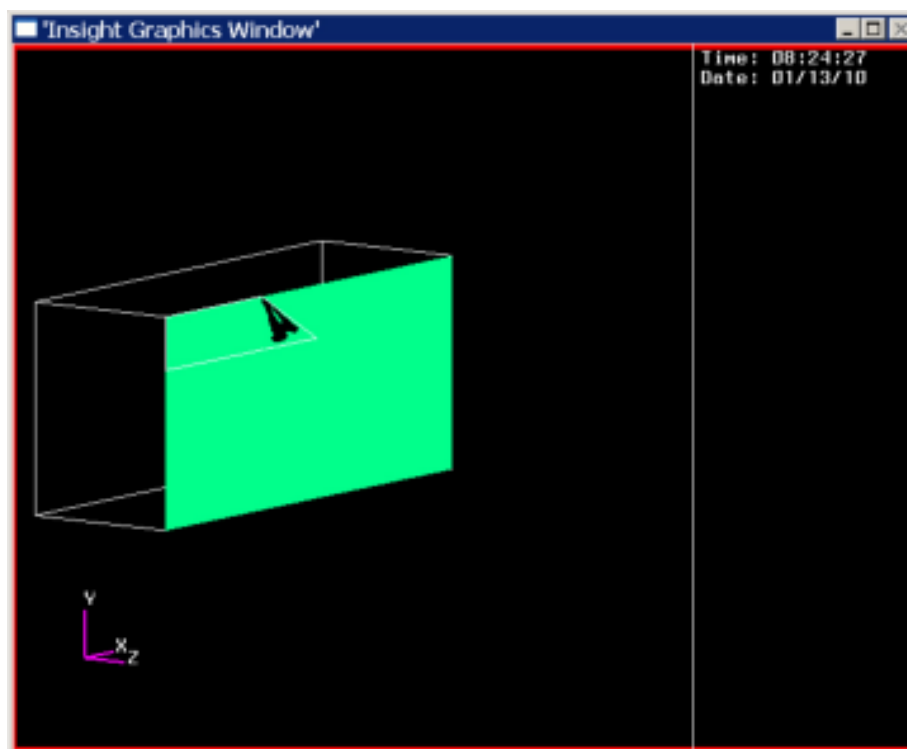


Рис.305

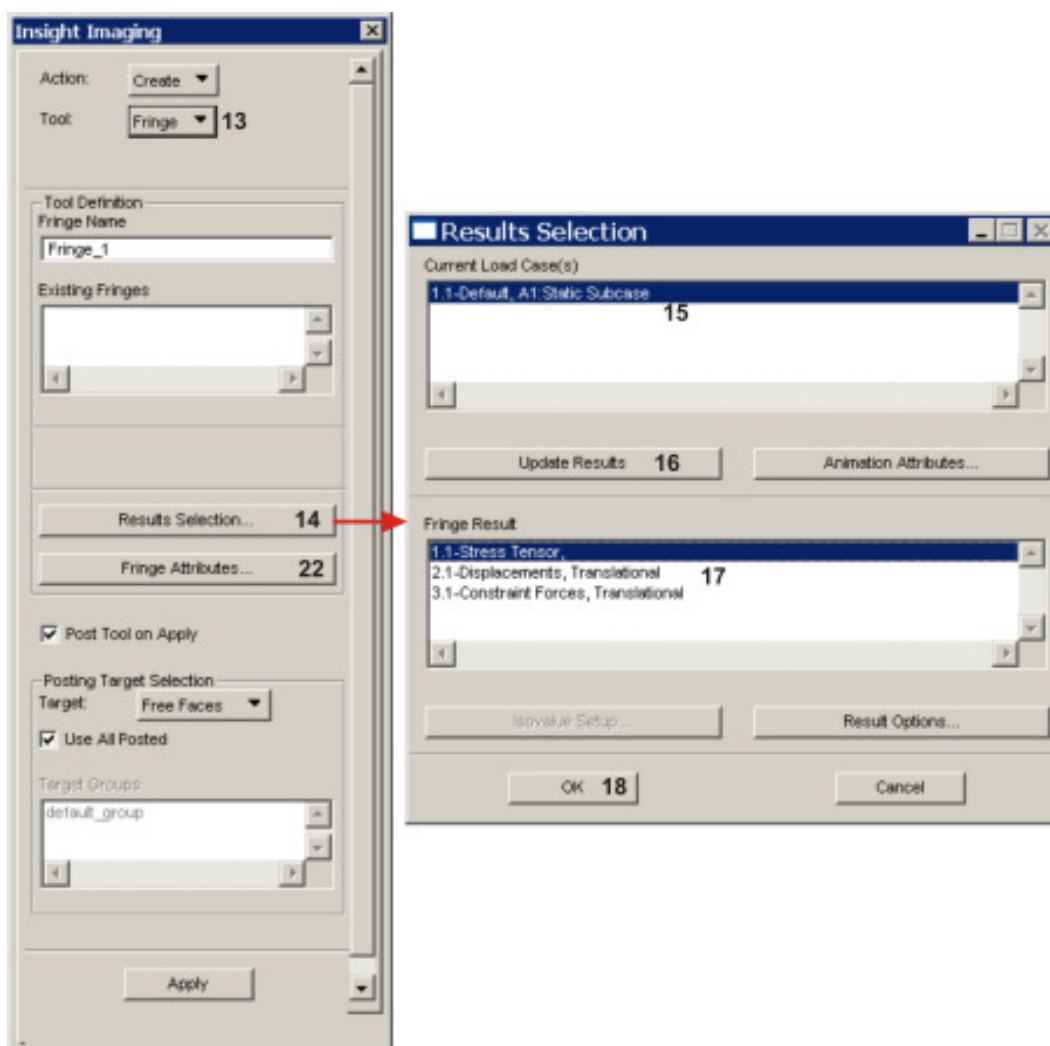


Рис.306

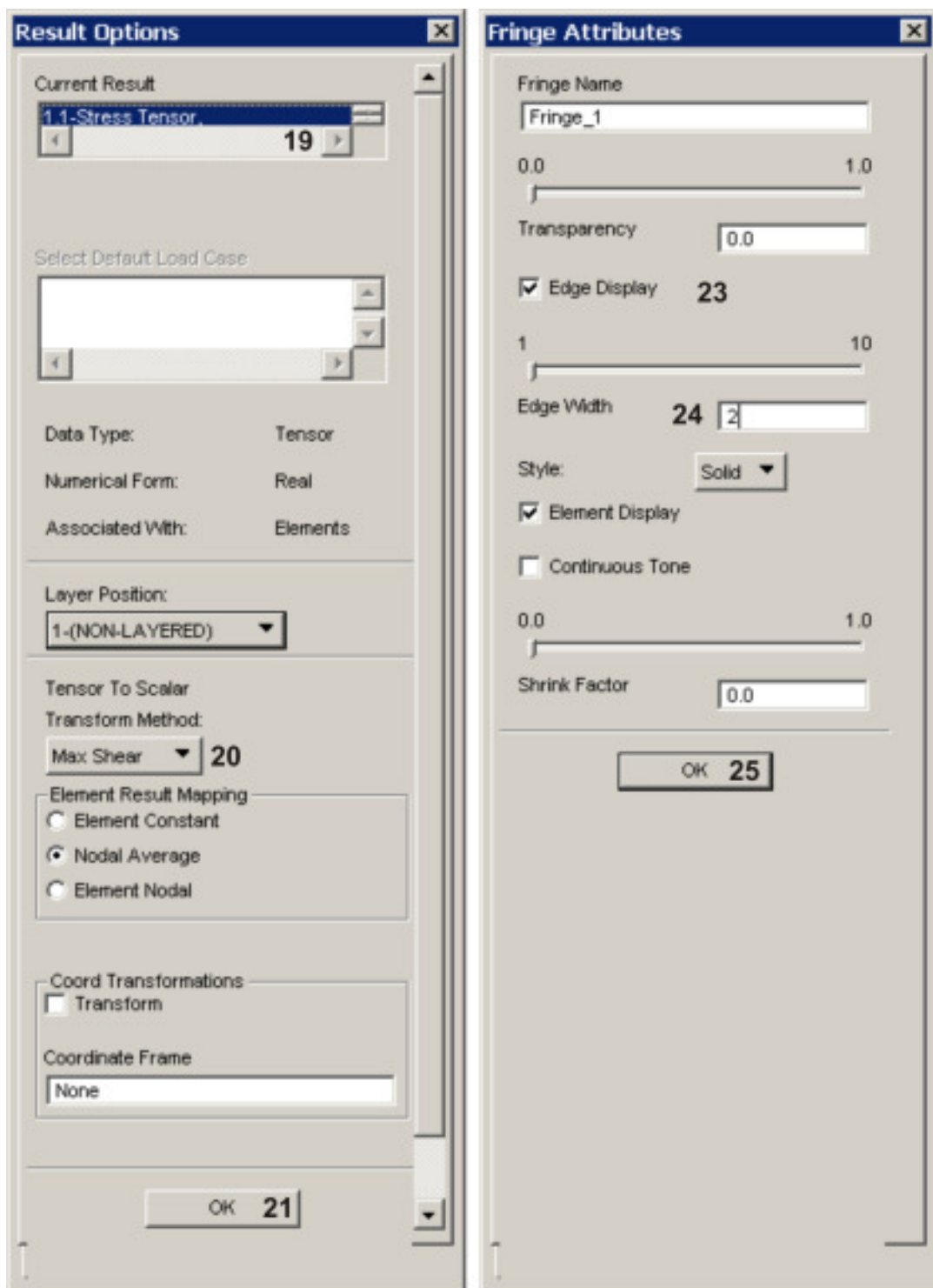


Рис.307

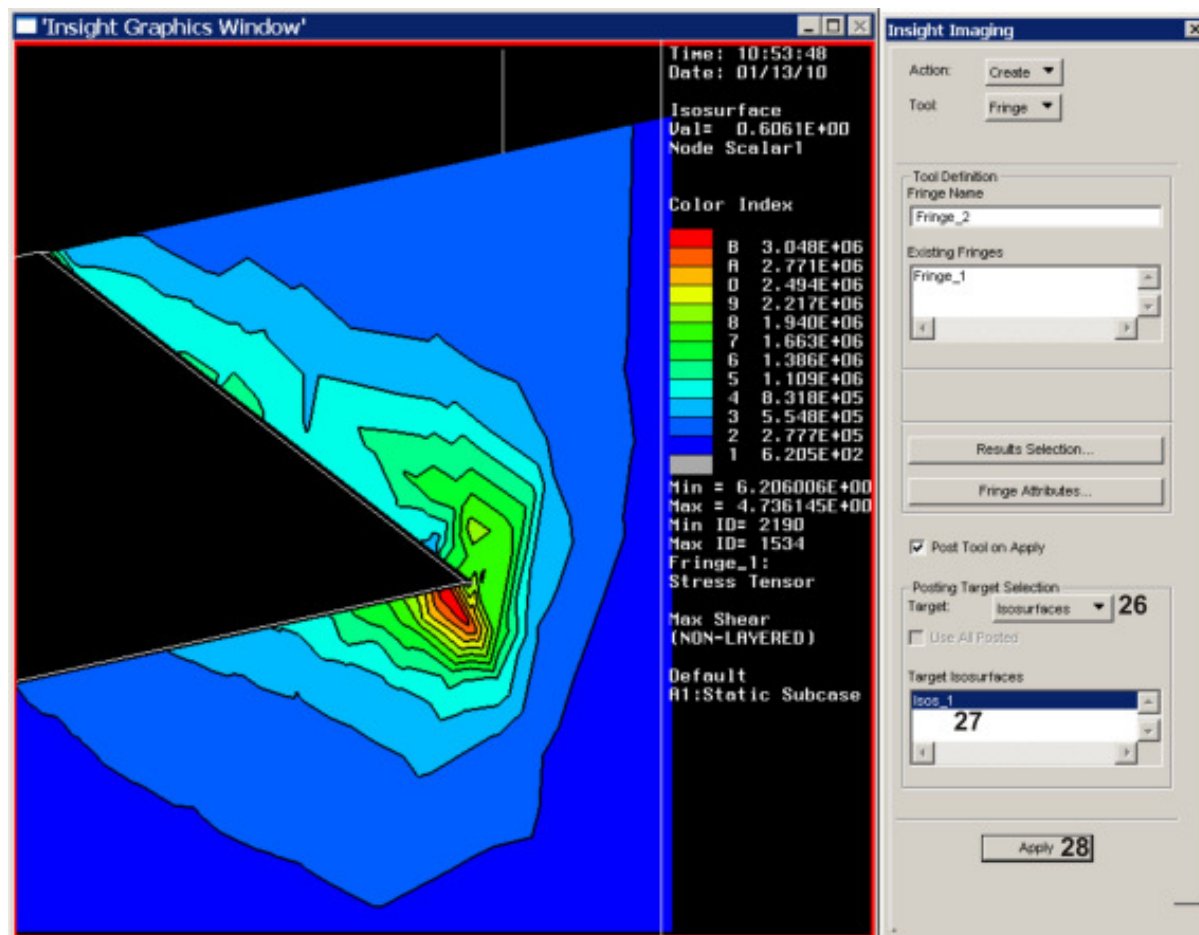


Рис.308

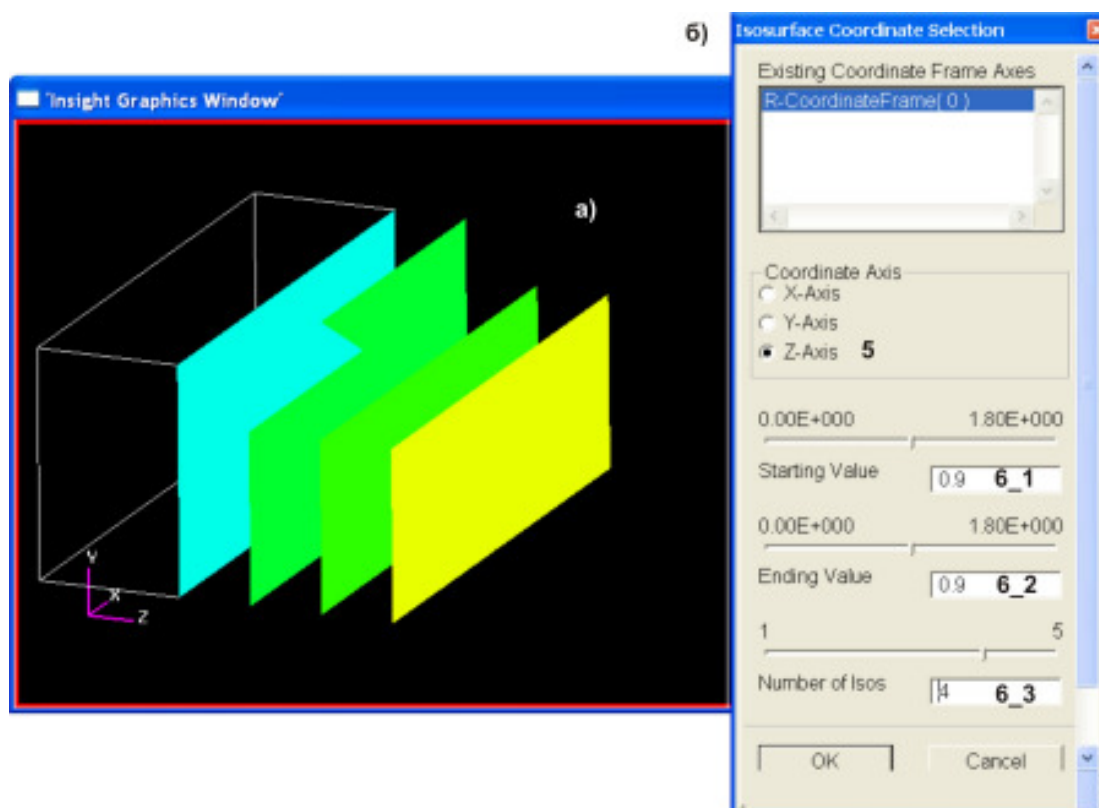


Рис.309

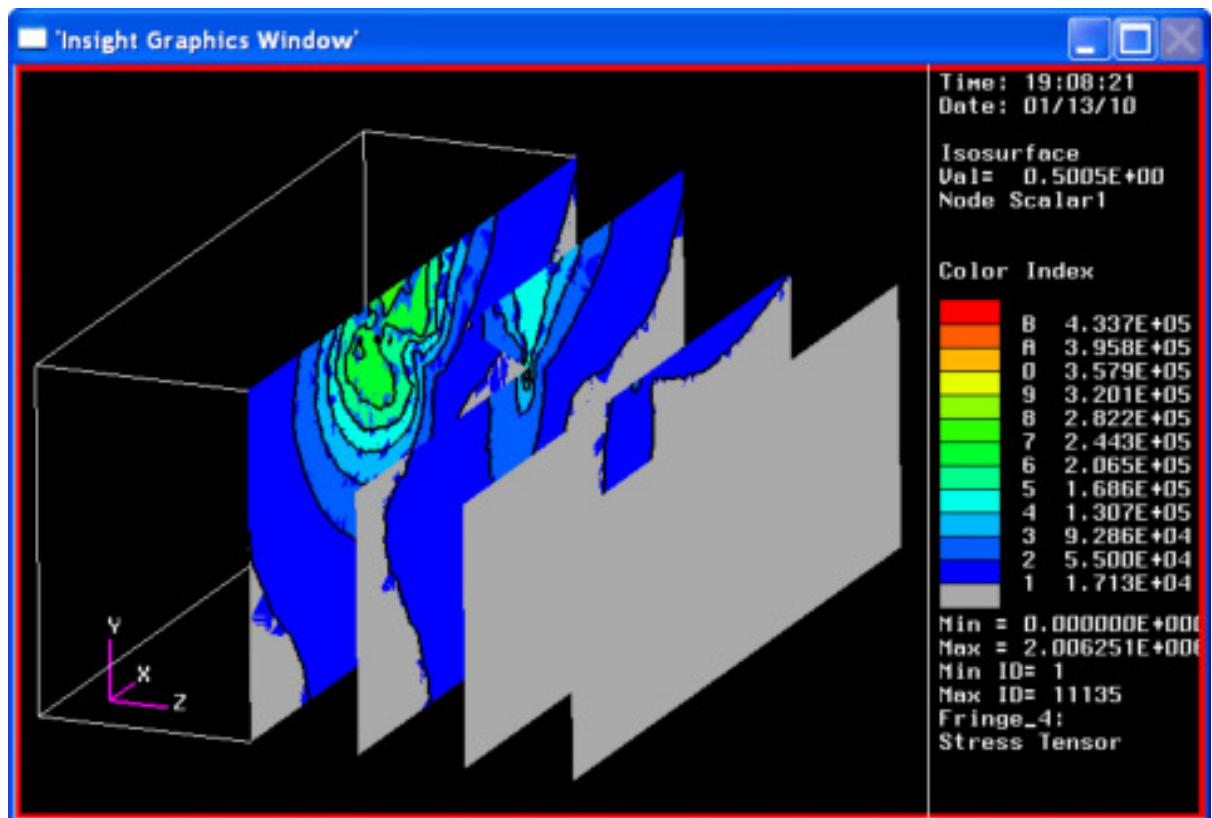


Рис.310

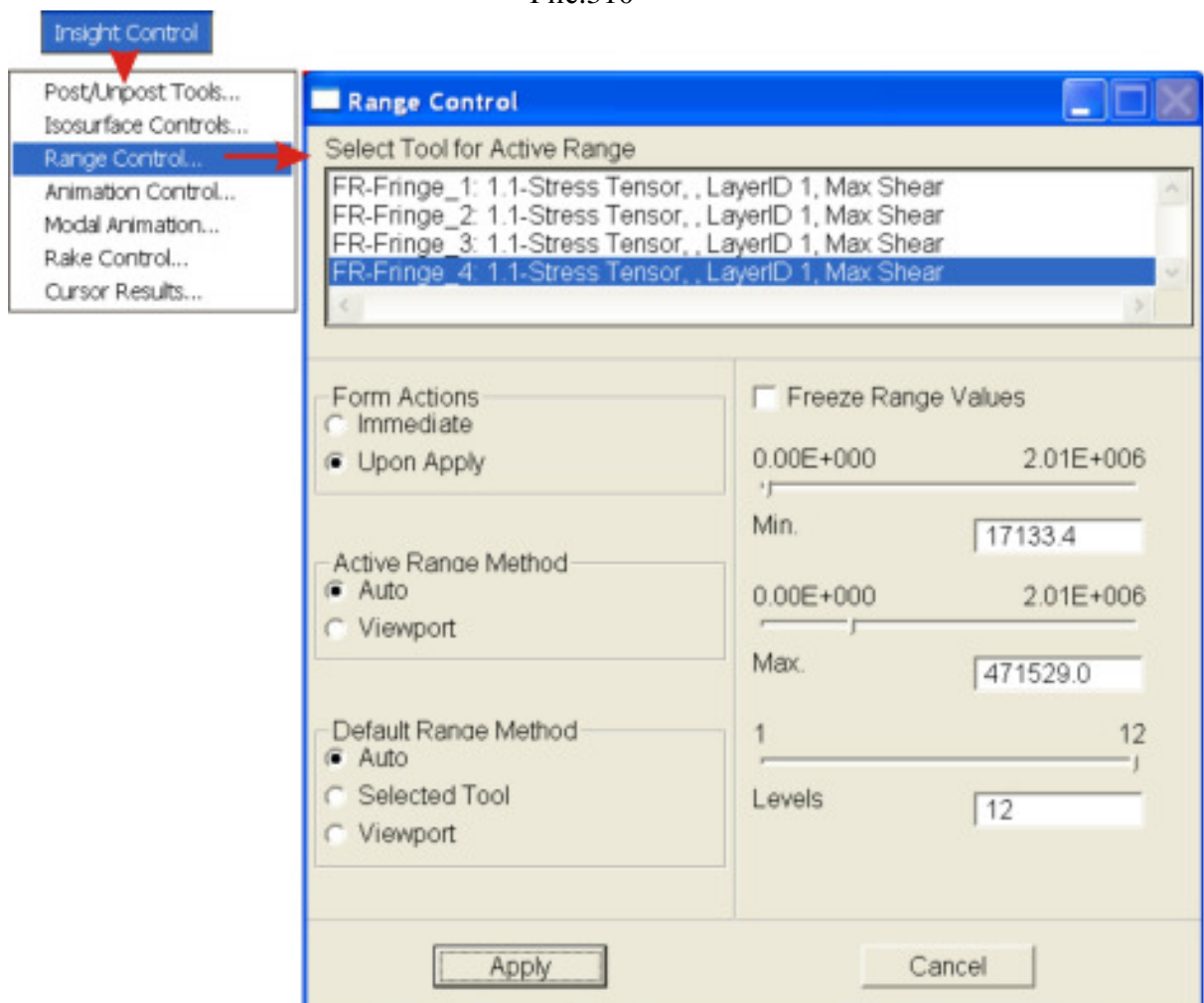


Рис.311

6. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

6.1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

В зависимости от соотношения размеров поперечного сечения различают два типа стержней. В стержнях первого типа указанные размеры - величины одного порядка. Ко второму типу относятся стержни, у которых размеры поперечного сечения в одном направлении (толщина стенок) малы по сравнению с размерами в другом направлении (ширина стенок); такие стержни называются тонкостенными. Тонкостенный стержень характеризуется тем, что все три его измерения - величины разных порядков: толщина стенки значительно меньше длины контура сечения, а последняя значительно меньше длины оси стержня.

В сельскохозяйственном машиностроении большое распространение получили тонкостенные стержни и оболочки. Широкое распространение тонкостенных гнутых открытых профилей, приводящее к более эффективному использованию металла и снижению металлоемкости машин, объясняется рядом их преимуществ перед прокатными профилями:

- возможность получения тонкостенных профилей от **0,2 мм** и выше;
- возможность изготовления профилей практически любой сложной формы, оптимальных размеров, переменного сечения по длине стержня;
- более высокая точность изготовления формы и размеров профиля и др.

Тонкостенные стержни, как и стержни первого типа, разделяются по геометрическим признакам: стержни с прямолинейной или криволинейной осью и стержни постоянного или переменного сечения. Особенно существенно и принципиально различие между стержнями с открытым профилем (типа швеллера, двутавра и т. п.) и стержнями с закрытым профилем (например, коробчатого сечения). Наиболее своеобразны свойства тонкостенных стержней с открытым профилем; специфика стержней с закрытым профилем не столь значительна.

Так, например, у двутавровой балки пролетом $L = 6$ м, шарнирно опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной по всему пролету поперечной нагрузкой, при эксцентриситете приложения этой нагрузки, равном только **1 см**, кручение повышает нормальные расчетные напряжения от **3%** для двутавра №16 до **16%** для двутавра №60. С увеличением эксцентриситета напряжения увеличиваются пропорционально.

Имеет место и противоположное явление, а именно: не увеличение, а уменьшение расчетных напряжений от учета кручения, как, например, у швеллерных прогонов под кровли промышленных зданий при любом расположении их на кровле, т.е. стенкой вниз или вверх по скату. Здесь это уменьшение достигает **15 – 20%**.

Таким образом, при расчете находящихся в соответствующих условиях элементов металлических конструкции необходимо учитывать явление кручения.

Известно, что при кручении свободного стержня парами сил, приложенных к торцам (задача Сен-Венана), в его поперечных сечениях возникают только касательные напряжения и происходит одинаковое по длине стержня искажение первоначально плоской формы этих сечений (депланация). Так как депланация всех сечений одинакова, то расстояния между ними не изменяются. При этом нормальные напряжения в поперечных сечениях равны нулю - имеем **свободное**, или **чистое кручение** (рис.312).

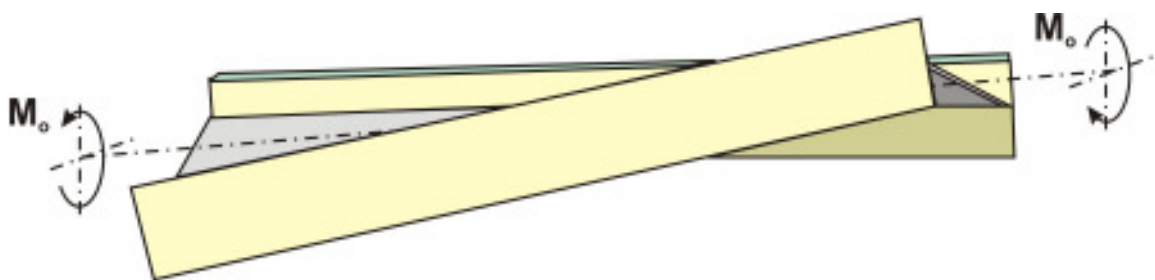


Рис.312

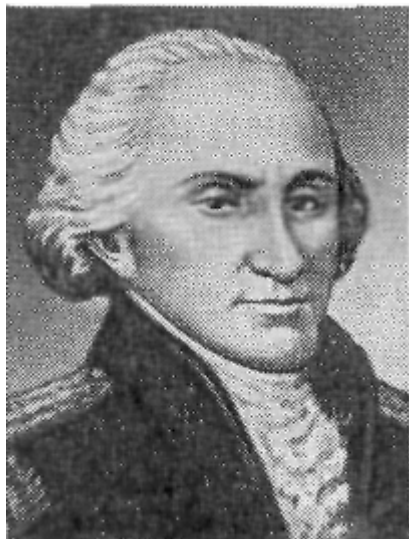


Рис.313

Теория чистого кручения впервые была предложена Кулоном¹⁸ (рис.313) в **1784** г. Он нашел правильную формулу для угла закручивания круглого стержня.

Позднее она была применена Навье¹⁹ для призматических стержней прямоугольного сечения. Навье, пользуясь своей теорией изгиба, исходил из гипотезы плоских сечений и пришел к ошибочным заключениям, что угол закручивания при данном крутящем моменте обратно пропорционален центральному полярному моменту инерции поперечного сечения и что наибольшие касательные напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от центра тяжести сечения. Теория Навье пользовалась всеобщим признанием до середины XIX столетия, несмотря на то, что она противоречила общеизвестным опытным фактам.

В 20-х годах XIX столетия Коши впервые доказал, что поперечные сечения не круглых стержней не могут при кручении оставаться плоскими; однако данное им решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения оказалось неправильным.

Вполне строгую теорию кручения призматического стержня любого поперечного сечения дал в **1855** г. Сен-Венан²⁰. Можно считать, что с этого времени ведет начало научная теория чистого кручения. По Сен-Венану, полная деформация при кручении призматического стержня любого поперечного сечения состоит из простого закручивания стержня и из продольных перемещений, переменных по величине и знаку для различных точек сечения. Эти продольные перемещения и являются причиной искривления первоначально плоской формы поперечного сечения.

¹⁸ **КУЛОН** (Coulomb) Шарль Огюстен (1736 - 1806), французский физик, чл. Парижской АН (1781). Ему принадлежат работы по технической механике (статика сооружений, теория ветряных мельниц и т. д.). Исследовал кручение волос, шелковых (1777) и металлических (1784) нитей и сформулировал законы кручения; изобрёл крутильные весы, которые в дальнейшем применил для измерения электрических и магнитных сил взаимодействия. В 1781 г. описал опыты по трению скольжения и качения и сформулировал законы сухого трения. В 1785-89 гг. опубликовал семь мемуаров, где дал закон взаимодействия электрических зарядов и магнитных полюсов (Кулона закон).

¹⁹ **НАВЬЕ** Клод Луи Мари Анри (1785-1836) - французский инженер и ученый, чл. Парижской АН (1824). Вывел дифференциальные уравнения движения несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса), а также уравнения упругости для трехмерного пространства (1821). Автор ряда учебников по механике, а также курса сопротивления материалов, являвшегося в течение нескольких десятилетий основным руководством для инженеров-строителей и машиностроителей.

²⁰ **СЕН-ВЕНАН** (Saint-Venant), Барре де Сен-Венан Адемар Жан Клод (1797-1886), французский учёный в области механики. Чл. Парижской АН (1868). Основные труды по теории упругости, сопротивлению материалов, гидравлике, гидродинамике. Ввёл т. н. полуобратный метод решения задач в теории упругости, сформулировал принцип смягчения граничных условий (Сен-Венана принцип) и построил общую теорию кручения и изгиба призматических стержней (1855). Исследовал соударения упругих стержней. Заложил основы теории пластичности идеально пластичного тела. Изучал также истечение газов из отверстий и движение жидкостей в открытых руслах.

Дальнейшее развитие теории чистого кручения заключалось главным образом в нахождении точных или приближенных способов решения отдельных частных задач.

В 1917 – 1921 гг. Август Фепплъ выполнил большое количество опытов на чистое кручение прокатных металлических балок с целью определения для различных профилей действительной жесткости на кручение. Указанными опытами для исследуемых профилей были установлены поправочные коэффициенты α к формуле момента инерции при чистом кручении (см. табл. 6.1):

$$J_k = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3}, \quad (6.1)$$

где b , δ - высота (ширина) и толщина отдельных прямоугольников, из которых составлен профиль.

Таблица 6.1

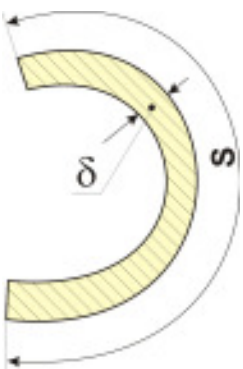
Профиль	Коэффициент α	
	для различных образцов	средний
Уголки	0,86 – 1,1	0,99
Швеллеры	0,98 – 1,25	1,12
Тавры	0,92 – 1,25	1,15
Двутавры	1,16 – 1,44	1,30
Двутавры широкополочные	1,21 – 1,47	1,29
Зеты	1,13 – 1,20	Не установлен

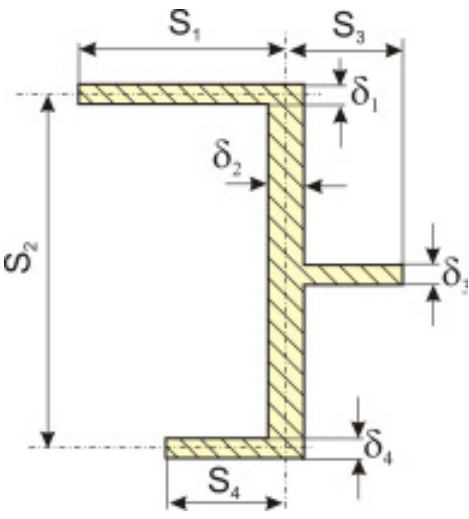
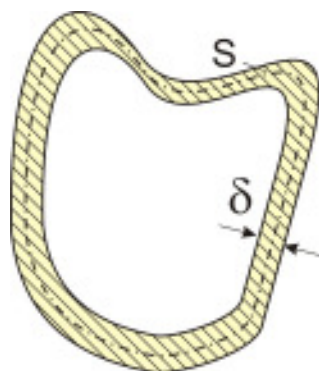
В настоящее время приняты следующие значения коэффициента α :

уголок	1,0;
прокатный двутавр	1,2;
тавровое сечение	1,15
прокатный швеллер	1.12.

Геометрическая жесткость сечения стержня на кручение J_k не равна полярному моменту инерции J_p . Для некоторых сечений формулы для вычисления момента инерции и момента сопротивления при чистом кручении приведены в табл.6.2.

Таблица 6.2

Профиль	Сечение	W_k	J_k
Открытый		$\frac{1}{3} \delta^2 s$	$\frac{1}{3} \delta^3 s$

Профиль	Сечение	W_k	J_k
Составной		$\frac{J_k}{\delta_{max}}$	$\frac{1}{3} \sum_i^n \delta_i^3 s_i$
Замкнутый		$2\omega\delta_{min}$ ω - площадь, ограниченная средней линией контура	$\frac{(2\omega)^2}{\int_s \frac{ds}{\delta}}$

Напряжения τ_{max} , угол закручивания φ и потенциальная энергия деформаций U при чистом кручении брусков любой формы сечения вычисляются по формулам

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}; \quad \varphi = \int_l \frac{M_k dx}{GJ_k}; \quad U = \int_l \frac{M_k^2 dx}{2GJ_k}, \quad (6.2)$$

где M_k - крутящий момент; G - модуль сдвига; W_k , J_k - геометрические характеристики сечения бруса, зависящие при кручении от формы сечения.

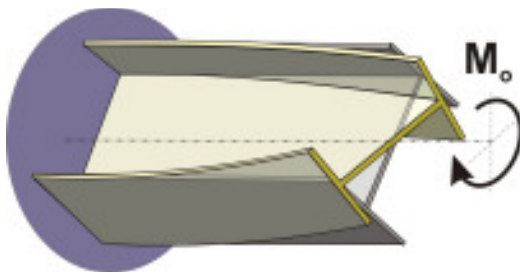


Рис.314

Если же имеются препятствия свободной деформации одного или нескольких сечений, то сечения искривляются неодинаково, расстояния между ними изменяются и при кручении в поперечных сечениях возникают также нормальные напряжения. Такой вид деформации бруса называют **стесненным**, или **изгибным кручением**. Явление стесненного (изгибного) кручения хорошо иллюстрируется на примере дву-

тавровой балки, защемленной одним концом и нагруженной на свободном конце крутящим моментом (рис.314). Защемленное концевое сечение стержня искривляться не может, остается плоским, следовательно, препятствует свободной деформации смежного с ним сечения. Чем дальше расположено сечение от места защемления, тем свободнее его деформация. Так как деформация всех сечений неодинакова, возникают продольные деформации растяжения и сжатия, при этом в сечениях возникает самоуравновешенная система нормальных напряжений, отражающих эффект «стесненности» кручения. Эти нормальные напряжения по ширине полок распределены неравномерно - возникает изгиб полок. При этом верхняя и нижняя полки будут изгибаться в разные стороны.

Препятствием свободной деформации сечений может служить, например, приварка или защемление конца стержня, приложение переменного по длине стержня крутящего момента, применение стержня переменного сечения и т. п. Стесненное кручение в элементах конструкций, например, рамах сельскохозяйственных машин, встречается часто.

Для обычных стержней сплошного сечения эти эффекты имеют лишь местное значение; в частности, нормальные напряжения быстро затухают по мере удаления от места стеснения. Однако в тонкостенных стержнях нормальные напряжения убывают настолько медленно, что упомянутый эффект перестает носить локальный характер. В то же время происходят серьезные изменения в картине распределения касательных напряжений. Сказанное делает задачу о стесненном кручении тонкостенного стержня отличной от задачи о свободном кручении. Точное решение задачи о стесненном кручении, удовлетворяющее во всех точках уравнениям теории упругости, не получено даже для частных случаев нагрузки или закрепления сечений.

Следует отметить, что стеснение осевых деформаций повышает жесткость и прочность тонкостенного стержня. Для тонкостенных стержней замкнутого профиля деформация будет существенно меньше, и для них, как правило, можно использовать обычную теорию кручения и изгиба стержней.

Определяющим для учета влияния тонкостенности профиля является параметр

$$\nu = J_{min} / J_k,$$

где J_{min} - минимальный момент инерции сечения на изгиб; J_k - геометрическая жесткость сечения стержня на кручение.

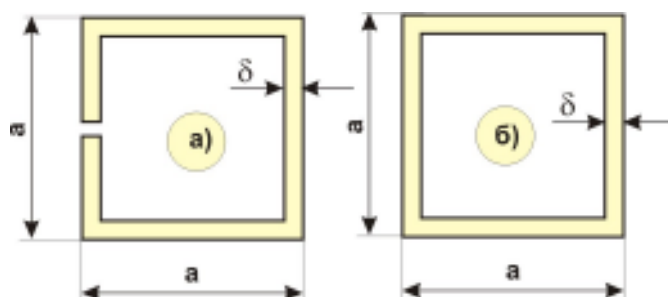


Рис.315

При малых ν ($\nu \leq 3$) следует использовать обычную теорию изгиба и кручения, при больших ν - учитывать дополнительные эффекты, связанные с тонкостенностью стержня. Например, для стержня (рис.315, а) с коробчатым сечением при наличии разреза (открытый профиль)

$$J_{min} = 2 \left(\frac{\delta a^3}{12} + \frac{\delta a^3}{4} \right) = \frac{2}{3} \delta a^3, \quad J_k = 4 \frac{\delta^3 a}{3}, \quad \nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\delta^2}.$$

Для замкнутого сечения (рис.315, б)

$$J_{min} = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2\delta)^4}{12} = \frac{2}{3}\delta a^3, \quad J_k = \frac{4F_k^2 \delta}{S} = \frac{4a^4 \delta}{4a} = \delta a^3, \quad \nu = \frac{2}{3},$$

где F_k - площадь ограниченная средней линией сечения; S - длина средней линии сечения. Таким образом, для стержня замкнутого сечения использование рассматриваемых ниже моделей не принесет новых результатов, тогда как для коробчатого сечения открытого профиля учет тонкостенности необходим уже при $\delta \leq 0,25a$.

- **Примечание.** Не следует полагать, что для тонкостенных стержней замкнутого сечения всегда можно использовать обычные модели стержней. Во многих случаях оказывается необходимым учет деформации поперечного сечения, особенно для криволинейных труб (эффект Кармана).

При изучении деформаций тонкостенных стержней необходимо иметь в виду, что эти деформации, вообще говоря, сопровождаются изменением контура поперечного сечения. Однако учет влияния изменений контура на напряженно-деформированное состояние стержня связан со значительными трудностями.

Для тонкостенных стержней открытого профиля гипотеза плоских сечений применима только в том случае, если равнодействующая внешней нагрузки проходит через центр изгиба, точку сечения, относительно которой момент касательных сил, действующих в сечении при поперечном изгибе, равен нулю.

Если равнодействующая внешних сил, действующих на стержень, проходит через центр изгиба, то стержень испытывает только изгиб (без кручения). В противном случае при изгибе возникает кручение. Аналогично этому при кручении может возникать изгиб. В задаче о чистом кручении в качестве оси поворота сечения (оси кручения) может рассматриваться любая ось, параллельная оси стержня. Расчетные соотношения (значения напряжений, жесткость на кручение и др.) не зависят от выбора центра поворота сечений; перемещения определяются с точностью до движения стержня как твердого тела. В задачах стесненного кручения, когда стержень закреплен, такой произвол отсутствует - ось кручения становится вполне определенной.

Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что распределение напряжений и деформаций в бруске при поперечном изгибе зависит не только от величины изгибающего момента, но и от положения плоскости действия внешних сил (плоскости изгиба). Гипотеза плоских сечений, лежащая в основе элементарной теории изгиба балок, соблюдается только в одном из частных случаев внешней поперечной нагрузки, а именно: в случае, когда эта нагрузка проходит через так называемый центр изгиба.

В классической теории изгиба отклонение от закона плоских сечений при действии на балку поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, впервые обнаружил экспериментальным путем в 1909 г. Бах²¹. Производя опыты над металлической балкой швеллерного сечения, Бах установил, что поперечная нагрузка, действующая перпендикулярно плоскости симметрии швеллера и проходящая через его центр тяжести, наряду с деформациями изгиба, вызывает и деформации кручения. Деформации удлинений четырех крайних волокон швеллера при произвольном положении нагрузки не следуют закону плоских сечений. При прохождении поперечной нагрузки через ось стенки швеллера деформации от кручения в опытах Баха оказались значительно меньше, чем в случае приложения нагрузки в центре тяжести. Обнаружив

²¹ Bach-Baumann. Elastizität und Festigkeit, стр. 369-381 и 268-271, Berlin, 1924; VDI, 1909, т. 53, стр. 1710; VDI, 1910, т. 54, стр. 385.

опытным путем отклонения от закона плоских сечений, Бах объяснил это отклонение несимметричностью сечения.

Вопросом изгиба и кручения тонкостенных стержней занимался проф. С.П. Тимошенко (рис.316) в связи со своей работой по устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки²². Экспериментальным путем он установил величину жесткости двутавровых балок при чистом кручении и подробно изучил вопрос о кручении, при котором в поперечных сечениях, наряду с касательными напряжениями, возникают и нормальные. Измеренные в опытах С.П. Тимошенко углы кручения хорошо совпали с теоретическими значениями, вычисленными по его формулам.



Рис.316

После работ Баха и Тимошенко вопрос о кручении тонкостенных балок, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, в течение ряда лет в печати не освещался. Начиная с 20-х годов XX века теория тонкостенных стержней получила дальнейшее существенное развитие под влиянием запросов строительной практики и в значительной степени авиастроения с его исключительно строгими требованиями к весовым характеристикам конструкций.

Спустя 12 лет после опытов Баха в 1921 г. появилась работа Майара, посвященная вопросу изгиба и кручения тонкостенных металлических балок²³. В этой работе автор, анализируя опыты Баха, отмечает, что отклонение от закона плоских сечений при кручении, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, может иметь место и в симметричных профилях. В статьях, опубликованных в 1922 и 1924 гг., Майар, кроме результатов экспериментальных ис-

следований, приводит расчетные данные по определению центра изгиба. Эти данные получены им на основании метода С. П. Тимошенко. Центр изгиба он, как и Тимошенко, определяет как точку пересечения равнодействующих элементарных касательных напряжений при изгибе балки в главных плоскостях.

В 1927 г. появилась работа С. А. Бернштейна²⁴, в которой автор отмечал значительное отклонение характера распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях поясов ферм открытых мостов от закона плоских сечений и назвал это явление «депланацией».

²² Тимошенко С. П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки// Известия СПб. Политехнического ин-та, Т. IV-V, 1905-1906.

Степан Прокопьевич Тимошенко (1878-1972), в период с 1905 по 1918 гг. и опубликовал более 26 работ в Известиях С.-Петербургского политехнического института, Электротехнического института, Института инженеров путей сообщения, Киевского политехнического института, а также в Вестнике общества технологов. Содержащиеся в представленных статьях результаты были учтены им при написании двухтомной монографии «Курс теории упругости» (Петроград, 1914 - 1916), учебника «Курс сопротивления материалов» (1911, 1913, 1916, 1918), в книгах «Теория упругости» (1933, русский перевод - 1934, 1937), «Теория пластин и оболочек» (1940, русский перевод - 1948, 1955), «Колебания пластин в инженерном деле» (1928, русский перевод - 1931, 1932, 1934, 1959) и в ряде других книг.

²³ Maillart R. Zur Frage der Biegung, Schweizerische Bauzeitung, 1921, N° 18, с. 195 -197.

²⁴ Бернштейн С. А. Опытное исследование работы верхнего пояса открытого моста // Исследование напряжений и деформаций при статической работе моста, Транспечать, вып. № 60, 1927.

Вопросом о нахождении центра изгиба и центра кручения занимался также акад. Б. Г. Галеркин²⁵.

В период с 1921 по 1926 гг. в иностранной технической литературе были напечатаны работы Циммермана, Зонтага, Эгеншвилера и Вебера. Из них наиболее интересной является работа Вебера²⁶, в которой автор, кроме метода определения центра изгиба, дает обобщение результатов Тимошенко по кручению двутавровой балки и метод определения дополнительных нормальных напряжений при кручении для двухполочных профилей (двутаврового с разными полками, швеллерного и зетового). Автор обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т. е. точкой сечения, которая при кручении не перемещается. Он доказал, что обе эти точки при кручении, сопровождаемом изгибом полки профиля, совпадают, и показал на числовых примерах совпадение найденного им решения с результатами таких же опытов Баха над швеллерной балкой.

Отклонение от закона плоских сечений при кручении тонкостенных стержней, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, играет существенную роль не только в вопросах прочности, но также и в вопросах устойчивости. Экспериментальные исследования показывают, что во многих случаях экстремальными формами потери устойчивости, т. е. формами, дающими наименьшее значение для критической силы, являются крутильные или изгибно-крутильные. Стержни коробчатого сечения с открытым профилем, как правило, теряют упругую устойчивость вследствие закручивания, причем потеря устойчивости происходит при значениях сил, которые значительно меньше теоретических, полученных по формулам Эйлера.

Вопросом устойчивости тонкостенных авиационных стержней занимался немецкий инженер Вагнер. В 1934 г. он совместно с Претчером опубликовал теоретическую работу, в которой даны формулы для определения критических сил при потере устойчивости авиационных стержней в форме закручивания²⁷. При выводе своих формул для дополнительных нормальных напряжений от кручения Вагнер пользовался законом, аналогичным закону секториальных площадей, выведенному В.З. Власовым (рис.317) в 1936 г. для профилей произвольного очертания²⁸. Следует отметить, что

²⁵ Галеркин Б.Г. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, 1927.

²⁶ Weber C. Übertragung des Drehmoments in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt, Z. für angew. Math. und Mech., 1926, т. 6, 1924, т. 4.

²⁷ Wagner H. und Pretscher W. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Luftfahrtforschung, 1934, т. 11, № 6, с. 174 - 180.

²⁸ Власов В.З., Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения //Вестник ВИА РККА им. В. В. Куйбышева, № 20, II, 1936.

Василий Захарович Власов (1906-1958) родился 24 февраля в селе Кареево Тарусского района Калужской области. В 1924 году он поступил на геодезический факультет Межевого института, откуда в 1926 году перевелся на инженерно-строительный факультет Московского высшего технического училища (МВТУ). В 1930 году он окончил Высшее инженерно-строительное училище (ВИСУ), которое выделилось из МВТУ, со званием инженера-строителя мостов и конструкций. Тотчас же после окончания ВИСУ (позднее переименованного в Московское Инженерно-строительное училище - МИСИ) он начал преподавать в Училище строительную механику и тогда же начал вести научную работу во Всесоюзном институте сооружений (бывший Центральный научно-исследовательский институт промышленных сооружений - ЦНИПС). В МИСИ Василий Захарович преподавал до конца своих дней, а в ЦНИПСе работал до 1951 года. С 1932 по 1942 год Василий Захарович преподавал в Военно-инженерной академии им. В. В. Куйбышева, с 1946 г. руководил отделом строительной механики Института механики АН СССР.

В 1937 году за работу «Строительная механика оболочек» (Москва, Стройиздат, 1936), представленную в МИСИ в качестве кандидатской диссертации, Василию Захаровичу присуждается ученая степень доктора технических наук.

В 1943 году Власов был избран членом Московского математического общества, в 1953 году - членом-корреспондентом АН СССР.

Основные особенности расчета тонкостенных конструкций были известны и до В. З. Власова. Было установлено, что техническая теория изгиба балок Эйлера - Бернулли неприменима к тонкостенным стержням вследствие искажения сечений при деформации, что не безразличен характер приложе-

Вагнер при рассмотрении деформации кручения считал, что центр кручения при потере устойчивости совпадает с центром изгиба. В действительности же центр кручения, как правило, не совпадает с центром изгиба. Совпадение получается только в одном частном случае поперечного сечения стержня, а именно, когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения; по этой причине формула Вагнера применима только для стержней, имеющих в сечении две оси симметрии. По-видимому, впервые на неточность результатов Вагнера обратил внимание Остенфельд²⁹ (1931 г.), получивший точные решения для таврового, уголкового и швеллерного сечений.

Для полного исследования задачи о произвольном нагружении тонкостенного стержня должна быть использована теория оболочек. Но она не обладает должной простотой, если исключить простейшие случаи нагружения оболочки. Поэтому, естественно, родилась идея создать достаточно простую техническую теорию тонкостенных стержней, которая могла бы отразить, хотя бы приближенно, отмеченные выше специфические явления.

Современная теория тонкостенных стержней возникла как частный случай из более общей теории В.З. Власова, опубликованной сначала в научных журналах³⁰, а затем в монографии³¹, и основана на рассмотрении тонкостенного стержня как пространственной системы типа цилиндрической или призматической оболочки с жестким профилем. Власов ввел новые понятия об обобщенных координатах сечения, испытывающего деформацию, об изгибно-крутящем бимоменте, представляющем собою новую обобщенную продольную силу, соответствующую в смысле виртуальной работы деформации сечения и принципиально отличающуюся от сил и моментов, рассматриваемых в статике твердого тела. Эта теория оказалась более общей и более плодотворной, чем концепция балочной теории и классического сопротивления материалов, от которой по существу отталкивались все названные выше предшественники В.З. Власова, начиная с Тимошенко.

Оригинальный метод расчета тонкостенных стержней с жестким закрытым профилем принадлежит А. А. Уманскому³², который рассмотрел на основе бимомент-



Рис.317

ния к торцам статически равноценных нагрузок и т. п. В книге Власова по тонкостенным стержням постановка задачи и ее решение изложены с максимальной полнотой. Построенная теория позволила дать исчерпывающее решение задачи об изгибно-крутильной форме потери устойчивости и колебаниях тонкостенных упругих стержней, а также развить методы расчета стержней с упругими и жесткими связями и методы расчета стержней при поперечных нагрузках.

²⁹ Ostensfeld A. Politeknisk Laezean stats Laboratorium for Bygningsstatik, Meddelelse, Kopenhagen, 1931.

³⁰ Власов В. З. Расчет ребристых сводов-оболочек и балок из тонкостенных профилей на совместное действие изгиба и кручения. Проект и стандарт, №№ 8, 9, 10, 1936.

Власов В. З. Кручение и устойчивость тонкостенных открытых профилей. Строительная промышленность, № 6 - 7, 1938.

Власов В. З., Кручение, устойчивость и колебания тонкостенных стержней. Прикл. матем. и механ., т. III, вып. 1, 1939.

³¹ Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940 (Второе издание: Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.)

³² Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. М.: Оборонгиз, 1939.- 112 с.

ной теории ряд новых задач по расчету плоских спаренных стержневых конструкций, названных биконструкциями,

Основополагающее значение для создания технической теории прочности, жесткости, устойчивости и колебаний тонкостенных стержней и систем, составленных из таких стержней, бесспорно имеют работы В. З. Власова (стержни с открытым профилем) и А.А. Уманского (стержни с закрытым профилем).

Главная заслуга в этом направлении принадлежит Власову. Он провел обширные исследования, выходящие далеко за пределы упомянутой теории, хотя и тесно связанные с ней. Власов резко упростил общие уравнения теории цилиндрических оболочек, введя две кинематические гипотезы: об отсутствии сдвигов срединной поверхности и о неизменяемости формы поперечного сечения. При этом оказалось, что деформация в случае стесненного кручения отличается лишь масштабом от деформации, соответствующей свободному кручению того же стержня (этот масштаб меняется от сечения к сечению). В дополнение к упомянутым гипотезам приняты некоторые упрощения, относящиеся к распределению напряжений по толщине стенки (равномерное распределение нормальных напряжений и линейное изменение касательных).

Эти гипотезы позволили достигнуть того уровня простоты теории, который необходим для широкого ее приложения к практическим расчетам. Достаточно сказать, что при любом виде нагружения основное дифференциальное уравнение задачи не содержит частных производных и оказывается примерно того же уровня сложности, что и хорошо знакомое инженерам дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании. В этой теории возникли поначалу несколько необычные понятия бимоента, секториального момента инерции и др. Как показала инженерная практика, к этим понятиям быстро привыкли.

Многочисленные эксперименты неоднократно подтверждали практически приемлемую точность теории В.З. Власова. Книга Д. В. Бычкова и А. К. Мрощинского³³ содержит систематическое изложение теории тонкостенных стержней применительно к расчету строительных металлических балок. Книга Д. В. Бычкова³⁴ содержит методы расчета рам из тонкостенных стержней. Книги Б. Н. Горбунова и А. И. Стрельбицкой³⁵ освещают вопросы приложения теории Власова к расчету тонкостенных вагонных рам.

В настоящее время теория кручения и изгиба тонкостенных стержней приводится в учебной литературе по сопротивлению материалов и строительной механике³⁶.

В середине XX века активно обсуждались основы теории Власова и методические варианты ее построения³⁷. Гипотеза о неизменяемости контура сечения особых возражений не вызвала. Дело в том, что подкрепляющие элементы типа ребер жесткости, диафрагм и т. п. в самом деле создают условия, близкие к тем, которые утверждаются в этой гипотезе. Значительно больше внимания было уделено гипотезе об отсутствии сдвигов в срединной поверхности. Приближенность этой гипотезы очевидна,

³³ Бычков Д. В., Мрощинский А. К. Кручение металлических балок. М.: Стройиздат, 1944. -280 с.

³⁴ Бычков Д. В. Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов. М.: Стройиздат, 1948. – 208 с.

³⁵ Горбунов Б. Н., Стрельбицкая А. И., Приближенные методы расчета вагонных рам из тонкостенных стержней. М.: Машгиз, 1946.

Горбунов Б. Н. и Стрельбицкая А. И., Теория рам из тонкостенных стержней. М.: Гостехиздат, 1948.

³⁶ Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.2. М.: Наука, 1965 – 480 с.; Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. – 865 с.; Курдюмов А.А., Локшин А.З., Иосифов Р.А., Козляков В.В. Строительная механика корабля и теория упругости. Т.П. Л.: Судостроение, 1968. – 420 с.; Синеговский И.С. Сопротивление материалов. М.: Колос, 1968. -456 с.; Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. М.: Наука, 1977. – 456 с.; Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела Т. П. – М.: Наука, 1978, 616 с.; Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986 - 560 с. и др.

³⁷ Пановко Я.Г., Бейлин Е.А. Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней. // Строительная механика в СССР. 1917-1967. М.: Стройиздат, 1969.- с. 75-98.

так как соответствующие касательные напряжения отличны от нуля и, как следует из той же теории Власова, достаточно велики. Подобные несоответствия типичны для всех технических теорий (вспомним отсутствие согласованности гипотезы плоских сечений с фактом существования касательных напряжений при поперечном изгибе балок), однако именно эта гипотеза Власова вызвала наибольшие сомнения, и появились уточненные варианты теории, не использующие гипотезу отсутствия сдвигов в срединной поверхности. В них достигнуты некоторые уточнения, однако ценой значительного усложнения теории. Главная ценность упомянутых работ в том, что с их помощью удалось отчетливо определить границы применимости теории В. З. Власова.

Наиболее обоснованно исследование точности этой теории выполнено А. Л. Гольденвейзером³⁸. Исходя из теории оболочек он показал, что гипотеза о недеформируемости контура выполняется достаточно точно даже для коротких стержней, в то же время гипотеза об отсутствии сдвигов не влечет за собой существенных ошибок лишь

при условии $\frac{l}{L} \approx \frac{\delta}{l} \ll 1$ (l - характерный размер поперечного сечения, L - длина оси

стержня, δ - толщина стенок). Как показали дальнейшие исследования, сдвиги более существенно сказываются на перемещениях оси стержня, чем на величине напряжений. В то же время оказалось, что значение сдвигов связано не только с геометрией стержня. Для ортотропных цилиндрических стержней-оболочек даже при их значительной длине влияние сдвигов может быть существенным. Также весьма существенно это влияние при быстром изменении интенсивности нагрузки по длине стержня. При достаточной толщине стенок фибровые напряжения могут заметно отличаться от вычисленных по теории В. З. Власова.

В связи со становлением теории тонкостенных стержней оживленно обсуждался вопрос о применимости принципа Сен-Венана. Как оказалось, затухание напряжений, вызванных в тонкостенном стержне самоуравновешенными нагрузками с отличным от нуля бимоментом, происходит сравнительно медленно. А. В. Александров и М. Н. Закс с помощью уточненных решений установили, что отклонения от закона секториальных площадей носят сугубо местный характер и локализуются вблизи зон с особенностями нагрузки³⁹.

Основные положения теории В. З. Власова были распространены и на криволинейные тонкостенные стержни, являющиеся расчетной схемой элементов некоторых судовых и авиационных конструкций или, например, монорельса на закруглении. Впрочем, некоторые авторы, имея в виду известный эффект Кармана для криволинейной трубы, отказались от указанной гипотезы и обнаружили существенное влияние деформации контура на жесткость и напряженное состояние криволинейного стержня.

В теории тонкостенных стержней важное значение имеет понятие о центре изгиба. В теории В.З. Власова положение центра изгиба однозначно определяется геометрией сечения. В то же время строгое рассмотрение задачи приводит к выводу, что положение центра изгиба зависит не только от формы и размеров сечения, но и от коэффициента Пуассона⁴⁰.

³⁸ Гольденвейзер А. Л. О теории тонкостенных стержней. // Прикл. мат. и мех., т. 13, вып. 6, 1949.

³⁹ Александров А. В. Исследования работы тонкостенных стержней при действии продольных сосредоточенных сил // Исследования по теории сооружений, вып. 15. Стройиздат, 1967.

Закс М. Н. Напряженное состояние тонкостенного стержня в зоне приложения бимоментной нагрузки // Строит. механика и расчет сооруже., 1967, № 2.

⁴⁰ Лейбензон Л. С. Технические заметки ЦАГИ, № 45; Труды ЦАГИ вып. 8, 1924; Известия АН СССР, 1935; О центре изгиба незамкнутых тонкостенных профилей. ДАН СССР, т. 4, № 1-2, 1936.

Новожилов В. В. О центре изгиба. ПММ, т. 21, вып. 2, 1957.

Чирков А. А. Об экспериментальном и теоретическом определении координат центра изгиба П-образного профиля. Труды Новочеркасск. политехн. ин-та, т. 104, 1959.

Винокуров Л. П. К определению центра изгиба. Труды Харьковск. авиац. ин-та, вып. 18, 1961.

В духе общих тенденций современного развития строительной механики большое внимание уделялось стесненному кручению стержней за пределом упругости и определению несущей способности таких стержней и простейших рамных систем. В реальных стержнях (не очень коротких) пластическому предельному состоянию обычно предшествуют большие линейные перемещения и углы закручивания, что делает расчет по недеформированной схеме весьма условным.

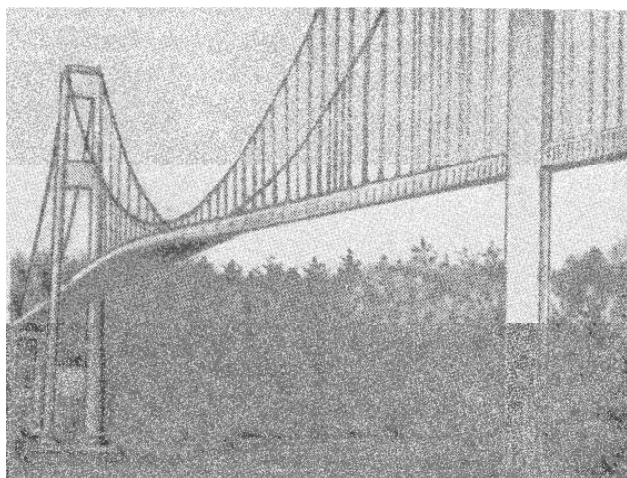


Рис.318

Определение положения центра изгиба для упруго-пластического (или нелинейно-упругого) стержня имеет определенные особенности: например, для сечения произвольной формы центр изгиба и центр кручения в общем случае не совпадают.

Не меньшее значение, чем проблема прочности, для тонкостенных конструкций имеет проблема устойчивости. Проблемой упругой устойчивости тонкостенных стержней при различных граничных условиях зани-

мались С. А. Амбарцумян⁴¹, А. Л. Гольденвейзер⁴² и многие другие.

Особенный интерес вызывает исследование работы тонкостенных конструкций при действии динамических нагрузок. Проблема динамической устойчивости и пространственных изгибно-крутильных колебаний конструкций типа тонкостенных стержней в связи с аварией Такома моста⁴³ (рис.318) рассматривалась на основе общих уравнений теории Власова в докторских диссертациях В. В. Болотина⁴⁴, И. И. Гольденבלата⁴⁵.

6.2. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛЫХ СЕЧЕНИЙ

При изучении деформаций тонкостенных стержней принимают две основные гипотезы, предложенные В.З. Власовым:

- 1) *тонкостенные стержни открытого профиля имеют **неизменяемый контур**, что дает нам право все геометрические характеристики сечений и другие геометрические данные относить к сечениям, которые стержень имел до деформации;*
- 2) *в срединной поверхности стержня отсутствует деформация сдвига.*

Джанелидзе Г. Ю. Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжений при кручении. Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 226, 1963.

⁴¹ Амбарцумян С. А. К вопросу расчета устойчивости тонкостенных стержней // ДАН Армянской ССР, т.XVII, № 1, 1953.

⁴² Гольденвейзер А. Л. Устойчивость тонкостенных стержней при действии продольной силы в зависимости от граничных условий. Труды лаб. строит. механики ЦНИПС, 1941.

⁴³ Крутильные колебания проезжей части вантового моста через пролив Такома в Соединенных Штатах Америки. Разрушение моста произошло в 1940 г. под действием ветра, дувшего со скоростью 67 км/час. В среднем пролете моста после четырех месяцев его эксплуатации обрушилась центральная часть на протяжении 853 м.

⁴⁴ Болотин В. В. Динамическая устойчивость сооружений. М.: Гостехиздат, 1952.

⁴⁵ Гольденבלат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. М.: Стройиздат, 1947.

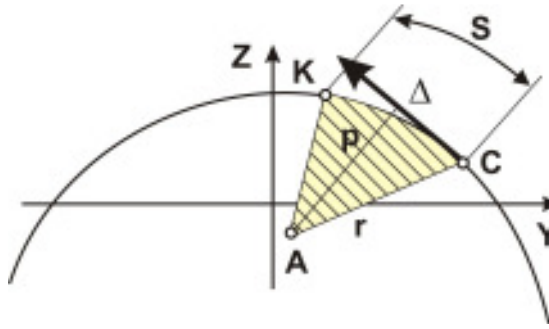


Рис.319

Эти гипотезы полностью справедливы для чистого кручения; в условиях стесненного кручения они носят приближенный характер.

Положение точек средней линии сечения можно определять прямоугольными декартовыми координатами, для которых осью абсцисс Ox является продольная ось стержня, а осями Oy и Oz - главные центральные оси инерции одного из его поперечных сечений. При заданном очертании средней линии сечения положение любой ее

точки K можно определить длиной дуги s , отсчитываемой вдоль средней линии от некоторой точки C (начало отсчета дуг) в определенном направлении (рис.319).

В соответствии с первой гипотезой сечение стержня при кручении поворачивается как жесткое целое. Если A - центр поворота (центр кручения), то смещение точки K (рис.319)

$$\Delta_K = r\theta(x),$$

где r - расстояние от точки K до оси поворота, $\theta(x)$ - угол поворота сечения в своей плоскости.

Составляющая перемещения Δ точки K вдоль касательной к контуру

$$\Delta = p\theta(x), \quad (6.3)$$

где p - длина перпендикуляра, опущенного из точки A на направление касательной к средней линии контура в точке K . Положение оси поворота определяется после рассмотрения условий равновесия. Угол сдвига в срединной поверхности стержня

$$\gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (6.4)$$

где u - составляющая перемещения точки K вдоль оси x .

На основании второй основной гипотезы $\gamma = 0$, и потому

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial \Delta}{\partial x} = -p \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (6.5)$$

Интегрируя равенство (6.5) по переменной s , находим

$$u = -\frac{d\theta(x)}{dx} \int_0^s p(s) ds + u_C, \quad (6.6)$$

где u_C - осевое смещение в точке C (в точке начала отсчета дуги).

Величина

$$p ds = d\omega \quad (6.7)$$

равна удвоенной площади сектора, основание которого ds , вершина A ; p - перпендикуляр, опущенный на основание;

$$\int_0^s p(s)ds = \int d\omega = \omega(s), \quad (6.8)$$

где $\omega(s)$ - удвоенная площадь сектора AKC с вершиной в центре поворота (точке A) (рис.319).

Величину $\omega(s)$ называют **секториальной площадью**; эта геометрическая характеристика играет центральную роль в теории тонкостенных стержней. Равенство (6.6) представим так:

$$u = -\frac{d\theta(x)}{dx} \omega(s) + u_c. \quad (6.9)$$

Деформация сечения $(u - u_c)$ пропорциональна секториальной площади.

С достаточной для практических расчетов точностью допустимо принимать, что на поверхности тонкостенного стержня равны нулю как нормальные, так и касательные напряжения, параллельные образующим этой поверхности. Ввиду малости толщины стенки естественно это заключение распространить и на все элементарные площадки, параллельные боковой поверхности стержня. Отсюда следует, что в плоскости поперечного сечения стержня не может быть составляющих касательного напряжения, направленных по нормали к контуру этого сечения, так как касательные напряжения по взаимно перпендикулярным площадкам по абсолютной величине равны. Поэтому касательное напряжение в любой точке поперечного сечения должно быть направлено параллельно касательной к контуру этого сечения, или, что практически равноценно, параллельно касательной к средней линии сечения. Вследствие малой толщины стенок стержня изменение напряжений по толщине этих стенок невелико. Поэтому нельзя ожидать существенной погрешности, если принять, что напряжения по толщине стенки не меняются или, в крайнем случае, меняются по линейному закону. Если же принять это допущение, то нетрудно сделать ряд выводов о распределении напряжений в тонкостенном стержне. Распределение этих напряжений по толщине стенки можно принять линейным, т. е. представить эпюру их распределения в виде трапеции. Что касается нормальных напряжений по площадке поперечного сечения, то в силу того же допущения их достаточно считать распределенными по толщине стенки равномерно.

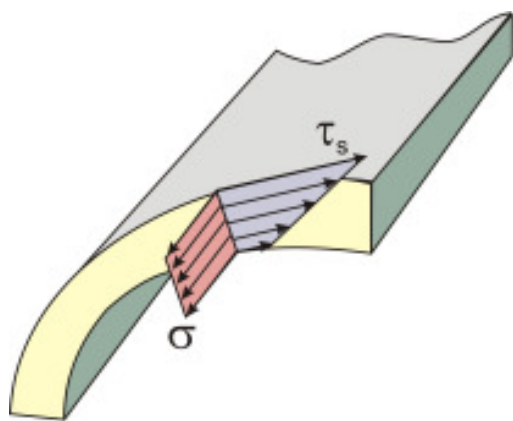


Рис.320

Таким образом, для тонкостенного стержня получаем картину распределения напряжений в сечении по толщине его стенки, представленную на рис.320. Понятно, что по длине контура сечения, равно как и по длине стержня, напряжения σ и τ_s изменяются.

Трапецидальную эпюру распределения касательных напряжений по толщине стенки стержня (рис.321, а) можно разбить на две эпюры (рис.321, б и в), следовательно, и касательные напряжения считать состоящими из двух частей:

- средних касательных напряжений τ , распределенных по толщине стенки равномерно (эпюра б);

- касательных напряжений τ_k (эпюра ϵ), закон распределения которых совпадает с законом распределения для случая свободного кручения тонкостенного стержня.

Первые напряжения называют **изгибно-крутильными**, вторые - **напряжениями свободного кручения**.

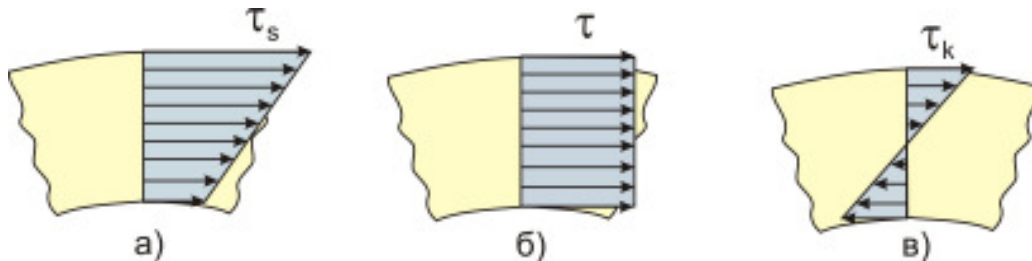


Рис.321

6.3. СЕКТОРИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ

Предположим, что нам задано поперечное сечение тонкостенного стержня, представленное на *рис.318*. Для этого сечения можно вычислить следующие геометрические характеристики:

статические моменты относительно осей Oy и Oz (в $см^3$):

$$S_y = \int_F z dF, \quad S_z = \int_F y dF;$$

центробежный момент инерции относительно осей Oy и Oz (в $см^4$):

$$J_{yz} = \int_F yz dF;$$

осевые моменты инерции относительно осей Oy и Oz (в $см^4$):

$$J_y = \int_F z^2 dF, \quad J_z = \int_F y^2 dF;$$

полярный момент инерции (в $см^4$):

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF.$$

При выбранной системе координатных осей первые три интеграла обращаются в нуль и показателями сопротивления сечения изгибу и кручению будут лишь осевые и полярный моменты инерции относительно главных осей. Для описания деформированного состояния тонкостенных стержней этих показателей недостаточно и требуется ввести новые геометрические характеристики, связанные с перемещениями точек поперечного сечения.

Радиус AC , проведенный из полюса A до точки средней линии C , принятой за начальную, называют начальным радиусом. Радиус AK , проведенный к произвольной точке K срединной линии контура с координатами x и y , называют подвижным радиусом. Удвоенную площадь сектора ACK , образованного начальным и подвижным радиусами и срединной линией сечения, как мы уже знаем, называют **секториальной координатой** точки K и обозначают буквой ω . Секториальной площади следует приписывать определенный знак в зависимости от направления вращения радиуса-вектора из начального в окончательное его положение. За положительное направление вращения радиус-вектора примем вращение против хода часовой стрелки. Таким образом,

каждую точку срединной линии контура тонкостенного сечения будем в дальнейшем характеризовать не двумя, а тремя координатами: y , z , ω .

Введём новые геометрические величины, характеризующие сопротивляемость сечения деформациям в процессе стесненного кручения:

- секториальный статический момент (в $см^4$)

$$S_{\omega} = \int_{(F)} \omega dF ; \quad (6.10)$$

- секториальный момент инерции (в $см^6$)

$$J_{\omega} = \int_{(F)} \omega^2 dF ; \quad (6.11)$$

- секториально-линейные моменты относительно осей Oy и Oz (в $см^5$)

$$J_{\omega y} = \int_{(F)} \omega y dF ; \quad J_{\omega z} = \int_{(F)} \omega z dF . \quad (6.12)$$

Вычисление этих интегралов в общем случае может быть затруднено. Однако на практике чаще всего приходится иметь дело с сечениями, средняя линия которых состоит из отдельных прямолинейных участков, причем толщина стенки δ в пределах каждого участка остается постоянной. Все эти интегралы могут быть вычислены без всякого труда. Интеграл разбивается на сумму интегралов, взятых по площади каждого участка.

Так как $dF = \delta ds$, а в пределах одного участка толщина δ постоянна и длина дуги отсчитывается по прямой линии, то мы приходим к равенству

$$\int_{(F_i)} \omega dF = \delta_i \int_0^{s_i} \omega ds$$

где s - расстояние точки оси рассматриваемого участка от его начала; s_i - длина i -го участка.

Если в каждой точке участка на перпендикуляре к его средней линии отложить соответствующую этой точке секториальную площадь, получим эпюру секториальных площадей. Очевидно, что полученный интеграл есть не что иное, как площадь эпюры секториальных площадей в пределах рассматриваемого участка. Отсюда,

$$\int_{(F_i)} \omega dF = \delta_i \Omega_i$$

где Ω_i - площадь эпюры секториальных площадей в пределах i -го участка средней линии сечения;

$$\int_{(F)} \omega dF = \sum_{i=1}^n \delta_i \Omega_i ,$$

где n - число участков, из которых состоит средняя линия сечения.

Равным образом

$$\int_{(F)} \omega y dF = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^{s_i} \omega y ds ; \quad \int_{(F)} \omega z dF = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^{s_i} \omega z ds ;$$

$$\int_{(F)} \omega^2 dF = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^{s_i} \omega^2 ds .$$

Поэтому вычисление рассматриваемых интегралов сводится к вычислению интегралов, под знаком которых стоит произведение двух функций переменной s .

Выберем точки C и A так, чтобы

$$S_{\omega} = \int_{(F)} \omega dF = 0 ; \quad (6.13)$$

$$J_{\omega_y} = \int_{(F)} \omega_y dF = 0 ; \quad J_{\omega_x} = \int_{(F)} \omega_x dF = 0 . \quad (6.14)$$

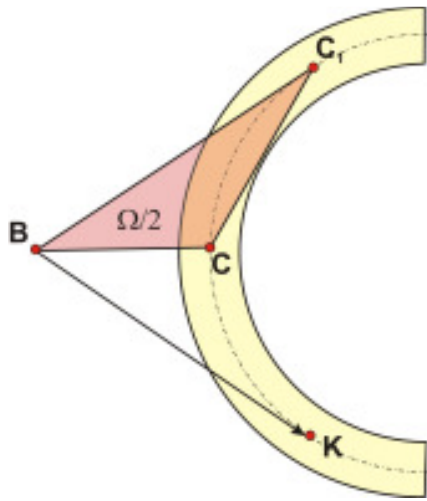


Рис.322

Секториальные площади, удовлетворяющие условиям (6.13) и (6.14), называют **главными секториальными площадями**, а соответствующие секториальные координаты - **главными секториальными координатами**.

Точка профиля, для которой секториальная координата равна нулю, называется **главной нулевой секториальной точкой**. Положение главной секториальной нулевой точки должно быть определено из условия (6.13). Если на средней линии сечения взять произвольную секториальную точку C_1 , то условие (6.13), вообще говоря, не будет выполнено. Пусть для произвольного полюса B секториальная координата произвольной точки K средней линии ω_B (рис.322).

При любой другой секториальной нулевой точке C секториальная координата точки K - ω_{BC} , а Ω - секториальная координата точки C при секториальной точке C_1 , представляющую удвоенную площадь фигуры BC_1C . Следовательно:

$$\omega_{BC} = \omega_B - \Omega .$$

Если точки C есть главная секториальная нулевая точка, то

$$S_{\omega} = \int_F \omega_{BC} dF = \int_F (\omega_B - \Omega) dF = \int_F \omega_B dF - \Omega \int_F dF = 0$$

откуда

$$\Omega = \frac{\int_F \omega_B dF}{F} . \quad (6.15)$$

Здесь ω_B - секториальная координата произвольной точки K средней линии относительно произвольного полюса B ; $\int_F \omega_B dF$ - соответствующий секториальный статический момент. Зная Ω , можно подобрать длину s дуги C_1C и найти положение начального радиуса BC .

Для определения полюса главных секториальных площадей предварительно найдем формулы преобразования секториальных координат при изменении полюса.

Дифференциалы секториальной площади ω для полюсов A и B (рис.323):

$$d\omega_A = h_A ds , \quad d\omega_B = h_B ds ,$$

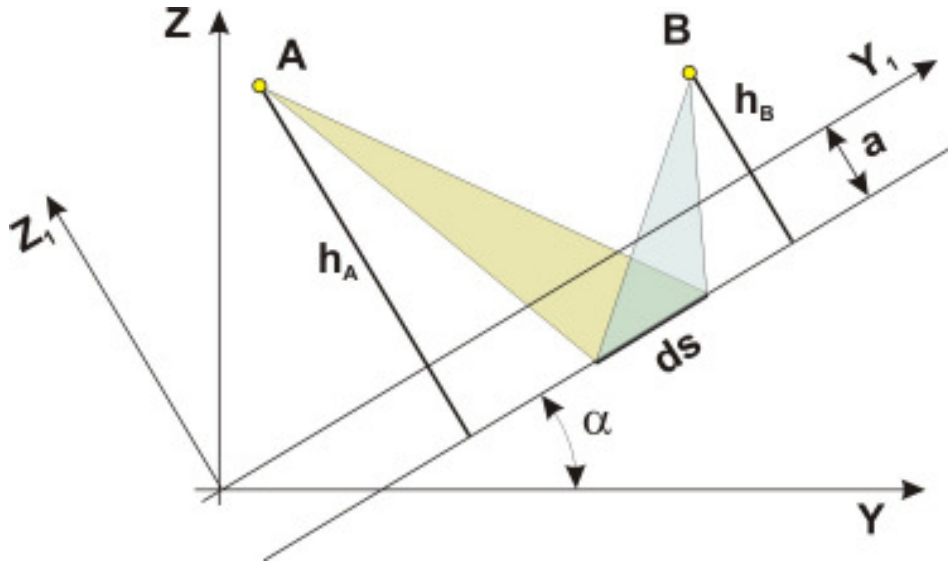


Рис.323

где h_A, h_B - длины перпендикуляров, опущенных из полюсов A и B на касательную к средней линии сечения.

Вычтем из первого уравнения второе.

$$d(\omega_A - \omega_B) = (h_A - h_B)ds.$$

Пусть касательная к средней линии сечения составляет угол α с осью Oy . Тогда в системе координат $y_I O z_I$

$$(h_A - h_B) = (z_{IA} - z_{IB}) = (z_A - z_B)\cos \alpha - (y_A - y_B)\sin \alpha$$

и так как $ds \cos \alpha = dy$, а $ds \sin \alpha = dz$, то

$$d(\omega_A - \omega_B) = (z_A - z_B)dy - (y_A - y_B)dz$$

откуда

$$\omega_A = \omega_B + (z_A - z_B)y - (y_A - y_B)z + C. \quad (6.16)$$

Если секториальной нулевой точкой при обоих полюсах является точка с координатами y_0, z_0 , то постоянная C может быть найдена из условия

$$(z_A - z_B)y_0 - (y_A - y_B)z_0 + C = 0 \quad (6.17)$$

так как $\omega_A = \omega_B \equiv 0$.

Для определения полюса главных секториальных площадей (как мы покажем, в дальнейшем он совпадает с центром изгиба) применим к условиям (6.14) формулу преобразования секториальных координат при изменении полюса (6.16):

$$J_{\omega_y} = \int_{(F)} \omega_y y dF = \int_{(F)} \omega_B y dF + \int_{(F)} (z_A - z_B) y^2 dF - \int_{(F)} (y_A - y_B) z y dF + C \int_{(F)} y dF = 0$$

$$J_{\omega_z} = \int_{(F)} \omega_z z dF = \int_{(F)} \omega_B z dF + \int_{(F)} (z_A - z_B) y z dF - \int_{(F)} (y_A - y_B) z^2 dF + C \int_{(F)} z dF = 0$$

или (так как оси Oy и Oz являются главными центральными осями инерции сечения)

$$\int_{(F)} \omega_B y dF + (z_A - z_B) J_z = 0 ;$$

$$\int_{(F)} \omega_B z dF - (y_A - y_B) J_y = 0 .$$

Полус главных секториальных площадей определяется по формулам

$$y_A = y_B + \frac{1}{J_y} \int_{(F)} \omega_B z dF ; \quad z_A = z_B - \frac{1}{J_z} \int_{(F)} \omega_B y dF . \quad (6.18)$$

По этим формулам, приняв сначала за полюс секториальных площадей произвольную точку B , найдём координаты полюса главных секториальных площадей A .

Если одна из главных осей инерции, например, Oy , является осью симметрии, то главная секториальная нулевая точка и полюс главных секториальных площадей должны находиться на этой оси. Это обусловлено тем, что площади элементарных площадок расположенных по разные стороны от оси Oy и их абсциссы равны между собой, а секториальные координаты равны по величине, но обратны по знаку, так как соответствующие секториальные площади описываются вращением радиус-вектора в разные стороны. Поэтому

$$\int_{(F_1)} \omega dF = - \int_{(F_2)} \omega dF ; \quad \int_{(F_1)} \omega y dF = - \int_{(F_2)} \omega y dF$$

следовательно:

$$\int_{(F)} \omega dF = 0 ; \quad \int_{(F)} \omega y dF = 0 .$$

Например, для швеллера (рис.324) главная нулевая секториальная точка – точка C - находится на оси y на кратчайшем расстоянии от полюса главных секториальных площадей, а секториальная площадь точки K равна удвоенной площади треугольника ACK (A - полюс главных секториальных площадей).

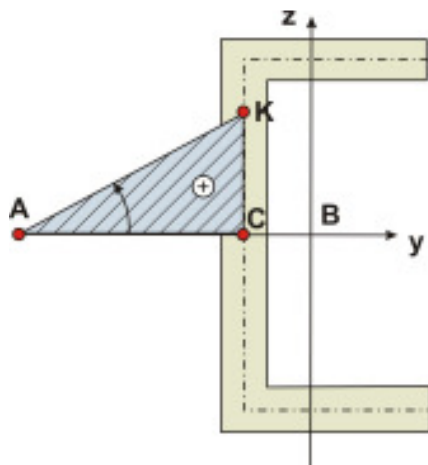


Рис.324

Если сечение имеет две оси симметрии, например двутавр, то главная нулевая секториальная точка находится в центре тяжести сечения.

Итак, если отсчет секториальных площадей производить от начального радиуса, удовлетворяющего условию (6.13), а секториальный полюс выбрать в точке A , координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.14), то из четырех секториальных характеристик три обращаются в нуль:

$$S_{\omega} = \int_{(F)} \omega dF = 0 ; \quad J_{\omega_y} = \int_{(F)} \omega y dF = 0 ;$$

$$J_{\omega_z} = \int_{(F)} \omega z dF = 0 .$$

Секториальный момент инерции остается единственной геометрической величиной, характеризующей сопротивляемость тонкостенного стержня искривлениям поперечных сечений.

Важно отметить, что секториальный полюс A является одновременно центром изгиба для тонкостенного стержня, т. е., если действующая поперечная сила проходит через эту точку, то стержень испытывает только изгиб без дополнительного кручения.

Как было указано выше, любая точка срединной линии контура сечения в тонкостенном стержне характеризуется тремя координатами: двумя линейными x и y и одной секториальной ω , измеряемой в квадратных сантиметрах. Для отыскания линейных координат надо знать положение центра тяжести и главные центральные оси Oz и Oy . Для отсчета секториальных координат надо знать положение начального секториального радиуса или точку пересечения его со срединной линией контура (главную нулевую секториальную точку C) и положение секториального полюса, совпадающего с центром изгиба.

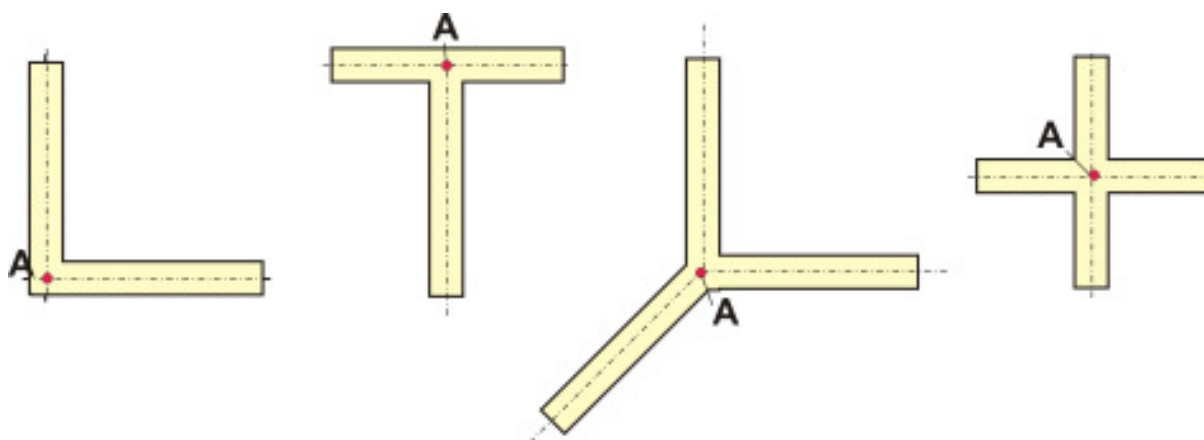


Рис.325

Легко установить положение полюса главных секториальных площадей (центра изгиба) для тонкостенного сечения, состоящего из нескольких прямоугольников, оси которых пересекаются в одной точке A (рис.325). Касательные напряжения в каждом таком прямоугольнике при прямом поперечном изгибе направлены параллельно его длинным сторонам, а равнодействующая элементарных касательных сил по каждому прямоугольнику совпадает с его осью. Все такие равнодействующие пересекаются в одной точке (в точке пересечения осей прямоугольников), а потому поперечная сила в сечении, являющаяся их общей равнодействующей, при прямом поперечном изгибе должна проходить через эту точку, которая, следовательно, и является полюсом главных секториальных площадей (центром изгиба).

Там же находится и секториальная нулевая точка, вследствие чего секториальная координата любой точки срединной линии контура равна нулю.

6.4 ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Двутавровое сечение (рис.326). Для двутаврового сечения полюс главных секториальных площадей (центр изгиба, точка A) совпадает с центром тяжести. Примем за начало отсчета секториальных площадей точку C . На левой половине верхней полки конец радиус-вектора, выходящего из точки A , вращается против часовой стрелки и секториальная площадь растет пропорционально расстоянию от точки C .

Эпюра секториальной площади изобразится треугольником с наибольшей ординатой $hb/4$. На правой стороне полки получим такой же треугольник, только отрицательный. Аналогичную картину получим на нижней полке. Для нахождения J_ω следует вычислить интеграл (6.11) для каждой половины полки и результаты сложить. Вычисляя интеграл по методу Верещагина, площадь треугольника и умножают на величину ω в точке, соответствующей центру тяжести эпюры ω , и результат учетверяют:

$$J_\omega = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \delta_2 = \frac{h^2 b^3 \delta_2}{24} = \frac{b^3 \delta_2}{12} \cdot \frac{h^2}{12} = J^x \cdot \frac{h^2}{12} \quad (6.19)$$

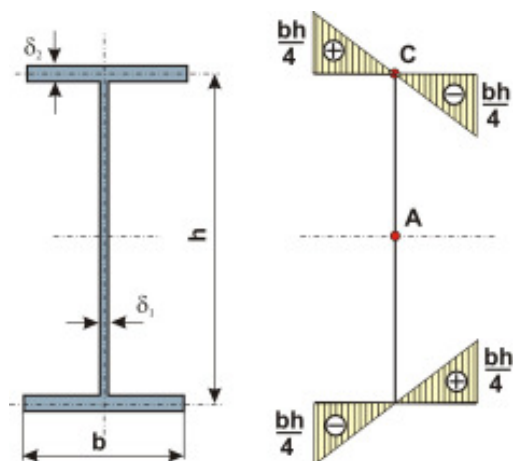


Рис.326

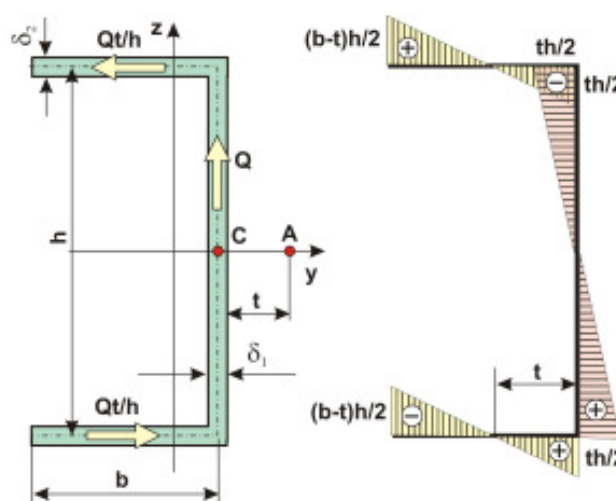


Рис.327

Угловое сечение. Как уже отмечалось, центр изгиба (полус главных секториальных площадей), такого сечения находится в вершине. Секториальная площадь для полюса, помещенного в центре изгиба, равна нулю, следовательно, $J_\omega = 0$. Этот же вывод справедлив для любого профиля, образованного прямолинейными тонкостенными элементами, сходящимися в одной точке, например для тавра. Такие стержни не обладают изгибно-крутильной жесткостью, сечения их при кручении не искажаются.

Швеллерное сечение (рис.327). Как известно из курса сопротивления материалов, полюс главных секториальных площадей (центр изгиба) для швеллера находится на расстоянии

$$t = \frac{\delta h^2 b^2}{4J_y}.$$

Примем за начало отсчета секториальных площадей середину швеллера (точку C). Двигаясь от середины вверх, мы вращаем радиус-вектор по часовой стрелке, то есть в отрицательном направлении, секториальная площадь отрицательна; она убывает по линейному закону, достигая значения $th/2$ в угловой точке. Движение по полке связано с положительным вращением радиус-вектора, значит, секториальная площадь растет. Она равна нулю в точке, расстояние которой от угла есть основание треугольника с высотой $h/2$ и удвоенной площадью $th/2$, следовательно, это расстояние равно t . Максимальное значение ω на конце полки есть $(b-t)h/2$. На нижней половине швеллера картина будет антисимметрична: эпюра та же, что вверху, но противоположных знаков. Условие $\int \omega \delta ds = 0$, как видно, выполняется, так как интеграл от ω есть общая площадь эпюры.

Вычислим теперь J_{ω} . Применяя правило Верещагина при вычислении интеграла, получим:

$$J_{\omega} = 2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(b-t)h}{2} \cdot (b-t) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(b-t)h}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{th}{2} \cdot t \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{th}{2} \right] \cdot \delta_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{th}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{th}{2} \cdot \delta_2 \right\}.$$

Вывод общей формулы для J_{ω} не имеет смысла; следует сразу вести все вычисления в числах.

Зетовое сечение (рис.328). Выберем произвольный полюс B в центре тяжести поперечного сечения ($y_B = z_B = 0$). Эпюра секториальных координат, отнесенная к точке B и вертикальному начальному радиусу, показана на рис.328. По формулам (6.18) получим:

$$y_A = \frac{\int_{(F)} \omega_B z dF}{J_y} = \frac{-\frac{\delta_1 h^2}{4} \int_0^b y dy + \frac{\delta_1 h^2}{4} \int_0^b y dy}{J_y} = 0;$$

$$z_A = -\frac{\int_{(F)} \omega_B y dF}{J_y} = \frac{\frac{\delta_1 h^2}{4} \int_0^b y dy - \frac{\delta_1 h^2}{4} \int_0^b y dy}{J_y} = 0$$

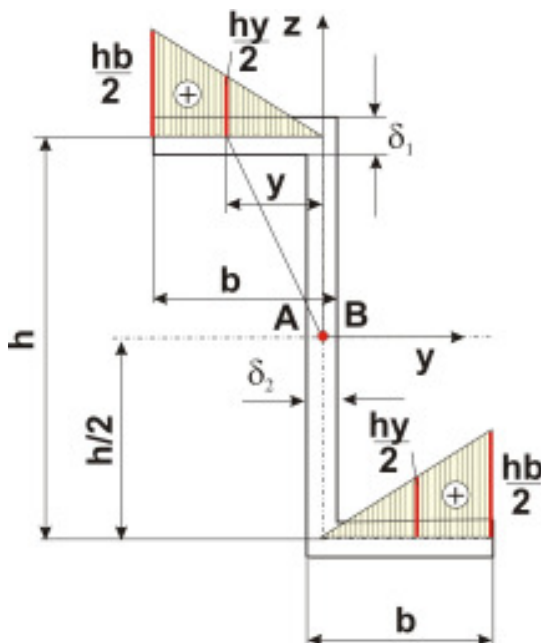


Рис.328

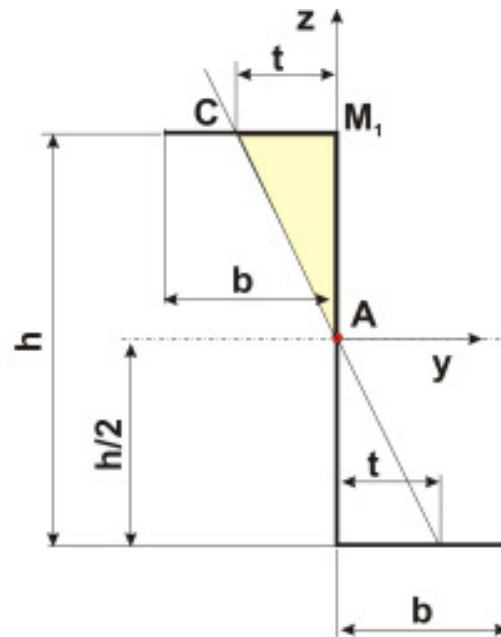


Рис.329

Таким образом, полюс главных секториальных площадей (центр изгиба) совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

Для эпюры секториальных площадей не выполняется условие

$$\int_{(F)} \omega dF = 0.$$

Поэтому нужно изменить начало отсчета секториальных площадей. Принимая вертикальный радиус-вектор за начальный и пользуясь построенной эпюрой секториальных координат, находим

$$\Omega = \frac{\int_{(F)} \omega_b dF}{F} = \frac{2 \frac{\delta_1 h}{2} \int_0^b y dy}{F} = \frac{\frac{\delta_1 h b^2}{2}}{2b\delta_1 + h\delta_2}. \quad (*)$$

Обозначим расстояние между точками пересечения полки с вертикальным и искомым начальным радиусом через t . Как следует из *рис.329*, величина удвоенной площади треугольника ACM_1

$$\Omega = \frac{ht}{2}. \quad (**)$$

Приравняв правые части равенств (*) и (**), найдём положение начального радиуса или нулевую точку C :

$$t = \frac{\delta_1 b^2}{2b\delta_1 + h\delta_2}.$$

Эпюра главной секториальной площади представлена на *рис.330, з*.
Для вычисления секториально-линейных моментов

$$J_{\omega_y} = \int_{(F)} \omega_y y dF; \quad J_{\omega_x} = \int_{(F)} \omega_x x dF$$

и секториального момента инерции

$$J_{\omega} = \int_{(F)} \omega^2 dF$$

можно воспользоваться либо непосредственным интегрированием, либо методом Симпсона, либо правилом Верещагина. Воспользуемся правилом Верещагина. Нам потребуются координаты центра изгиба и эпюры координат точек срединной линии профиля и секториальных координат зетового сечения. При построении эпюр будем придерживаться следующего правила: положительные ординаты откладывать вверх или вправо, отрицательные - вниз или влево. На *рис.330* показаны эпюры двух линейных координат (y и z) и двух секториальных координат при полюсе в центре изгиба (эпюра ω_b относится к вертикальному радиусу, эпюра ω_A - к главному начальному радиусу).

При этом получим

$$J_{\omega_y} = \int_{(F)} \omega_b y dF = -\frac{1}{2} \frac{hb}{2} b \frac{2}{3} b \delta_1 + \frac{1}{2} \frac{hb}{2} b \frac{2}{3} b \delta_1 = 0;$$

$$J_{\omega_x} = \int_{(F)} \omega_A x dF = b \frac{h}{2} \delta_1 \frac{1}{2} \frac{hb}{2} - b \frac{h}{2} \delta_1 \frac{1}{2} \frac{hb}{2} = 0.$$

Равенство нулю этих интегралов показывает совпадение полюса главных секториальных площадей (центра изгиба) с центром тяжести поперечного сечения. Секториальный момент инерции получается умножением эпюры ω_A самой на себя.

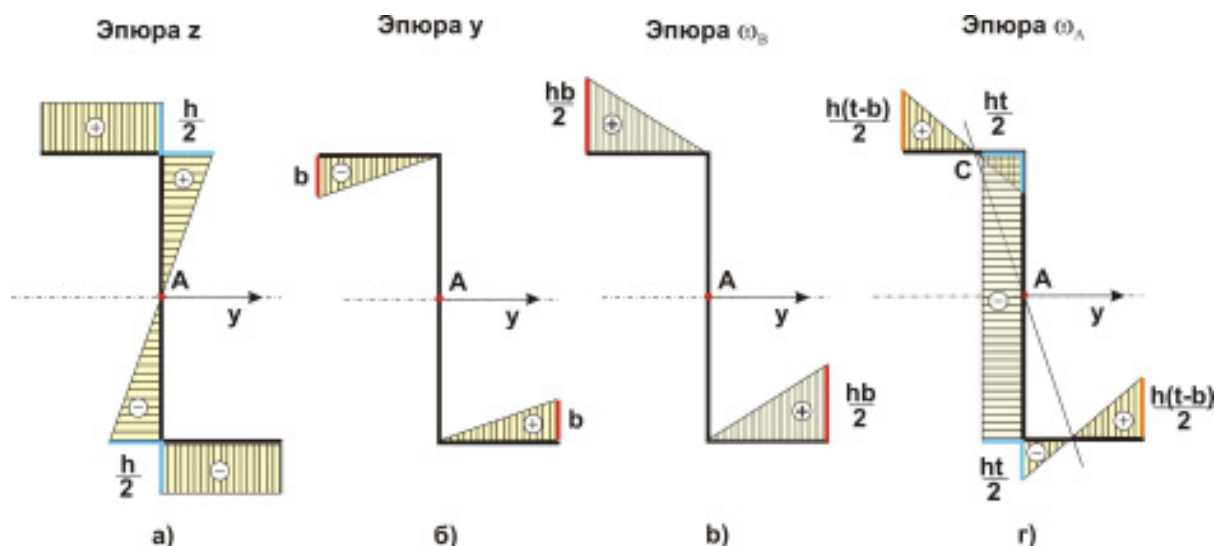


Рис.330

$$J_{\omega} = \int_{(F)} \omega^2 dF = 2\delta_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h(b-t)}{2} (b-t) \right) \frac{2}{3} \frac{h(b-t)}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{ht}{2} \right) t \frac{2}{3} \left(\frac{ht}{2} \right) \right] + \left(\frac{ht}{2} \right)^2 h \delta_2 = \frac{\delta_1 h^2}{6} ((b-t)^3 + t^3) + \frac{h^3 t^2}{4} \delta_2.$$

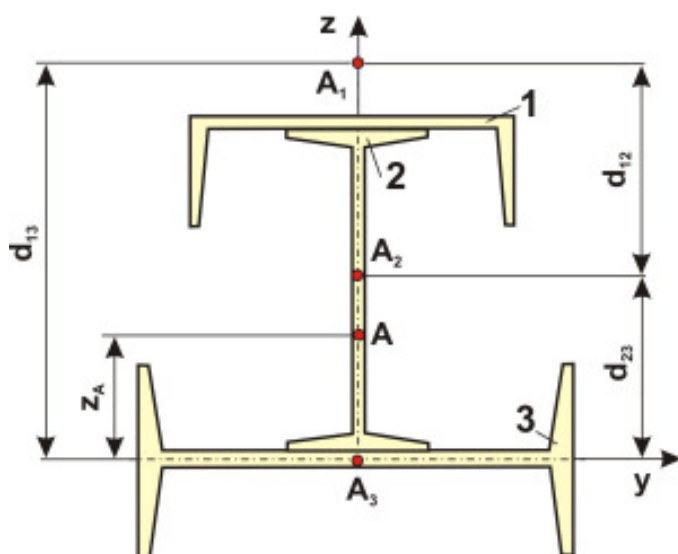


Рис.331

Прокатные профили.

При определении геометрических характеристик отдельных прокатных профилей (двутавров и швеллеров) нет нужды производить все указанные выше вычисления, так как имеются готовые секториальные характеристики двутавров (ОСТ 10016-39) и швеллеров (ОСТ 10017-39), учитывающие особенности профиля (уклон полков, закругления и т. д.).

Сложные симметричные сечения. Для сложного симметричного сечения, составленного из отдельных элементов, каждый из которых имеет свою ось симметрии, совпадающую с

осью симметрии всего сечения (рис.331), можно дать общие формулы для определения координат центра изгиба и секториального момента инерции. Такие сечения встречаются на практике очень часто, и пользование указанными формулами значительно сокращает расчет.

Формулы сводятся к следующему⁴⁶:

- 1) координата центра изгиба, отсчитываемая от центра изгиба какого-либо элемента, равна сумме произведений осевых моментов инерции остальных элементов (относительно оси симметрии сечения) на расстояния их центров изгиба от на-

⁴⁶ Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. Под редакцией д.т.н., проф. А.А. Уманского. М.: Стройиздат, 1960. – 1040 с.

чала отсчета, деленной на осевой момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения

$$z_A = \frac{J_{1z}d_{13} + J_{2z}d_{12}}{J_z}. \quad (6.20)$$

- 2) секториальный момент инерции составного сечения равен сумме собственных секториальных моментов инерции (относительно своих центров изгиба) плюс сумма произведений осевых моментов инерции отдельных элементов, взятых попарно, на квадраты расстояний между их центрами изгиба, деленная на осевой момент инерции всего составного сечения относительно оси симметрии. Для профиля, представленного на *рис.331*, координата центра изгиба A , отсчитываемая от центра изгиба третьего элемента, вычисляется таким образом:

3)

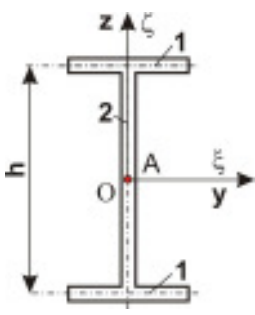
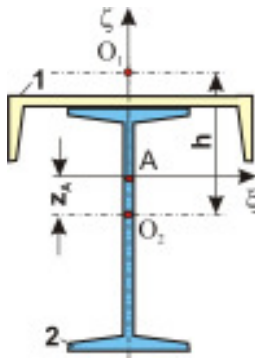
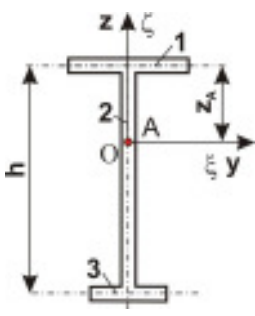
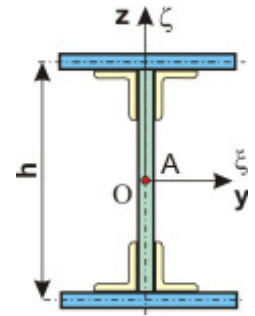
$$J_\omega = J_{\omega 1} + J_{\omega 2} + J_{\omega 3} + \frac{J_{1z}J_{2z}d_{12}^2 + J_{1z}J_{3z}d_{13}^2 + J_{2z}J_{3z}d_{23}^2}{J_z}. \quad (6.21)$$

В этих формулах J_{1z} , J_{2z} , J_{3z} - осевые моменты инерции отдельных элементов; J_z - осевой момент инерции всего сечения; $J_{1\omega}$, $J_{2\omega}$, $J_{3\omega}$ - собственные секториальные моменты инерции отдельных элементов относительно своих центров изгиба и своих главных секториальных нулевых точек; d_{12} , d_{13} , d_{23} - расстояния между центрами изгиба соответствующих элементов.

Формулы (6.20) и (6.21) справедливы лишь для профилей, составленных из прямоугольников. Применение этих формул для прокатных профилей влечет за собой неизменные погрешности, так как они не учитывают уклон полок и другие особенности профиля, влияющие на величину секториального момента инерции.

Таблица положений центра изгиба и секториальных моментов инерции сечений составных профилей приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Форма сечения	Координаты центра изгиба и секториальный момент инерции	Форма сечения	Координаты центра изгиба и секториальный момент инерции
	$y_A = 0; z_A = 0;$ $J_\omega = \frac{J_{1z}h^2}{2}$		$z_A = \frac{J_{1z}h}{J_z};$ $J_\omega = J_{1\omega} + J_{2\omega} + \frac{J_{1z}J_{2z}h^2}{J_z}$
	$z_A = \frac{J_{3z}h}{J_z};$ $J_\omega = \frac{J_{1z}J_{3z}h^2}{J_z}$		$y_A = 0; z_A = 0;$ $J_\omega = \frac{J_z h^2}{4}$

Форма сечения	Координаты центра изгиба и секториальный момент инерции	Форма сечения	Координаты центра изгиба и секториальный момент инерции
	$y_A = \frac{2J_{Iy}c}{J_y};$ $J_{\omega} = \frac{J_{Iy}J_{Iz}c^2}{J_y} + \frac{J_{Iy}b^2}{6}$		$z_A = \frac{J_{Iz}h}{J_z};$ $J_{\omega} = \frac{4J_{Iz}J_{Iy}h^2}{J_z}$
	$z_A = \frac{J_{Iz}h}{J_z};$ $J_{\omega} = J_{I\omega} + J_{Iz}h^2 + \frac{J_{Iz}J_{Iy}h^2}{J_z}$		$y_A = \frac{J_{Iy}h}{J_y};$ $J_{\omega} = \frac{J_{Iz}h^2}{4} - \frac{J_{Iy}^2}{J_y}$
	$z_A = \frac{J_{Iz}h}{J_z};$ $J_{\omega} = J_{I\omega} + J_{Iz}h^2 + \frac{J_{Iz}J_{Iy}h^2}{J_z}$		

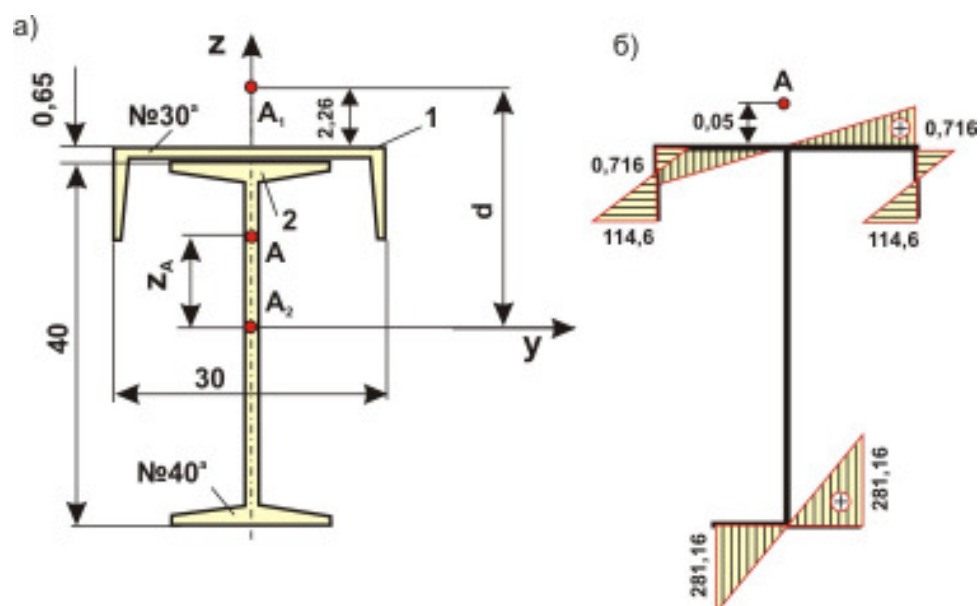


Рис.332

Пример 1 (взято из книги Н.А. Кузьмина⁴⁷). Определить положение центра изгиба, построить эпюру секториальных координат и определить секториальный момент инерции профиля, составленного из двутавра №40^а и швеллера №30^а (рис.332).

Так как в сортаменте прокатных профилей в соответствии с новыми ГОСТами таких профилей нет, то воспользуемся услугами программного комплекса SCAD, который имеет подпрограмму «Просмотр сортаментов металла», содержащую информацию о старых сортаментах. Выберем двутавр балочный по ОСТ 16-1932 и швеллер по ОСТ 17-1933 (рис.333) и повторим расчет Н.А. Кузьмина для новых геометрических характеристик (результаты расчета помещены в круглые скобки). Эта операция нам необходима для сопоставления результатов расчетов, выполненных традиционными способами и с помощью конечно-элементных программных комплексов.

Скриншот 1: Двутавр балочный по ОСТ 16-1932

	h	b	s	t	r ₁	r ₂	d	P	A	I _y	W _y	I _x	I _x	W _x	I _x
	см	см	см	см	см	см	см	Т/м	см ²	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ³	см
33с	33,000	13,400	1,350	1,500	1,150	0,580	26,800	0,064	81,550	13178,400	798,690	12,700	510,560	76,200	
36а	36,000	13,600	1,000	1,580	1,200	0,600	29,400	0,060	76,740	15902,800	883,490	14,400	555,450	81,680	
36б	36,000	13,800	1,200	1,580	1,200	0,600	29,400	0,066	83,940	16680,400	926,690	14,100	584,100	84,650	
36с	36,000	14,000	1,400	1,580	1,200	0,600	29,500	0,072	91,140	17458,000	969,890	13,800	614,430	87,780	
40а	40,000	14,200	1,050	1,650	1,250	0,630	33,100	0,068	86,400	21856,190	1062,800	15,900	660,500	93,030	
40б	40,000	14,400	1,250	1,650	1,250	0,630	33,200	0,074	94,400	22922,900	1146,100	15,500	693,260	96,290	
40с	40,000	14,600	1,450	1,650	1,250	0,630	33,200	0,080	102,400	23989,500	1199,400	15,300	727,910	99,710	
45а	45,000	15,000	1,150	1,800	1,350	0,680	37,600	0,081	102,700	32444,900	1442,000	17,700	855,190	114,020	

Скриншот 2: Швеллер по ОСТ 17-1933

	h	b	s	t	r ₁	r ₂	P	A	I _y	W _y	I _x	I _x	W _x	I _x	Y _c
	см	см	см	см	см	см	Т/м	см ²	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ³	см	см
27а	27,000	8,200	0,750	1,250	1,250	0,630	0,031	39,320	4366,000	323,400	10,500	214,300	35,240	2,330	2,120
27б	27,000	8,400	0,900	1,250	1,250	0,630	0,034	43,470	4630,000	342,900	10,300	235,700	37,290	2,330	2,080
27с	27,000	8,600	1,100	1,250	1,250	0,630	0,038	48,830	4952,000	366,800	10,000	258,400	39,400	2,300	2,040
30а	30,000	8,500	0,800	1,350	1,350	0,680	0,036	45,310	6140,000	409,300	11,600	262,500	41,400	2,410	2,160
30б	30,000	8,700	0,950	1,350	1,350	0,680	0,039	49,920	6500,000	433,300	11,400	287,400	43,690	2,400	2,120
30с	30,000	8,900	1,150	1,350	1,350	0,680	0,044	55,880	6943,000	462,900	11,100	313,800	46,040	2,370	2,090
33а	33,000	8,800	0,800	1,400	1,400	0,700	0,039	49,370	8088,000	490,200	12,800	305,600	46,310	2,490	2,200
33б	33,000	9,000	1,000	1,400	1,400	0,700	0,044	55,930	8679,000	526,000	12,400	336,300	48,960	2,450	2,130

Рис.333

Пользуясь сортаментом прокатной стали и таблицей секториальных характеристик, находим:

$$d = 20 + 0,75 + 2,26 = 23,01 \text{ см}; \quad (d = 20 + 0,8 + 2,26 = 23,06 \text{ см});$$

⁴⁷ Кузьмин Н.А., Лукаш П.А., И.Е. Милейковский. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М.: Стройиздат, 1960. – 264 с.

$$J_{1z} = 6047,9 \text{ см}^4, J_{2z} = 660 \text{ см}^4; \quad (J_{1z} = 6140 \text{ см}^4, J_{2z} = 660,5 \text{ см}^4);$$

$$J_{1\omega} = 36645 \text{ см}^6; J_{2\omega} = 228900 \text{ см}^6.$$

После этого определяем:

$$z_A = \frac{J_{1z}d}{J_z} = \frac{6047,9 \cdot 23,01}{6047,9 + 660} = 20,791 \text{ см.} \quad (z_A = \frac{6140 \cdot 23,06}{6140 + 660,5} = 20,82 \text{ см}).$$

Эпюра секториальных координат показана на *рис.332,б*. Далее находим;

$$J_{\omega} = J_{\omega 1} + J_{\omega 2} + \frac{J_{1z}J_{2z}d^2}{J_z} = 36645 + 228900 + \frac{6047,9 \cdot 660 \cdot 23,01^2}{6047,9 + 660} = 580600 \text{ см}^6;$$

$$(J_{\omega} = 36645 + 228900 + \frac{6140 \cdot 660,5 \cdot 23,06^2}{6140 + 660,5} = 582700 \text{ см}^6).$$

Положение центра изгиба и секториальные характеристики поперечных сечений можно определить, воспользовавшись одной из стандартных конечно-элементных программ, например, **SCAD** или **Patran**. Для сложных поперечных сечений эти вычисления проще выполняются в системе **SCAD**.

Проектно-вычислительный комплекс **SCAD** включает в себя модули, автоматизирующие ряд процессов проектирования сложных поперечных сечений стержневых элементов:

- **Конструктор Сечений** предназначен для формирования произвольных составных сечений из стальных прокатных профилей и листов, а также расчета их геометрических характеристик, необходимых для выполнения расчета конструкций. Для сконструированного сечения по обычным правилам сопротивления материалов определяются:
 - площадь поперечного сечения A ;
 - значения моментов инерции J_y и J_z относительно центральных осей, параллельных координатным осям сечения правой декартовой системы координат y и z ;
 - радиусы инерции i_y и i_z относительно тех же осей;
 - момент инерции при свободном кручении J_t ;
 - координаты центра масс;
 - значение угла наклона главных центральных осей инерции (угол α между осями U и y ; оси U и V - главные, центральные);
 - максимальный J_U и минимальный J_V моменты инерции;
 - максимальный i_U и минимальный i_V радиусы инерции;
 - максимальный W_{U+} и минимальный W_{U-} моменты сопротивления относительно оси U ;
 - максимальный W_{V+} и минимальный W_{V-} моменты сопротивления относительно оси V ;
 - ядровое расстояние от оси U , отсчитываемое вдоль положительного (a_{U+}) и отрицательного (a_{U-}) направления оси V ;
 - ядровое расстояние от оси V , отсчитываемое вдоль положительного (a_{V+}) и отрицательного (a_{V-}) направления оси U .
- Программа **Консул** предназначена для формирования произвольных сечений, а также расчета их геометрических характеристик, исходя из теории сплошных стержней. В отличие от модуля **Конструктор Сечений** эта программа позволяет определять дополнительно к уже перечисленным выше следующие геометрические характеристики:

- периметры сечения: полный P , внешний P_e и внутренний P_i ;
 - условные площади среза ($A_{v,y}, A_{v,z}$);
 - моменты инерции относительно системы, в которой создавалось сечение (относительно глобальной оси y - J_1 , относительно глобальной оси z - J_2 , центробежный момент инерции относительно глобальных осей - J_{12});
 - координаты центра изгиба Y_b, Z_b ;
 - секториальный момент инерции J_w .
- Программа **Тонус** позволяет рассматривать произвольные (в том числе открыто-замкнутые) профили, при этом используется вариант единой теории тонкостенных стержней, предложенный Е.А. Бейлиным⁴⁸. В отличие от программ **Конструктор Сечений** и **Консул** здесь реализован другой подход к формированию поперечного сечения. Предполагается, что сечение является тонкостенным и формируется из полосок заданием их толщины и определением их средней линии.

Вычислим положение центра изгиба и секториальные характеристики поперечного сечения, изображенного на *рис.322*, с помощью модулей **Конструктор Сечений** и **Консул**.

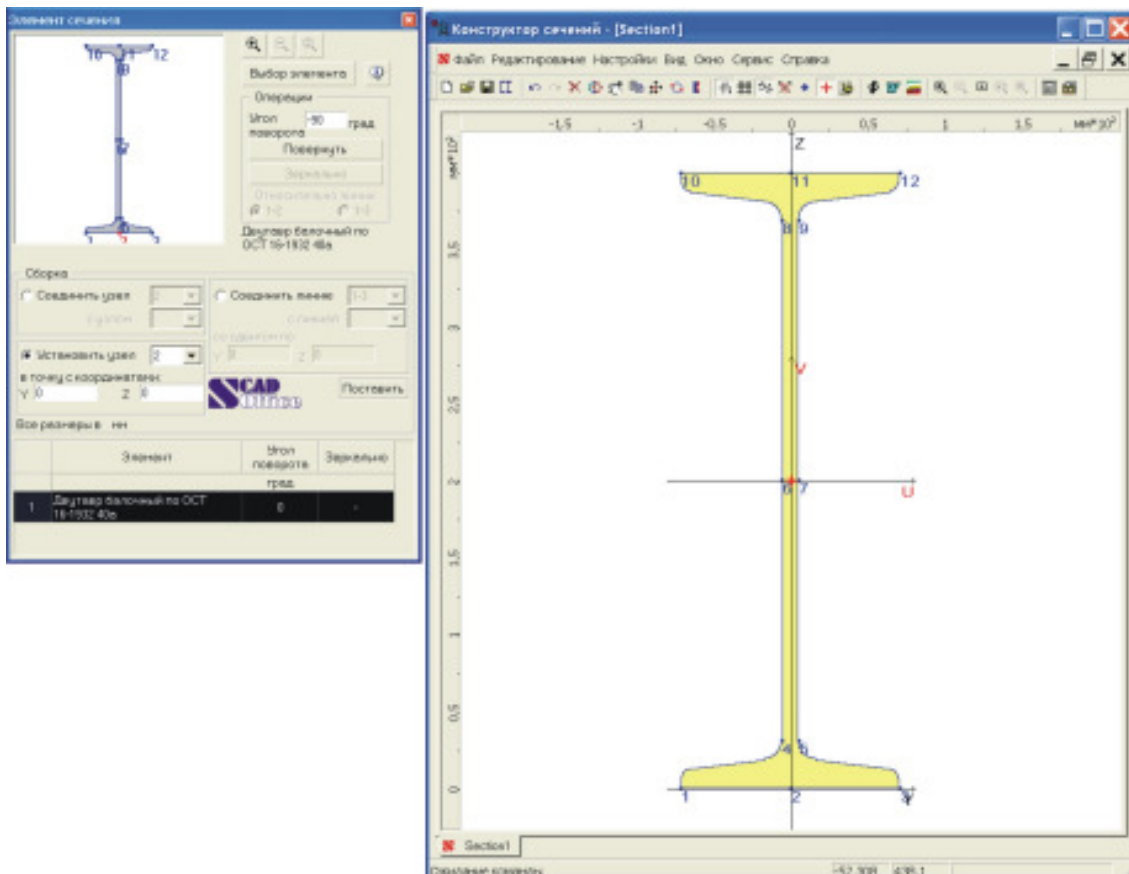


Рис.334

⁴⁸ Бейлин Е.А. Вариант единой теории тонкостенных стержней открытого, замкнутого и частично замкнутого профилей // Исследование по механике строительных конструкций и материалов. Межвузовский тематический сборник трудов / ЛИСИ, 1991.— С. 57-74.

Открываем подпрограмму **Конструктор Сечений**, внешний вид главного окна которой приведен на *рис.334*. На панели **Элемент сечения** щелкаем по клавише **Выбор элемента**. Появляется панель **Выбор элемента**, на которой выбираем двутавр балочный по ОСТ 16-1932 №40а, нажимаем клавишу **ОК**, и в окне панели **Элемент сечения** появляется изображение поперечного сечения профиля с изображением узлов. Узел (по умолчанию **I**), в котором помещается начало координат, окрашен в красный цвет. Для того чтобы ось z была направлена вдоль стенки двутавра, в окне списка **Установить узел** укажем цифру **2** и щелкнем по клавише **Поставить**. В рабочем поле главного окна появится изображение сечения двутавра.

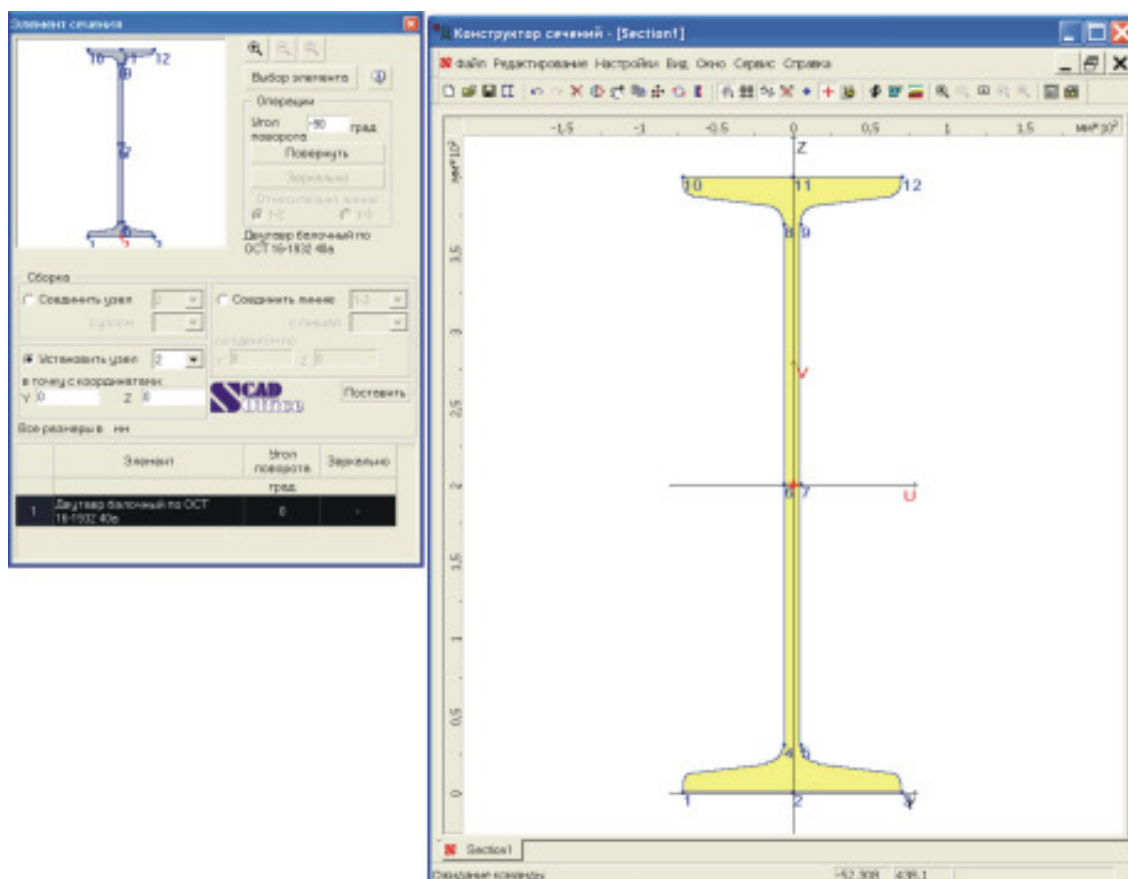

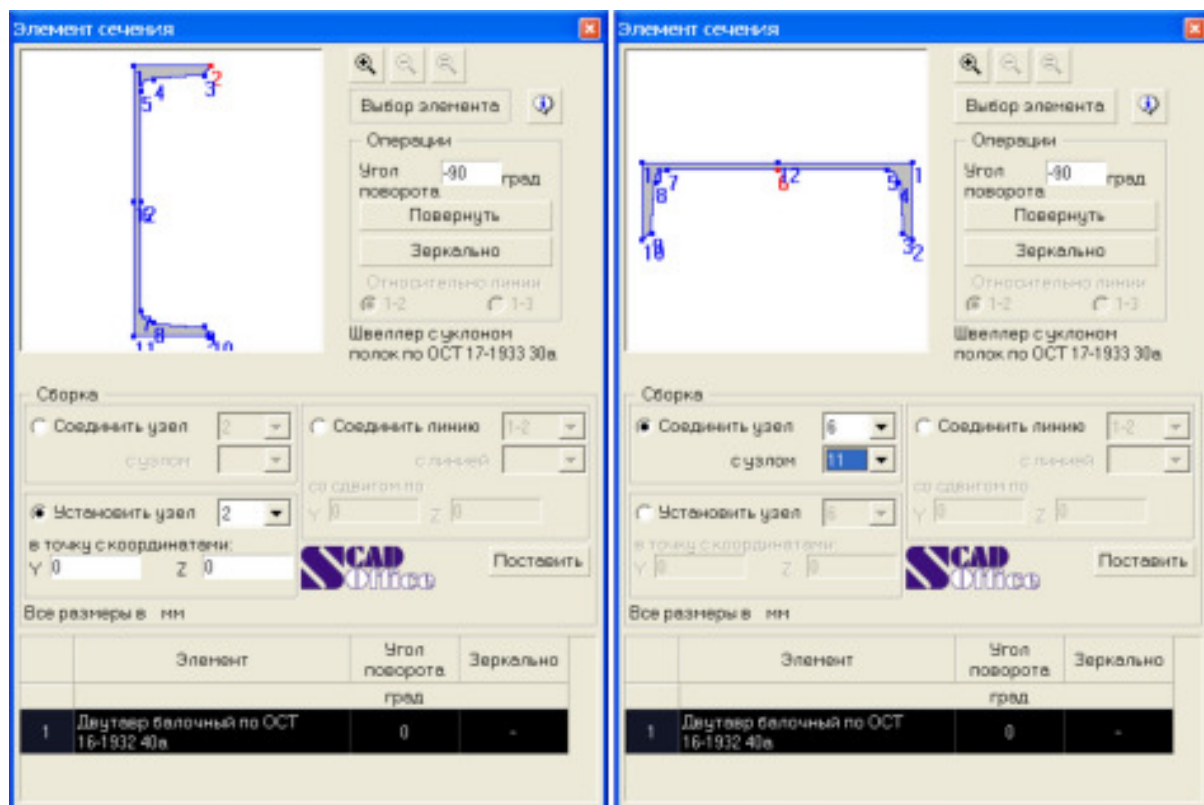


Рис.334

На панели **Элемент сечения** щелкаем по клавише **Выбор элемента** и на одноименной панели выбираем швеллер №30, нажимаем клавишу **ОК**, и в окне панели **Элемент сечения** появляется изображение поперечного сечения швеллера с изображением узлов (*рис.335, А*). В окне **Угол поворота** задаем угол поворота -90° , нажимаем клавишу **Повернуть**. В окне панели **Элемент сечения** изображение сечения профиля примет вид, представленный на *рис.335, В*. В разделе **Сборка** укажем, что требуется соединить 6-й узел сечения швеллера с 11-ым узлом сечения двутавра, и нажмем клавишу **Поставить**. В рабочем поле главного окна появится изображение сложного сечения (*рис.336*).

В главном меню **Конструктора Сечений** имеется кнопка **Отчет** , с помощью которой можно распечатать таблицу геометрических характеристик сечения. Но этот отчет не будет содержать информации о центре изгиба и секториальном моменте инерции J_ω . Нужная нам информация содержится в программе **Консул**.



а)

б)

Рис.335

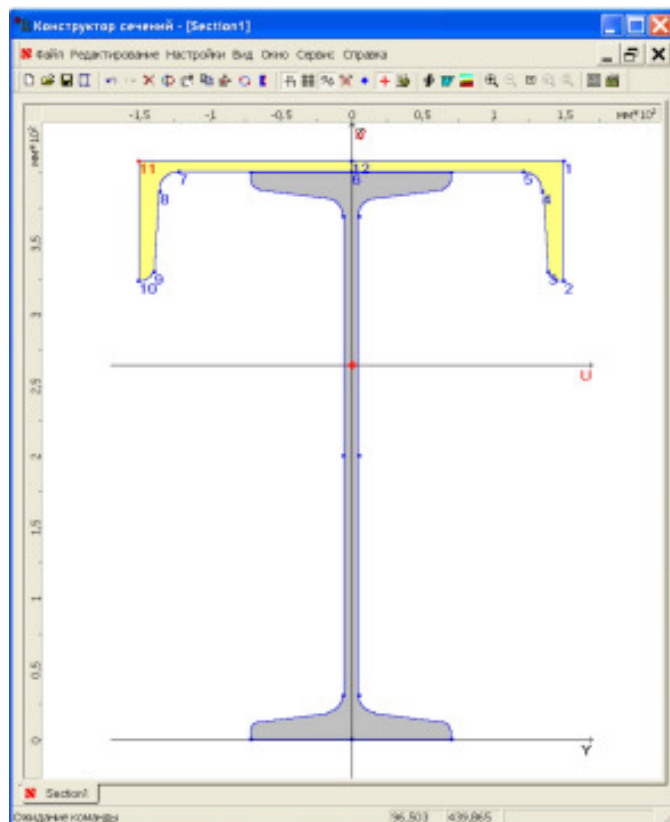


Рис.336

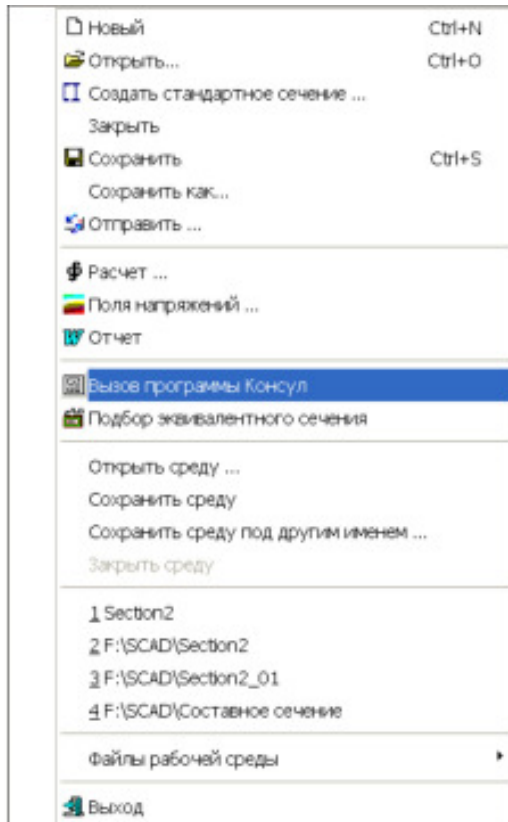


Рис.337

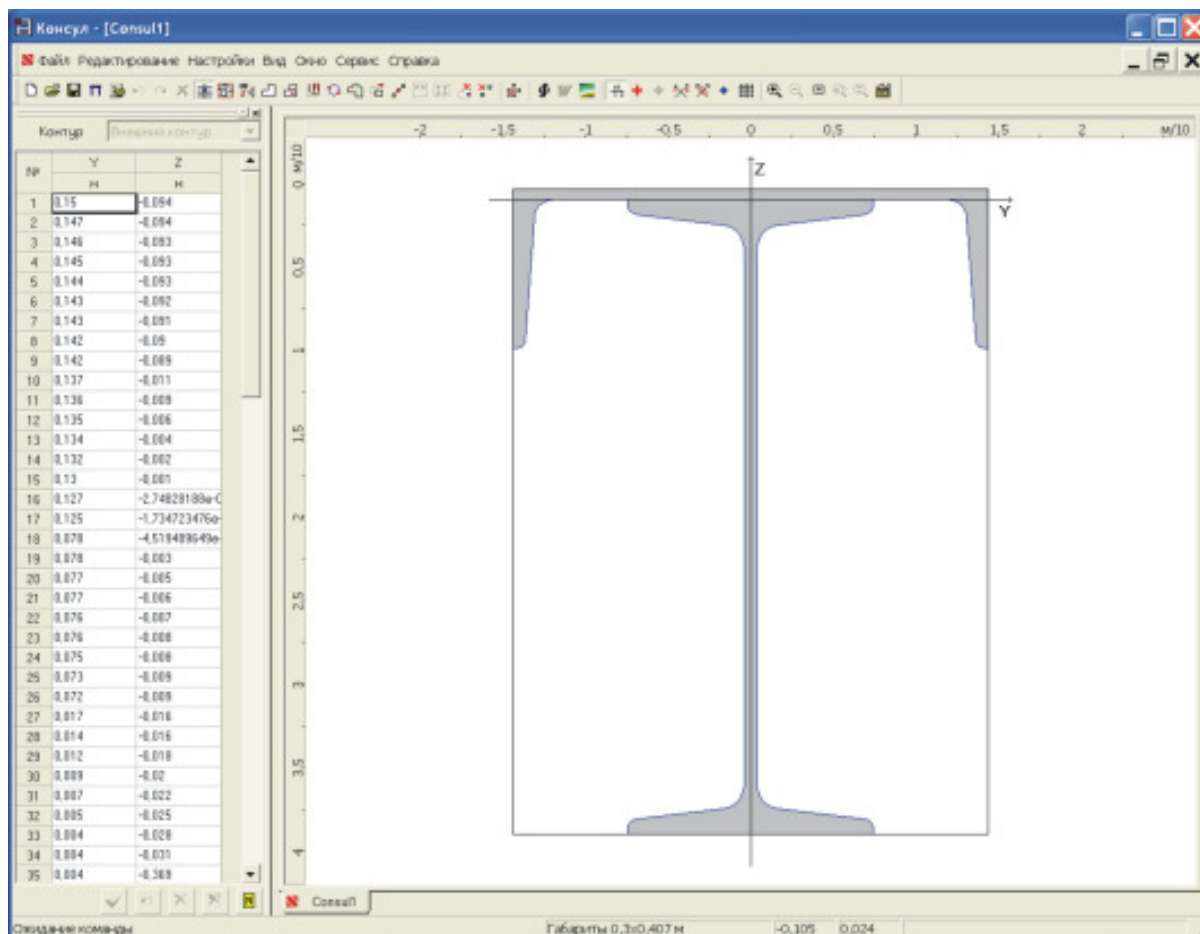



Рис.338

В меню **Файл** активизируем команду **Вызов программы Консул** (рис.337). Появится главное окно программы **Консул**, в рабочее поле которого будет помещено созданное нами сечение (рис.338). В меню **Файл** выбираем команду **Расчет** , затем **Отчет**, содержание которого приведено на рис.339.

Из таблицы, представленной на рис.339, следует, что в системе координат, начало которой расположено на верхней полке двутавра, координата центра изгиба $z_A = 0,498$ см. То есть центр изгиба находится выше верхней полки двутавра. По ранее выполненному расчету $z_A = 20,82$ см (начало системы координат помещено в центре тяжести двутавра) и расстояние от верхней полки двутавра составит $0,82$ см. Мы видим, что качественно результаты двух расчетов совпадают, количественно – отличаются на 0.322 см. Это различие вызвано тем, что мы определяли центр изгиба в соответствии с теорией В.З. Власова, в которой положение центра изгиба однозначно определяется геометрией сечения.

Как мы знаем, в теории упругости доказывается, что положение центра изгиба зависит не только от формы и размеров сечения, но и от коэффициента Пуассона⁴⁹. В системе **SCAD** при вычислении положения центра изгиба требуется задать величину коэффициента Пуассона. Кроме того формулы (6.20) и (6.21) справедливы лишь для профилей, составленных из прямоугольников. Применение этих формул для прокат-

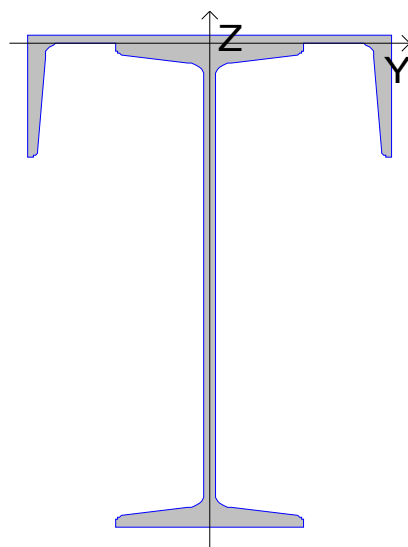
⁴⁹ Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. Под редакцией д.т.н., проф. А.А. Уманского. М.: Стройиздат, 1960. – 1040 с.

Бейлин Е.А. Вариант единой теории тонкостенных стержней открытого, замкнутого и частично замкнутого профилей // Исследование по механике строительных конструкций и материалов. Межвузовский тематический сборник трудов / ЛИСИ, 1991.- с. 57-74.

ных профилей влечет за собой неизменные погрешности, так как они не учитывают уклон полок и другие особенности профиля, влияющие на величину секториального момента инерции.

Секториальный момент инерции J_{ω} , вычисленный **SCAD**, составил $600527,732 \text{ см}^6$, в то время как при расчете по приближенным формулам мы получили величину $J_{\omega} = 582700 \text{ см}^6$, т.е. погрешность вычислений по приближенным зависимостям не превышает 3%.

Сечение



Габариты 0,3 x 0,407 м

Геометрические характеристики			
	Параметр	Значение	Единицы измерения
A	Площадь поперечного сечения	113,123	см ²
A _{v,y}	Условная площадь среза вдоль оси U	35,25	см ²
A _{v,z}	Условная площадь среза вдоль оси V	31,345	см ²
α	Угол наклона главных осей инерции	0	град
I _y	Момент инерции относительно центральной оси Y1 параллельной оси Y	27885,56	см ⁴
I _z	Момент инерции относительно центральной оси Z1 параллельной оси Z	6495,353	см ⁴
I _t	Момент инерции при свободном кручении	79,868	см ⁴
I _ω	Секториальный момент инерции	600527,732	см ⁶
i _y	Радиус инерции относительно оси Y1	15,692	см
i _z	Радиус инерции относительно оси Z1	7,586	см
W _{u+}	Максимальный момент сопротивления относительно оси U	1053,879	см ³
W _{u-}	Минимальный момент сопротивления относительно оси U	1965,144	см ³
W _{v+}	Максимальный момент сопротивления относительно оси V	433,024	см ³
W _{v-}	Минимальный момент сопротивления относительно оси V	433,024	см ³
W _{pl,u}	Пластический момент сопротивления относительно оси U	1594,011	см ³
W _{pl,v}	Пластический момент сопротивления относительно оси V	596,171	см ³

I_u	Максимальный момент инерции	27885,56	см ⁴
I_v	Минимальный момент инерции	6495,353	см ⁴
i_u	Максимальный радиус инерции	15,701	см
i_v	Минимальный радиус инерции	7,578	см
a_{u+}	Ядровое расстояние вдоль положительного направления оси Y(U)	3,831	см
a_{u-}	Ядровое расстояние вдоль отрицательного направления оси Y(U)	3,841	см
a_{v+}	Ядровое расстояние вдоль положительного направления оси Z(V)	9,295	см
a_{v-}	Ядровое расстояние вдоль отрицательного направления оси Z(V)	17,372	см
y_m	Координата центра масс по оси Y	-1,257936563e-015	см
z_m	Координата центра масс по оси Z	-13,54	см
Y_b	Координата центра изгиба по оси Y	0,002	см
Z_b	Координата центра изгиба по оси Z	0,498	см
P	Периметр	199,425	см
P_i	Внутренний периметр	0	см
P_e	Внешний периметр	199,425	см
I_1	Момент инерции относительно глобальной оси Y	27858,75	см ⁴
I_2	Момент инерции относительно глобальной оси Z	27174,163	см ⁴
I_{12}	Центробежный момент инерции относительно глобальных осей	-3,002	см ⁴
I_p	Полярный момент инерции	34370,172	см ⁴
i_p	Полярный радиус инерции	17,43	см
W_p	Полярный момент сопротивления	4512,078	см ³

Отчет сформирован программой **Консул**, версия: **3.1.1.248** от **03.11.2004**

Рис.339

6.4. СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ БРУСА С ДВУТАВРОВЫМ ПРОФИЛЕМ

Прежде чем переходить к выводу основных зависимостей для стесненного кручения брусков открытого профиля, познакомимся с механизмом появления нормальных напряжений при кручении на простом примере.

Представим себе брус с двутавровым профилем, защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце парой сил с моментом (рис.340,а)

$$Ph = L.$$

Крутящий момент на протяжении бруса остается постоянным и равным:

$$M_{кр} = L.$$

Крутящий момент $M_{кр}$ уравнивается касательными напряжениями изгиба полок в своих плоскостях в разные стороны. В самом деле, мы могли бы, например, вырезать стенку двутавра, и всё равно конструкция восприняла бы силы P , от которых возникает изгиб одних полок, работающих в этом случае как две балки с прямоугольным вытянутым профилем.

Характерной чертой изгибного или стесненного кручения является возникновение нормальных напряжений в поперечных сечениях. Происхождение этих напряжений связано, как мы видим, с изгибом полок или, что то же, со стеснением деформации поперечных сечений. На свободном торце нормальные напряжения равны нулю. *Характер деформации принимается таким же, как и при свободном кручении, и сводится к взаимному повороту плоскостей полок в разные стороны* (см. красные прямые на

рис.340, б). При учете изгиба полок в своих плоскостях принимается гипотеза плоских сечений для каждой полки в отдельности.

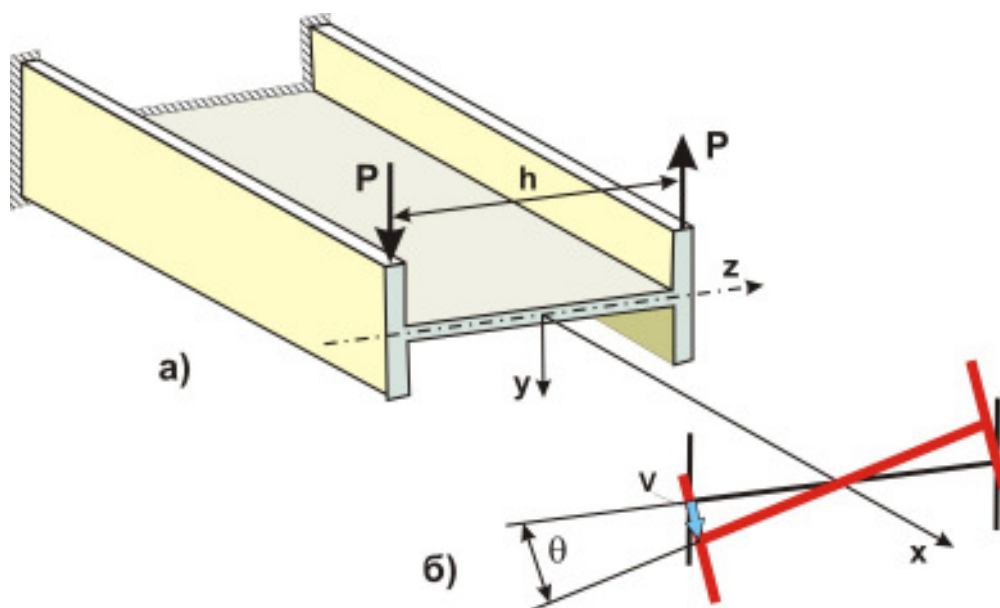


Рис.340

В соответствии с гипотезой о малости перемещений предполагается, что напряженное состояние в поперечном сечении может быть достаточно точно представлено совокупностью двух напряженных состояний - обычного (иначе свободного) кручения и изгиба полок в своих плоскостях в разные стороны. Это позволяет записать выражение для крутящего момента в виде

$$M_{кр} = M_k + M_{\omega}. \quad (6.22)$$

Здесь M_k - крутящий момент, эквивалентный касательным напряжениям свободного кручения; M_{ω} - крутящий момент, эквивалентный касательным напряжениям изгиба полок в разные стороны (коротко - момент изгибного, или стесненного кручения; изгибно-крутящий момент).

Выяснение распределения $M_{кр}$ на две части (M_k и M_{ω}) из условия равновесия невозможно и представляет собою, таким образом, статически неопределимую задачу.

В соответствии с гипотезой о неизменяемости поперечного сечения профиля предполагается, что поперечное сечение при кручении поворачивается как жесткий в своей плоскости диск, не искривляясь. Таким образом, деформация бруса полностью определяется величиной угла закручивания θ в каждом сечении. Выражая через θ как величину M_k , так и величину M_{ω} , и подставляя эти выражения в (6.22), мы получаем уравнение для раскрытия статической неопределимости в каждом сечении.

Выражение M_k через θ легко получить:

$$\theta' = \frac{M_k}{GJ_k},$$

откуда

$$M_k = GJ_k \theta'. \quad (6.23)$$

Чтобы выразить M_{ω} через θ , учтем, что

$$M_{\omega} = Q^n \cdot h. \quad (6.24)$$

Здесь Q^n - поперечная сила в полке.

С другой стороны, известно, что приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки при поперечном изгибе имеет вид

$$M_{изг}'' = -EJ_z^n v''. \quad (6.25)$$

Здесь $M_{изг}''$ - изгибающий момент в полке; J_z^n - момент инерции полки относительно ее поперечной главной оси z ; v - прогиб полки в данном сечении.

Дифференцируя (6.24), находим:

$$Q^n = -EJ_z^n v'''. \quad (6.26)$$

Выразим прогиб полки v через угол закручивания θ (рис.340, б):

$$v = \frac{\theta h}{2}. \quad (6.27)$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} Q^n &= -EJ_z^n \theta''' \frac{h}{2}; \\ M_{\omega} &= -EJ_z^n \theta''' \frac{h^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Подстановка (6.23) и (6.28) в (6.22) дает дифференциальное уравнение

$$M_{кр} = GJ_k \theta' - EJ_z^n \theta''' \frac{h^2}{2}. \quad (6.29)$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения дает значение θ , а отсюда можно при помощи (6.28) найти M_{ω} , а затем из (6.22) и M_k .

Придадим уравнению (6.29) несколько иную форму.

Введем два новых понятия – одно статическое, другое геометрического характера.

Величину

$$M_{изг}'' h = B_{\omega} \quad (6.30)$$

будем называть **бимоментом**. Она образуется из изгибающих моментов полок точно так же, как из поперечных сил полок образуется крутящий момент [см. (6.24)].

Так как $(M_{изг}'')' = Q^n$, то

$$B_{\omega}' = M_{\omega} \quad (6.31)$$

Производная от бимоента равна крутящему моменту стесненного кручения. С другой стороны, можно сказать, что бимомент есть функция, интегральная по отношению к крутящему моменту стесненного кручения:

$$B_{\omega}(x) = B_{\omega}(0) + \int_0^x M_{\omega} dx \quad (6.32)$$

В соответствии с формулой (6.19)

$$J_z^n \frac{h^2}{2} = J_\omega.$$

Из (6.25) и (6.27) находим:

$$B_\omega = -EJ_\omega \theta'' . \quad (6.33)$$

Мы видим, что бимомент связан с углом закручивания так же, как изгибающий момент некоторой балки связан с прогибом ($M = EJv''$).

Продифференцируем (6.29) один раз по x . Производную от $M_{кр}$ обозначим так:

$$M'_{кр} = -m_k . \quad (6.34)$$

Величина m_k есть интенсивность крутящей моментной нагрузки (аналогично $Q' = -q$). В рассматриваемом нами примере $m_k = 0$, но для общности мы оставим величину m_k .

Продифференцированное уравнение запишем в таком виде:

$$GJ_k \theta'' - EJ_\omega \theta^{IV} = -m_k . \quad (6.35)$$

Из (6.33) имеем:

$$\theta'' = -\frac{B_\omega}{EJ_\omega} ; \quad (6.36)$$

$$\theta^{IV} = -\frac{B''_\omega}{EJ_\omega} . \quad (6.37)$$

Подставив эти значения в (6.35), получим вторую форму дифференциального уравнения стесненного кручения:

$$B''_\omega - \frac{GJ_k}{EJ_\omega} B_\omega = -m_k . \quad (6.38)$$

Проинтегрируем уравнение (6.38) для случая, показанного на рис.340. В данном случае распределенная крутящая моментная нагрузка отсутствует, $m_k = 0$. Введем обозначение:

$$\frac{GJ_k}{EJ_\omega} = k^2 . \quad (6.39)$$

Уравнение принимает вид

$$B''_\omega - k^2 B_\omega = -m_k . \quad (6.40)$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части. Общий интеграл, содержащий две произвольные постоянные, как известно из курса высшей математики, имеет вид:

$$B_\omega(x) = C_1 chkx + C_2 shkx . \quad (6.41)$$

Дифференцируя (6.41), находим:

$$B'_{\omega}(x) = M_{\omega} = C_1 kshkx + C_2 kchkx. \quad (6.42)$$

На основании (6.22)

$$M_k = M_{кр} - M_{\omega} = L - C_1 kshkx - C_2 kchkx. \quad (6.43)$$

Уравнения (6.41) - (6.43) являются уравнениями эпюр B_{ω} , M_{ω} , M_k .

Имея эпюры B_{ω} , M_{ω} , M_k в любом сечении можно найти:

- нормальные напряжения изгиба полок $M_{изг}^n = \frac{B_{\omega}}{h}$;
- касательные напряжения изгиба полок, $Q^n = \frac{M_{\omega}}{h}$;
- касательные напряжения свободного кручения $\tau_{max} = \frac{M_k}{J_k} \delta_{max}$.

Уравнения эпюр зависят от постоянных C_1 и C_2 . Для нахождения их следует воспользоваться граничными условиями.

При $x = 0$ $\theta = \theta' \equiv 0$, что влечет за собой, по (6.23), $M_k = 0$, следовательно, по (6.22), $M_{кр} = M_{\omega}$, по (6.31)

$$B'_{\omega} = M_{\omega} = L. \quad (6.44)$$

Условие на свободном конце, т. е. при $x = l$:

$$B = 0. \quad (6.45)$$

Выполняя граничные условия, из (6.42) имеем

$$C_1 kshk0 + C_2 kchk0 = L,$$

откуда

$$C_2 = \frac{L}{k}.$$

Из (6.45) получаем:

$$C_1 chkl + \frac{L}{k} shkl = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{L}{k} thkl. \quad (6.46)$$

Окончательное уравнение эпюры бимоментов имеет вид

$$B_{\omega}(x) = -\frac{L}{k} thklchkx + \frac{L}{k} shkx. \quad (6.47)$$

Наибольшее значение бимомента будет в сечении заделки:

$$\max B_{\omega}(x) = B_{\omega}(0) = -\frac{L}{k} thkl. \quad (6.48)$$

Изгибающий момент в сечении заделки для передней полки двутавра

$$\max M_{\omega}^n(0) = \frac{B_{\omega}(0)}{h} = -\frac{L}{hk} thkl. \quad (6.49)$$

Знак минус указывает, что в заделке передняя полка изгибается выпуклостью вверх, как оно и должно быть.

На основании (6.42), учитывая значения постоянных, имеем:

$$M_{\omega} = -Lthklshkx + Lchkx. \quad (6.50)$$

При этом

$$\max M_{\omega} = M_{\omega}(0) = L; \quad (6.51)$$

$$\min M_{\omega} = M_{\omega}(l) = -Lthklshkl + Lchk l = \frac{L}{chk l}. \quad (6.52)$$

Пользуясь уравнением (6.43), находим

$$M_k(x) = M_{kp} - M_{\omega} = L(1 + thklshkx - chkx); \quad (6.53)$$

$$\max M_k(x) = M_k(l) = L\left(1 - \frac{1}{chk l}\right); \quad (6.54)$$

$$\min M_k(x) = M_k(0) = 0. \quad (6.55)$$

На рис.341 показана форма эпюр B_{ω} , M_{ω} , M_k для двутавра №10 по ГОСТ 8239-72 при $L = 100$ Нм и $l = 2$ м (при такой нагрузке максимальные нормальные напряжения в полках двутавра в заделке составят $87,2$ МПа).

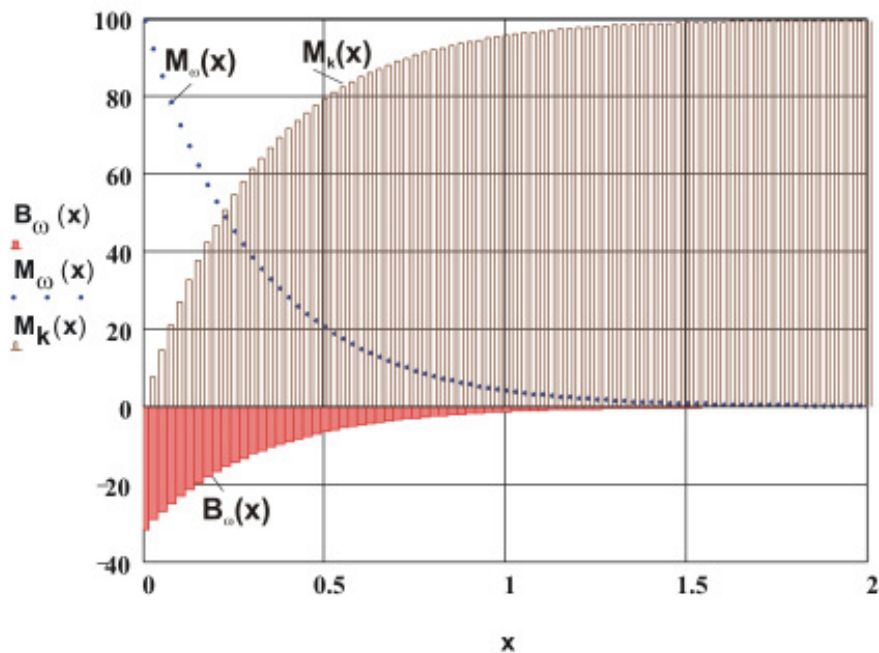


Рис.341

Изложенная здесь теория стесненного кручения была получена для бруса с двутавровым профилем. Характерная особенность этого профиля состоит в том, что касательные напряжения изгиба полок могут образовать пару сил и уравновесить крутящий момент. Этого нельзя сказать, например, об уголкового профиле: касательные напряжения изгиба уголка могут дать силу, но не пару. Профили-пучки вроде уголка, креста, тавра не работают на стесненное кручение. Следует также отметить, что для бруса с открытым профилем произвольной конфигурации (за исключением отмеченных выше профилей-пучков) дифференциальное уравнение и введенные новые величины B_ω и J_ω получают расширенное истолкование, оставаясь по своему механическому содержанию и форме неизменными.

6.6. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СРЕДНИМ КАСАТЕЛЬНЫМ И НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ В ТОЧКЕ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Для установления этой зависимости рассмотрим элемент, выделенный из стержня двумя плоскостями, перпендикулярными к его оси, и двумя плоскостями, параллельными этой же оси и нормальными к средней линии сечения (рис.342). Расстояние между первыми плоскостями равно dx , расстояние между вторыми, считая по дуге средней линии сечения, равно ds . Толщину стенки стержня примем равной δ , причем вследствие постоянства сечений стержня по его длине δ зависит от s , но не зависит от x . Усилия по граням элемента показаны на рисунке (рис.342). Имея в виду, что рассматриваемый элемент находится в равновесии, и проектируя на ось Ox все действующие на него силы, получим

$$-\sigma\delta ds + \left(\sigma\delta + \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial x} ds \right) + \left(\tau\delta + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} dx \right) dx - \tau\delta dx = 0$$

или

$$\frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} = 0$$

и

$$\tau(s) = -\frac{1}{\delta(s)} \int_0^s \frac{\partial\sigma}{\partial x} \delta ds, \quad (6.56)$$

где $\delta(s)$ - толщина стенки стержня на уровне дуговой координаты s .

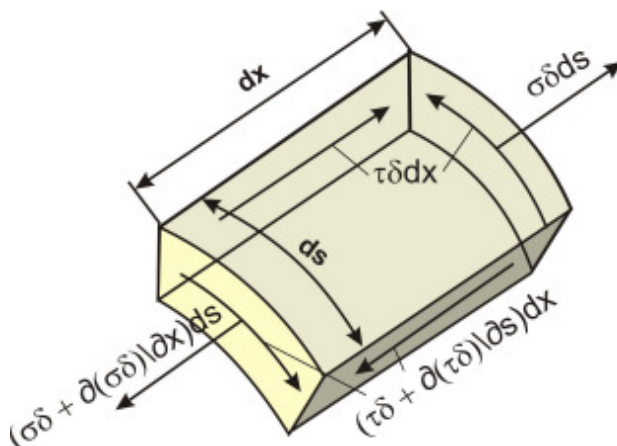


Рис.342

6.7. УСИЛИЯ В СЕЧЕНИИ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Вычислив равнодействующие и моменты усилий, возникающие по элементарным площадкам, находят полные усилия в рассматриваемом сечении стержня.

Нормальная сила и изгибающие моменты относительно осей Oy и Oz обусловлены наличием нормального напряжения σ в сечении; они определяются выражениями:

$$N = \int_{(F)} \alpha dF; \quad M_y = \int_{(F)} \alpha y dF; \quad M_z = \int_{(F)} \alpha z dF \quad (6.57)$$

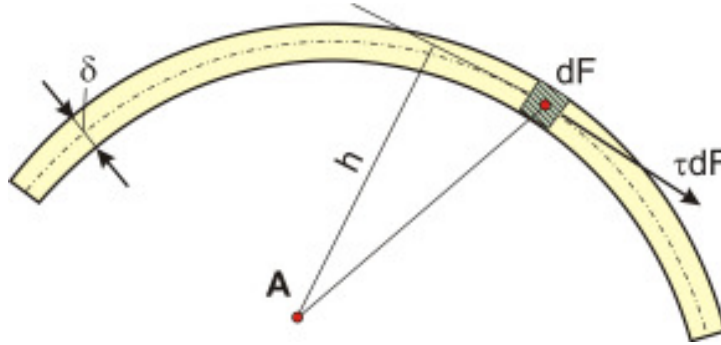


Рис.343

При определении усилий, связанных с касательными напряжениями в сечении, удобно рассматривать отдельно изгибно-крутильные напряжения τ и напряжения свободного кручения τ_k . Первые распределены по толщине стенки равномерно и для элементарной площадки $dF = \delta ds$ (рис.343) дают усилие τdF , действующее в соответствующей точке средней линии сечения по направлению касательной к этой линии. Вторые сводятся к паре сил, вызывающей свободное кручение, и потому не имеют равнодействующей. Сумма элементарных моментов свободного кручения для всех площадок сечения, очевидно, равна крутящему моменту свободного кручения для данного сечения M_k . Что касается элементарных усилий τdF , то проекции их равнодействующей на оси Oy и Oz , очевидно, представляют собой проекции на те же оси перерезывающего усилия, равные соответствующим составляющим поперечной силы в сечении:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \int_{(F)} \tau dF \cdot \cos \alpha = \int_{(F)} \tau \delta \cdot \cos \alpha ds = \int_{(F)} \tau \delta dy; \\ Q_z &= \int_{(F)} \tau dF \cdot \sin \alpha = \int_{(F)} \tau \delta \cdot \sin \alpha ds = \int_{(F)} \tau \delta dz, \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

где α - угол, составляемый касательной к средней линии сечения в данной ее точке с осью Oy ; y и z - координаты этой точки.

Составляя момент всех касательных усилий относительно какой-либо точки A в плоскости сечения, найдем момент, вызывающий поворот всего сечения вокруг точки A (крутящий момент). Он определяется зависимостью (6.22)

$$M_A = M_k + M_\omega,$$

где

$$M_\omega = \int_{(F)} \tau dF \cdot h = \int_{(F)} \tau \delta ds \cdot h = \int_{(F)} \tau \delta d\omega. \quad (6.59)$$

6.8. НАПРЯЖЕНИЯ В СЕЧЕНИИ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В связи с принятым допущением о равномерном распределении нормальных напряжений по толщине сечения оказывается достаточным найти эти напряжения

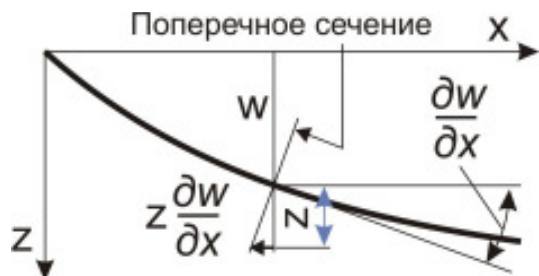


Рис.344

лишь в точках средней линии сечения. А так как нормальные напряжения можно выразить через удлинения соответствующих волокон стержня, которые в свою очередь связаны определенной зависимостью с продольными перемещениями точек сечения, то необходимо исследовать эти перемещения

В результате действия нормальной силы N сечение стержня, оставаясь плоским, при деформации перемещается вдоль оси Ox , оставаясь параллельным самому себе, так что перемещение любой точки сечения по направлению этой оси можно представить в виде

$$u_N = u_o. \quad (6.60)$$

Изгибающие моменты M_y и M_z вызывают повороты сечения относительно осей Oy и Oz , так что (рис.344)

$$u_{M_y} = -z \frac{dw}{dx}; \quad u_{M_z} = -y \frac{dv}{dx}. \quad (6.61)$$

где w , v - перемещения в направлении осей z и y соответственно.

Поперечные силы, вообще говоря, вызывают искривление сечений, в результате чего точки этих сечений получают некоторые перемещения u_Q . Искривление сечений получается также в результате действия крутящих моментов (за исключением стержня круглого сечения). Перемещения точек в направлении оси Ox вследствие этого искривления обозначают u_k . Таким образом, в общем случае

$$u = u_o - \frac{dv}{dx} y - \frac{dw}{dx} z + u_Q + u_k. \quad (6.62)$$

Перемещениями u_Q , связанными с действием поперечных сил, ввиду их относительной малости для тонкостенных стержней можно пренебречь, так же как и в случае стержней сплошного сечения. В то же время перемещениями u_k для тонкостенных стержней открытого профиля пренебрегать нельзя, так как они могут оказаться вполне ощутимыми. Эти перемещения для точек средней линии сечения определить нетрудно (рис.345).

В точках средней линии тонкостенного сечения касательные напряжения, возникающие вследствие кручения, равны нулю. Следовательно, равны нулю сдвиговые деформации:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (6.63)$$

А так как перемещение точки A поперечного сечения стержня в результате его закручивания на угол $d\theta$ равно $\rho d\theta$ (рис.345), то

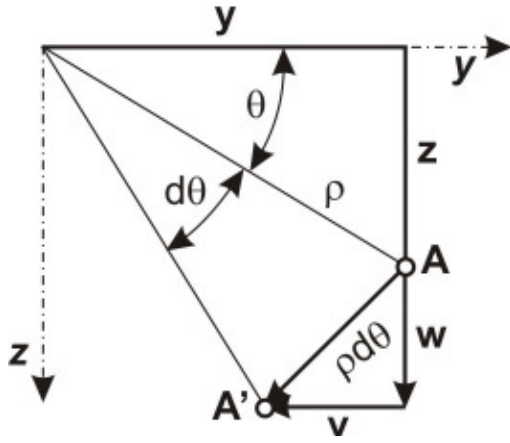


Рис.345

$$v = -\rho d\theta \cdot \sin \theta = -z d\theta ;$$

$$w = \rho d\theta \cdot \cos \theta = y d\theta .$$

Из (6.63) следует

$$\frac{\partial u_k}{\partial y} = z \frac{d\theta}{dx} ; \quad \frac{\partial u_k}{\partial z} = -y \frac{d\theta}{dx} ;$$

$$du_k = \frac{\partial u_k}{\partial y} dy + \frac{\partial u_k}{\partial z} dz = (z dy - y dz) \frac{d\theta}{dx} .$$

Величина

$$(z dy - y dz) = -\rho^2 \sin^2 \theta d\theta - \rho^2 \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= -\rho^2 d\theta = -d\omega_o$$

равна дифференциалу секториальной площади с полюсом в начале координат и поэтому

$$u_k = -\int \frac{d\theta}{dx} d\omega_o = -\frac{d\theta}{dx} \omega_o + C(x) .$$

Здесь $C(x)$ является частью перемещения u_k , одинаковой для всех точек средней линии сечения, следовательно, может рассматриваться как перемещение центра тяжести сечения. Поэтому при подстановке в (6.62) оно может быть включено в состав u_o .

Таким образом, если пренебрегать перемещениями u_o , вызванными действием поперечных сил, то для точек средней линии сечения тонкостенного стержня открытого профиля получим

$$u = u_o - \frac{dv_o}{dx} y - \frac{dw_o}{dx} z - \frac{d\theta}{dx} \omega_o . \quad (6.64)$$

Здесь u_o , v_o , w_o - перемещения точек оси стержня, т. е. центров тяжести сечений; ω_o - секториальная площадь точки средней линии сечения с полюсом в центре тяжести сечения и произвольно выбранной секториальной нулевой точкой.

При повороте сечения стержня на угол θ перемещения любой точки K сечения связаны с перемещениями точки O зависимостями

$$v_K = v_o - z_K \theta ; \quad w_K = w_o + y_K \theta ,$$

так что

$$u = u_o - \left(\frac{dv_K}{dx} + z_K \frac{d\theta}{dx} \right) y - \left(\frac{dw_K}{dx} - y_K \frac{d\theta}{dx} \right) z - \frac{d\theta}{dx} \omega_o .$$

или

$$u = u_o - \frac{dv_K}{dx} y - \frac{dw_K}{dx} z - (\omega_o - y_K z + z_K y) \frac{d\theta}{dx} . \quad (6.65)$$

Определим первый сомножитель в последнем слагаемом выражения (6.65).

При $y_B = z_B = 0$ из зависимости (6.16) следует

$$\omega_K = \omega_o - y_K z + z_K y + C .$$

Так как при $y_K = z_K = 0$ $\omega_K = \omega_o$, то постоянная $C \equiv 0$.

Следовательно:

$$u = u_o - \frac{dv_K}{dx} y - \frac{dw_K}{dx} z - \omega_K \frac{d\theta}{dx} .$$

В дальнейшем индекс K будем опускать, и предыдущая формула примет вид

$$u = u_o - \frac{dv}{dx} y - \frac{dw}{dx} z - \omega \frac{d\theta}{dx} , \quad (6.66)$$

где u_o - перемещение точки O оси стержня; v , w - перемещения произвольно выбранной точки K сечения; ω - секториальная площадь точки средней линии сечения с полюсом в точке A .

Приняв гипотезу о том, что волокна не давят друг на друга (т.е. $\sigma_y = \sigma_z = 0$), в соответствии с законом Гука запишем

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \left(\frac{du_o}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} y - \frac{d^2 w}{dx^2} z - \omega \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right). \quad (6.67)$$

Рассмотрим какое-либо поперечное сечение, уравнением которого до деформации было $x = b$. После деформации абсциссы его точек изменяются, так что $x = b + u$ и на основании (6.20) уравнение сечения принимает вид

$$x = b + u_o|_{x=b} - \frac{dv}{dx}|_{x=b} y - \frac{dw}{dx}|_{x=b} z - \omega \frac{d\theta}{dx}|_{x=b} .$$

Отсюда ясно, что поперечные сечения тонкостенного стержня при деформации остаются плоскими только в том случае, когда $\frac{d\theta}{dx} = 0$; если это условие не выполняется, то они искривляются, причем нормальные напряжения перестают быть пропорциональными расстояниям точек до нейтральной оси, как это видно из (6.67).

Пусть секториальные площади и секториальные координаты главные. Тогда подставив выражение (6.67) в зависимости (6.57), получим:

$$\frac{du_o}{dx} = \frac{N}{EF}; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EJ_z}; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EJ_y}. \quad (6.68)$$

Подставим выражение (6.68) в зависимости (6.67) и найдём выражение напряжений через внутренние силовые факторы:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z - E \omega \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (6.69)$$

Введём величину

$$B_\omega = \int_{(F)} \sigma \omega dF \quad (6.70)$$

После подстановки (6.67) в (6.70) получим

$$B_\omega = -E J_\omega \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (6.71)$$

или

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\frac{B_\omega}{E J_\omega} .$$

Зависимость (6.71) в точности совпадает с выражением (6.33).
Формула (6.69) принимает вид

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega. \quad (6.72)$$

Значение величины B_ω , введенной нами чисто формально, можно уяснить на следующем простом примере. Балка двутаврового профиля, защемленная одним концом (рис.346), нагружена таким образом, что в ее полках действуют нормальные напряжения, распределенные по толщине каждой полки равномерно, а по ширине их - по линейному закону при обратных знаках напряжений в соответственных точках обеих полок; напряжения в стенке отсутствуют. Таким образом, усилия в сечениях сводятся к двум равным и противоположно направленным парам сил, действующим в плоскостях средних линий полок. Моменты этих пар

$$M_1 = -M_2 = \int_{(F_n)} \sigma y dF$$

где F_n - площадь полки.

Такую совокупность равных и противоположно направленных пар сил, действующих в параллельных плоскостях, называют **бипарой**; она всегда является уравновешенной, следовательно, не может быть обнаружена из условий равновесия.

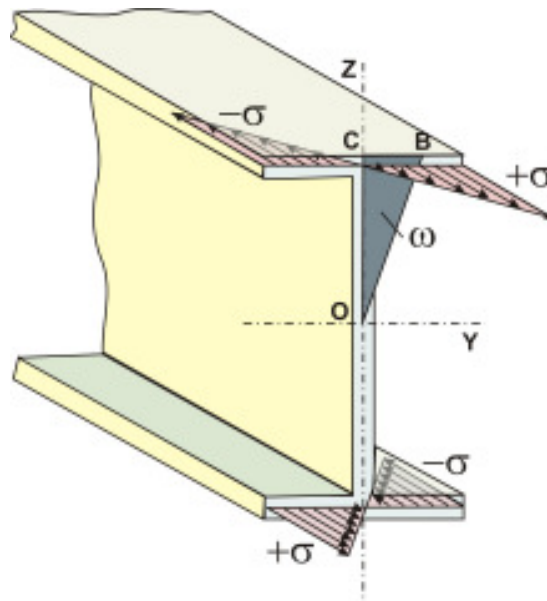


Рис.346

Так как для любой точки B средней линии верхней полки $\omega = (h/2)y$, а для нижней - $\omega = (-h/2)y$, то

$$B_\omega = \int_{(F)} \sigma \omega dF = \int_{(F_1)} \sigma \frac{h}{2} y dF + \int_{(F_2)} (-\sigma) \left(-\frac{h}{2}\right) y dF = h \int_{(F_n)} \sigma y dF = h M_1,$$

так что B_ω представляет собой произведение величины моментов двух пар на расстояние между плоскостями действия этих пар. В связи с этим, по аналогии с моментом пары сил, B_ω называют **бимоментом бипары**. Нетрудно видеть, что наличие бипар в сечениях рассматриваемой балки связано с ее кручением.

После того как нормальные напряжения вычислены, по формуле (6.56) нетрудно найти и касательные напряжения:

$$\tau(s) = -\frac{1}{\delta_s} \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta l s = \frac{1}{\delta_s} \int_{(F_{omc})} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dF ,$$

где F_{omc} - площадь части сечения, отсекаемой нормалью к средней линии, причем эта нормаль проводится через точку, в которой определяется напряжение.

Подставив (72) в выражение для $\tau(s)$, после преобразований получим:

$$\tau = -\frac{Q_y S_{zo}}{\delta J_z} - \frac{Q_z S_{yo}}{\delta J_y} - \frac{M_\omega S_\omega}{\delta J_\omega} , \quad (6.73)$$

где S_{yo} , S_{zo} , S_ω - статические моменты части сечения, отсекаемой нормалью к средней линии сечения в рассматриваемой точке;

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} = -EJ_\omega \frac{d^3 \theta}{dx^3} . \quad (6.74)$$

По формуле (6.73) находится лишь среднее по толщине касательное напряжение τ . Для нахождения полных касательных напряжений τ_s в любой точке по толщине сечения к напряжениям τ необходимо добавить касательные напряжения свободного кручения τ_k , которые должны быть определены при известной величине M_k по формуле

$$\tau_k = \sum_{i=0}^n \frac{M_{ki}}{J_{ki}} \delta_i .$$

После вычисления σ_x и τ для опасной точки по обобщенной теории прочности вычисляются эквивалентные напряжения и сравниваются с допускаемыми напряжениями.

Существует аналогия между формулами стесненного кручения и поперечного изгиба (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Поперечный изгиб	Стесненное кручение
$\sigma = \frac{M_y}{J_y} z$	$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega$
$\tau = \frac{QS_{omc}}{J_y b(z)}$	$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_{\omega_{n.o}}}{J_\omega \delta(z)}$
$EJ_y z^{IV} = q(x)$	$EJ_\omega \omega^{IV} = m(x)$
$EJ_y z''' = -Q(x)$	$EJ_\omega \omega''' = -M_\omega(x)$
$EJ_y z'' = -M(x)$	$EJ_\omega \omega'' = -B_\omega(x)$
$EJ_y z'$	$EJ_\omega \theta'$
$EJ_y z$	$EJ_\omega \theta$

6.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ ТО НКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Бимомент B_{ω} характеризует действие системы взаимно уравновешенных сил и потому не может быть найден из рассмотрения условий равновесия отсеченной части стержня. Моменты M_k и M_{ω} , как составляющие полного крутящего момента, также не могут определяться из этих условий, ибо распределение касательных напряжений неизвестно. Поэтому B_{ω} , M_k и M_{ω} приходится находить по углам закручивания стержня, пользуясь следующими формулами:

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2}, \quad M_{\omega} = -EJ_{\omega} \frac{d^3 \theta(x)}{dx^3}, \quad M_k = GJ_{\omega} \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (6.75)$$

для чего необходимо знать выражение θ в функции от x .

С целью нахождения $\theta(x)$ продифференцируем уравнение

$$M_{кр} = M_{\omega} + M_k$$

по переменной x :

$$\frac{dM_{кр}}{dx} = \frac{dM_{\omega}}{dx} + \frac{dM_k}{dx}.$$

Производная от полного крутящего момента по абсциссе сечения равна взятой с обратным знаком интенсивности m распределенных по длине стержня крутящих моментов. Поэтому

$$\frac{dM_{\omega}}{dx} + \frac{dM_k}{dx} = -m.$$

Подставив сюда выражения (6.73), получим

$$-EJ_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dx^4} + GJ_k \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -m. \quad (6.76)$$

Вводя обозначение (6.39)

$$\frac{GJ_k}{EJ_{\omega}} = k^2,$$

перепишем уравнение (6.76) в виде

$$\frac{d^4 \theta}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{m}{EJ_{\omega}}. \quad (6.77)$$

Полученное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет общее решение вида

$$\theta(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx + \theta_o(x), \quad (6.78)$$

где $\theta_o(x)$ - какое-либо частное его решение.

Четыре произвольные постоянные должны быть определены из условий на концах стержня. Этих условий на каждом конце должно быть два. Так, если конец стержня свободно оперт таким образом, что концевое сечение может свободно искривляться, но не может поворачиваться, то угол поворота θ на этом конце должен быть равен нулю. Так как, кроме того, во всех точках такого сечения нормальные напряжения равны нулю, то из (6.70) следует, что бимомент равен нулю, а для этого согласно (6.71) должна быть равна нулю вторая производная угла θ . Следовательно, на свободно опертом конце

$$\theta = 0, \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0. \quad (6.79)$$

Аналогично, для конца, закрепленного против поворота и искривления сечения (в частности, защемленного, если защемление не допускает искривления сечения):

$$\theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0. \quad (6.80)$$

Наконец, для свободного конца

$$\left. \begin{aligned} B_{\omega} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0, \\ M_{kp} = -EJ_{\omega} \frac{d^3 \theta}{dx^3} + GJ_k \frac{d\theta}{dx} = M_o, \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

где M_o - внешний крутящий момент, приложенный на этом конце.

После того как $\theta(x)$ найдено, по формулам (6.75) определяют бимомент, изгибно-крутящий момент и момент свободного кручения:

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} \left[k^2 (C_3 chkx + C_4 shkx) + \frac{d^2 \theta_o(x)}{dx^2} \right], \quad (6.82)$$

$$M_{\omega} = -EJ_{\omega} \left[k^3 (C_3 shkx + C_4 chkx) + \frac{d^3 \theta_o(x)}{dx^3} \right], \quad (6.83)$$

$$M_k = GJ_k \left[C_2 + k (C_3 shkx + C_4 chkx) + \frac{d\theta_o(x)}{dx} \right], \quad (6.84)$$

а также полный крутящий момент:

$$\begin{aligned} M_{kp} = M_{\omega} + M_k = -EJ_{\omega} \left[k^3 (C_3 shkx + C_4 chkx) + \frac{d^3 \theta_o(x)}{dx^3} \right] + \\ + GJ_k \left[C_2 + k (C_3 shkx + C_4 chkx) + \frac{d\theta_o(x)}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Если, кроме того, известны изгибающие моменты и поперечные силы, то можно получить все необходимые данные для определения напряжений и деформаций.

Пример 2. Тонкостенный швеллер, защемленный одним концом, скручивается моментом $M_o = 10$ Нм. Найти напряжения в опасном сечении швеллера при $L = 1$ м, $h = 50$ мм, $b = 25$ мм, $\delta = 2$ мм (рис.347).

Все вычисления выполним в системе **MathCAD**.

$$\begin{aligned} \text{Исходные данные:} \quad E &:= 2 \cdot 10^{11} & G &:= 8 \cdot 10^{10} \\ M_o &:= 10 & L &:= 1 & h &:= 0.05 & b &:= 0.025 & \delta &:= 0.002 \end{aligned}$$

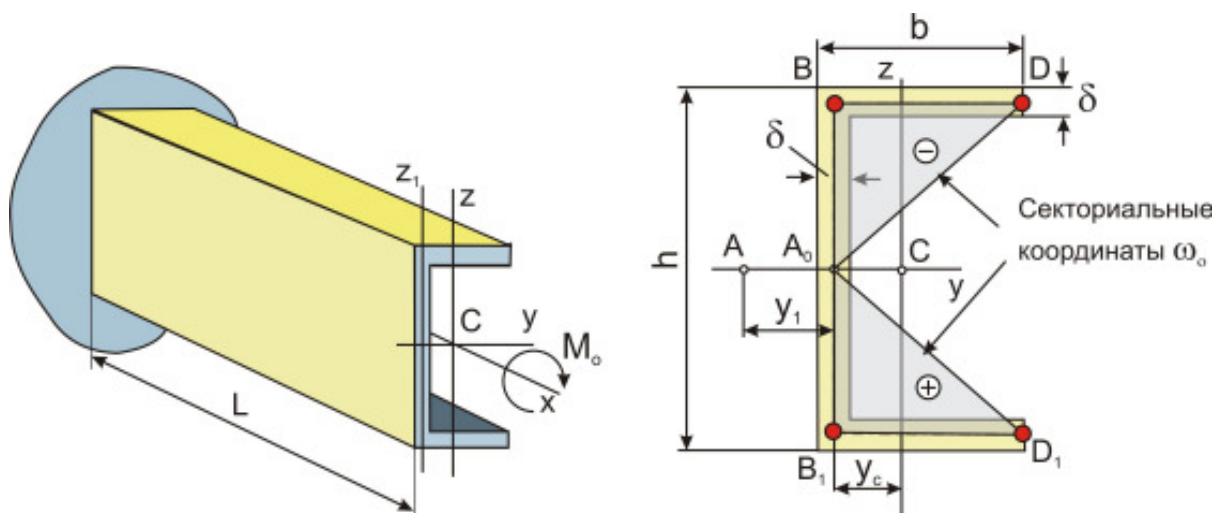


Рис.347

А. Определяем площадь поперечного сечения, координаты центра тяжести и момент инерции сечения относительно главной центральной оси y .

Площадь: $F := 2 \cdot b \cdot \delta + (h - 2 \cdot \delta) \cdot \delta$ $F = 1.92 \times 10^{-4}$

Статический момент площади относительно оси $z1$:

$$S_{z1} := 2 \cdot b \cdot \delta \cdot \frac{b - \delta}{2} \quad S_{z1} = 1.15 \times 10^{-6}$$

Координата центра тяжести: $y_c := \frac{S_{z1}}{F}$ $y_c = 5.99 \times 10^{-3}$

Момент инерции: $J_y := \frac{\delta \cdot h^3}{12} + 2(b - \delta) \cdot \left(\frac{h - \delta}{2}\right)^2 \cdot \delta$ $J_y = 7.383 \times 10^{-8}$

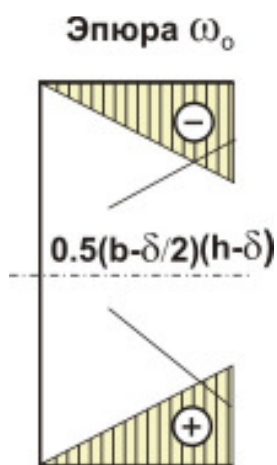


Рис.348

В. Определяем положение центра изгиба. Так как он лежит на оси симметрии y , то необходимо определить координату y_1 (рис.347). Воспользуемся формулами (6.18). В рассматриваемом нами случае $y_B = y_0 = 0$. Возьмем вспомогательный полюс A_0 на середине средней линии стенки и построим эпюру секториальных координат ω_0 , приняв за начало отсчета точку B . Секториальная координата точки D (рис.347) равна удвоенной площади треугольника A_0BD — $0.5(b - \delta/2)(h - \delta)$, а для точки D_1 — $0.5(b - \delta/2)(h - \delta)$. Секториальная координата точек на средней линии стенки равна нулю. Эпюра ω_0 приведена на рис.348.

Будем считать, что дуговая координата s положительна при $z > 0$ и отрицательна при $z < 0$. Тогда дуговые координаты точек D_1 и D

$$s_{D1} := -\frac{h-\delta}{2} - \left(b - \frac{\delta}{2}\right), \quad s_D := \frac{h-\delta}{2} + \left(b - \frac{\delta}{2}\right).$$

Вычислим положение центра изгиба в системе MathCAD.

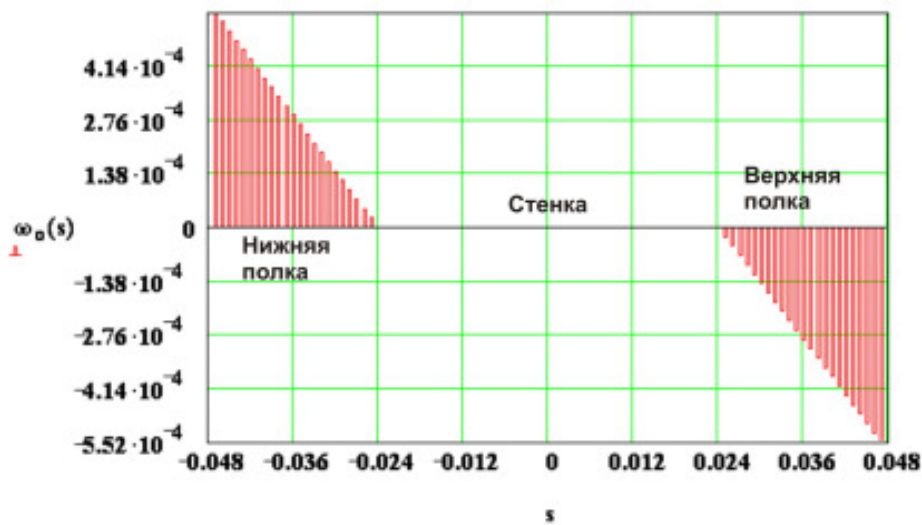
В программе дуговые координаты s_{D1} и s_D обозначим c_{D1} и c_D соответственно.

Функцию секториальной координаты можно записать в виде:

$$\omega_a(s) := \begin{cases} -\frac{h-\delta}{2} \cdot \left(s + \frac{h-\delta}{2}\right) & \text{if } c_{D1} < s < -\frac{h-\delta}{2} \\ 0 & \text{if } -\frac{h-\delta}{2} < s < 0 \\ 0 & \text{if } 0 < s < \left(\frac{h-\delta}{2}\right) \\ -\frac{h-\delta}{2} \cdot \left[s - \left(\frac{h-\delta}{2}\right)\right] & \text{if } \left(\frac{h-\delta}{2}\right) < s < c_D \end{cases}$$

$$s := c_{D1}, c_{D1} + 0.001 .. c_D$$

Эпюра секториальных координат ω_0



Секториально-линейный статический момент J_{α} определим по формуле (6.12).

$$z(s) := \begin{cases} -\frac{(h-\delta)}{2} & \text{if } c_{D1} < s < -\frac{h-\delta}{2} \\ s & \text{if } -\frac{h-\delta}{2} < s < 0 \\ s & \text{if } 0 < s < \left(\frac{h-\delta}{2}\right) \\ \frac{h-\delta}{2} & \text{if } \left(\frac{h-\delta}{2}\right) < s < c_D \end{cases}$$

Эпюра координаты z

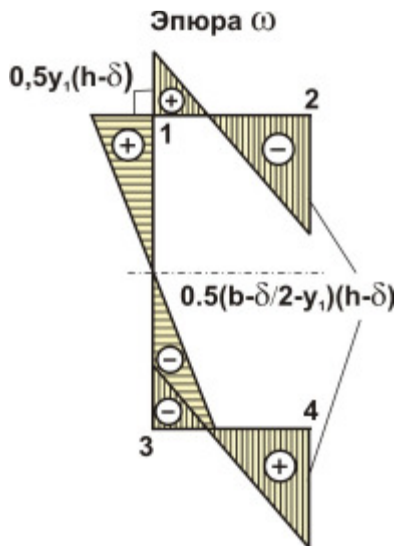
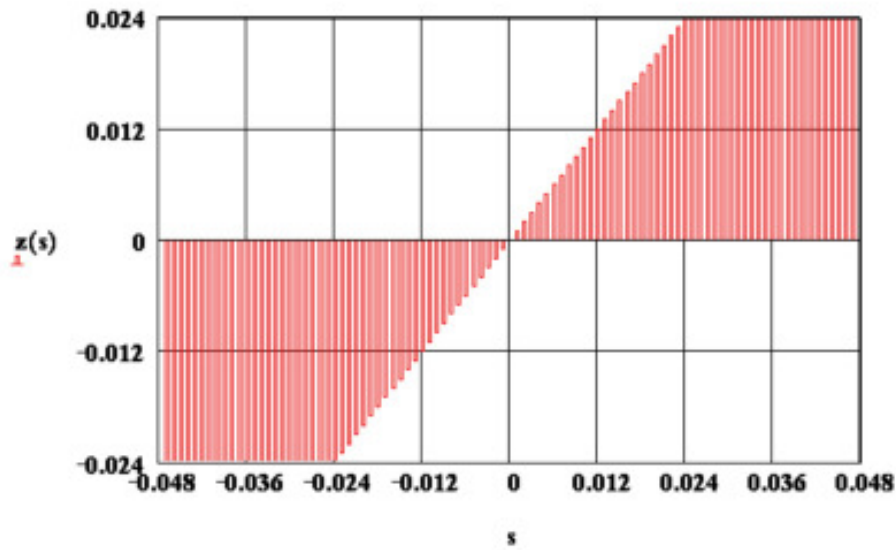


Рис.349

Секториальный линейный статический момент

$$J_{\omega} := \int_{c_{D1}}^{c_D} \omega_o(s) \cdot z(s) \cdot \delta s; \quad J_{\omega} = -6.673 \times 10^{-10}.$$

Найдем координату центра изгиба:

$$y_I := \frac{J_{\omega}}{J_y}; \quad y_I = -9.038 \times 10^{-3}$$

С. Определение главных секториальных координат. Строим эпюру главных секториальных координат, зная, что главная нулевая секториальная точка находится в точке пересечения средней линии стенки швеллера с осью симметрии y (рис.349).

Для точки 1 $\omega_1 = y_I \frac{h-\delta}{2}$; для точки 2

$$\omega_2 = y_I \frac{h-\delta}{2} - \left(b - \frac{\delta}{2}\right) \frac{h-\delta}{2}; \text{ для точек 3 и 4 } \omega_3 \text{ и } \omega_4$$

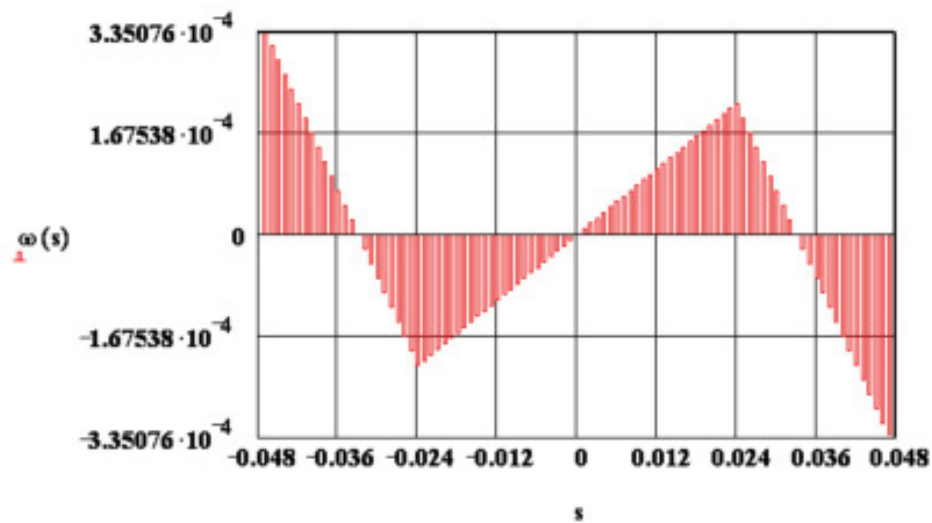
подсчитываем аналогично. Эпюра ω приведена на рис.349.

В системе MathCAD эти построения выглядят так.

Функция главных секториальных координат

$$\omega(s) := \begin{cases} -\frac{h-\delta}{2} \cdot \left(s + \frac{h-\delta}{2}\right) + y_I \cdot \frac{h-\delta}{2} & \text{if } c_{D1} < s < -\frac{h-\delta}{2} \\ -y_I \cdot s & \text{if } -\frac{h-\delta}{2} < s < 0 \\ -y_I \cdot s & \text{if } 0 < s < \left(\frac{h-\delta}{2}\right) \\ -\frac{h-\delta}{2} \cdot \left(s - \frac{h-\delta}{2}\right) - y_I \cdot \frac{h-\delta}{2} & \text{if } \left(\frac{h-\delta}{2}\right) < s < c_D \end{cases}$$

Эпюра главных секториальных координат ω

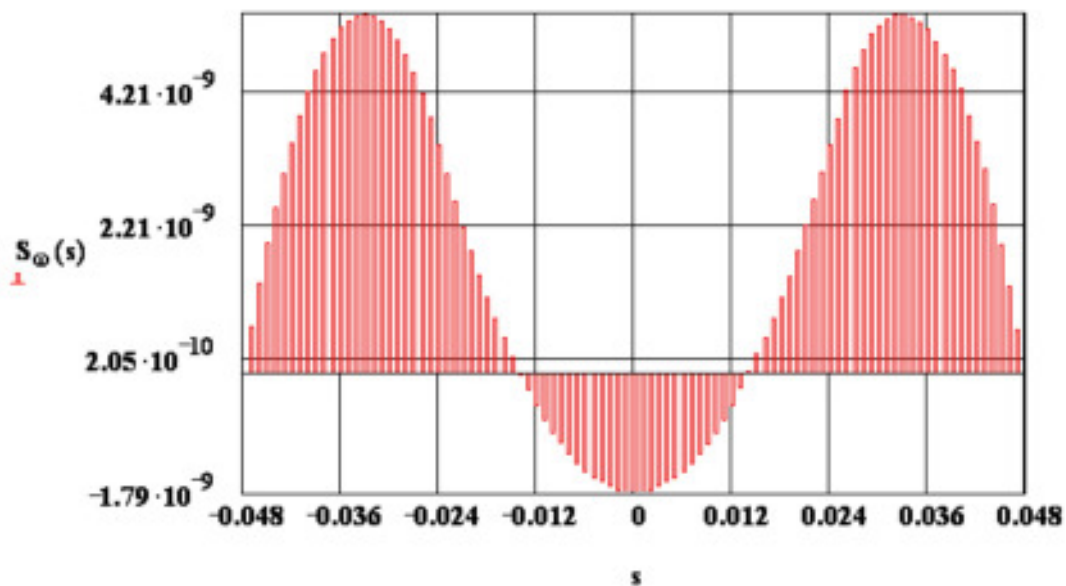


D. Вычисляем секториальный момент инерции (формула (6.11)):

$$J_{\omega} := \int_{c_{D1}}^{c_D} \omega(s)^2 \cdot \delta ds ; \quad J_{\omega} = 4.031 \times 10^{-12}.$$

E. Секториальный статический момент отсеченной части сечения, необходимый для определения секториальных касательных напряжений (см. (6.73)), вычисляем по формуле

$$S_{\omega}(s) := \int_{c_{D1}}^s \omega(s) \cdot \delta ds ; \quad \max(S_{\omega}) = 5.372 \times 10^{-9}.$$



F. Определение силовых факторов, действующих в поперечных сечениях стержня. При $M_o = const$ уравнение (6.82) принимает вид

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} [k^2 (C_3 chkx + C_4 shkx)] = Achkx + Bshkx, \quad (6.86)$$

где A и B - новые константы, подлежащие определению из граничных условий задачи.

В защемлении, т. е. при $x = 0$ относительный угол закручивания равен нулю: $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_k}{GJ_k} = 0$; значит, $M_k = 0$. А так как $M_o = M_k + M_\omega$, то при $x = 0$

$M_o = M_\omega = \frac{dB}{dx}$. На свободном конце стержня имеем свободную деформацию сечения, следовательно, при $x = L$ бимомент $B = 0$. Подставив эти условия в уравнение (86), получим:

при $x = 0$, $Aksh0 + Bkch0 = M_o$ или $B = \frac{M_o}{k}$;

при $x = L$, $AchkL + BshkL = 0$ или $A = -BthkL = -\frac{M_o}{k}thkL$.

Подставив полученные значения постоянных A , и B в уравнение (6.86), получим:

$$B_\omega = \frac{M_o}{k} (shkx - thkLchkx), \quad (6.87)$$

При $x = 0$ бимомент достигает наибольшей величины:

$$B_\omega = -\frac{M_o}{k} thkL, \quad (6.88)$$

Следовательно, изгибно-крутящий бимомент, значит, и секториальные нормальные напряжения имеют наибольшее значение у защемления.

Построим эпюры величин B_ω , M_ω , M_k и подсчитаем их максимальные значения.

Момент инерции при кручении

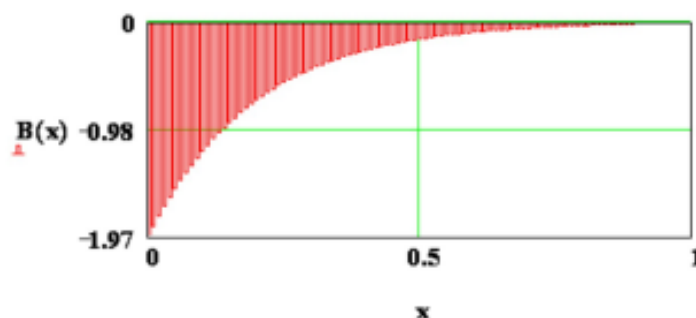
$$J_k := 1.06 \cdot \frac{\delta^3 \cdot (h - \delta + 2 \cdot b - \delta)}{3}; \quad J_k = 2.714 \times 10^{-10}.$$

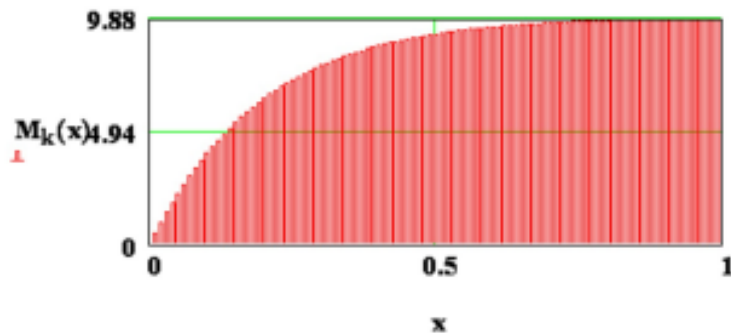
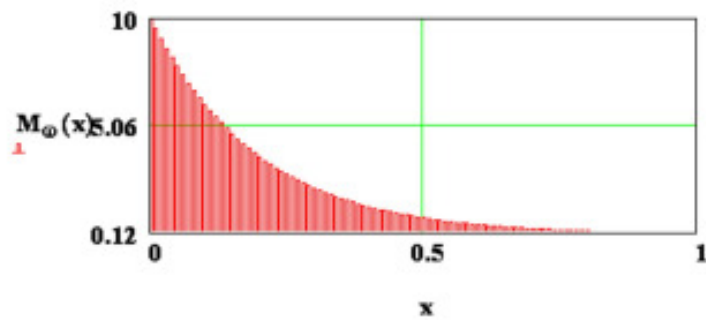
Силовые факторы, действующие на стержень

$$k := \sqrt{\frac{G \cdot J_k}{E \cdot J_\omega}} \quad k = 5.088 \quad x := 0, 0.01 \dots L$$

$$B(x) := \frac{M_o}{k} \cdot (\sinh(k \cdot x) - \tanh(k \cdot L) \cdot \cosh(k \cdot x)) \quad M_\omega(x) := \frac{d}{dx} B(x)$$

$$M_k(x) := M_o - M_\omega(x) \quad B(0) = -1.965$$





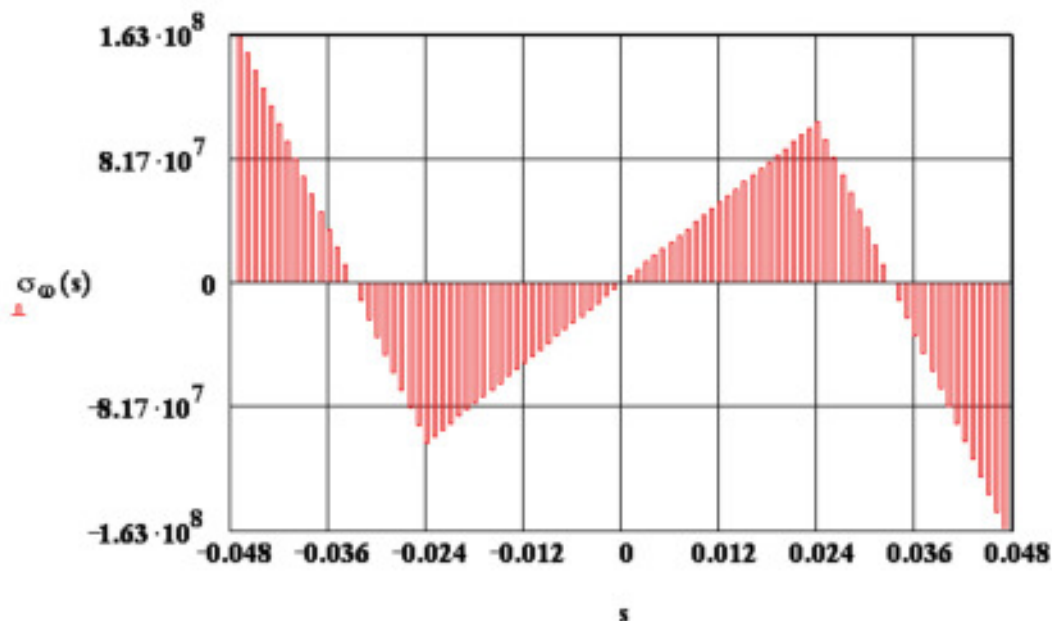
$$\begin{array}{lll} \max B := B(0) & \max M_{\omega} := M_{\omega}(0) & \max M_k := M_k(L) \\ \max B = -1.965 & \max M_{\omega} = 10 & \max M_k = 9.877 \end{array}$$

Таким образом, наибольшая величина бимомента $B = 1.965 \text{ Нм}^2$, изгибно-крутящего момента $M_{\omega} = 10 \text{ Нм}$, крутящего момента $M_k = 9.877 \text{ Нм}$.

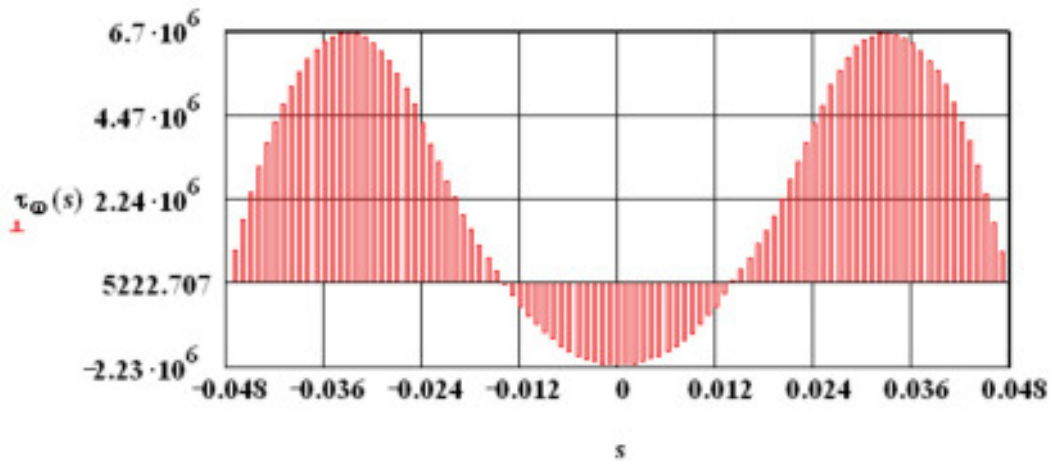
Г. Определим величины напряжений. Наибольшие секториальные нормальные напряжения возникают в точках 1, 2, 3, 4 защемленного сечения (рис.349). В этом же сечении действуют и наибольшие секториальные касательные напряжения:

$$\sigma_{\omega}(s) := \frac{-\max B \cdot \omega(s)}{J_{\omega}}; \quad \tau_{\omega}(s) := \frac{-\max M_{\omega} \cdot S_{\omega}(s)}{J_{\omega} \cdot \delta}.$$

Эпюра секториальных нормальных напряжений σ_{ω}



Эпюра секториальных касательных напряжений τ_{ω}



$$\tau_k := \frac{\max M_k \cdot \delta}{J_k} \quad \tau_k = 7.279 \times 10^7$$

Рассмотренный пример показывает, что при оценке прочности секториальные нормальные напряжения могут иметь решающее значение: в точках **2** и **4** сечения напряжения достигают **163 МПа**. Наибольшие касательные напряжения чистого кручения на свободном конце стержня - **72.88 МПа**.

Н. Определим угол поворота торцевого сечения стержня. Так как по (6.87)

$$B_{\omega} = \frac{M_o}{k} (shkx - thkLchkx),$$

а по (6.75)

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2},$$

то выражение для угла поворота найдем интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = -\frac{M_o}{kJ_{\omega}} (shkx - thkLchkx). \quad (6.89)$$

Последовательно интегрируя уравнение (6.89), получим:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{M_o}{k^2 EJ_{\omega}} (chkx - thkLshkx) + C_1; \quad (6.90)$$

$$\theta(x) = -\frac{M_o}{k^3 EJ_{\omega}} (shkx - thkLchkx) + C_1 x + C_2, \quad (6.91)$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий задачи:

$$\text{при } x=0 \quad \frac{d\theta(0)}{dx} = -\frac{M_o}{k^2 EJ_{\omega}} (chk0 - thkLshk0) + C_1 = 0$$

$$\text{или } C_1 = \frac{M_o}{k^2 EJ_{\omega}};$$

$$\theta(0) = -\frac{M_o}{k^3 EJ_\omega} (shk0 - thkLchk0) + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$\text{или } C_2 = -\frac{M_o}{k^3 EJ_\omega} thkL.$$

Подставим полученные значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (6.91):

$$\theta(x) = \frac{M_o}{k^3 EJ_\omega} [thkL(chkx - 1) + kx - shkx], \quad (6.92)$$

При $x = L$ угол поворота достигает величины

$$\theta(L) = \frac{M_o}{k^3 EJ_\omega} [thkL(chkL - 1) + kL - shkL]. \quad (6.93)$$


В рассматриваемом нами случае $\theta(L) = 0.385$ рад или $22,054^\circ$.

6.10. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ПРОГРАММАХ

Возможности приведенных ниже конечно-элементных программ проиллюстрируем на решении задачи, изложенной в **примере 2**.

6.10.1. SCAD Office⁵⁰

6.10.1.1. Создание расчетной схемы стержня из плоских КЭ

Сначала создаём поперечное сечение стержня. Для ввода узлов открываем раздел **Узлы и элементы** и нажимаем кнопку  **Узлы**, активизируя тем самым появление группы кнопок режима **Узлы**.

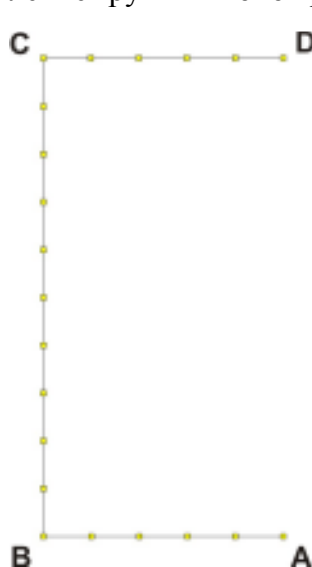







Рис.350

Нажимаем кнопку  **Ввод узлов**. В результате откроется одноименное диалоговое окно, с помощью которого задаём координаты точек $A(0.025, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(0, 0, 0.05)$, $D(0.025, 0, 0.05)$ (рис.350).

Активируем кнопки  **Элементы**. Подводим указатель мыши к кнопке  **Добавление стержней** и нажимаем левую клавишу мыши. Соединяем точки A , B , C , D элементами. Активируем кнопку . Появится панель **Разбивка стержня**, в одном из окон которой указываем число участков, на которые надо разбить выделенный элемент. Например, элемент, расположенный между узлами A и B , разбиваем на 5 элементов. Щелкаем по клавише **ОК**, выделяем элемент AB и подтверждаем наше желание разбить этот элемент на пять частей нажатием на кнопку  **ОК**.

⁵⁰ Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD: - М.: Издательство АСВ, 2004.-592 с.

Жилкин В.А. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. – Челябинск, Челябинский государственный агроинженерный университет, 2005. – 424 с.

Активизируем режим **Элементы** 



Отмена



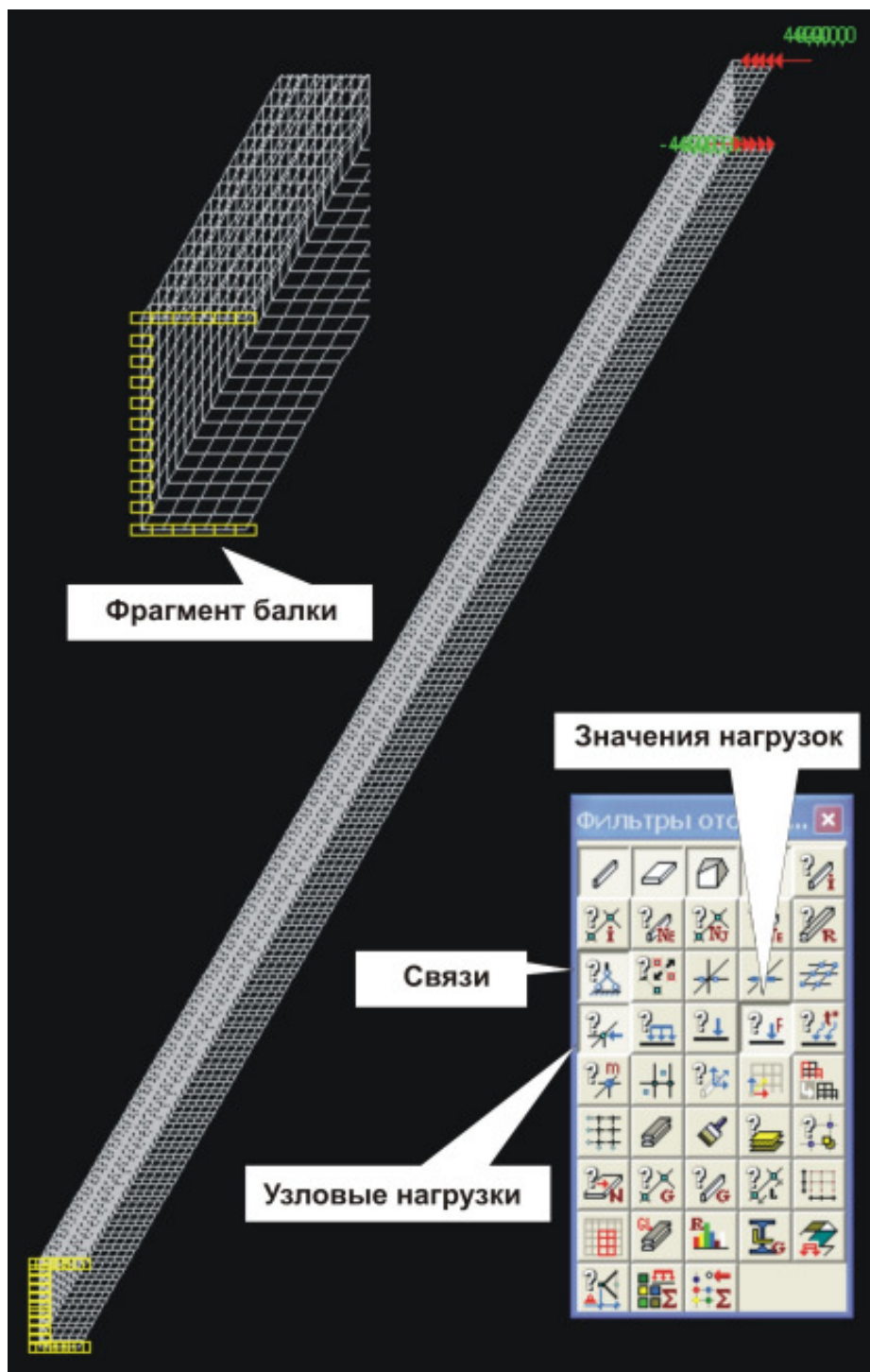




Рис.352

Назначение опорных связей

В разделе **Назначения** нажимает на кнопку  **Связи в узлах**. Появляется панель **Связи**, на которой устанавливаем все связи, подтверждаем наш выбор и на модели балки отмечаем закрепляемые узлы. Щелкаем по кнопке  и на торце балки появляются изображения закрепленных узлов (рис.355).

Жесткости пластин

Изотропия

Материал

Сталь обыкновенная

Объемный вес 77000.5 Н/м³

Параметры

Модуль упругости 2.0601e+11 Н/м²

Коэффициент Пуассона 0.3

Толщина пластин 0.002 м

Тип жесткости

1

Имя типа жесткости

Коэффициенты постели

C1 Н/м³

C2 Н/м

Коэффициенты упругого основания

Коэффициенты деформируемости основания

Плоско-напряженное состояние

Плоская деформация

Заменить и выйти

Заменить и продолжить

ОК

Отмена

Справка

Рис.353

Выбор узлов и элементов

Вид курсора

Прямоугольник

Полигон

Одиночный выбор

Точность указания

0 0.5 1 1.5

Немедленное выполнение

ОК

Справка

Выбор стержней

Горизонтальные

Вертикальные

Наклонные

Выбор пластин

XoY XoZ YoZ

Инвертировать выбор узлов

Инвертировать выбор элементов

Рис.354

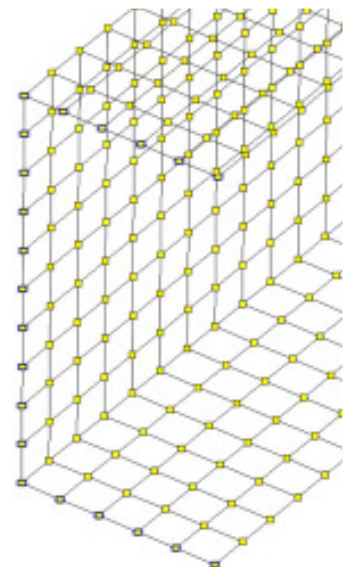




Рис.355

Загружение расчетной схемы МКЭ

Крутящий момент $M_{кр} = 10 \text{ Нм}$ представим как пару сил:

$$P = \frac{10 \cdot 100}{5} = 200 \text{ Н},$$

каждую из которых разделим на пять узлов, т.е. к каждому узлу приложим сосредоточенную силу величиной **40 Н**.

В разделе **Загружения** нажимаем на кнопку  **Узловые нагрузки**. Появляется одноименная панель (рис.356), в полях ввода которой задаем проекции силовых факторов на оси координат. Нажимая на клавишу **ОК**, подтверждаем наш выбор. На конечно-элементной модели балки отмечаем загружаемые узлы. Щелкаем левой клавишей мыши по кнопке . На модели балки появляется изображение загруженных узлов (рис.357).

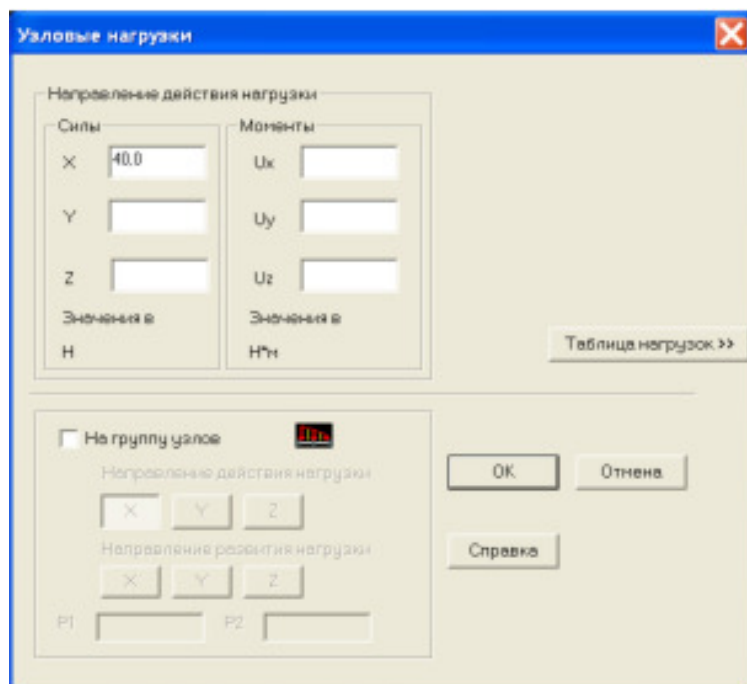


Рис.356

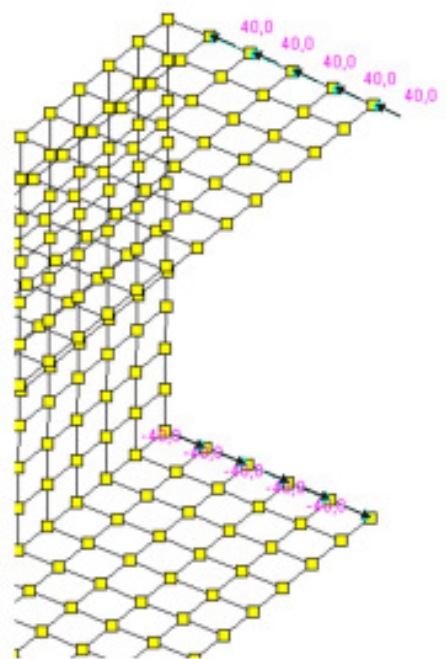



Рис.357

Подведём указатель мыши к кнопке фильтра  **Информация об элементе** и нажмем левую клавишу мыши дважды. Появится одноименная панель. Если щелкнуть левой клавишей мыши по какому-нибудь элементу конечно-элементной модели стержня, в окнах панели появится информация об этом элементе (рис.358). На рис.358 приведена информация об элементах стенки и полки стержня. В средней части рисунка представлены увеличенные изображения нижних окон панелей с информацией об ориентации общей и локальной систем координат и номерах узлов. Как следует из рис.358, в качестве элементов стержня выбран **44** тип конечного элемента (универсальный четырехугольный конечный элемент оболочки, имеющий по шесть степеней свободы в каждом узле).

Положительные направления усилий (изгибающих моментов M_x и M_y ; крутящего момента M_{xy} ; сдвигающего напряжения T_{xy}) для прямоугольных конечных элементов плиты и оболочки приведены на рис.359. На рисунке не показаны нормальные усилия (мембранные напряжения) N_x и N_y , действующие вдоль осей $x1$ и $y1$ соответственно и перерезывающие силы Q_x и Q_y в сечениях ортогональных осей $x1$ и $y1$. Введенных данных достаточно, чтобы выполнить расчет созданной схемы.

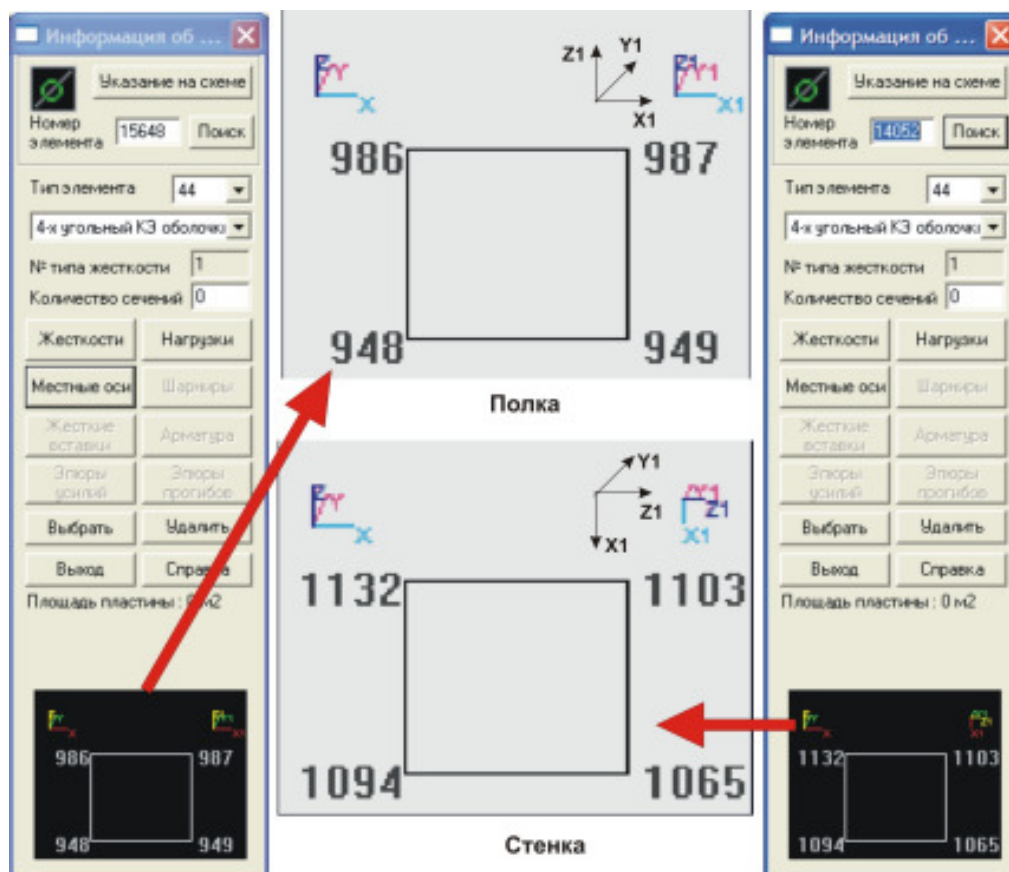


Рис.358

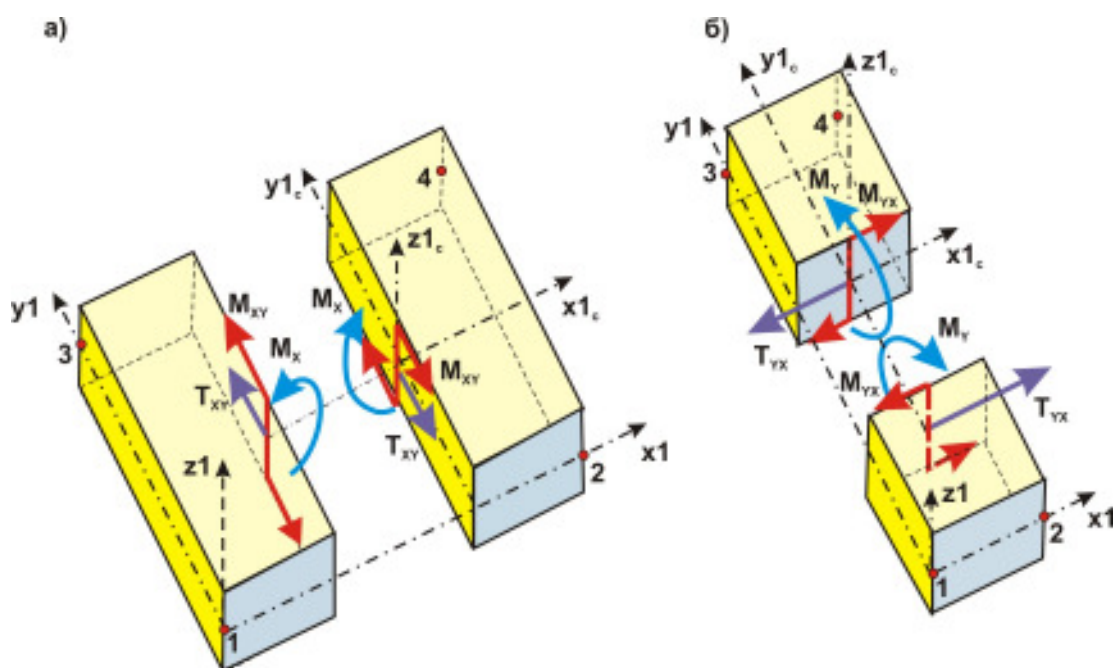



Рис.359

Линейный расчет

Вернёмся в **Дерево проекта**. Активируем закладку **Управление** в инструментальной панели и нажмем кнопку  **Выйти в экран управления проектом** (Дерево проекта).

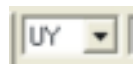
В группе функций **Расчет** установим курсор в позицию **Линейный** и нажмем левую кнопку мыши. После завершения расчета и нажатия на кнопку **Выход** управление передается дереву проекта.


Анализ результатов

Устанавливаем курсор в позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** дерева проектов и нажимаем левую кнопку мыши, что приводит к активизации окна постпроцессора.

Анализ перемещений выполняется с помощью функции раздела **Деформации**.

Выбираем в списке  загрузку, направление перемещения



и нажимаем кнопку функции отображения результатов  **Вывод деформированной схемы на фоне исходной**. На рис.360 приведен вид деформированной схемы и величины максимальных углов поворота свободного торцевого сечения балки ($0.37 \text{ рад} \Rightarrow 21,2^\circ$), а, как мы помним, по стандартному расчету тонкостенного стержня на стесненное кручение мы получили величину $22,054^\circ$.

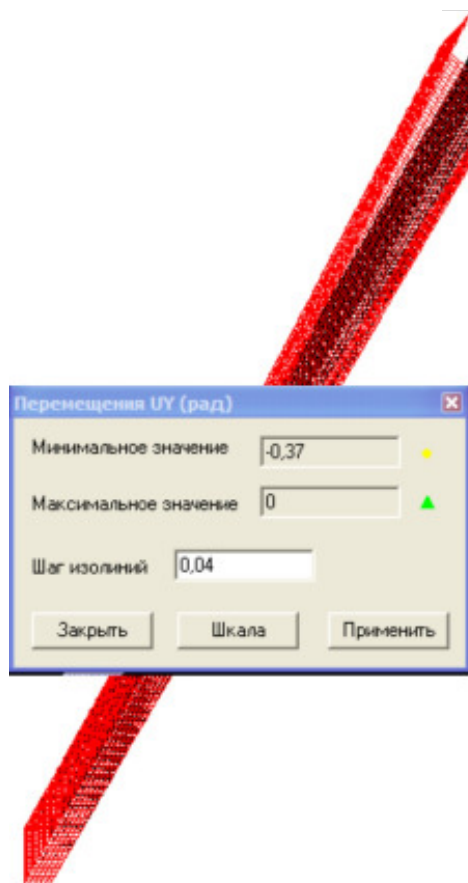


Рис.360

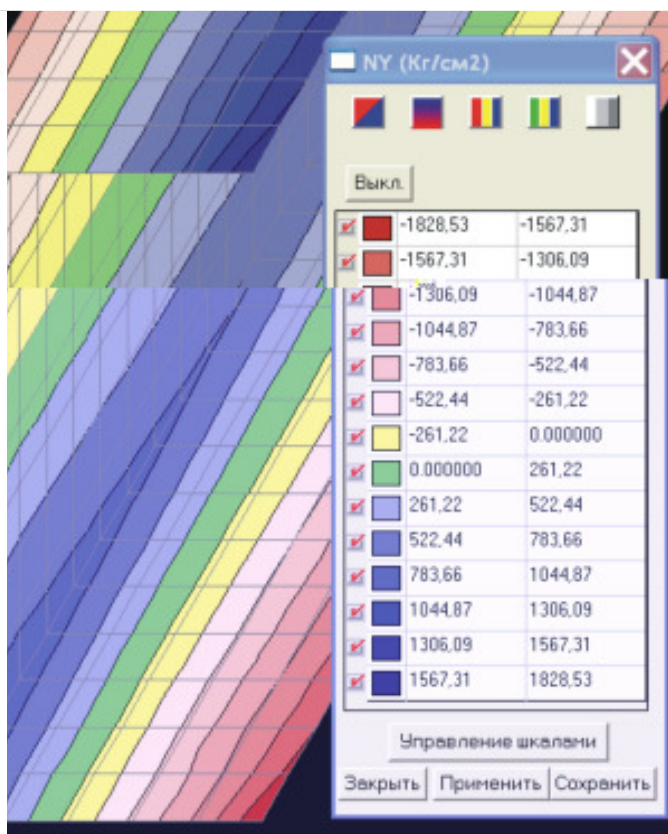

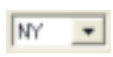

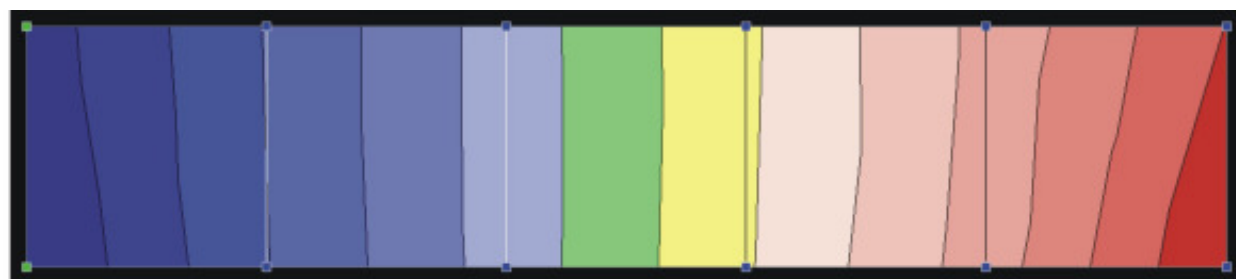


Рис.361

Анализ напряжений выполняется с помощью функции раздела **Поля напряжений**. Выбираем в списке  загрузку, компоненту напряжения  и нажимаем кнопку функции отображения результатов  **Отображе-**

ние изополей и изолиний. На рис.361 приведены изополя и диапазоны изополей напряжений σ_y .



a)

б)

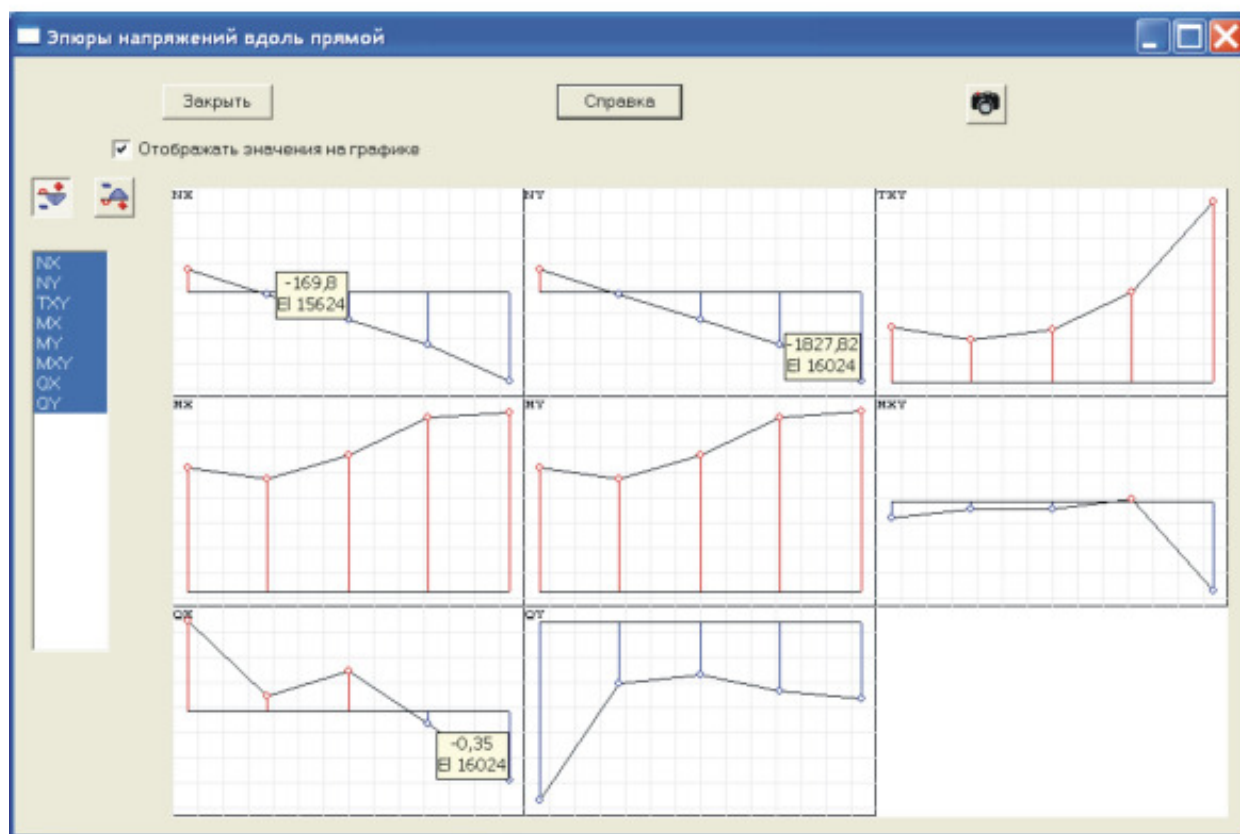
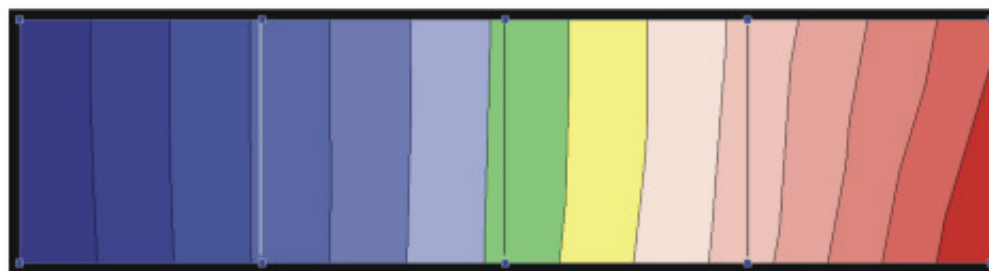





Рис.362

Рассмотрим распределение нормальных напряжений вдоль полки. Щелкнув по кнопке  **Фрагментация окном** на панели **Визуализация**, выделяем фрагмент нижней полки (рис.362, a) и подтверждаем фрагментацию, нажимая на кнопку  **Подтверждение фрагментации**. Данный фрагмент содержит и элемент стенки, а поэтому ещё раз выбираем фрагмент элементов принадлежащих только полке

(рис.362, б). Нажимаем на кнопку  **Построение эпюр напряжений вдоль сечущей** и на фрагменте схемы указываем эту сечущую. В результате появляется панель **Эпюры напряжений вдоль прямой**. Элементы управления этого окна включают в себя:

- список силовых факторов, для которых строятся эпюры;
- маркер **Отображать значения на графике**, активизация которого означает, что следует выводить значение фактора в указанных курсором точках эпюры (кроме значения выводится номер элемента, которому принадлежит указанная точка);
- кнопка **Печать** – для сохранения эпюр в формате Windows-метафайла (расширение WMF).

Распределение напряжений σ_y (N_y) в полке в соответствии с теорией тонкостенных стержней подчиняется линейному закону. Максимальные напряжения достигают величины **1823 кг/см² (182,3 МПа)**, что несколько превышает ранее полученное значение **163 МПа** для этого параметра.

Вырежем плоский фрагмент стенки (рис.363) и для него построим аналогичные эпюры в стенке швеллера (рис.364). Из рис.364 следует, что нормальные напряжения σ_y (N_y) в стенке швеллера распределяются по линейному закону, касательные τ_{yz} (T_{xy}) - по параболическому закону, что соответствует теории тонкостенных стержней.

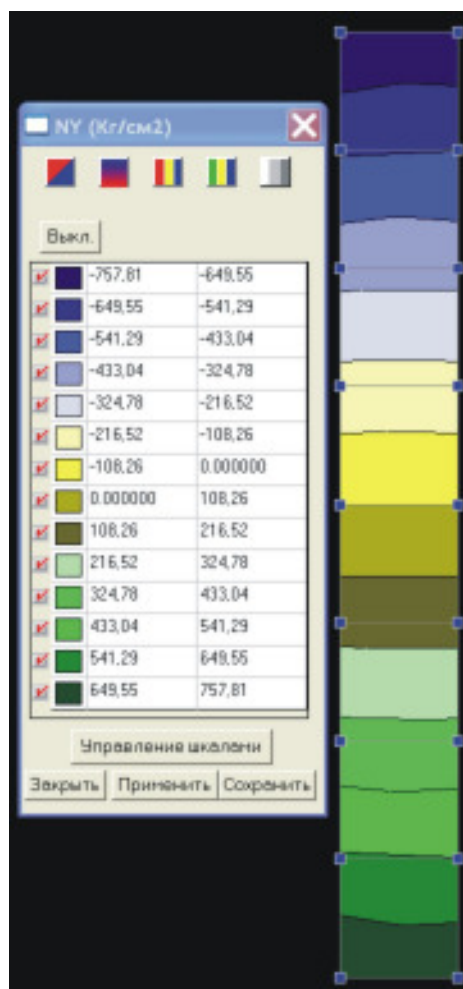


Рис.363

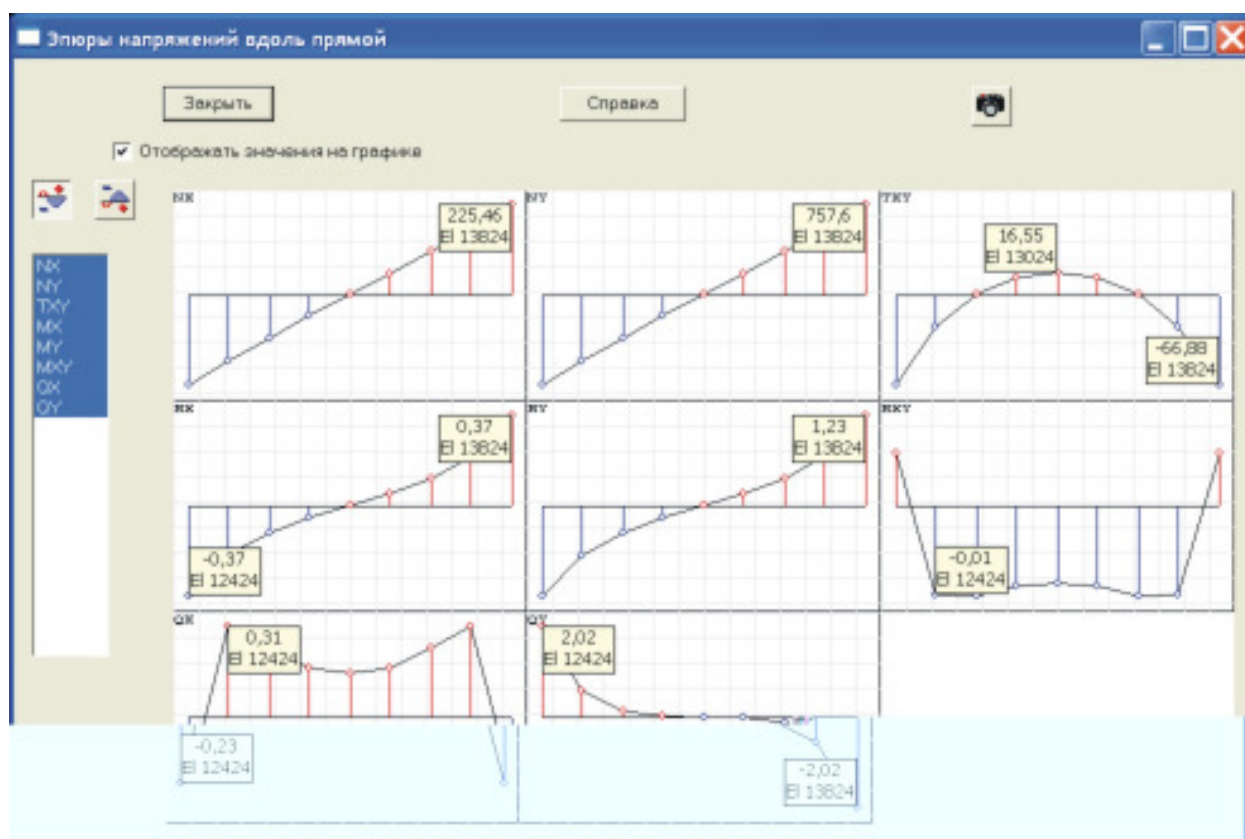


Рис.364

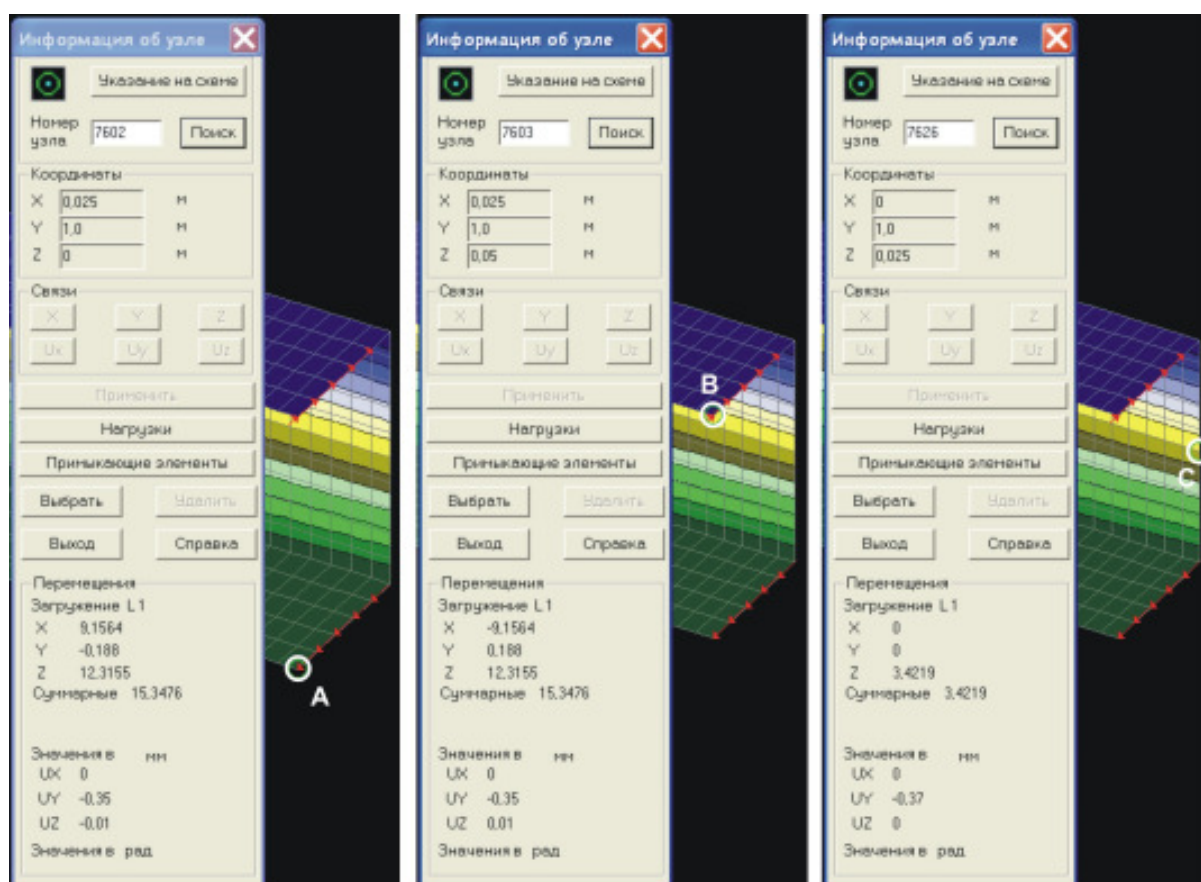



Рис.365

Определим центр кручения правого торца стержня. Так как **SCAD** непосредственно не вычисляет этот параметр деформирования стержня, то определим его косвенным путём. В результате расчета конечно-элементной модели стержня нам известны линейные и угловые перемещения узлов. Для того чтобы получить эти величины,

необходимо подвести указатель мыши к кнопке фильтра  **Информация об узле** и щелкнуть по ней. Откроется одноименная панель (рис.365). Если теперь щелкнуть левой клавишей мыши по узлу, то в окнах панели появится информация о номере узла, его координатах и перемещениях. Построив в нескольких узлах вектора перемещений и восстановив к ним перпендикуляры, найдём центр поворота сечения и искомый угол поворота.

Выберем три узла профиля стержня совпадающих с заделкой: **A** - крайний левый узел на нижней полке швеллера; **B** - крайний левый узел на верхней полке швеллера; **C** - узел, совпадающий с точкой пересечения оси симметрии профиля с его стенкой (рис.365).

Приближенное определение центра кручения профиля выполним в графическом редакторе **CorelDraw**. В точках **A**, **B**, **C** откладываем компоненты перемещений в направлении координатных осей. Строим вектора полных перемещений. Их длина в точках **A**, **B** составила **15.155**, что достаточно близко к расчетному значению **15.348** (рис.366). Угол поворота сечения составил **21,5°** против расчетного значения **21,2°**. Расстояние от средней линии профиля до центра поворота оказалось равным **8,88 мм**, расстояние до центра изгиба **9,038 мм**.



Рис.366





Рис.367

Итак, мы можно сделать вывод: профиль поворачивается относительно центра изгиба, что согласуется с теорией кручения тонкостенных профилей, а выполненный расчет напряженно-деформированного состояния тонкостенного профиля достаточно правдоподобен.

6.10.1.2. Модель стержня из объёмных КЭ

Создание расчетной схемы.

Сначала создаём поперечное сечение стержня. Для ввода узлов открываем раздел **Узлы и элементы** и нажимаем кнопку  **Узлы**, активизируя тем самым появление группы кнопок режима **Узлы**.



Нажимаем кнопку  **Ввод узлов**. В результате откроется одноименное диалоговое окно (рис.47), с помощью которой задаём координаты точек $A(0.025,0,0)$, $B(0,0,0)$, $C(0,0,0.05)$, $D(0.025,0,0.05)$, $E(0.025,0,0.048)$, $F(0.002,0,0.048)$, $D(0.002,0,0.002)$, $D(0.025,0,0.002)$ (рис.367).

Переходим в раздел **Схема**, в котором находится группа кнопок:



Подводим указатель мыши к кнопке  **Генерация произвольной формы на плоскости** и нажимаем левую клавишу мыши. Появляется новая группа кнопок:



Активируем кнопку  **Задание контура** и затем последовательно нажимаем на каждый из введенных нами узлов. В результате будет создан контур сечения тонкостенной балки (рис.368,а). Затем нажимаем на кнопку  **Генерация треугольной сетки КЭ на плоскости**. Появляется панель **Автоматическая триангуляция** (рис.369), в поле ввода которой вводим шаг триангуляции **0,005** и щелкаем по кнопке **ОК**. В результате созданный нами контур поперечного сечения стержня откроется конечно-элементной сеткой (рис.368, б).

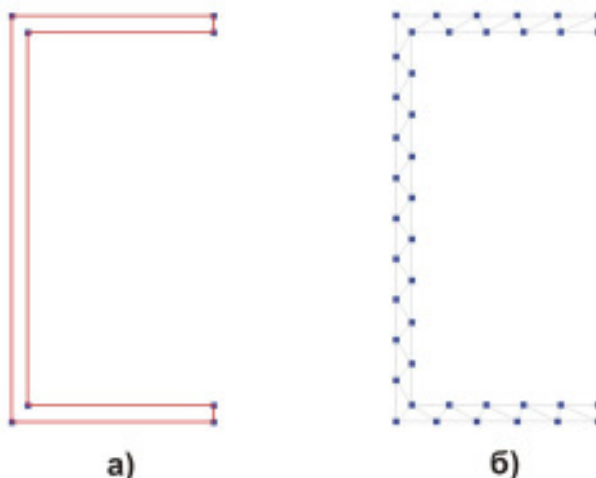


Рис.368

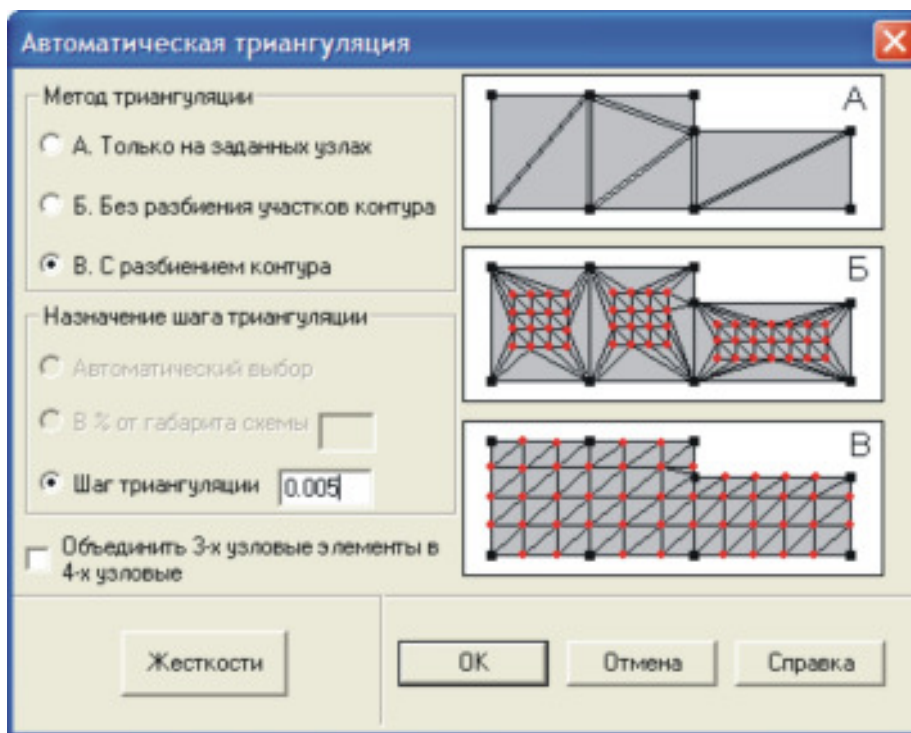


Рис.369

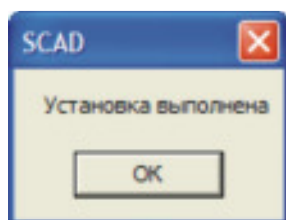








Рис.370


Подводим курсор мыши к кнопке  **Установка результатов триангуляции на место в схеме** и щелкаем по ней. Появится панель **SCAD**, информирующая о том, что установка выполнена успешно (рис.370). Нажимая на клавишу **ОК**, закрываем эту панель.

Для выполнения операции копирования с порождением новых элементов активизируем режим **Элементы** , нажимаем на кнопку выбора элементов  и выбираем на прототипе пластины, которые должны породить объёмные элементы. В разделе **Схема** нажатием на кнопку  активизируем режим копирования. В диалоговом окне **Копирование схемы** (рис.351) назначаем параметры копирования, правила обслуживания копий и нажимаем на кнопку **ОК**. В результате появляется конечно-элементная модель тонкостенного стержня, образованная объёмными элементами (рис.371, а). Информацию об этих элементах можно получить, нажав на панели фильтров кнопку  **Информация об элементе** (рис.371, б).

Из рис.371, б следует, что модель создана из пространственных изопараметрических шестиузловых конечных элементов, каждый узел которых имеет по три степени свободы.

Назначение жесткостей элементам

В разделе **Назначения** нажимаем на кнопку  **Назначение жесткостей объёмным элементам**. Появится панель **Жесткости объёмных элементов** (рис.372), в окнах которой задаём необходимые параметры пластин: материал, тип жесткости.

Нажимаем правую клавишу мыши. В появившемся диалоговом окне **Выбор узлов и элементов** выбираем тип курсора (рис.354), щелкаем по клавише **ОК**, выделяем всю модель балки и подтверждаем наш выбор, нажимая на клавишу .

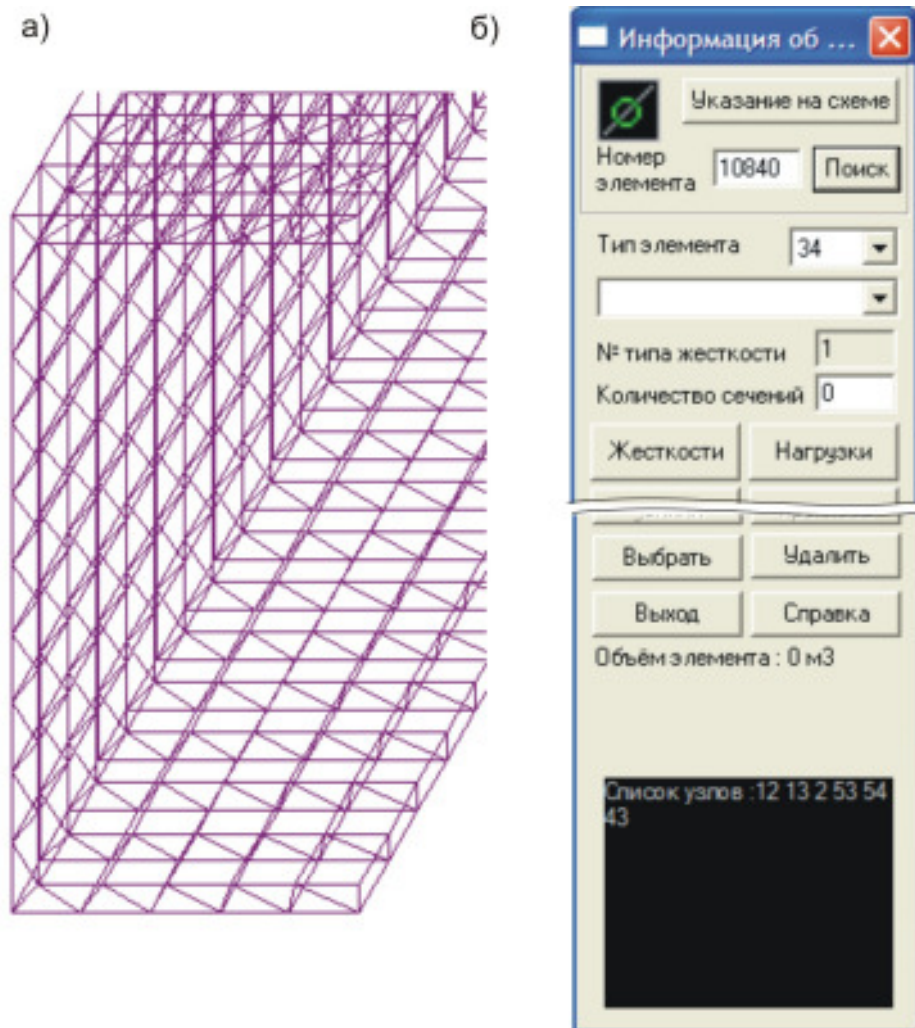


Рис.371

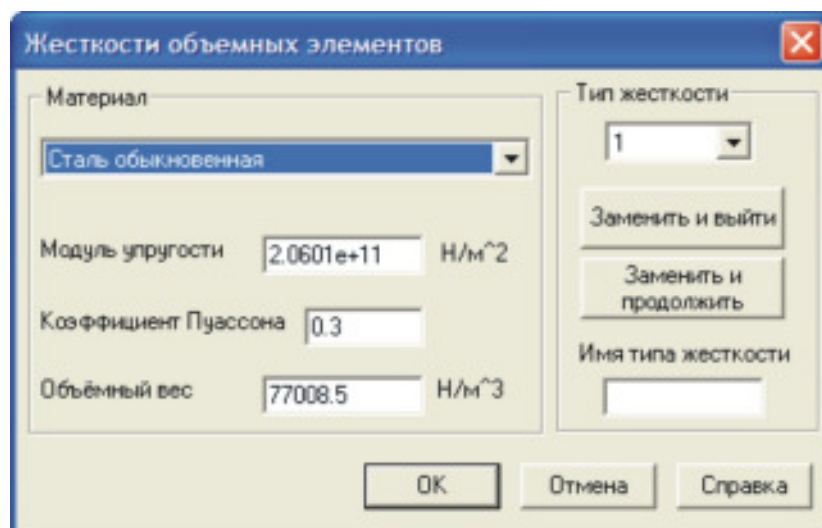




Рис.372

Назначение опорных связей

В разделе **Назначения** нажимает на кнопку  **Связи в узлах**. Появляется панель **Связи**, на которой устанавливаем все связи, подтверждаем наш выбор и на мо-

дели балки отмечаем закрепляемые узлы. Щелкаем по кнопке , на торце балки появляются изображения закрепленных узлов (рис.91, а).

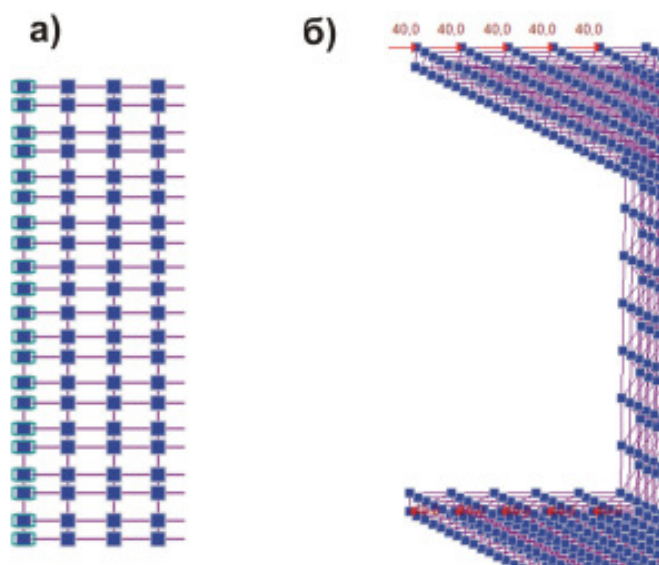





Рис.373

Загрузка расчетной схемы МКЭ

Так же, как и в предыдущем случае, крутящий момент $M_{кр} = 10 \text{ Нм}$ представим как пару сил (P, \tilde{P}) ; $P = 200 \text{ Н}$. Каждую силу распределим на пять узлов, т.е. к каждому узлу приложим сосредоточенную силу величиной 40 Н .

В разделе **Загрузки** нажимаем на кнопку  **Узловые нагрузки**. Появляется одноименная панель, в полях ввода которой задаем проекции силовых факторов на оси координат. Нажав на клавишу **ОК**, подтверждаем наш выбор. На конечно-элементной модели балки отмечаем загружаемые узлы. Щелкаем левой клавишей мыши по кнопке . На модели балки появляется изображение загруженных узлов (рис.373, б).

Линейный расчет

Вернёмся в **Дерево проекта**. Активируем закладку **Управление** в инструментальной панели и нажмем кнопку  **Выйти в экран управления проектом** (Дерево проекта).

В группе функций **Расчет** установим курсор в позицию **Линейный** и нажмем левую кнопку мыши. После завершения расчета и нажатия на кнопку **Выход** управление передается дереву проекта.

Анализ результатов

Устанавливаем курсор в позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** дерева проектов и нажимаем левую кнопку мыши, что приводит к активизации окна постпроцессора.

Анализ перемещений выполняется с помощью функции раздела **Деформации**.

Выбираем в списке **L10** загрузка. Вид деформированной схемы такой же, как и на *рис.360*, а величины перемещений значительно меньше (*рис.374*).

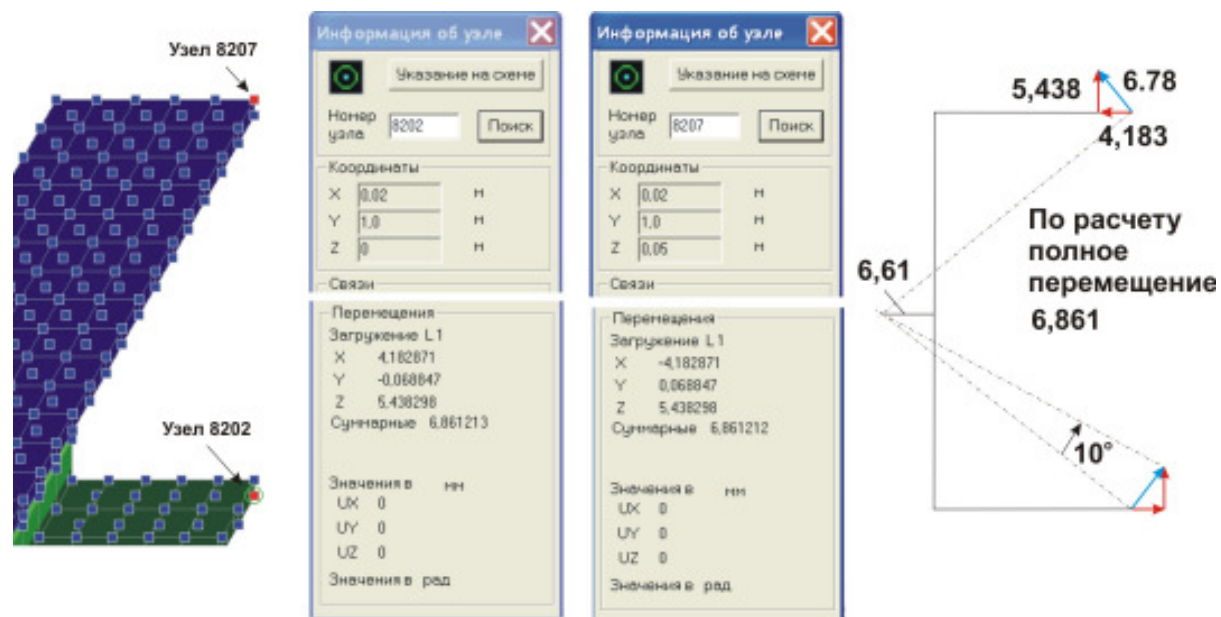


Рис.374

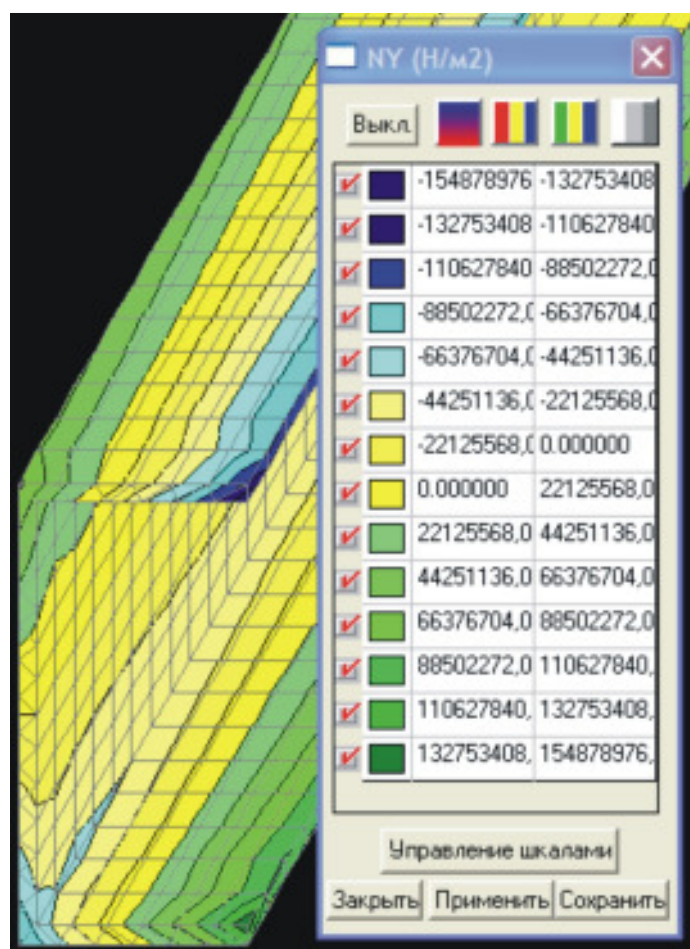





Рис.375

Анализ напряжений выполняется с помощью функции раздела **Поля напряжений**. Выбираем в списке  загрузку, компоненту напряжения  и нажимаем кнопку функции отображения результатов  **Отображение изополей и изолиний**. На *рис.375* приведены изополя и диапазоны изополей напряжений σ_y . Величина максимальных нормальных напряжений в заделке **154,88 МПа** достаточно близка к расчетному значению **163 МПа**.

6.10.2. Nastran-Patran 2005. Создание расчетной схемы из плоских КЭ

1. Создаём поперечное сечение стержня. Так как размеры поперечного сечения стержня малы по сравнению с его длиной, то предварительно изменим установленную по умолчанию точность распознавания геометрических размеров (**0.001**). Активируем раздел **Display** главного меню и в выпадающем меню выберем опцию **Geometry...** Появится панель **Geometric Attributes**, в окне **Chordal Tolerance** которой вводим число **0.00001**. Открываем раздел **Geometry**. В открывшейся одноименной панели активируем команды (**шаг 1**):

Action ► Create
Object ► Point
Method ► XYZ

и вводим узлы $A(0.025,0,0)$, $B(0,0,0)$, $C(0,0,0.05)$, $D(0.05,0,0.05)$ (*рис.376, а*).

2. Активируем команды (**шаг 2**):

Action ► Create
Object ► Curve
Method ► Point.

Проводим кривые **1**, **2**, **3** (*рис.376, б*).

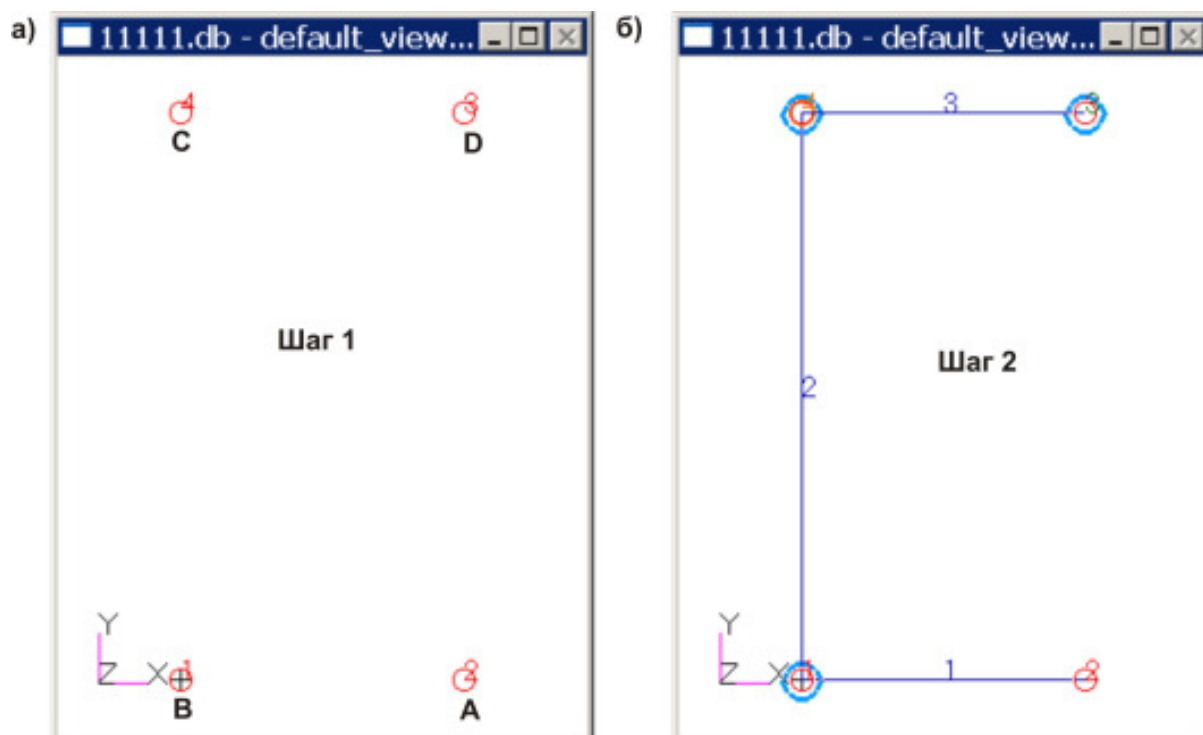


Рис.376

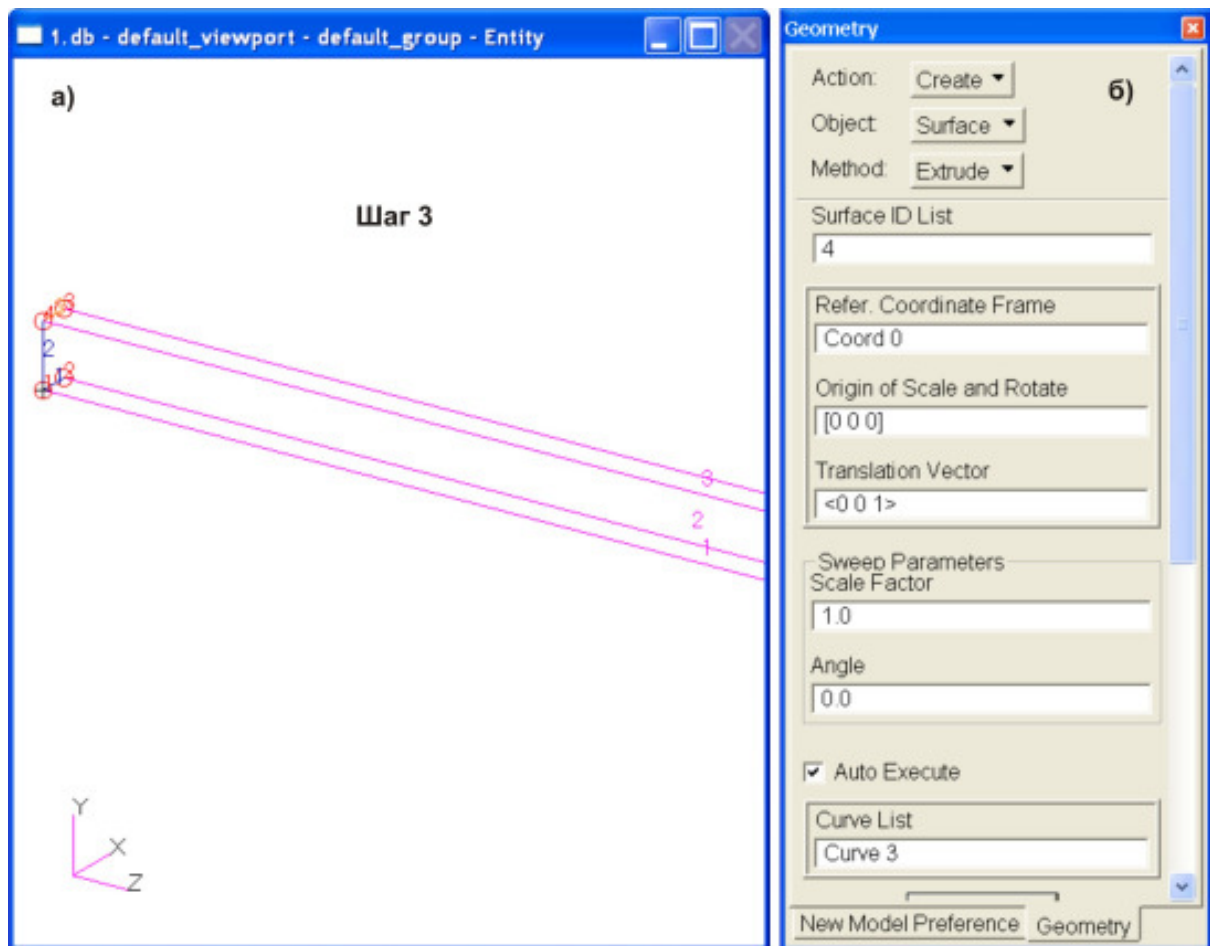


Рис.377

3. Активизируем команды (шаг 3):

Action ► Create
Object ► Surface
Method ► Extrude.

Строим плоскости 1, 2, 3 (рис.377). На панели **Geometry** в окне **Translation Vector** задаём вектор «вытеснения» (**extrude**) (рис.377,б), определяющий длину плоскости (1 м), образуемую из кривой, и щелкаем последовательно по кривым 1, 2, 3 (рис.376, б). В результате этих действий в графическом окне появятся изображения плоскостей 1, 2, 3 (рис.377, а).

4. Задаём материал – сталь (шаг 4).

5. Задаём свойства пластин (указываем материал и толщину пластин) (шаг 5).

6. Создаем конечно-элементную сетку.

6.1. В разделе **Elements** активизируем команды (шаг 6)

Action ► Create
Object ► Mech Seed
Type ► Uniform

и на гранях пластин задаём число элементов: на полках швеллера - 10 элементов; на стенке швеллера – 20 элементов; вдоль длинных сторон пластин - 400 элементов.

6.2. Активизируем команды (шаг 7)

Action ► Create
Object ► Mech
Type ► Surface.

Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...** Открывается панель **Property Sets**, на которой выбираем заданные свойства пластин (элементов). В гра-

фическом окне при нажатой клавише **Shift** последовательно щелкаем по пластинам **1**, **2**, **3** и на панели **Finite Elements** нажимаем клавишу **Apply**. В графическом окне появится изображение созданной конечно-элементной сетки (рис.378, шаг 7)

7. Жестко защемляем левый торец тонкостенной балки (шаг 8).
8. На правом торце балки задаём моментную нагрузку $M_{кр} = 10 \text{ Нм}$ в виде системы распределенных сосредоточенных сил, приложенных к узлам полок швеллера (шаг 9). Так как вдоль полки расположено **10** элементов, то во внутренних узлах прикладываем усилие $10 / (0.05 * 10) = 20$, в крайних узлах - **10**.
9. Выполняем расчет напряженно-деформированного состояния тонкостенной балки (шаг 10). На рис.379 показаны изополя модуля вектора перемещения. Из рисунка следует, что стержень закручивается, а величина максимального перемещения равна **1,6 см**. При решении этой же задачи в программном комплексе **SCAD** (на более редкой сетке) величина максимального перемещения составила **1,53 см**.

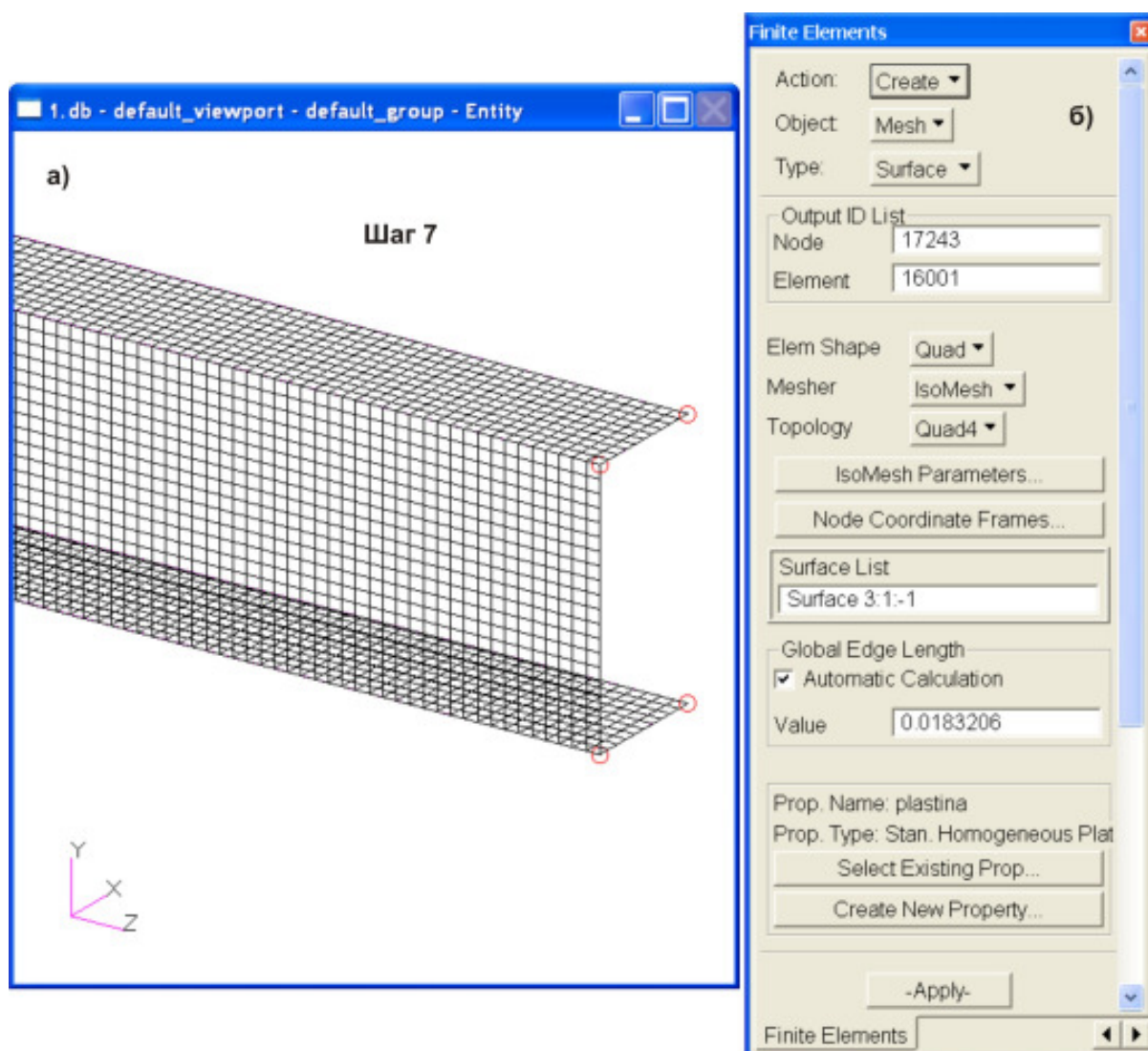


Рис.378



Рис.379

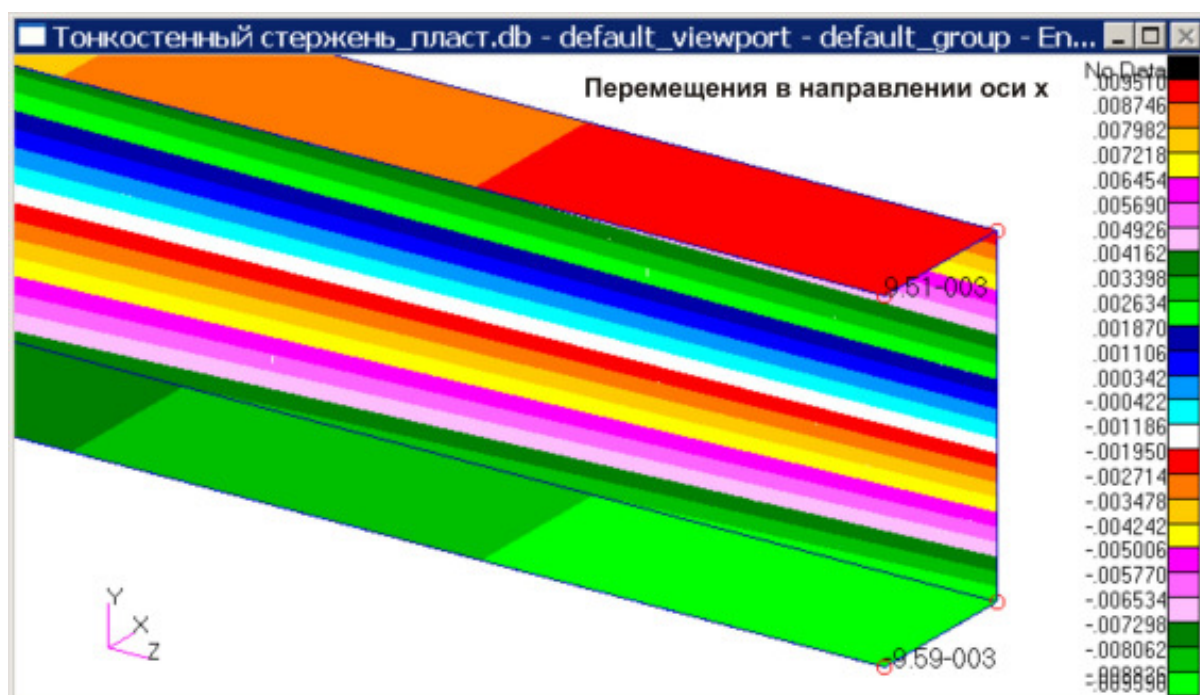


Рис.380

На рис.380 и 381 приведены изополя составляющих вектора перемещения в направлении глобальных координатных осей x и y , изображенных на рисунках в левом нижнем углу графического окна.

Конечно-элементная сетка собрана из пластинчатых элементов **QUAD4** – (Quadrilateral Plate Element) (рис.382). Это наиболее общий элемент для моделирования пластин, оболочек и мембран. **QUAD4** позволяет моделировать плоское напряженное состояние, изгиб, поперечный сдвиг в зависимости от данных, задаваемых в свойствах пластины. Этот элемент соединяется с другими элементами в четырех узлах. Номера узлов от **G1** до **G4** расположены последовательно по периметру элемента. Силы и напряжения определяются в координатной системе элемента (в локальной системе координат), которая располагается следующим образом:

– ось x элемента проходит посередине угла 2α , положительное направление от **G1** к **G2**;

– ось y элемента перпендикулярна к оси x и располагается в плоскости узлов $G1$, $G2$, $G3$, $G4$, положительное направление от $G1$ к $G4$ (рис.382).

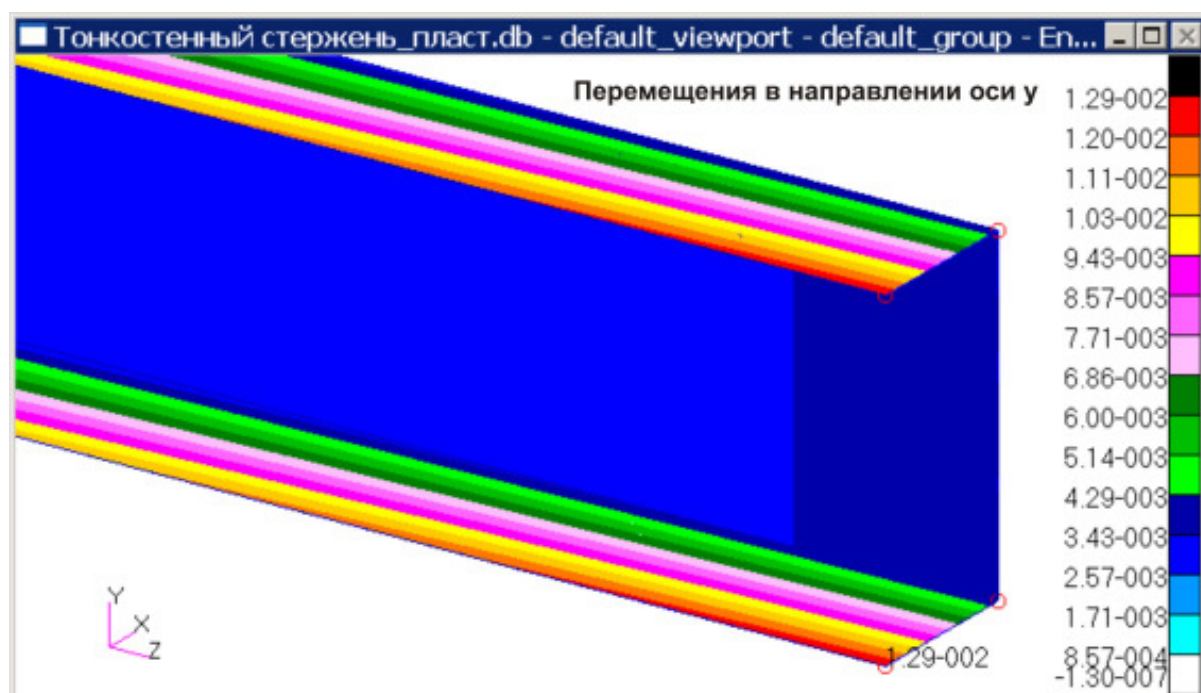


Рис.381

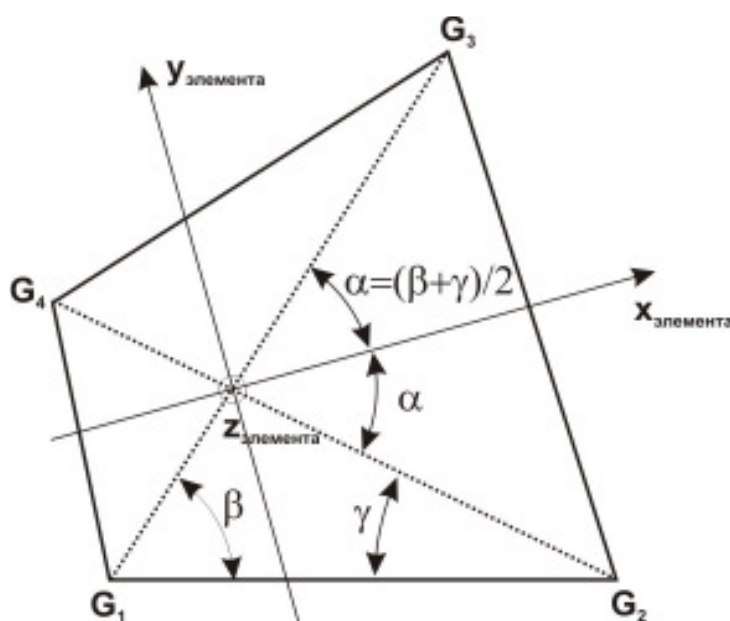


Рис.382

Изополя напряжений σ_x , σ_y и τ_{max} приведены на рис. 383-385. На рис.386 приведены величины нормальных напряжений σ_z (в глобальной системе координат), возникающих в стенке швеллера в сечении стержня, совпадающем с заделкой. Максимальные напряжения σ_z , возникающие в стенке швеллера, составляют **160 МПа** (рис.387).

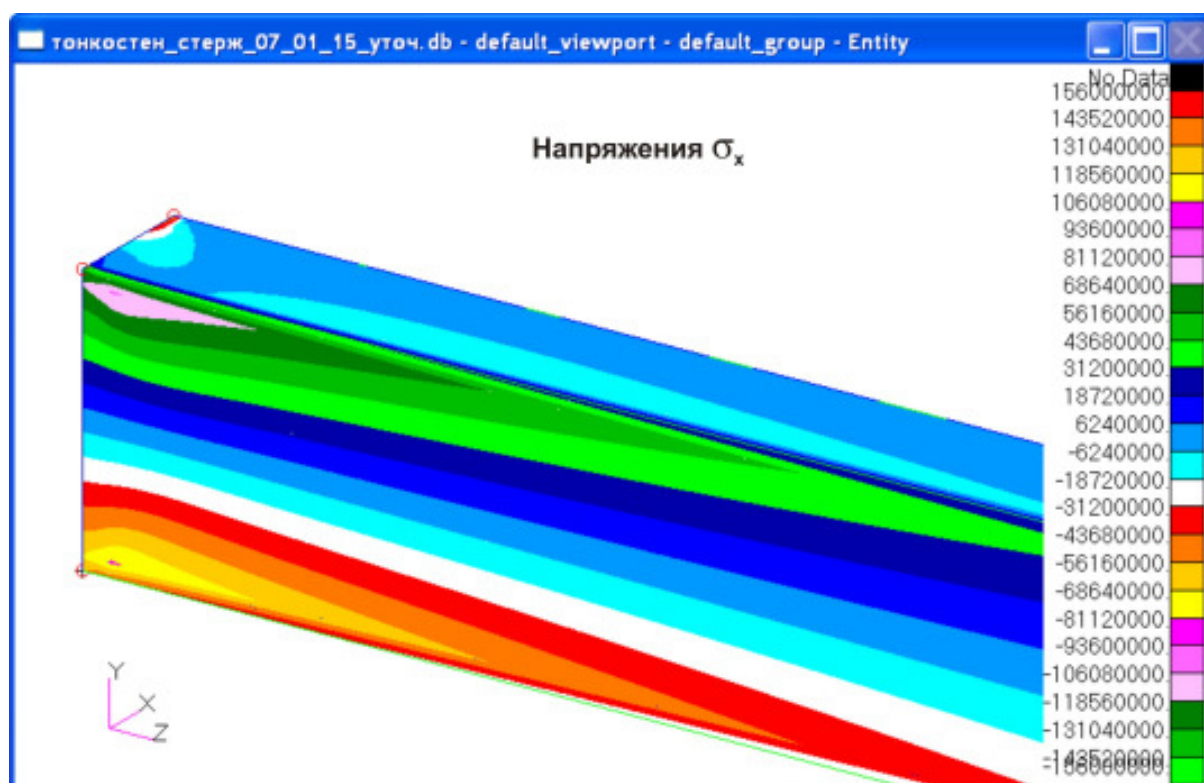


Рис.383

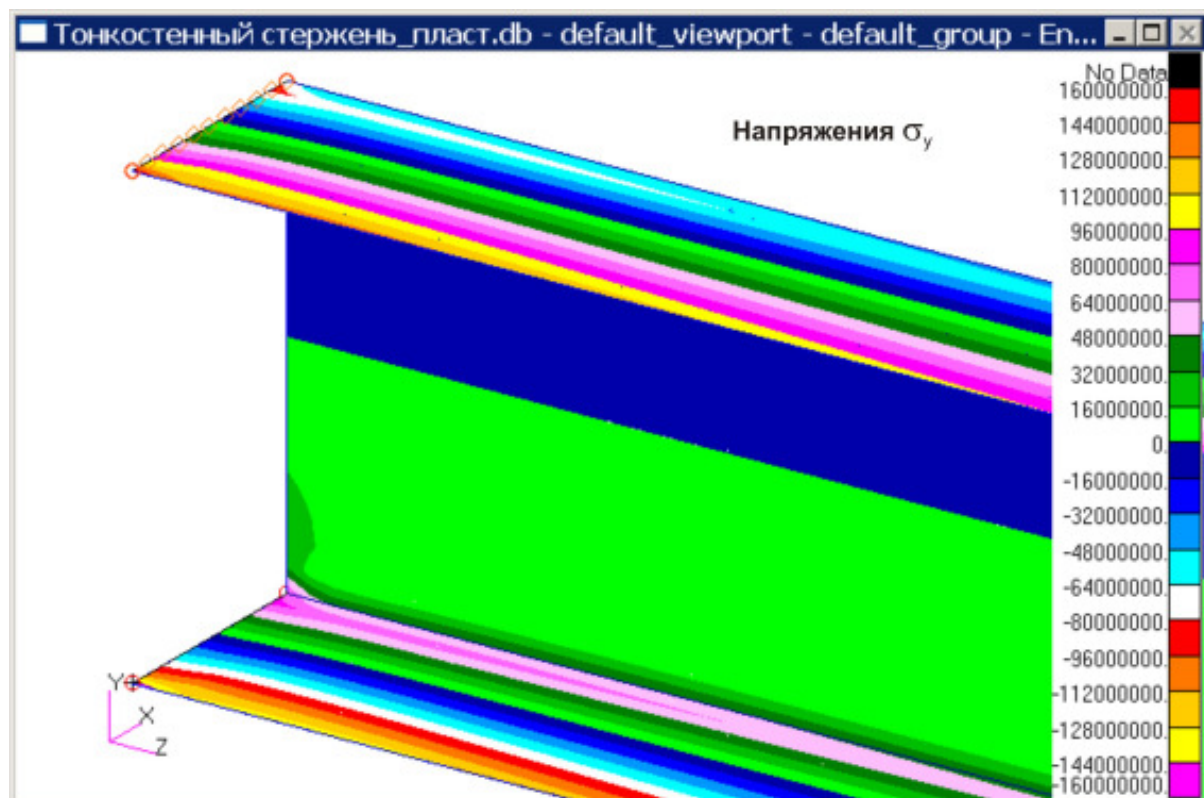


Рис.384

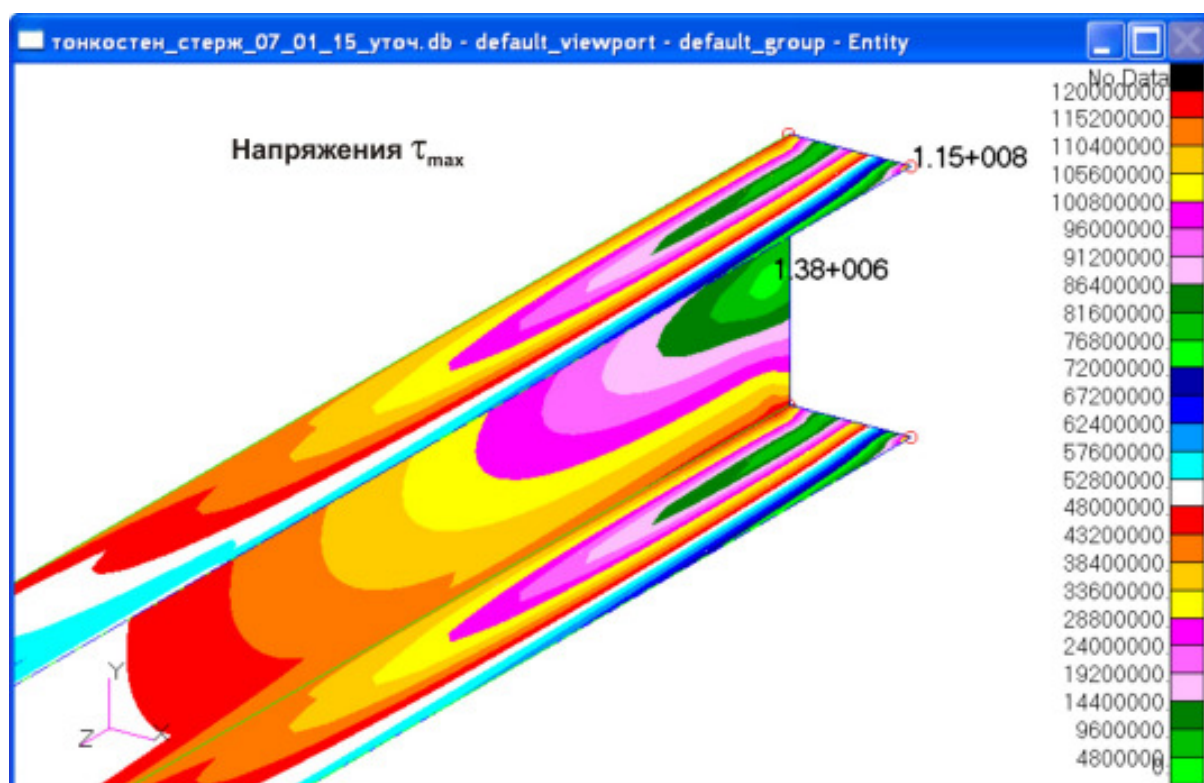


Рис.385

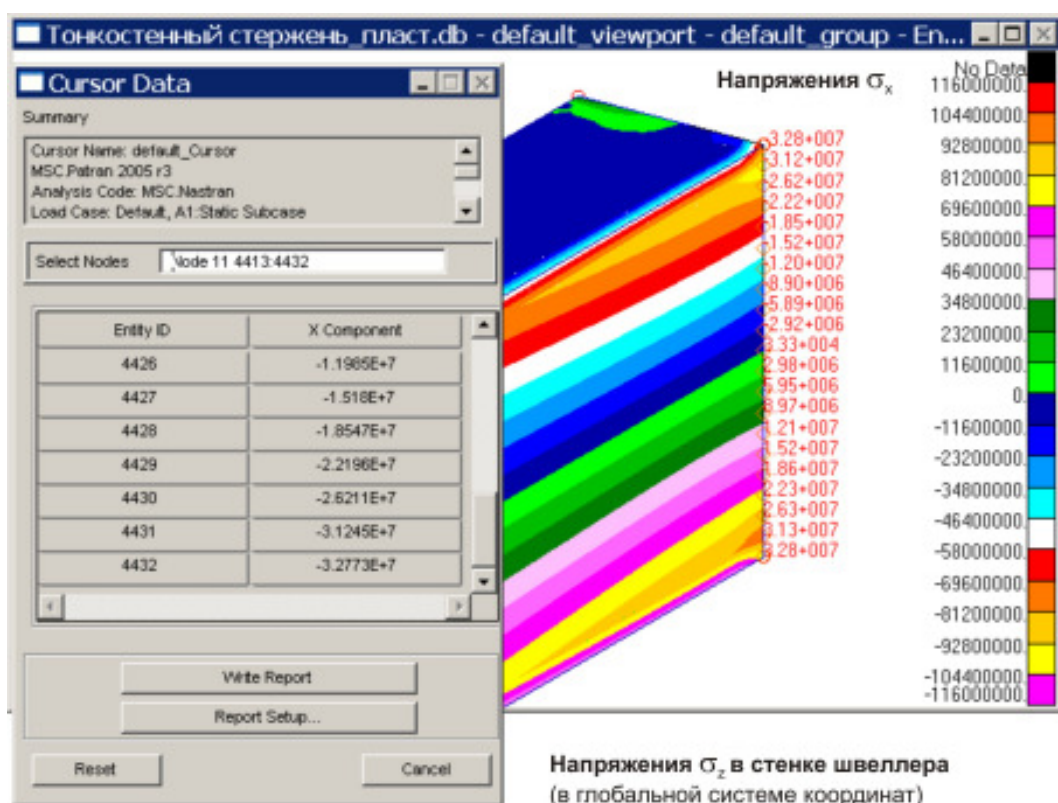


Рис.386

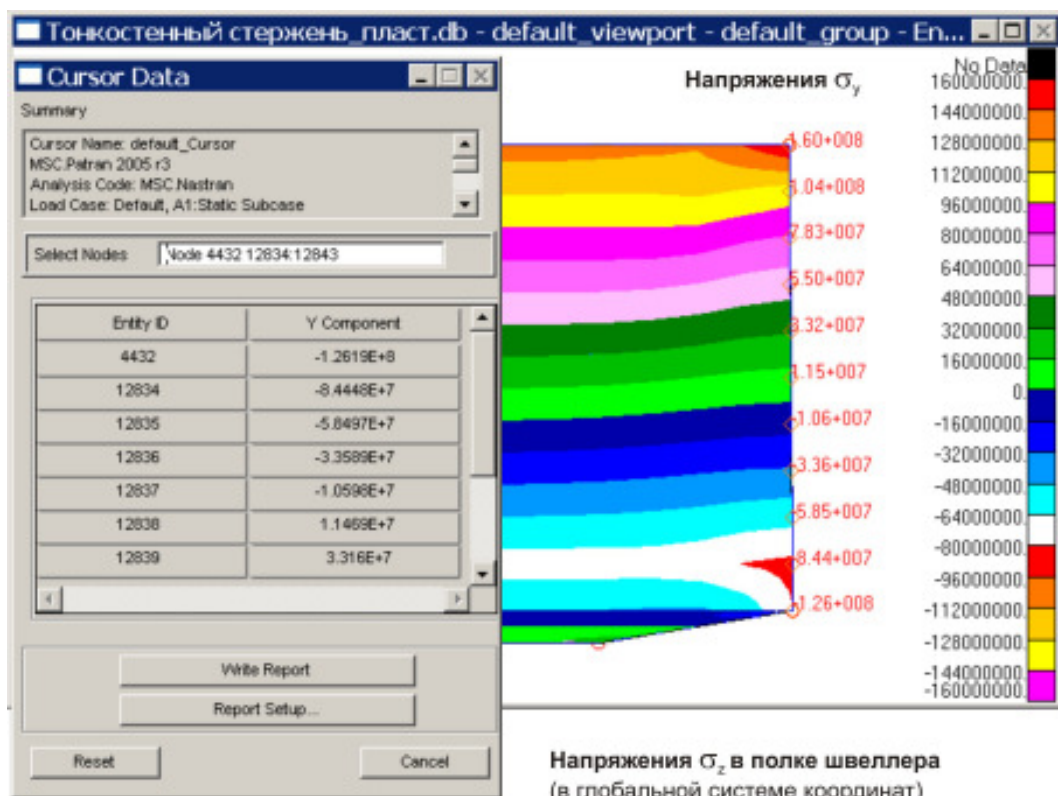


Рис.387

1. Предисловие	4
2. Вычислительные МКЭ комплексы для прочностного анализа конструкций	9
2.1. Роль ЭВМ в процессе проектирования.....	9
2.2. Метод конечных элементов.....	10
2.3. SCAD.....	16
2.3.1. Загрузка комплекса SCAD Office.....	17
2.3.2. Создание нового проекта.....	19
2.4. MSC. Patran-Nastran 2005.....	33
2.4.1. Запуск и выход из системы Patran 2005	36
2.4.2. Интерфейс MSC. Patran.....	39
2.4.3. Строка меню.....	40
2.4.4. Геометрическое моделирование ферм, балок и рам в системе MSC. Patran-Nastran.....	42
2.4.4.1. Алгоритм создания конечно-элементной модели фермы.....	48
2.4.4.2. Алгоритм создания конечно-элементной модели фермы с помощью многоточечных связей (MPC).....	60
2.4.4.3. Алгоритм определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балки.....	66
3. Примеры решения задач строительной механики.....	82
3.1. Задачи на равновесие системы тел.....	82
3.1.1. Составная балка.....	83
3.1.1.1. Решение задачи в MathCAD.....	84
3.1.1.2. Решение задачи в MSC. Patran-Nastran 2005.....	85
3.1.1.3. Решение задачи в SCAD.....	92
3.1.2. Составная рама.....	96
3.1.2.1. Решение задачи в MathCAD.....	96
3.1.2.2. Решение задачи в SCAD.....	103
3.1.2.3. Решение задачи в MSC. Patran-Nastran 2005	107
3.2. Решение плоских задач теории упругости.....	114
3.2.1. Исследование напряженного состояния балок-стенок	119
3.2.1.1. Определение напряжений в поперечных сечениях балки-стенки методами сопротивления материалов.....	119
3.2.1.2. Расчет балки-стенки в программном комплексе SCAD	121
3.2.1.3. Расчет балки-стенки в программном комплексе MSC. Patran-Nastran 2005	143
3.2.2. Расчет штифтовых (заклёпочных) соединений	157
3.2.2.1. Определение наибольших нормальных напряжений в поперечном сечении стержня по формулам сопротивления материалов без учета концентрации напряжений	157
3.2.2.2. Расчет штифтового соединения по формулам сопротивления материалов	158
3.2.2.3. Расчет штифтового соединения в программном комплексе SCAD	159
3.2.2.4. Расчет штифтового соединения в программном комплексе MSC. Patran-Nastran 2005	169
3.2.3. Расчет клеевого нахлесточного соединения	176
3.2.3.1. Расчет клеевого соединения в программном комплексе SCAD	176
3.2.3.2. Расчет клеевого соединения в программном комплексе MSC. Patran-Nastran 2005	181

4. Примеры решения задач прикладной механики	191
4.1. Моделирование пружин и упругих связей	191
4.1.1. Моделирование пружин и упругих связей в системе MSC. Patran-Nastran 2005	192
4.1.1.1. Использование элемента Grounded Spring	193
4.1.1.2. Моделирование пружин и упругих связей в системе SCAD	205
4.1.2. Моделирование масс в системе MSC. Patran-Nastran 2005	210
5. Решение задач земледельческой механики.....	219
5.1. Моделирование взаимодействия жесткого двухгранного клина с упругой средой (плоская задача)	220
5.1.1. Исследование взаимодействия двухгранного клина с «почвой» в программном комплексе MSC. Patran-Nastran	220
5.1.2. Исследование взаимодействия двухгранного клина с криволинейной поверхностью контакта и «почвы» в программном комплексе MSC. Patran-Nastran 2005	232
5.1.3. Исследование взаимодействия двухгранного клина с «почвой», имеющей у вершины клина трещину, в программном комплексе MSC. Patran-Nastran	239
5.2. Моделирование взаимодействия жесткого двухгранного клина с упругой средой (пространственная задача)	239
5.3. Методика работы с инструментом Insight	257
6. Изгиб и кручение тонкостенных стержней открытого профиля	265
6.1. Краткий исторический обзор	265
6.2. Особенности деформирования тонкостенных стержней некруглого сечения	276
6.3. Секториальные координаты и секториальные характеристики сечения..	279
6.4. Примеры вычисления секториальных характеристик	284
6.5. Стесненное кручение бруса с двутавровым профилем	298
6.6. Зависимость между средним касательным и нормальным напряжением в точке сечения стержня	304
6.7. Усилия в сечении тонкостенного стержня открытого профиля	305
6.8. Напряжения в сечении тонкостенного стержня открытого профиля	306
6.9. Определение углов закручивания тонкостенного стержня	311
6.10. Расчет тонкостенных стержней в конечно-элементных программах ..	320
6.10.1. SCAD Office	320
6.10.1.1. Создание расчетной схемы стержня из плоских КЭ	320
6.10.1.2. Модель стержня из объемных КЭ	331
6.10.2. MSC. Patran-Nastran 2005. Создание расчетной схемы из плоских КЭ	336
Оглавление	344