1971 г.

8 2 6

МРТУ 19 №: 183--65

2

1

ДИАФИЛЬМ

По заказу Министерства просвещения РСФСР

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ, ЕЁ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЯ

Диафильм по математике для средней школы

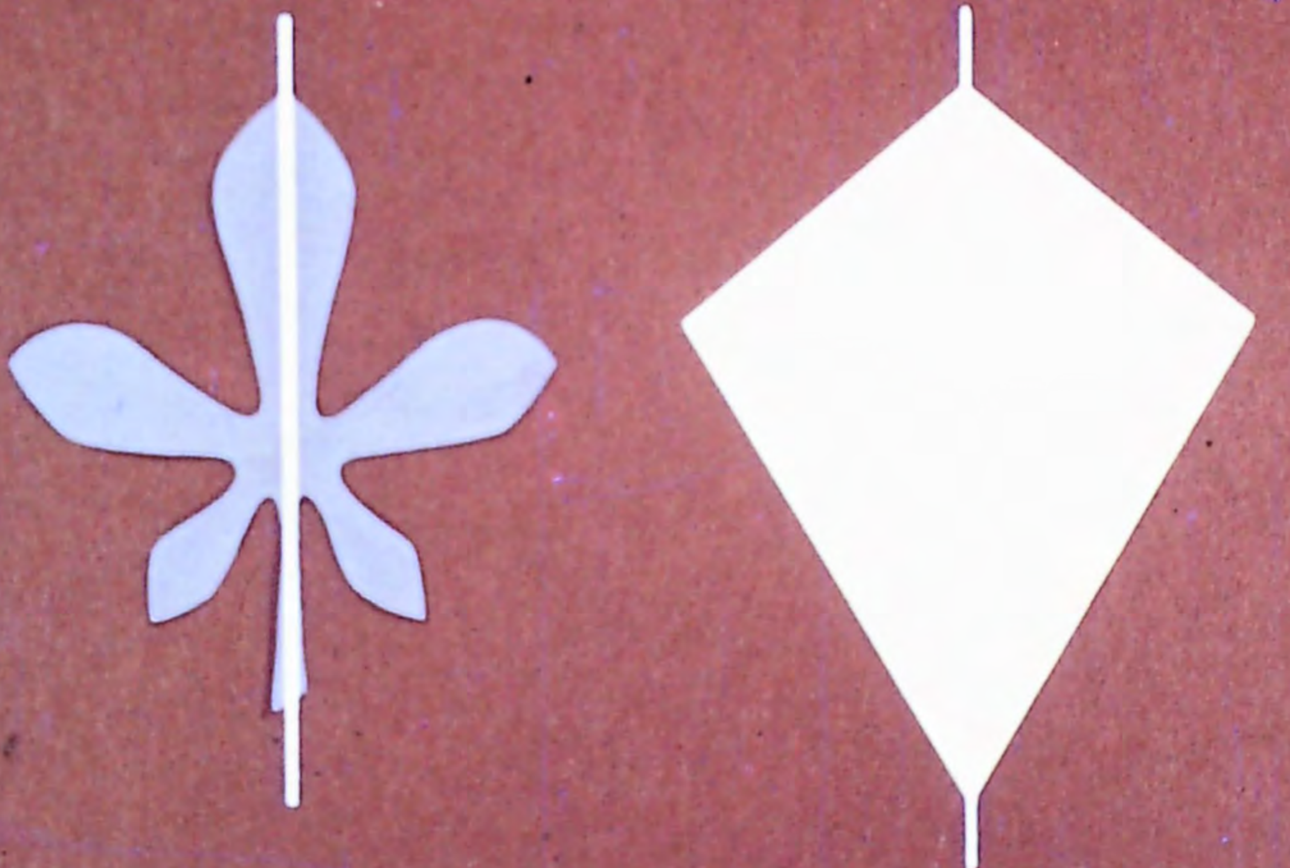
2

Посмотрите на изображения листьев клёна, каштана, розы. Все эти фигуры симметричны.

Изображения орнамента, бабочки, четырёхугольник
(дельтоида) тоже симметричны.

4

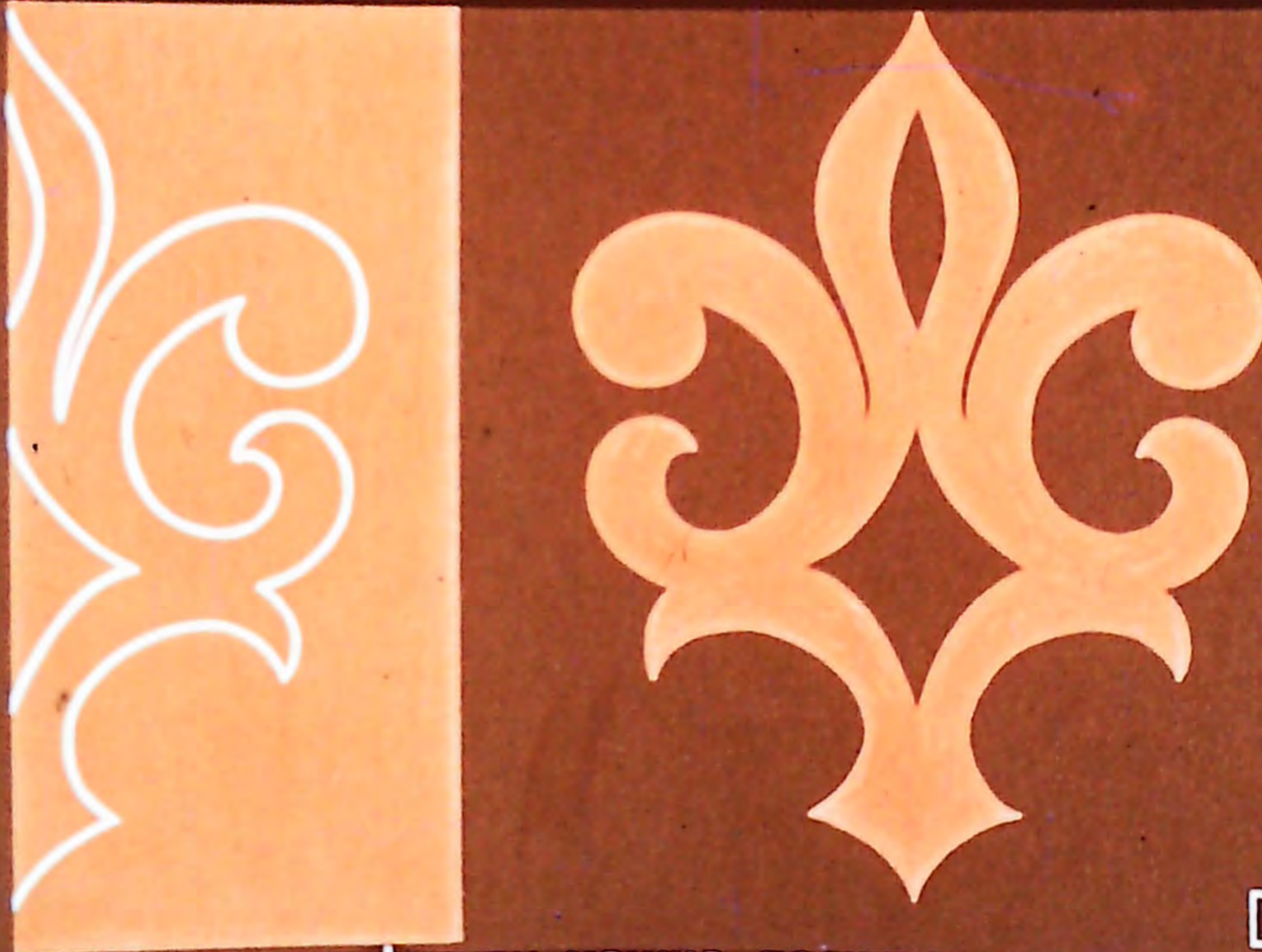
Сравните с симметричными фигурами несимметричные: изображения листа липы, бегонии, несимметричного параллелограмма.



6

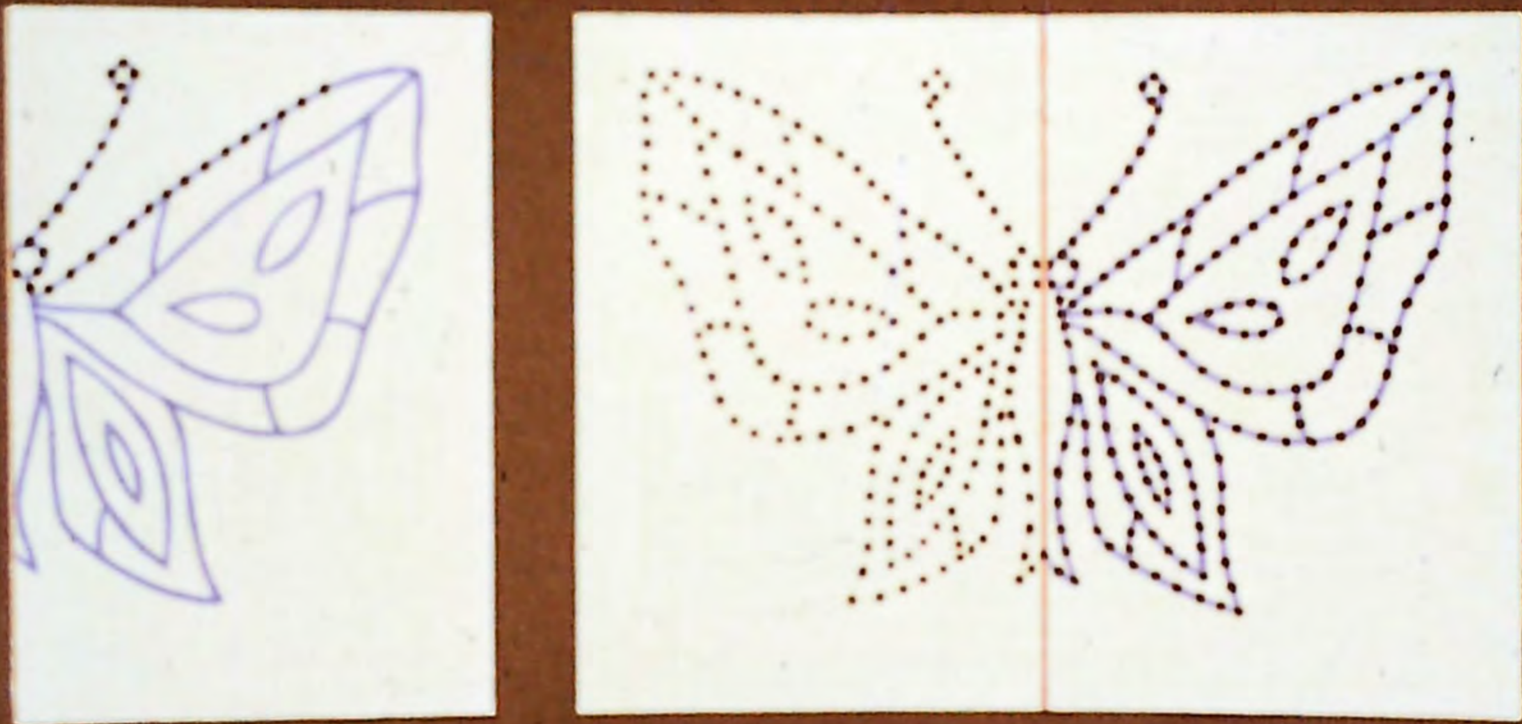
В каждой симметричной фигуре можно провести одну прямую – ось симметрии, делящую фигуру на две равные части.

Плоскость, на которой изображена симметричная фигура, можно сложить по оси симметрии, и тогда одна половина фигуры совместится с другой всеми своими точками.



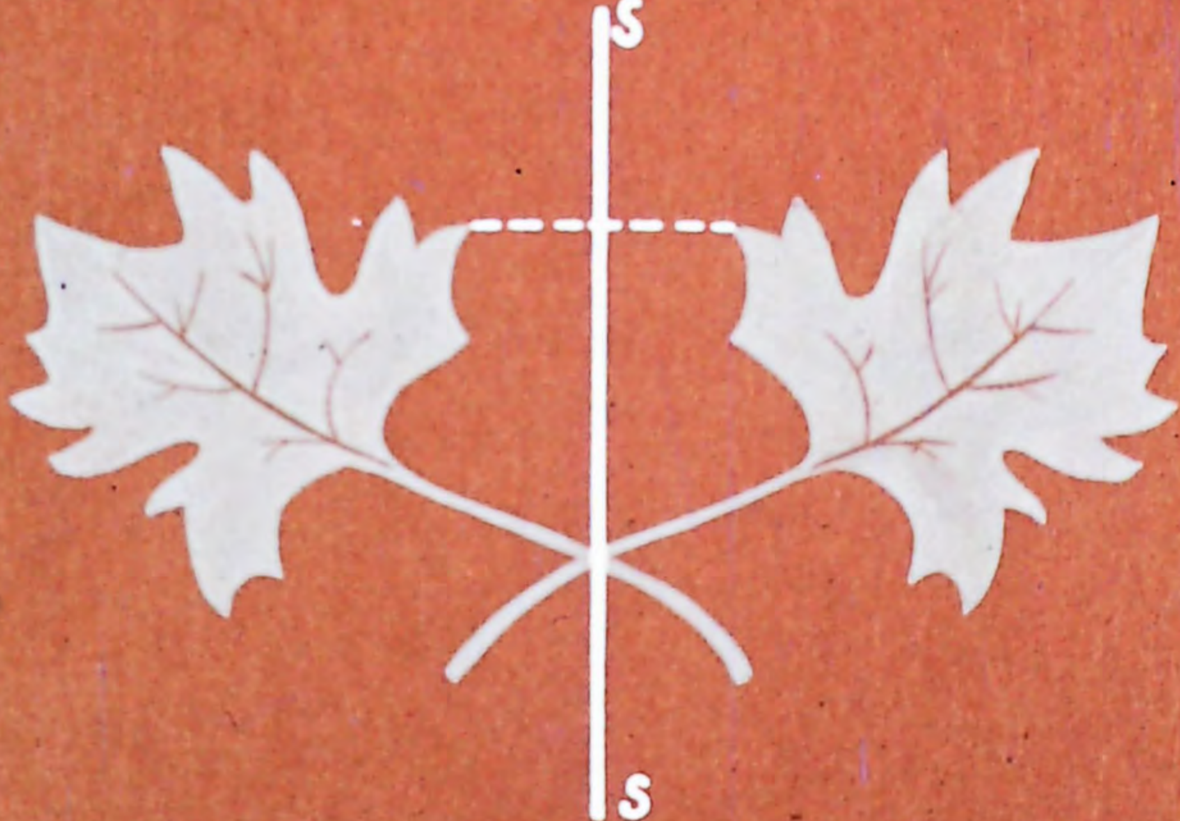
7

Симметричную фигуру можно получить, вырезая её по заданному контуру из сложенного вдвое листа бумаги...

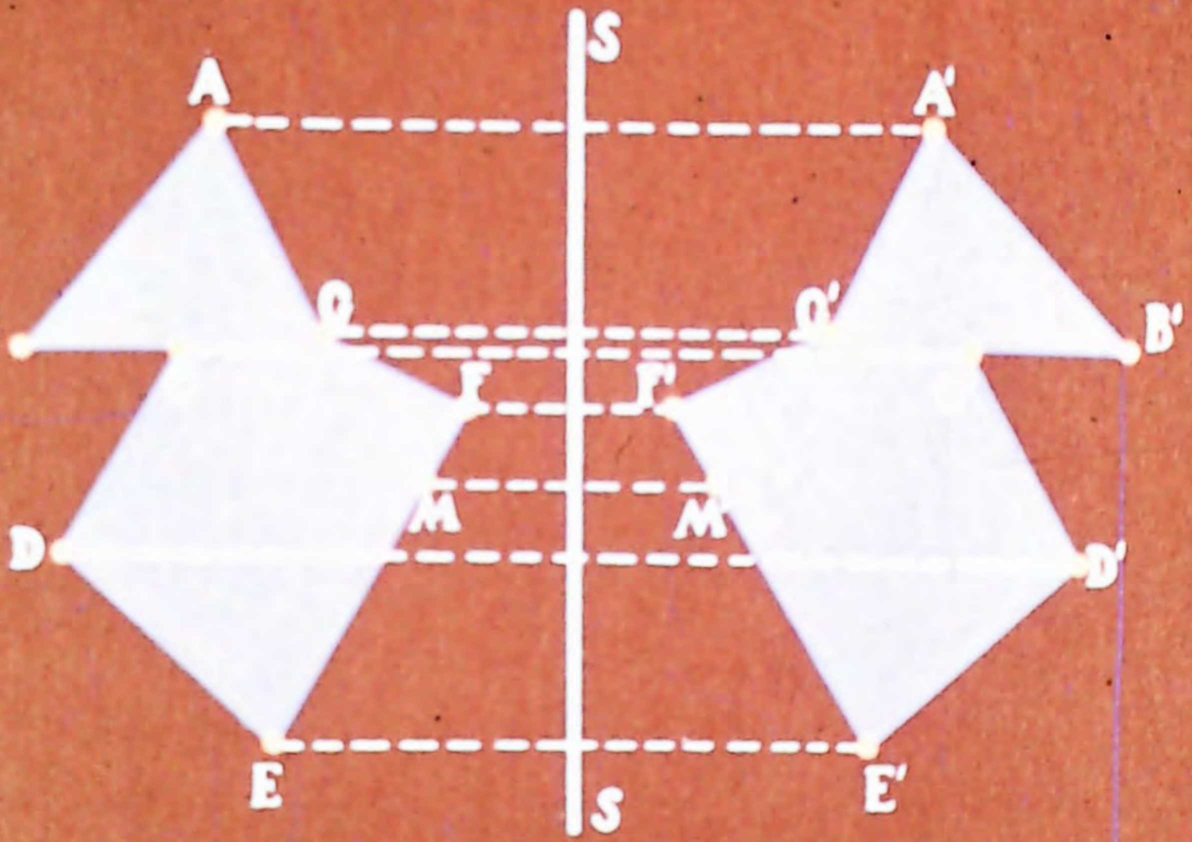


8

...или путём последовательных проколов иглой по заданному контуру на сложенном вдвое листе бумаги.



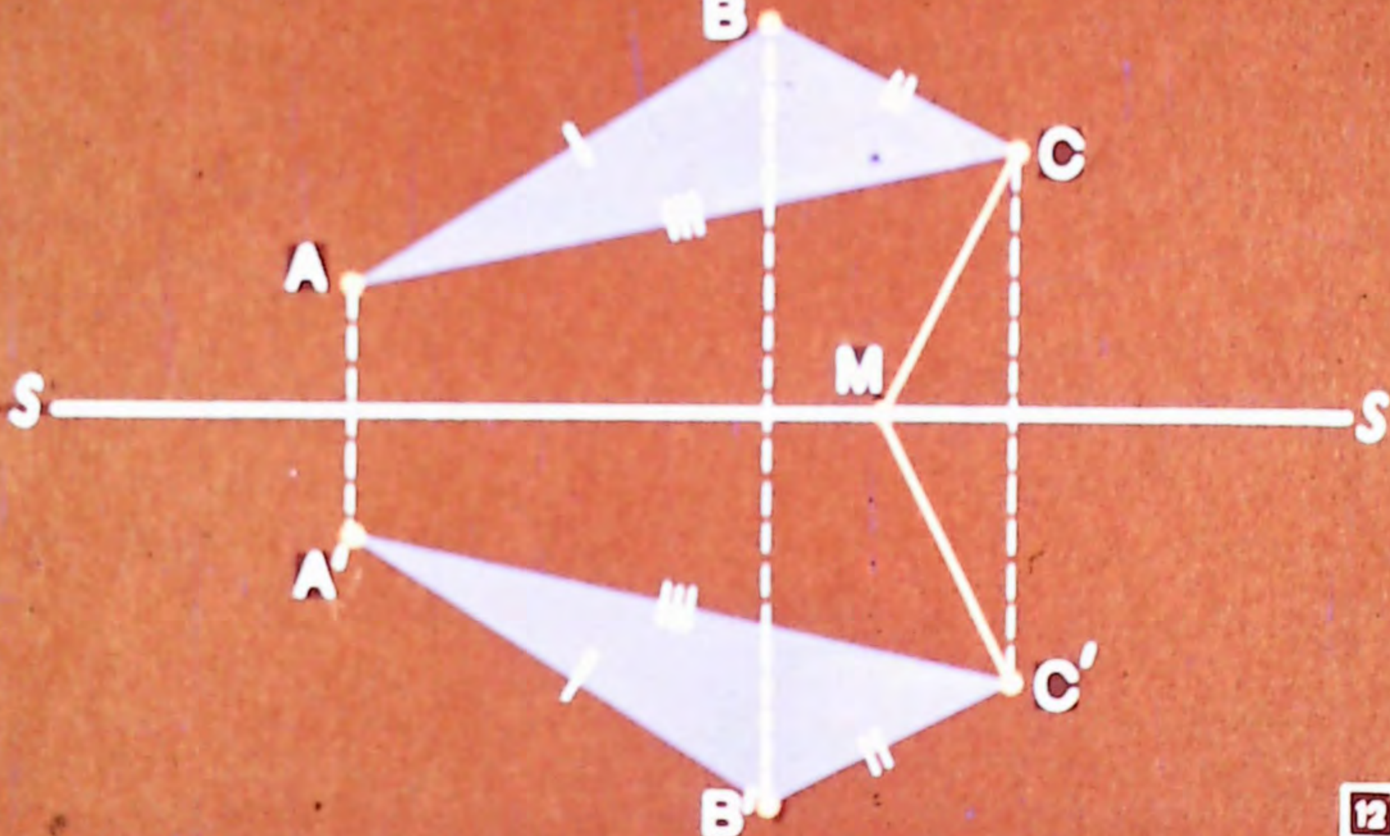
Рассмотрите эти две фигуры. Они называются симметричными по отношению друг к другу.



10

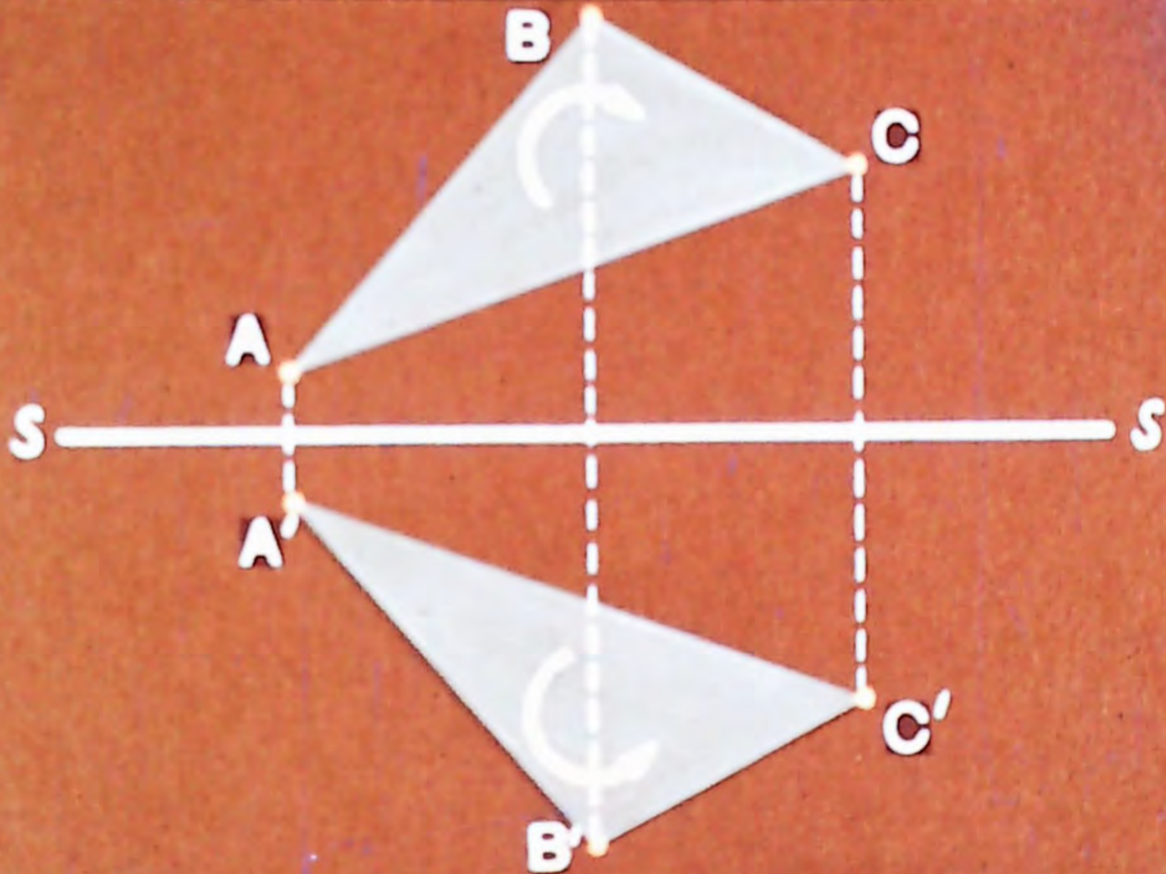
Если каждая точка одной фигуры симметрична с каждой точкой другой фигуры, такие фигуры называются симметричными между собой.

Вывод: чтобы получить фигуру, симметричную с данной относительно оси, нужно сложить плоскости по этой оси и совместить одну полуплоскость с другой. При этом каждая точка одной фигуры совместится с одной и только одной точкой другой фигуры. Точки самой оси остаются неподвижными.



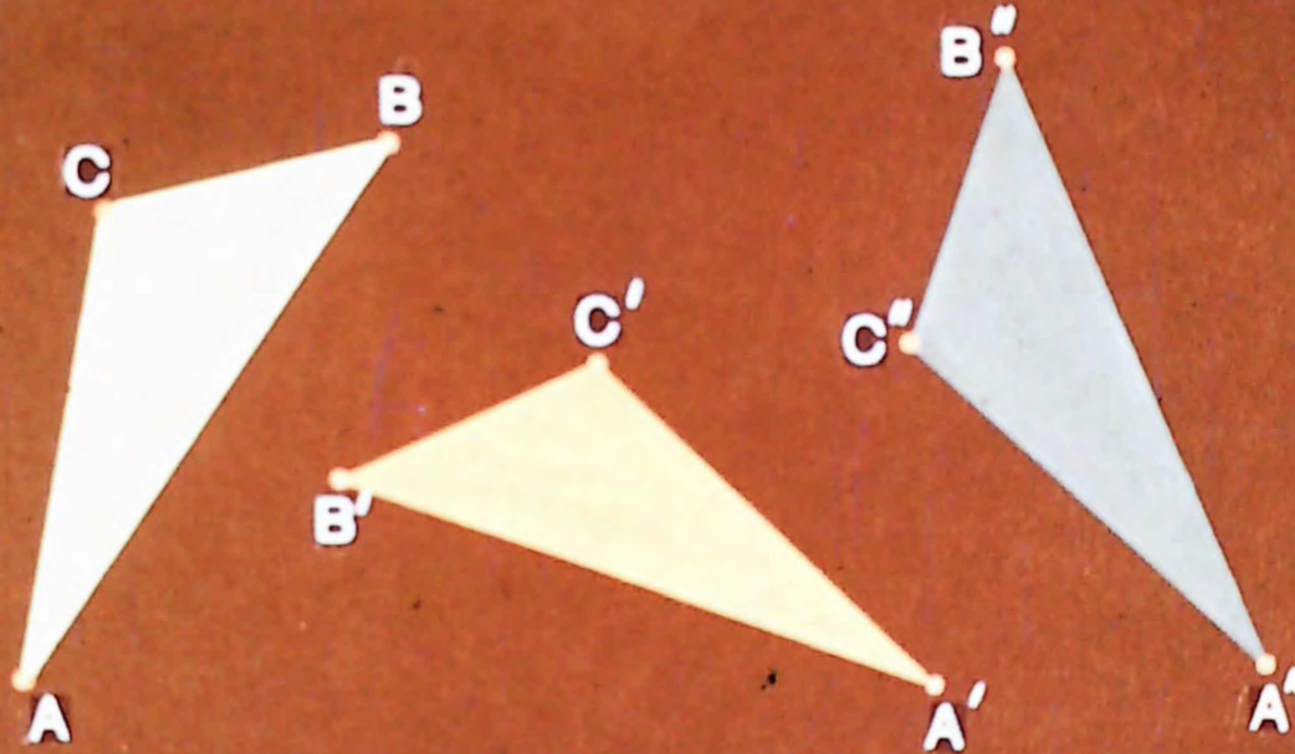
Так как симметричные фигуры совмещаются всеми своими точками, то они равны между собой. Поэтому осевая симметрия преобразует прямую в прямую, отрезок – в равный отрезок, угол – в равный угол: $AB = A'B'$; $MC = MC'$; $\angle BAC = \angle B'A'C'$; $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Обратите внимание на разницу между буквой „Я" и симметричной с ней буквой, на слово „КРУГ" и симметричную с ним фигуру.

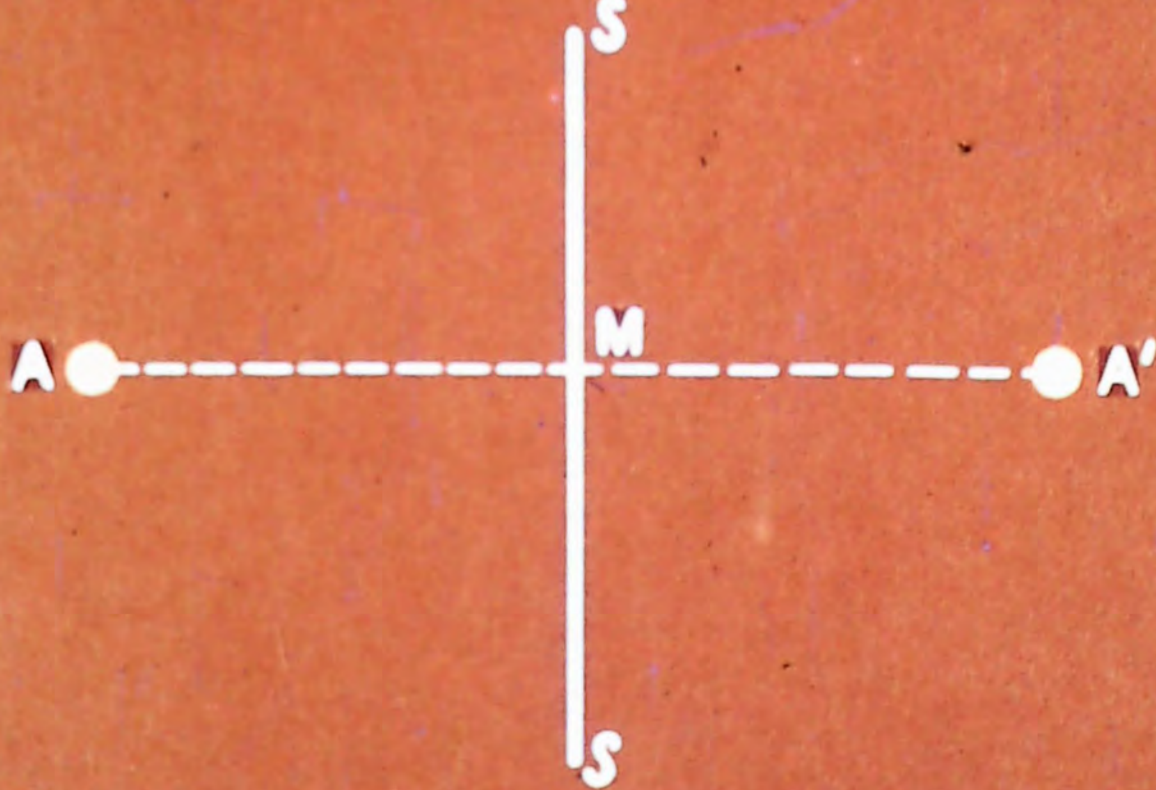


14

Симметричные треугольники ABC и A′B′C′ равны, но противоположно ориентированы. Движение по контуру ABC совершается в направлении движения часовой стрелки, а по контуру A′B′C′ – в противоположном направлении.

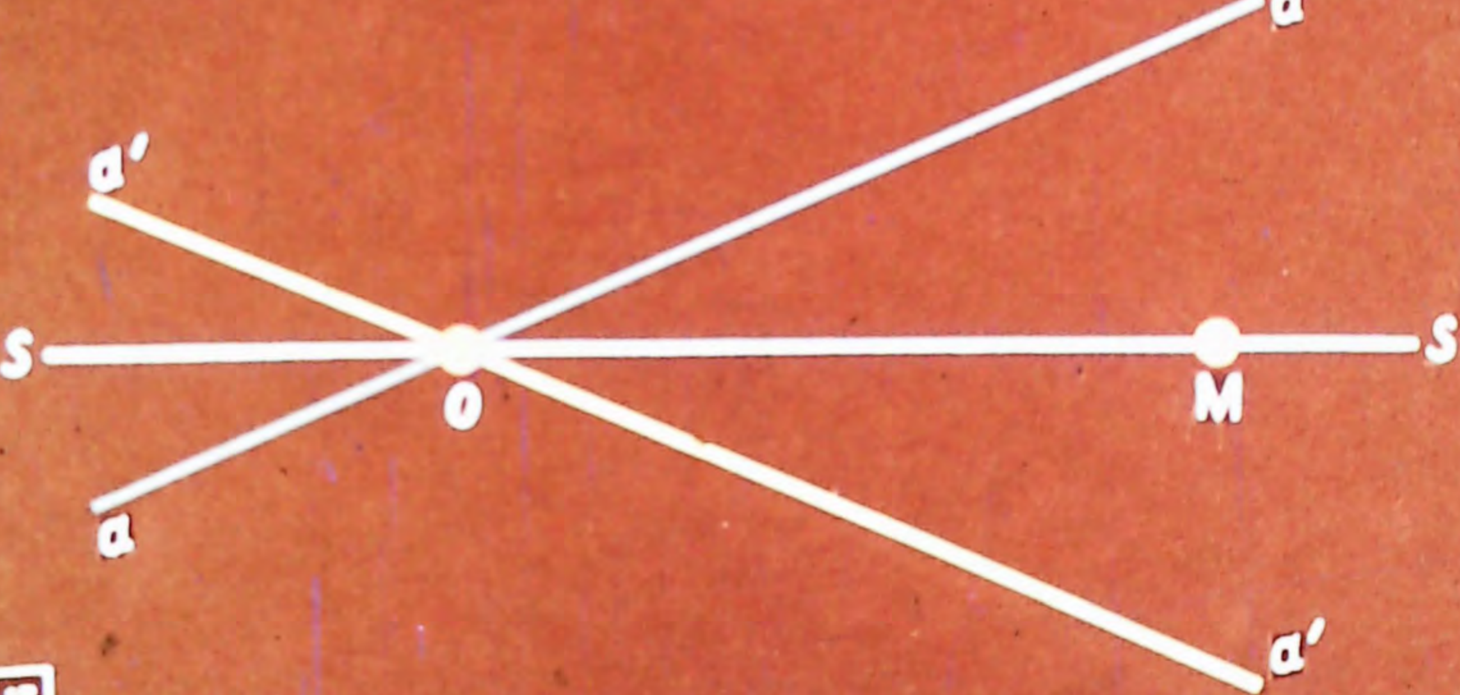


Даны три равных треугольника ABC, $A'B'C'$ и $A''B''C''$. Какие из них одинаково ориентированы, какие – противоположно? Можно ли противоположно ориентированные треугольники совместить непрерывным движением по плоскости?



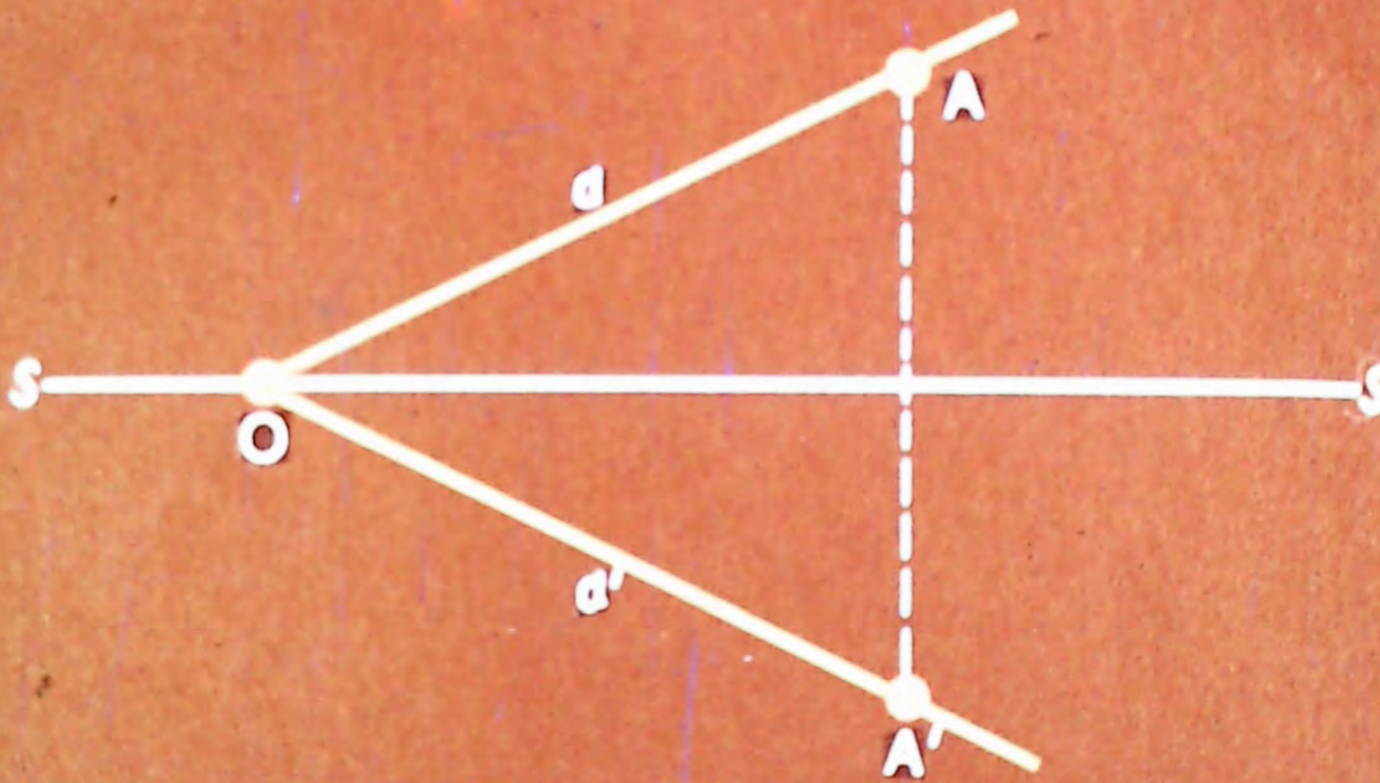
18

Ось симметрии S преобразует точку A в точку A′. Записывается это так: $S(A)=A'$. В какую точку при этом преобразуется точка A′? Как это записать? Как проходит ось S по отношению к отрезку AA′?



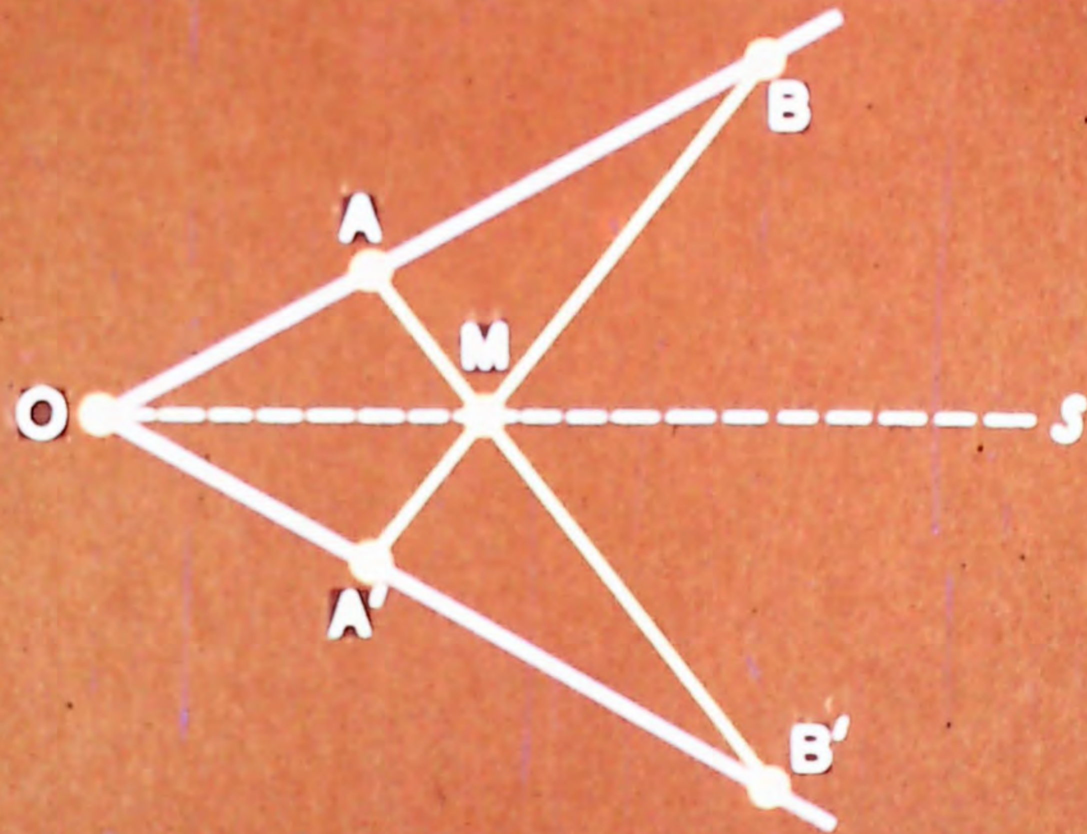
17

Точка M принадлежит оси S и потому преобразуется в самоё себя. Записывается это так: $M \subset S$; $S(M) \equiv M$. Прямая a преобразуется осью S в прямую a'; $S(a) \equiv a'$. В какую прямую преобразуется прямая a'? Где находится точка пересечения прямых a и a'? Как это доказать?



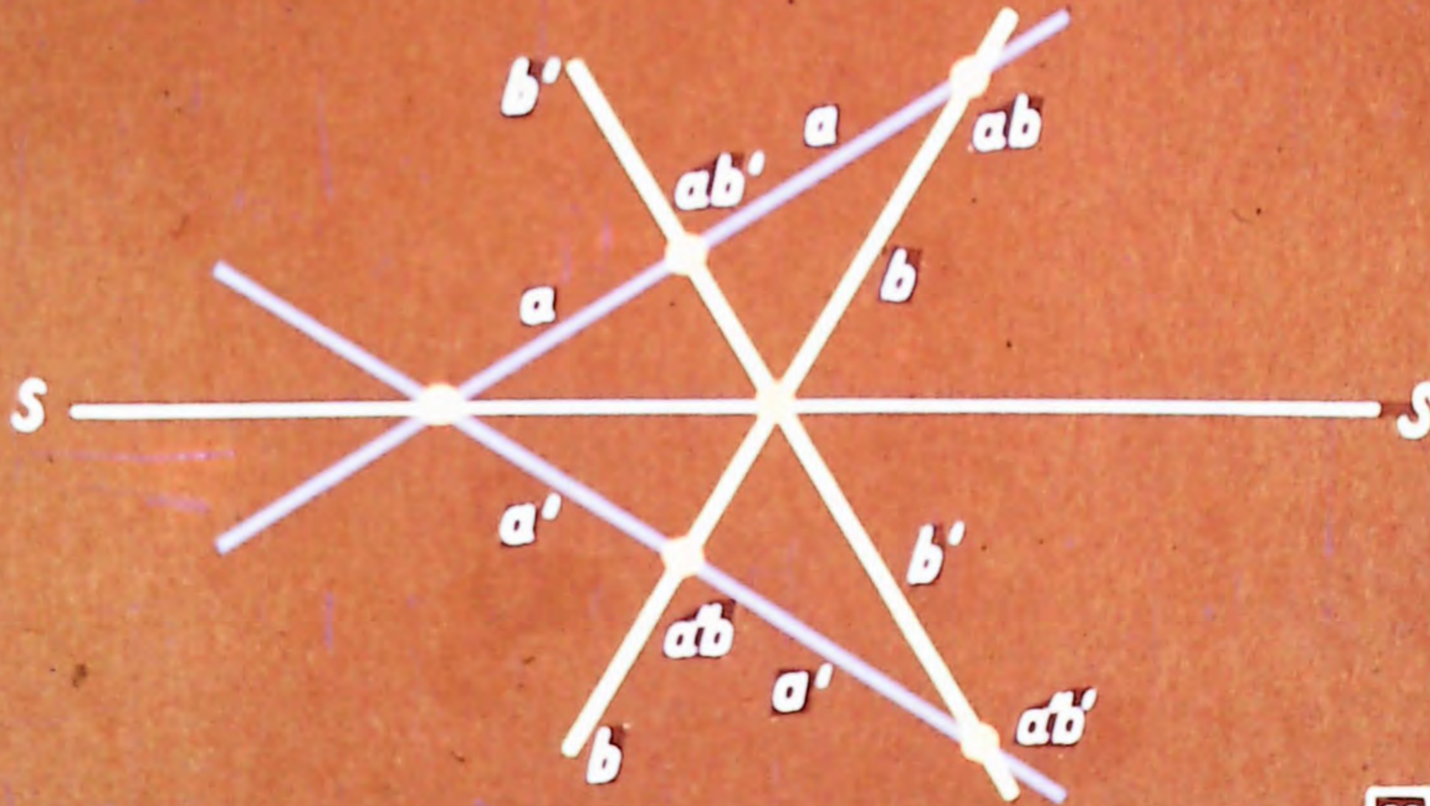
18

Дан угол со сторонами a, a' и вершиной O. На сторонах угла даны точки A и A', удовлетворяющие равенству OA=OA'. Как расположены точки A и A' относительно биссектрисы S? Сформулируйте вывод.



10

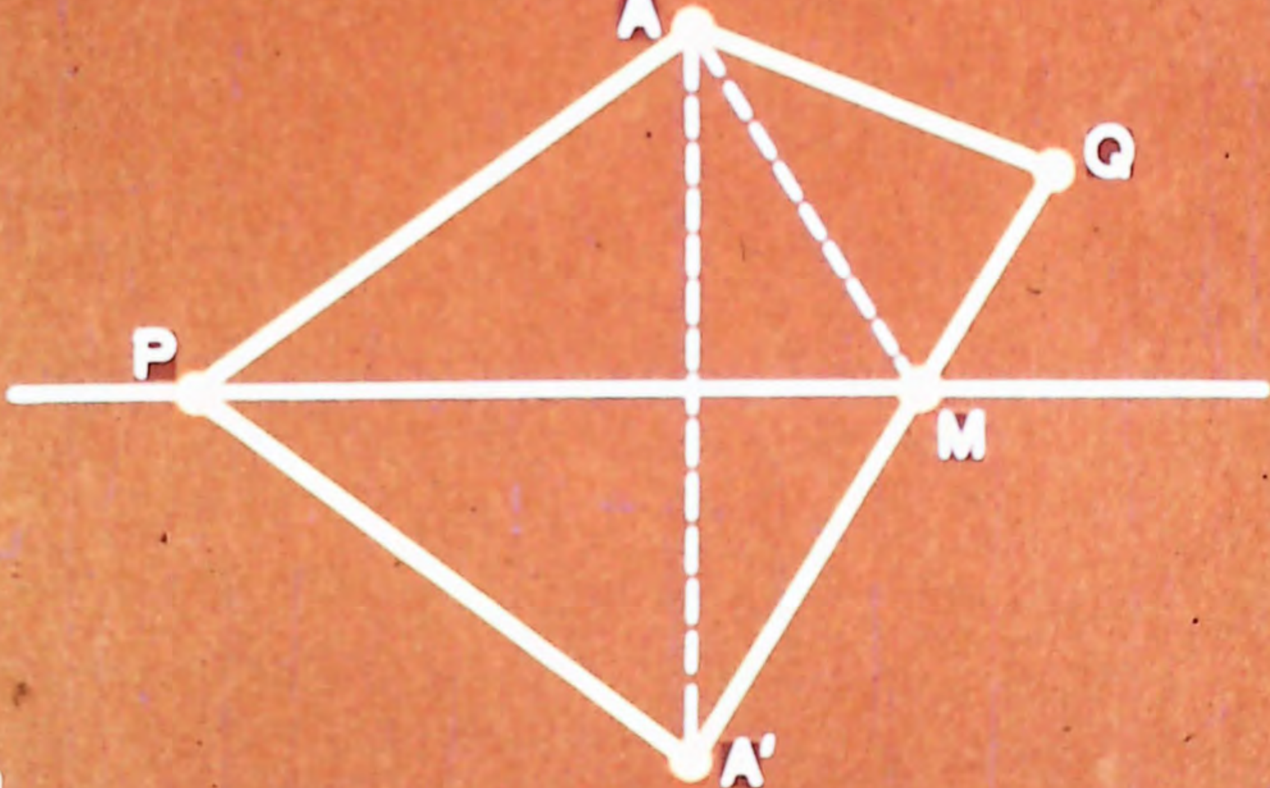
На сторонах угла с вершиной O отложены отрезки: OA = OA' и OB = OB'. Прямые AB' и A'B пересекаются в точке M. Доказать, что точка M лежит на биссектрисе данного угла.



20

Прямые a и a', b и b' симметричны относительно оси S. Как расположены по отношению оси S точки пересечения этих прямых? Обозначьте эти точки символами: ab, $a'b'$, ab' и $a'b$. Сделайте вывод и дайте ему обоснование.

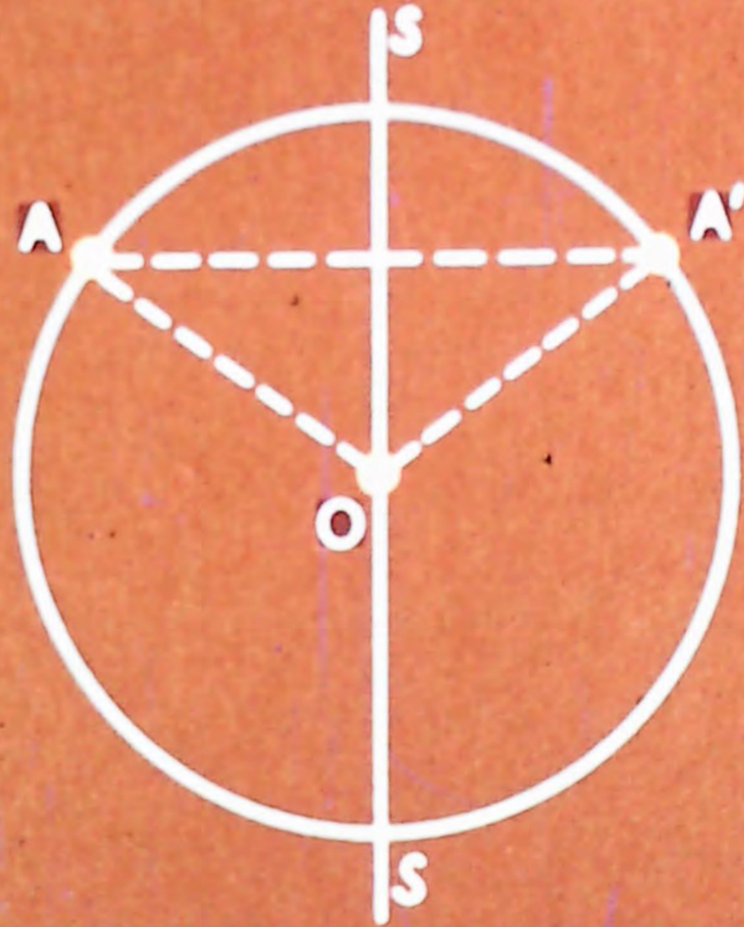
Итак, две пары взаимно симметричных прямых определяют две пары взаимно симметричных точек.



22

Пусть $S(A)=A'$, точка P принадлежит оси, а точка Q не принадлежит и лежит в одной полуплоскости с точкой A. Сравните отрезки PA и PA' – равны ли они? Равны ли отрезки QA и QA'? К какой из точек A или A' точка Q ближе и почему?

Фигура, содержащая те и только те точки, которые обладают некоторым общим свойством, называется <u>геометрическим местом</u> таких точек. Является ли ось симметрии геометрическим местом точек, равноудалённых от двух симметричных точек? Обосновать полученный вывод.

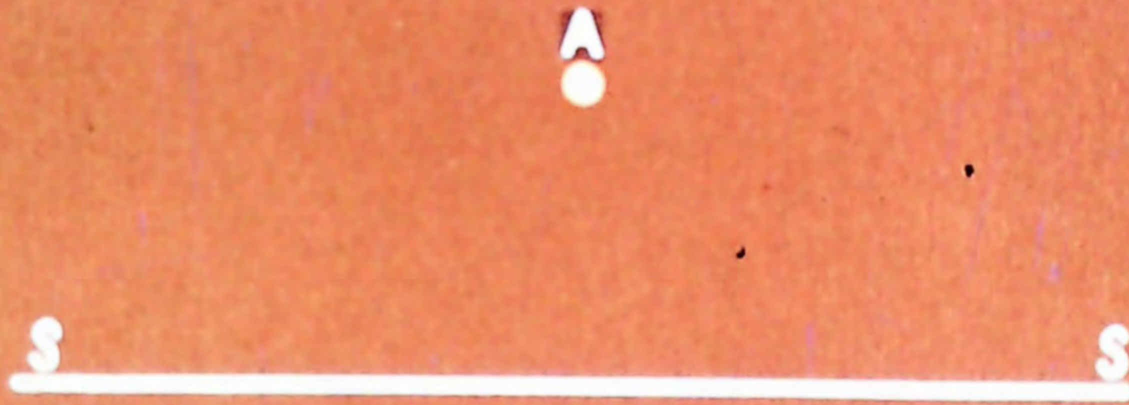


24

Окружность симметрична относительно каждой диаметральной прямой. Почему? Докажите, что точка А на одной полуокружности преобразуется в точку А' на другой.

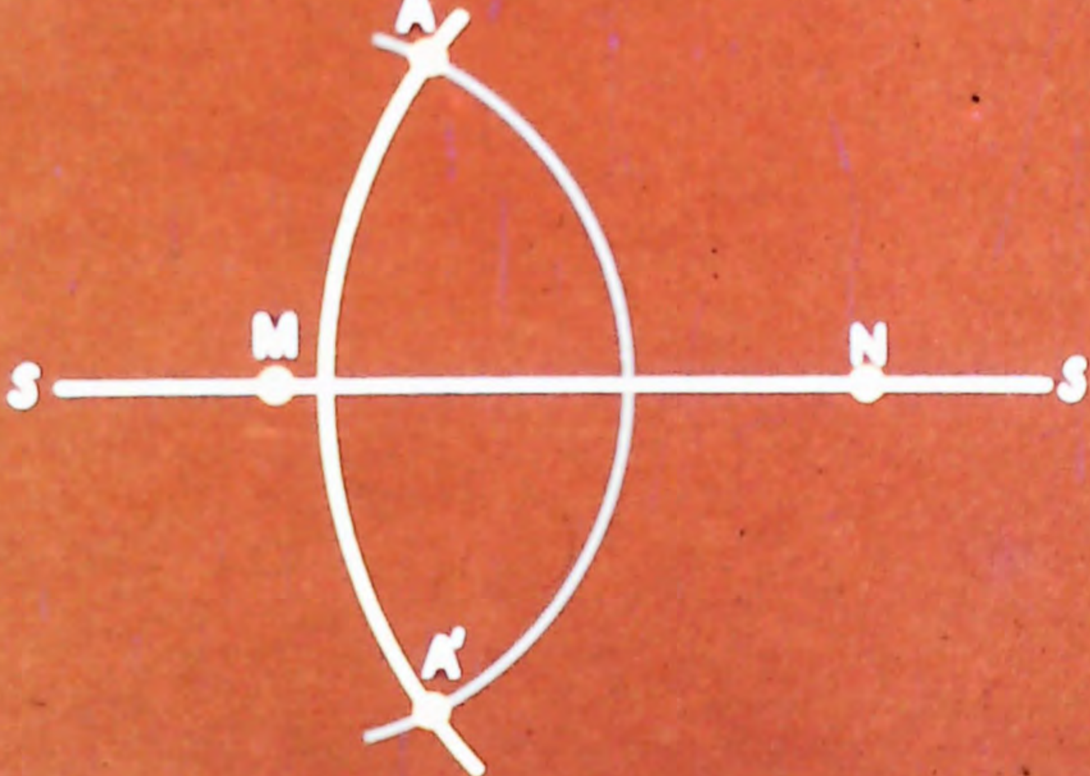
Задача. Построить ось симметрии точек A и A′.

<u>Решение</u>. Радиусом, большим половины отрезка AA', проводим окружность с центром A. Тем же радиусом проводим вторую окружность с центром A'. Через точки пересечения окружностей проводим прямую. Эта прямая и есть ось S симметрии точек A и A'. Почему?



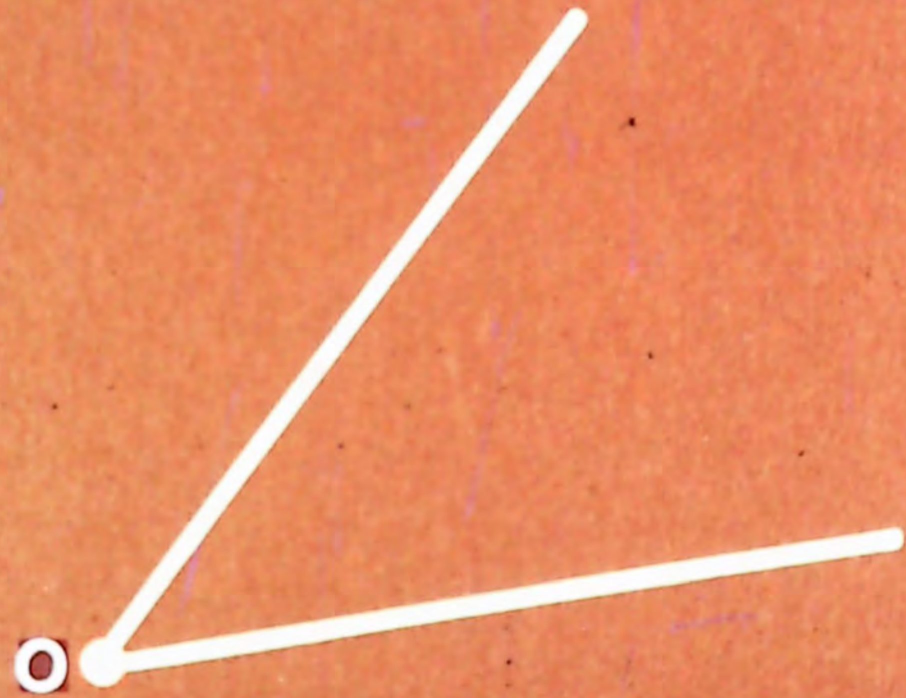
27

<u>Задача</u>. Дана ось S и точка А. Построить точку А′, симметричную с А относительно S.

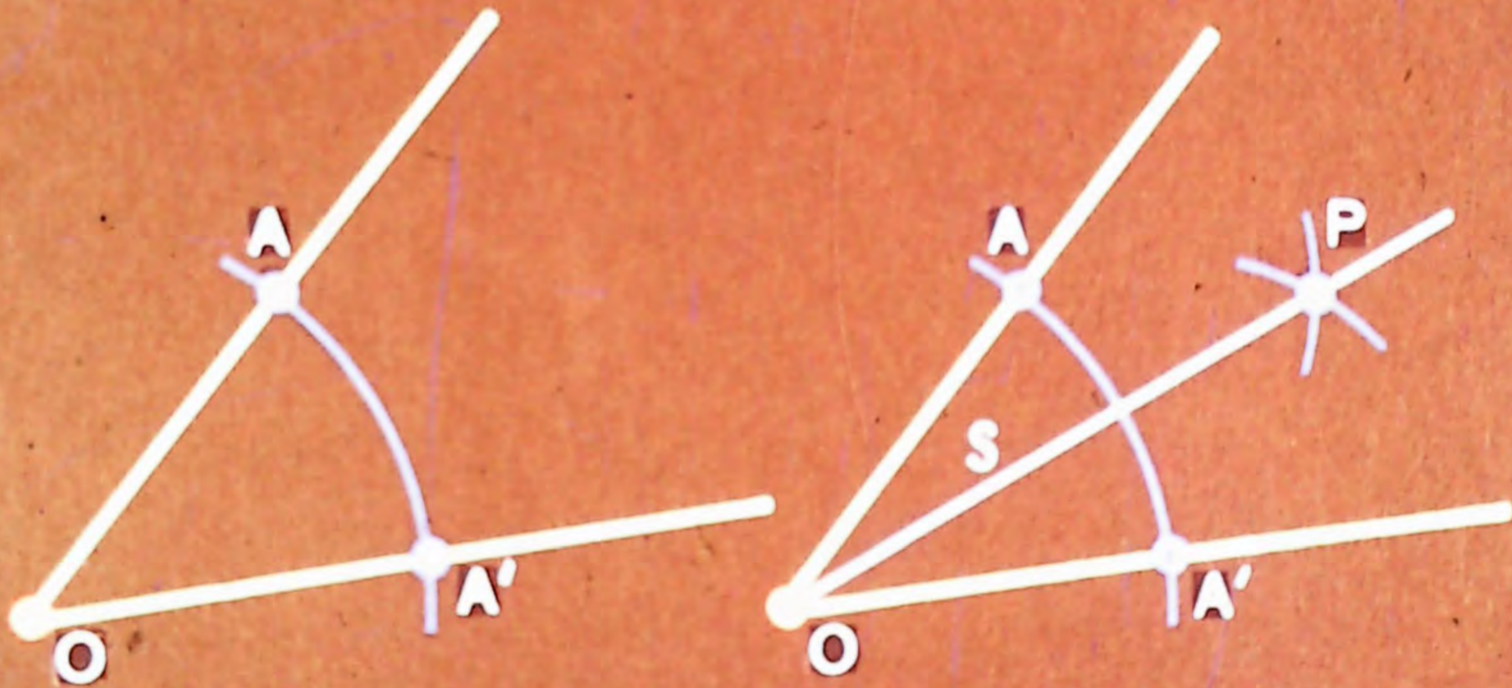


30

Решение. Из произвольного центра M на прямой S проводим окружность радиусом MA. Из другого произвольного центра N на прямой S проводим окружность радиусом NA. Точка A' пересечения обеих окружностей симметрична с A относительно оси S. Почему?

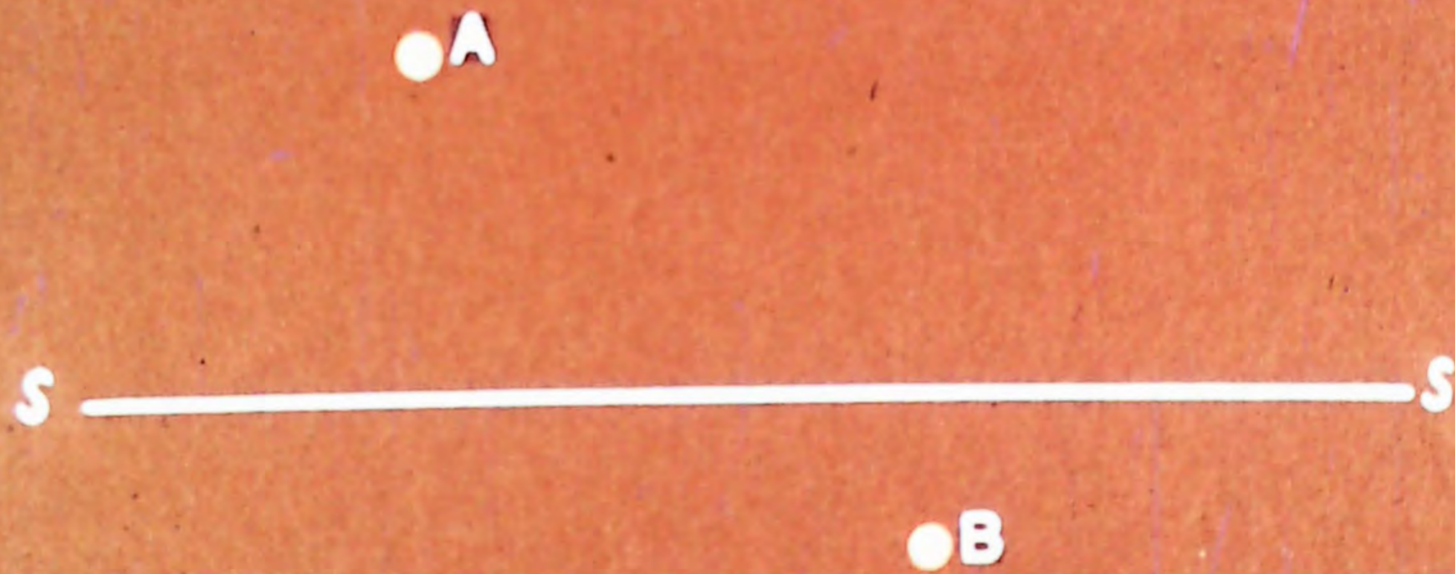


Задача. Найти ось симметрии (биссектрису) данного угла с вершиной О.

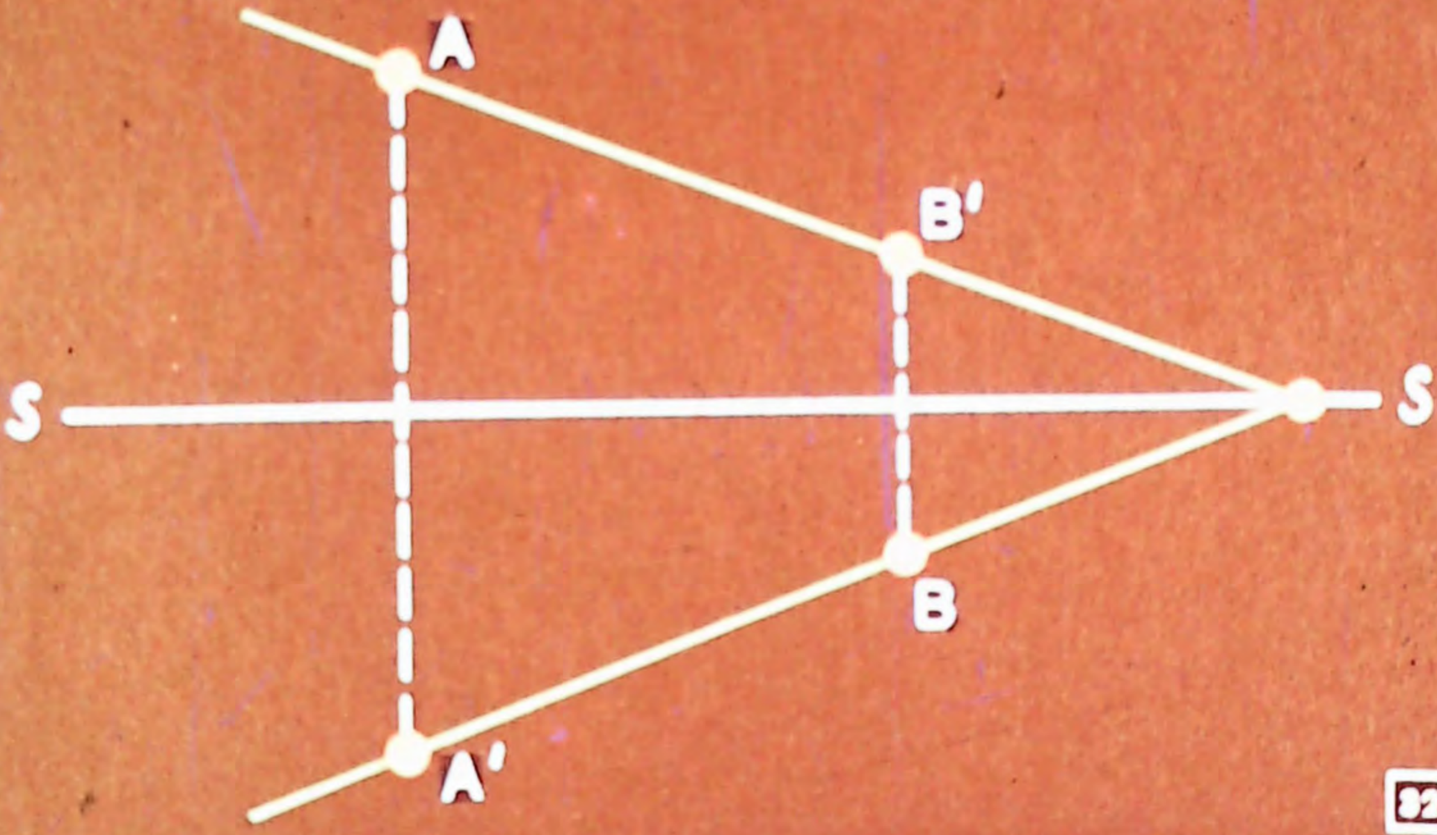


30

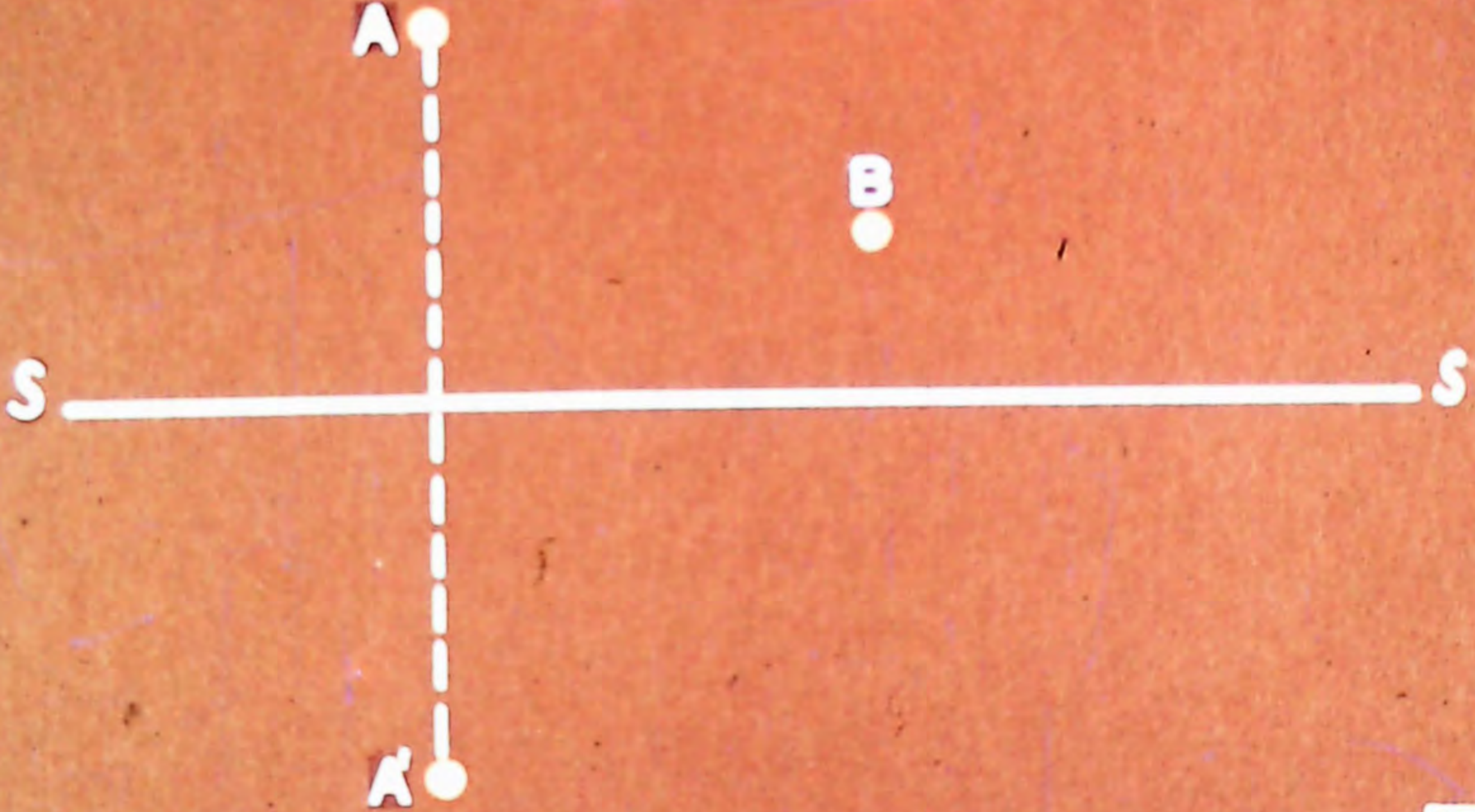
<u>Решение</u>. Проводя из центра О дугу окружности, находим на стороне угла точки А и А'. Из центров А и А' равными радиусами описываем дуги окружностей, пересекающихся в точке Р. Прямая ОР – ось S симметрии (биссектриса) данного угла. Почему?



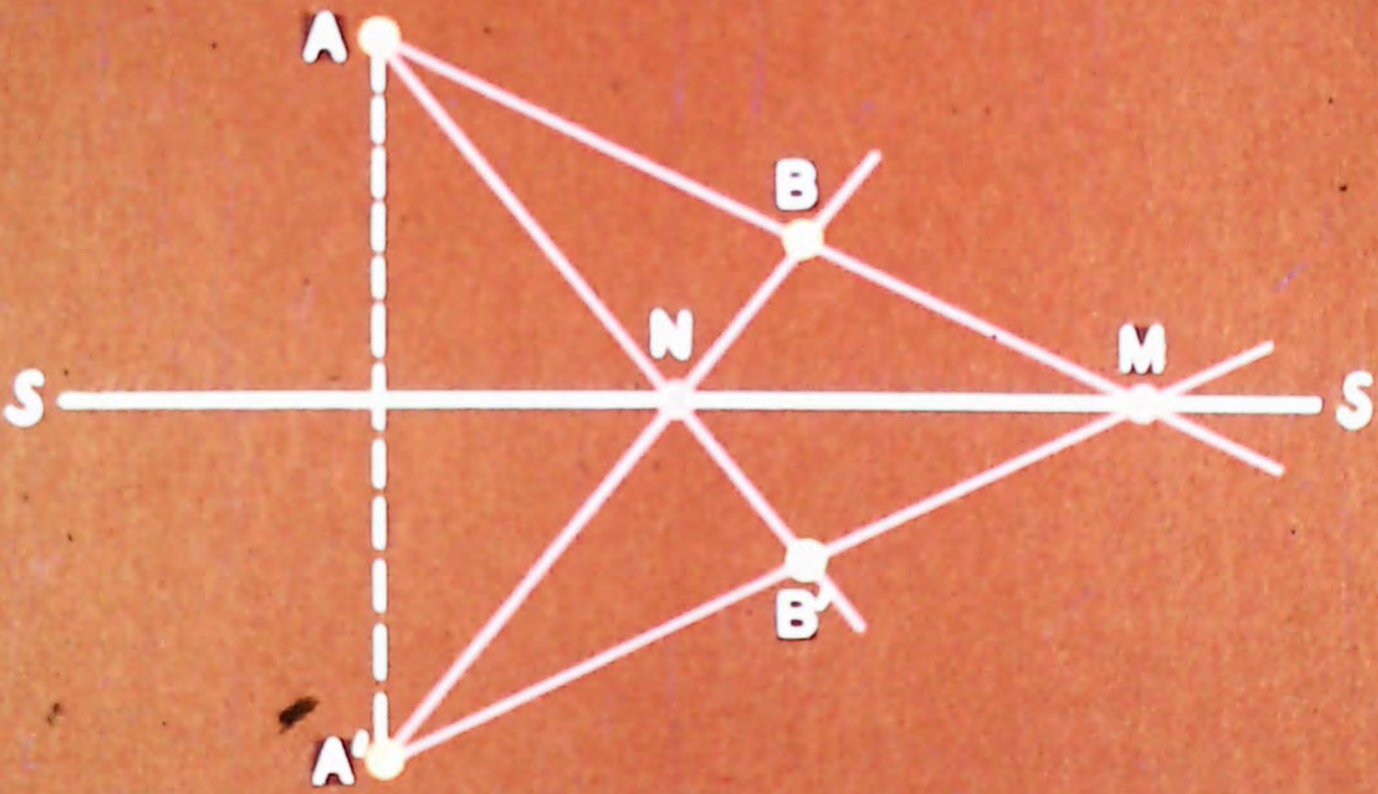
Задача. Дана прямая S и точки A и B по разные стороны от неё. Провести через точки A и B такие две прямые, чтобы прямая S стала биссектрисой угла между ними.



Решение. Находим точку A′, симметричную с A, и точку B′, симметричную с B относительно S. Прямые AB′ и A′B – искомые. Почему? Исследуйте решение.

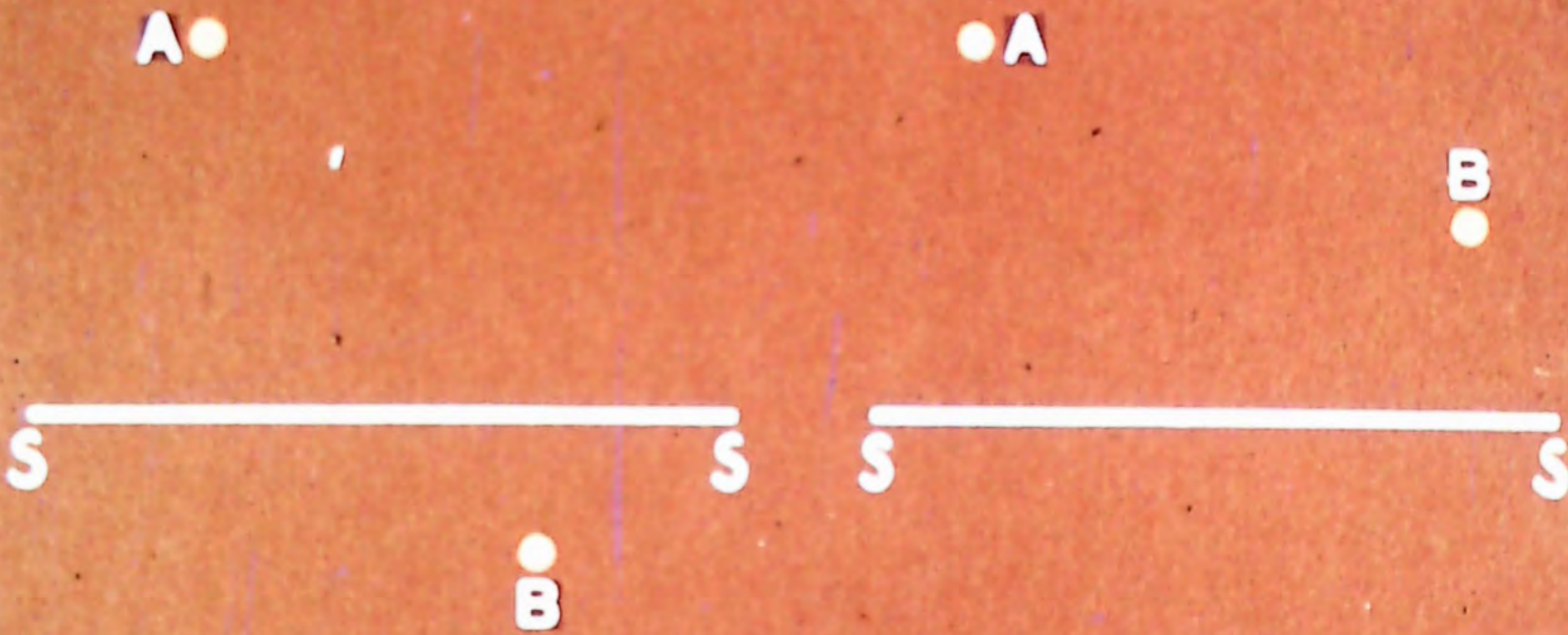


<u>Задача</u>. Дана ось S и точки А и А′, симметричные относительно S. Вне прямой S дана точка В. Пользуясь только одной линейкой, построить точку В′, симметричную с В относительно S.

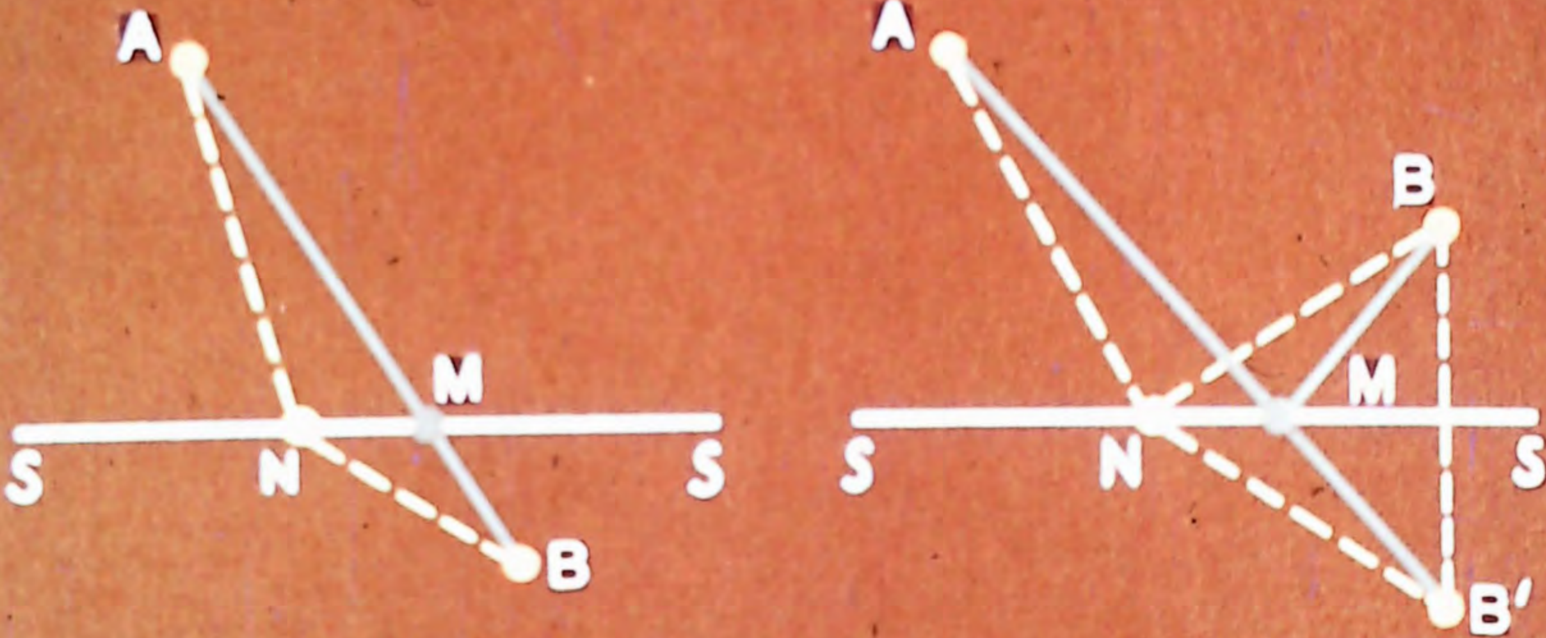


34

Решение. Находим точку M пересечения прямой AB с осью S и точку N пересечения прямой A′B с осью S. Прямые A′M и AN пересекаются в искомой точке B′. Обосновать решение.

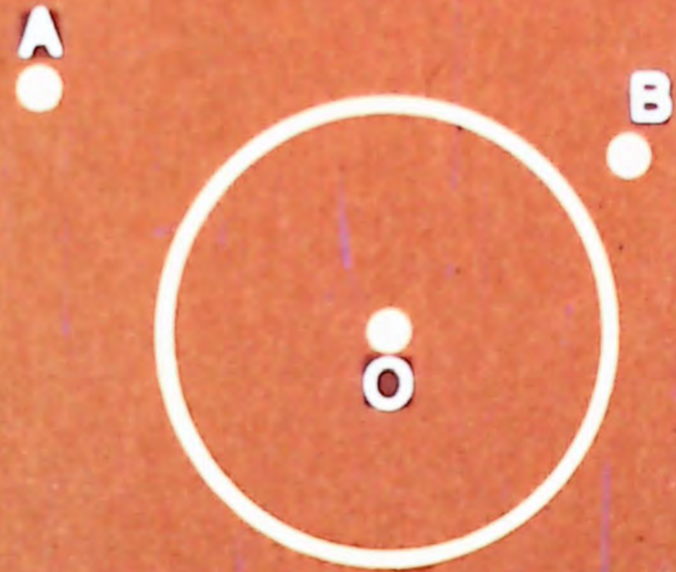


<u>Задача</u>. Дана прямая S и точки A и B вне её. Найти на прямой S такую точку M, чтобы сумма отрезков $AM + MB$ была наименьшая.



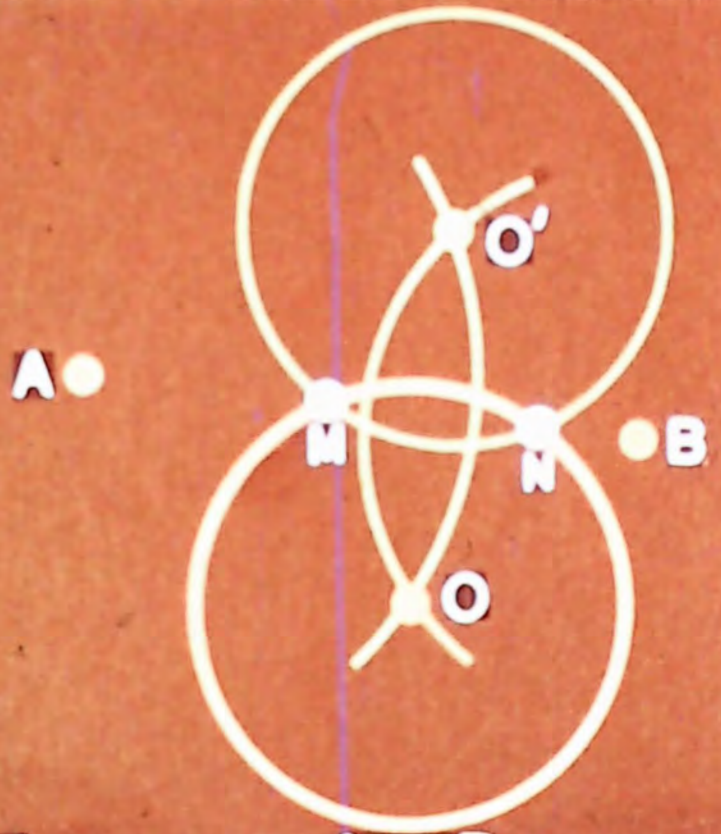
38

<u>Решение.</u> а). Прямая AB пересекает ось S в точке M. Точка M – искомая. Почему? б). Находим точку B′, симметричную с B относительно оси S, и тогда задача сводится к предыдущему случаю. Прямая AB′ пересекает S в искомой точке M. Обосновать решение.

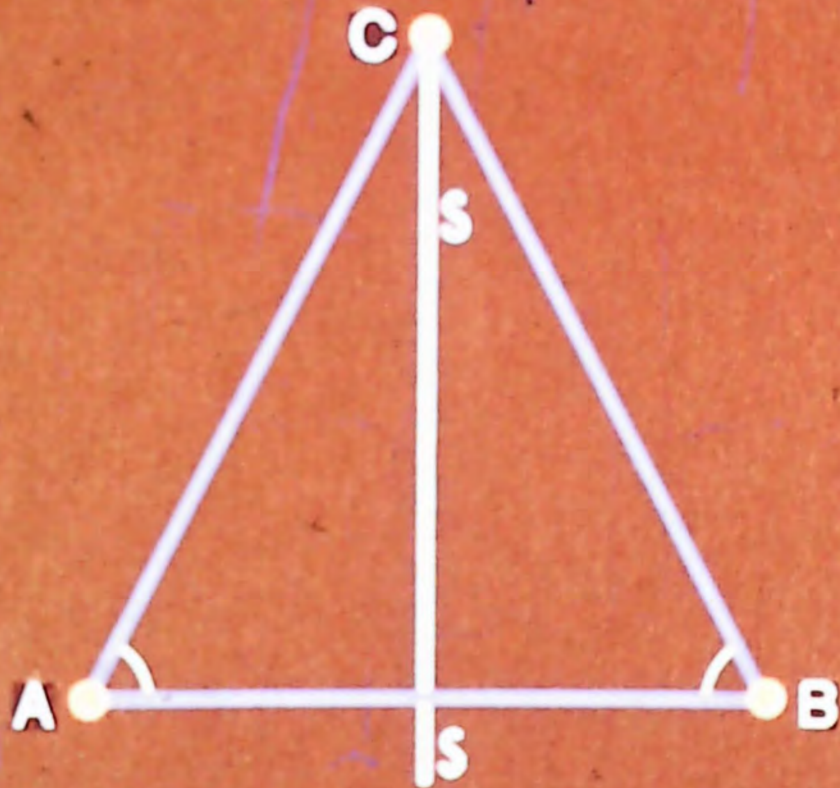


37

Задача. Дана окружность и не принадлежащие ей точки A и B. Не проводя прямой линии и пользуясь только циркулем, построить точки пересечения прямой AB с данной окружностью.

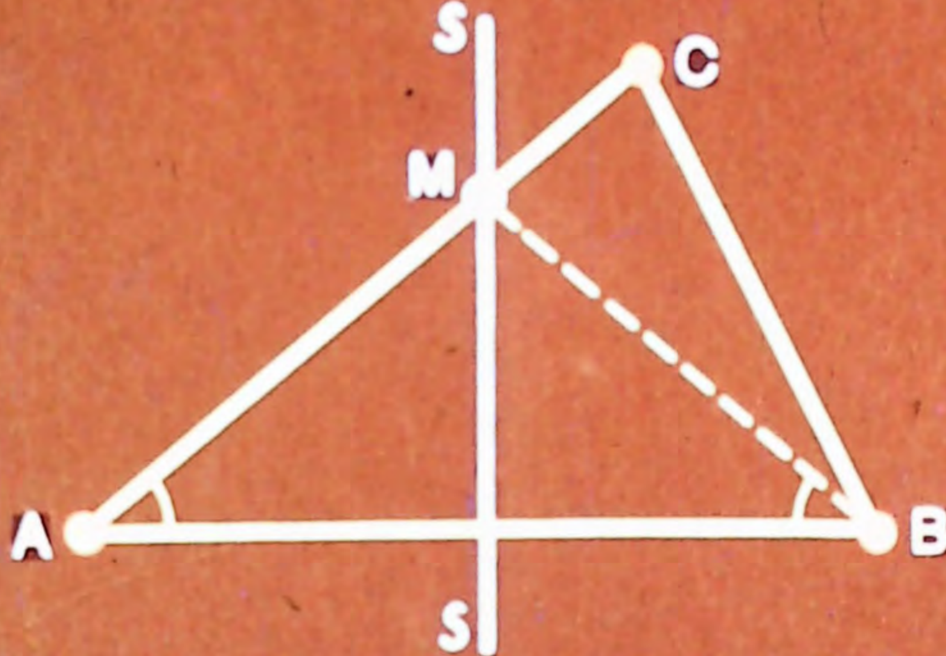


__Решение.__ Из центров A и B описываем окружности, проходящие через точку O. Они пересекутся в точке O′, симметричной с O. Почему? Из центра O′ опишем окружность радиусом, равным радиусу данной окружности. Эти окружности пересекутся в искомых точках M и N. Обосновать и исследовать.



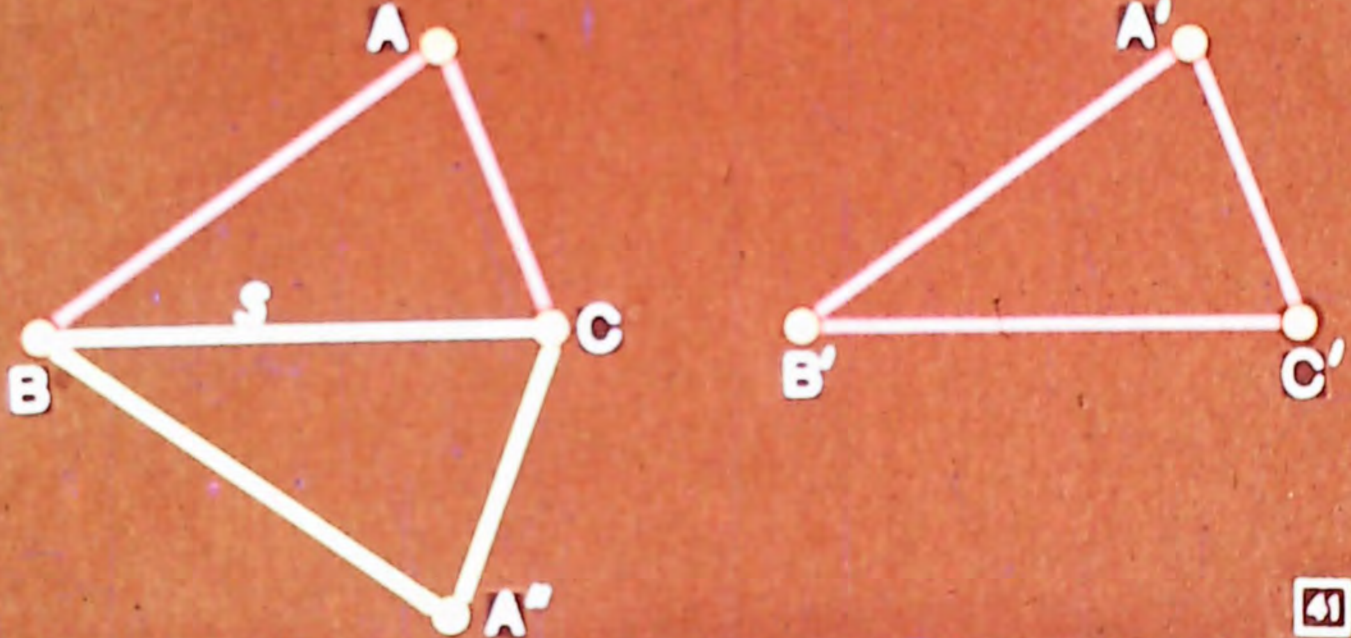
30

Теорема. В треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Доказательство. В $\triangle ABC$ $AC=BC$. Ось симметрии S точек A и B проходит через точку C. Почему? Значит $\angle A=\angle B$, как симметричные.



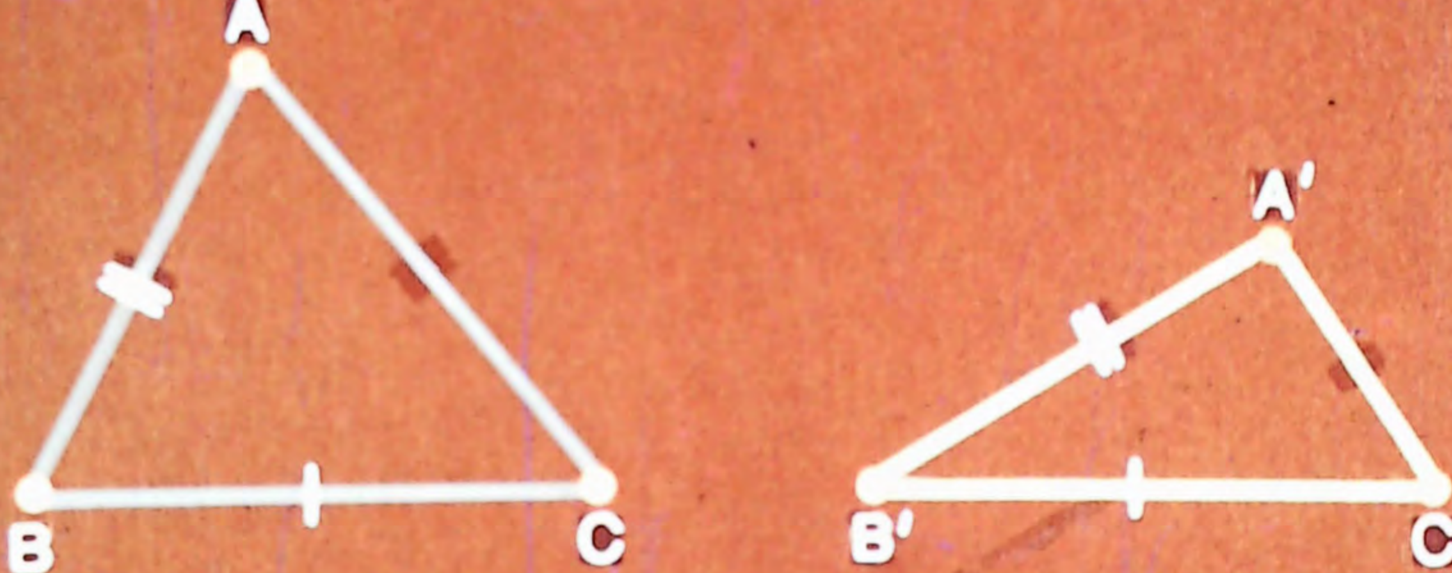
40

Теорема. В треугольнике против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол. Доказательство. В $\triangle ABC$ $AC > BC$. Ось симметрии S точек A и B пересекает сторону AC в точке M, и точка C окажется в одной полуплоскости с точкой B относительно S (почему?). $\angle A = \angle MBA$, как симметричные. Но $\angle MBA < \angle ABC$, значит и $\angle A < \angle B$.



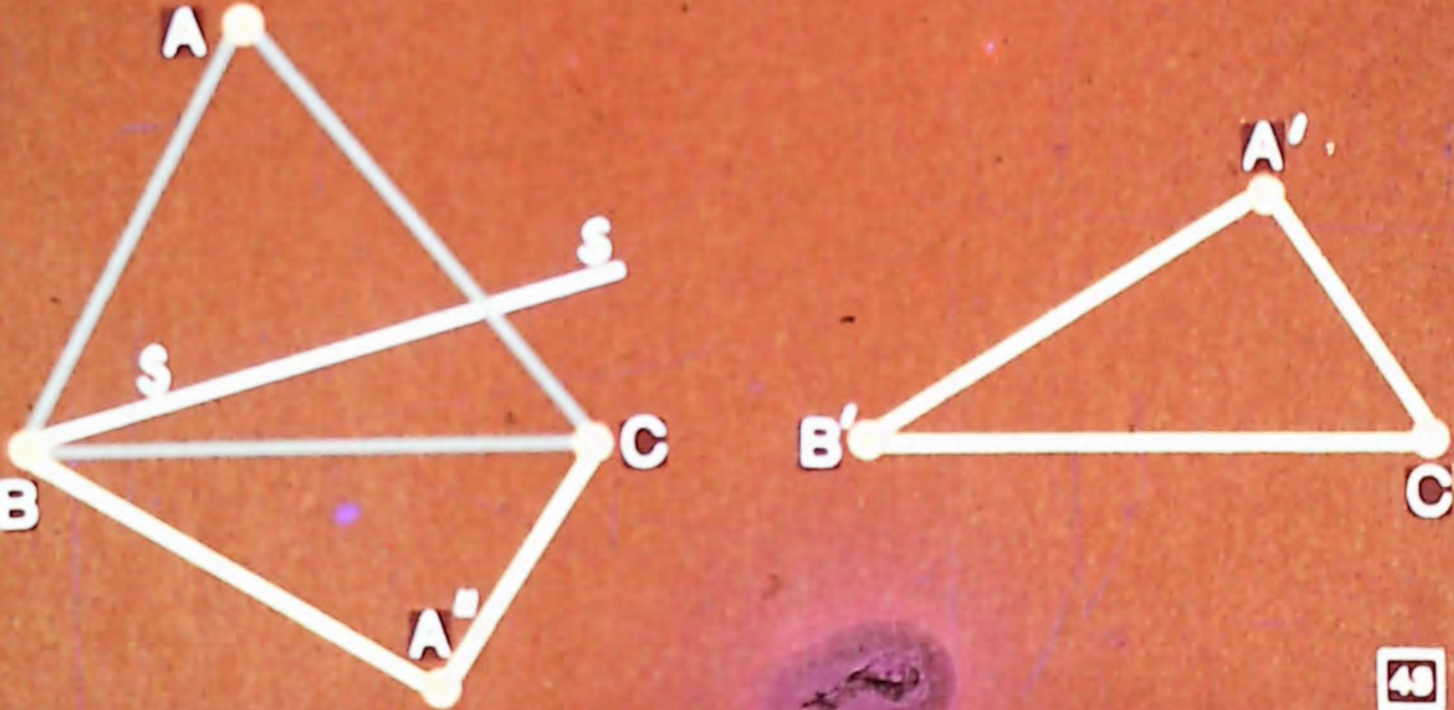
<u>Теорема</u>. Треугольники равны, если три стороны одного соответственно равны трём сторонам другого.

<u>Доказательство</u>. В $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$: $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $AB = A'B'$. Приложим $\triangle A'B'C'$ к $\triangle ABC$ так, чтобы сторона $B'C'$ совпала с BC и точка A' заняла положение A''. Так как $AB = A''B$ и $AC = A''C$, то BC – ось симметрии точек A и A''. Почему? Итак, $\triangle ABC = \triangle A''BC$ и значит $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.



42

Теорема. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а углы, заключённые между ними не равны, то против большего угла лежит и бóльшая сторона.



49

Доказательство. В $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$: $BC = B'C'$, $AB = A'B'$. Приложим $\triangle A'B'C'$ к $\triangle ABC$ так, чтобы точка A' заняла положение A''. Ось симметрии точек A и A'' пройдёт через точку B и пересечёт сторону AC (почему?). Точка C окажется в одной полуплоскости с точкой A'' относительно прямой S. Следовательно, $AC > A''C$ (почему?). Итак, $AC > A'C'$.

Конец

Автор кандидат педагогических наук А. И. Фетисов
Чертежи и рисунки художника И. В. Пименовой
Художник-оформитель И. А. Петрова
Редактор Л. Б. Книжникова

Д-243-65

Студия „Диафильм", 1965 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7
Цветной 0-30