IX 1981

3 4 8

ТУ-19-241-77

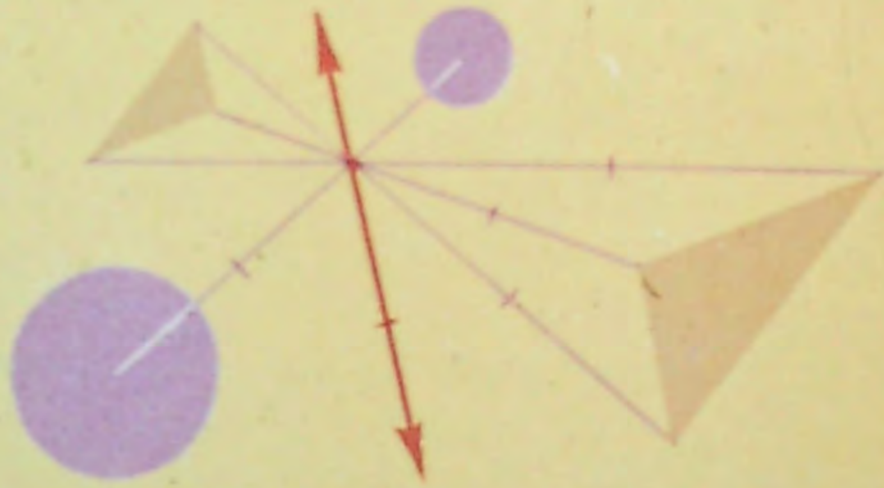
0

Б

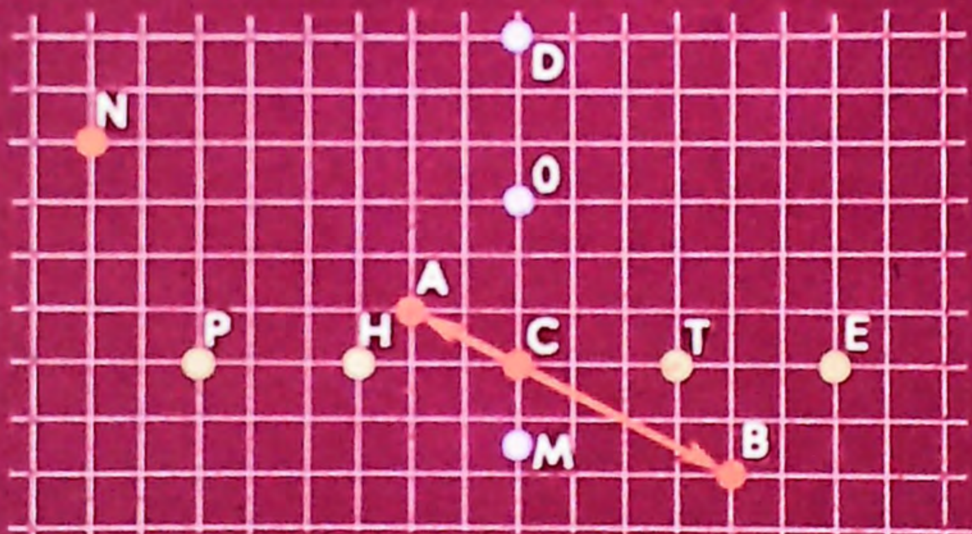
студия
ДИАФИЛЬМ

07—3—416

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГОМОТЕТИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

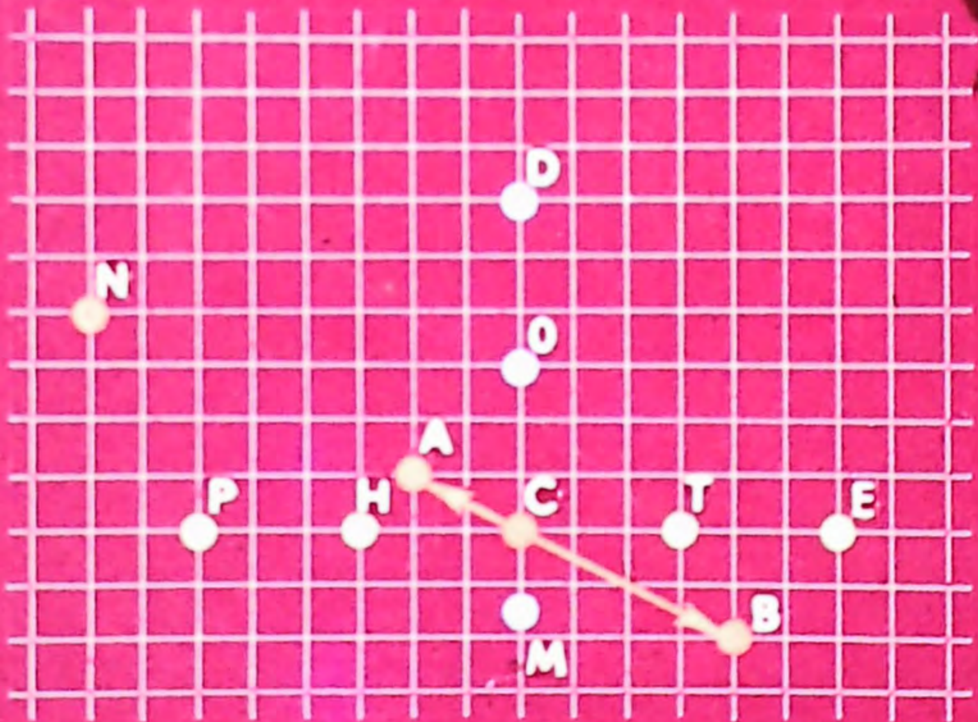


f — отношение между точками плоскости, при котором 1) точке C соответствует точка C; 2) каждой точке $X \neq C$ соответствует точка Y такая, что $\overrightarrow{CY} = -2\overrightarrow{CX}$.



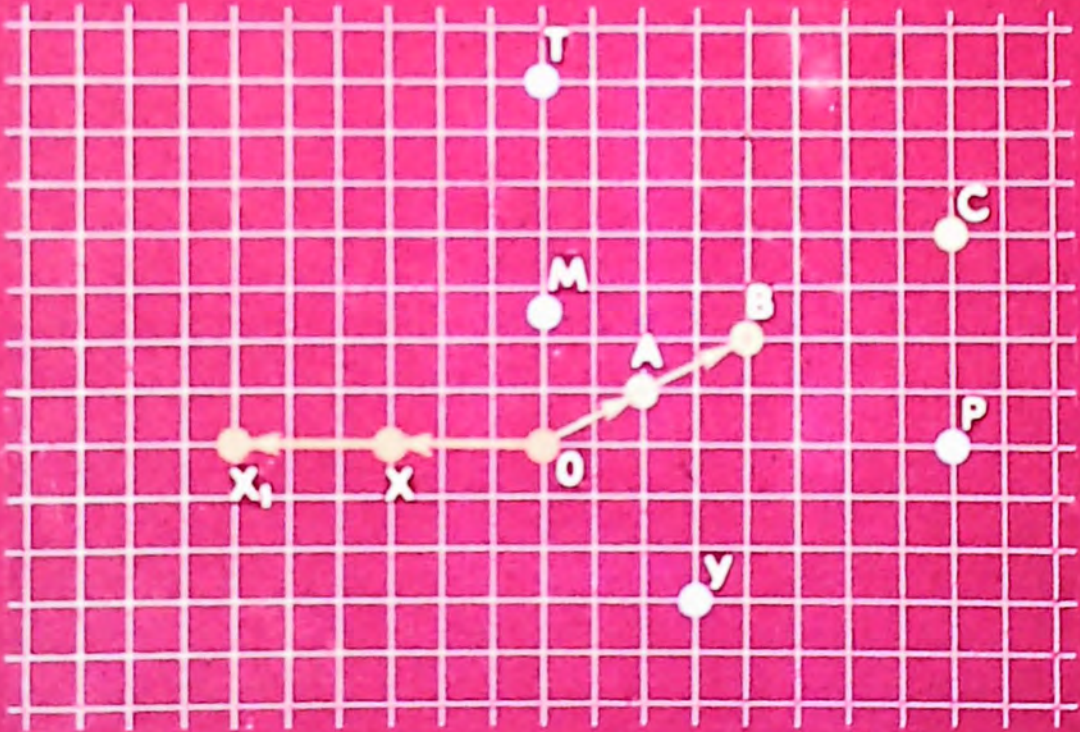
Укажите образы точек M, C, B. Укажите точки, которые переходят в точки P, C, A.

Найдутся ли точки: 1) не имеющие образа; 2) имеющие более одного образа; 3) не являющиеся образом какой-либо точки?

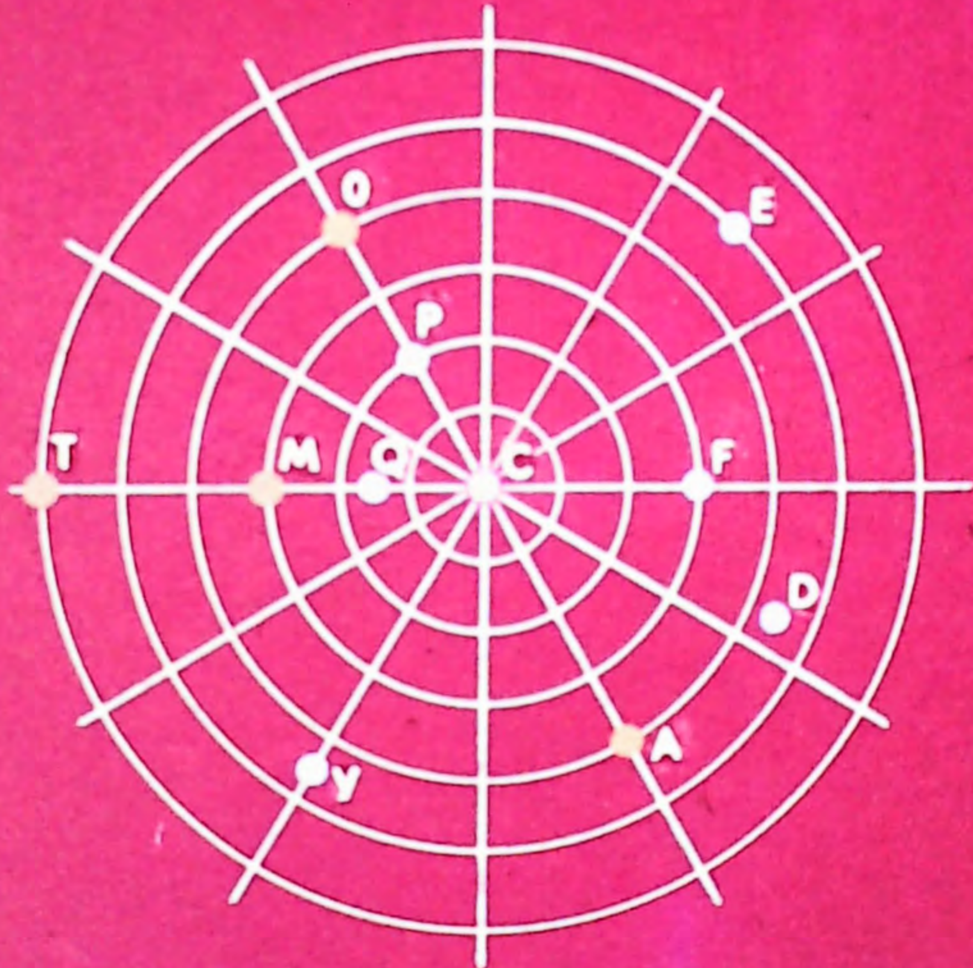


Является ли f отображением плоскости на себя?

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной точки X является такая точка X_1, что $\vec{OX_1} = k\vec{OX}$.

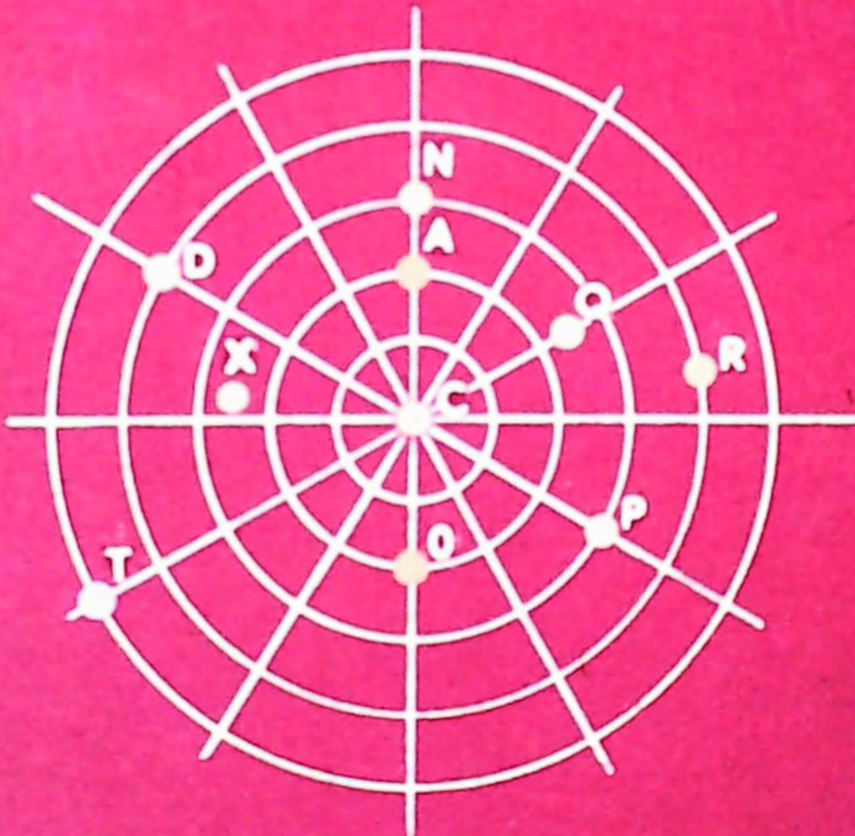


Укажите: 1) $H_O^2(A)$; 2) $H_O^2(B)$; 3) $H_O^2(M)$. Укажите точки, образы которых при этой гомотетии — точки B, P, O.



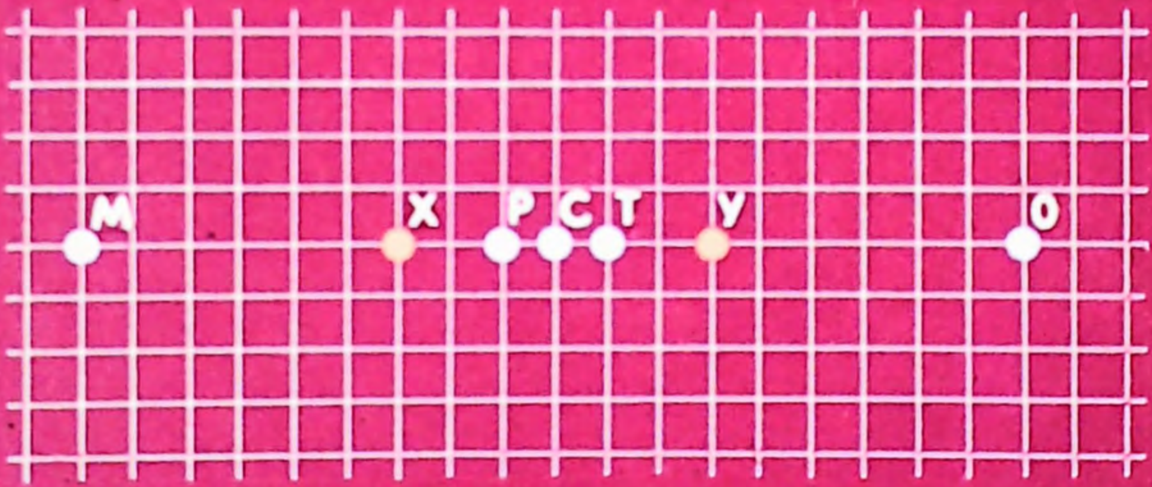
$\underline{H_C^l(A)=O.}$ Найдите значение l. Укажите: $H_C^l(O)$; $H_C^l(E)$.
$\underline{H_C^n(T)=M.}$ Найдите значение n. Укажите: $H_C^n(M)$; $H_C^n(E)$.

Докажите: 1) $H_C^1 = E$; 2) $H_C^{-1} = Z_C$; 3) $H_C^k(C) = C$.



Каково взаимное расположение точек C, A и $H_C^k(A)$, если $k>0$? Если $k<0$?

Укажите центр гомотетии, отображающей точку Х на У, если 1) $k=-1$; 2) $k=1$; 3) $k=2$; 4) $k=-0{,}5$.



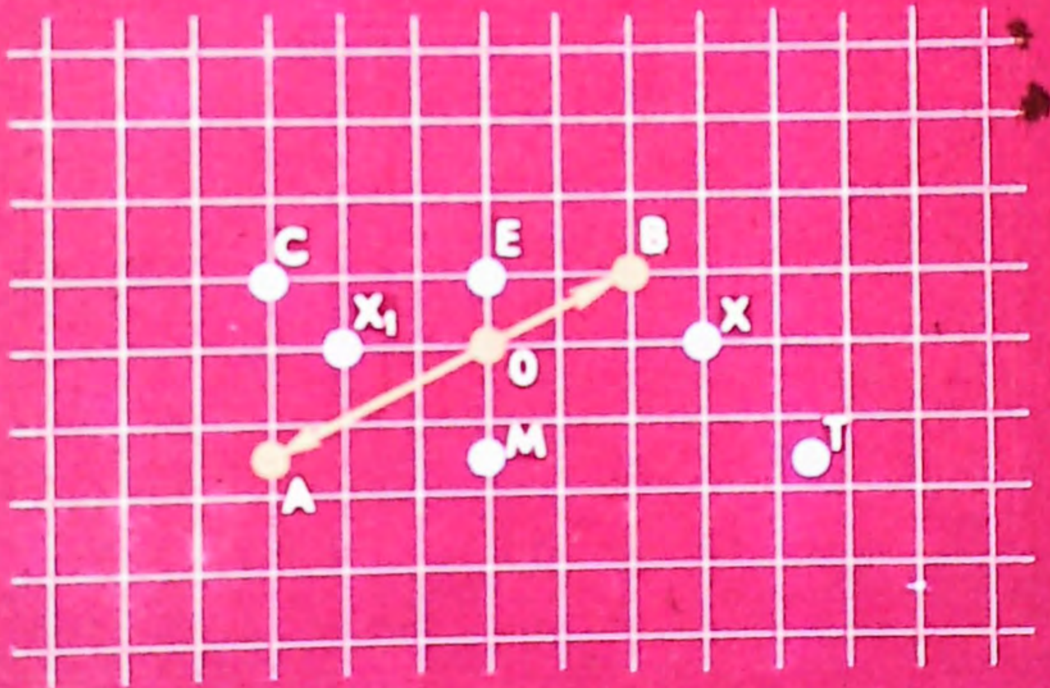
$H_C^k(У)=Х$. Укажите точку, в которую переходит точка Х при отображении, обратном данной гомотетии.

Теорема. Отображение, обратное гомотетии с коэффициентом k, есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Сформулируйте условие теоремы, ее заключение.

Определите вид отображения, обратного H_P^3, $H_C^{0,5}$.

Дано: F—отображение, обратное H_O^k. **Доказать:** $F = H_O^{\frac{1}{k}}$.

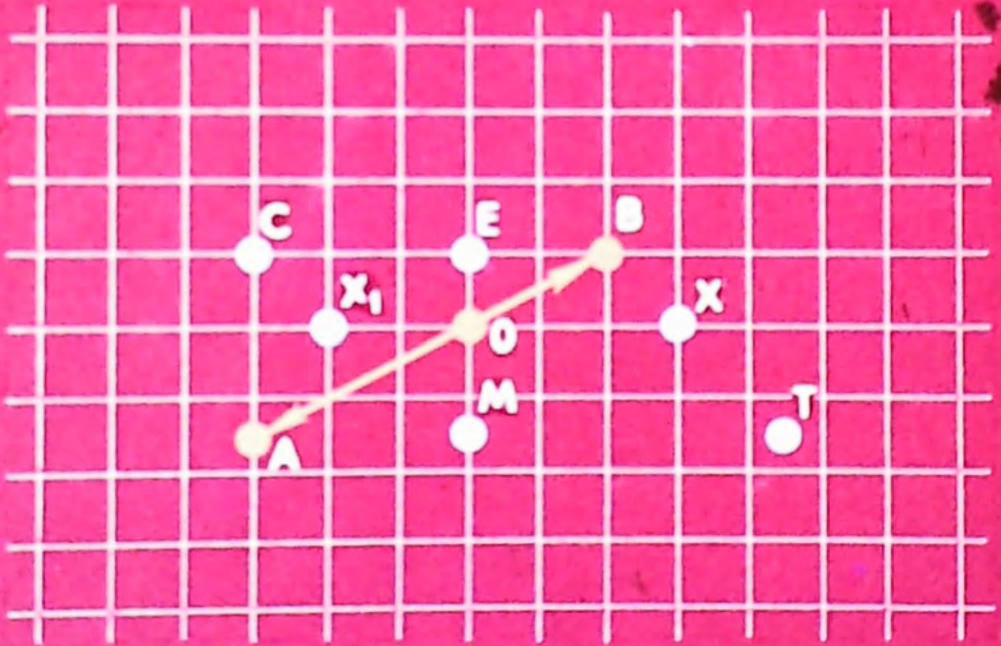


Пусть $H_O^k(X) = X_1$. Укажите $F(X_1)$. Выразите $\overrightarrow{OX_1}$ через $\overrightarrow{OX}$; $\overrightarrow{OX}$ через $\overrightarrow{OX_1}$.

Дано: F — отображение, обратное H_O^k. *Доказать:* $F=H_O^{\frac{1}{k}}$. Пусть $H_O^k(X)=X_1$. Тогда $F(X_1)=X$ и $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$. Отсюда $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OX_1}$...

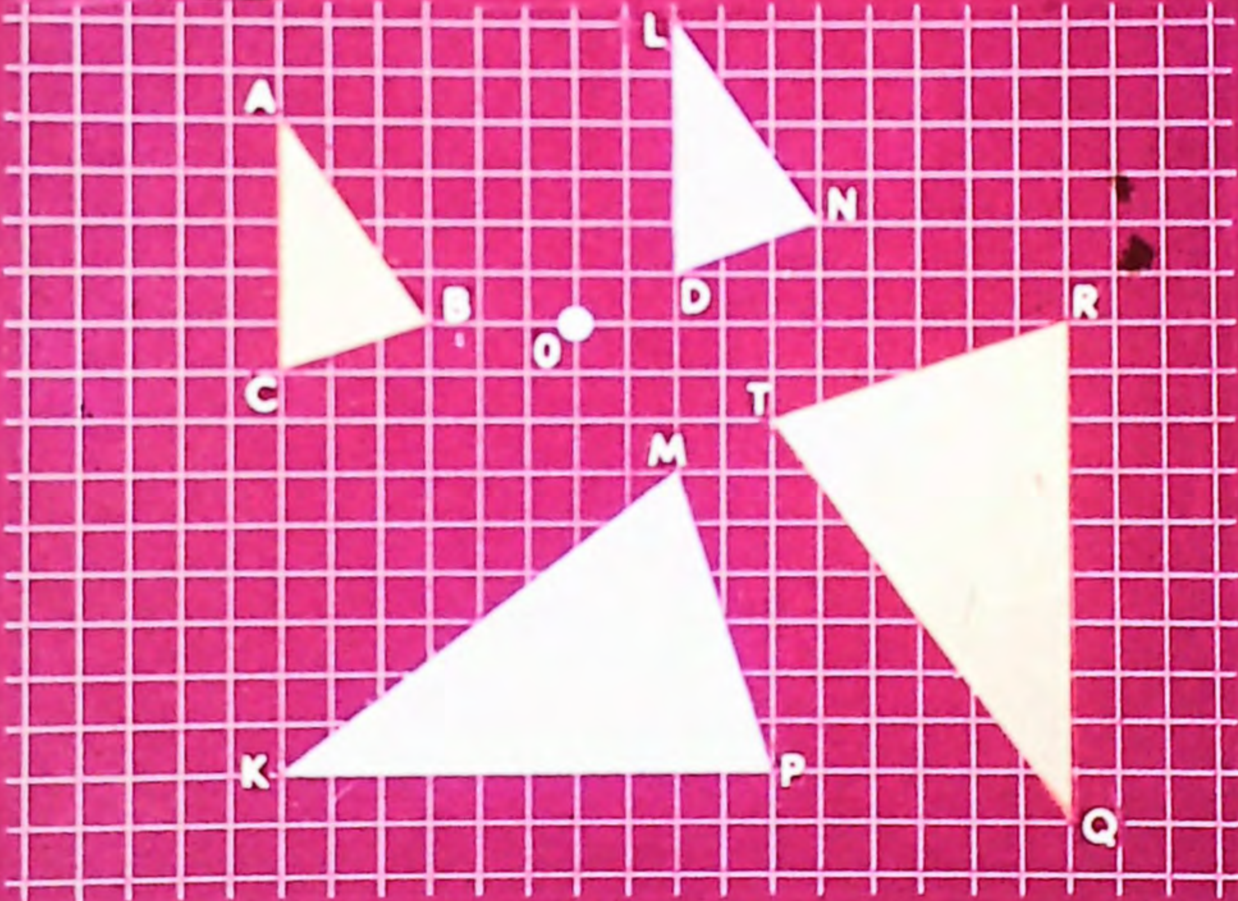
Какое отображение задается равенством $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OX_1}$?

1) F — отображение, обратное H_O^k. 2) Пусть $H_O^k(X)=X_1$.
3) $F(X_1)=X$. 4) $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$. 5) $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OX_1}$. 6) $H_O^{\frac{1}{k}}(X_1)=X$. 7) $F=H_O^{\frac{1}{k}}$.



Проведите полное доказательство теоремы по этим записям и чертежу.

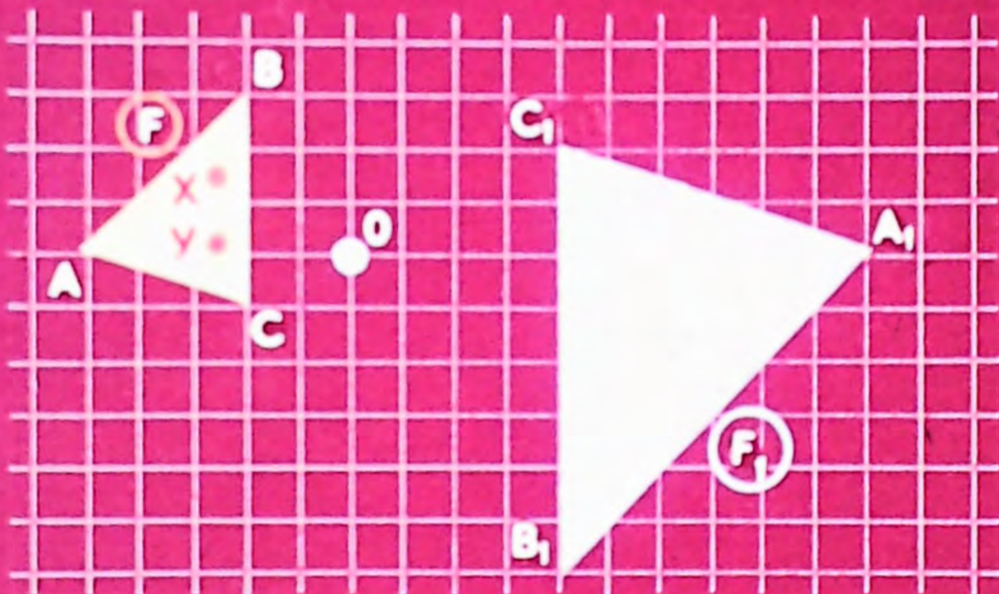
Теорема. **Гомотетичные фигуры подобны.**



Какие фигуры удовлетворяют условию теоремы? Ее заключению? Верно ли, что $\triangle ABC \sim \triangle KMP$?

$\triangle KMP = H_O^k(\triangle ABC)$?

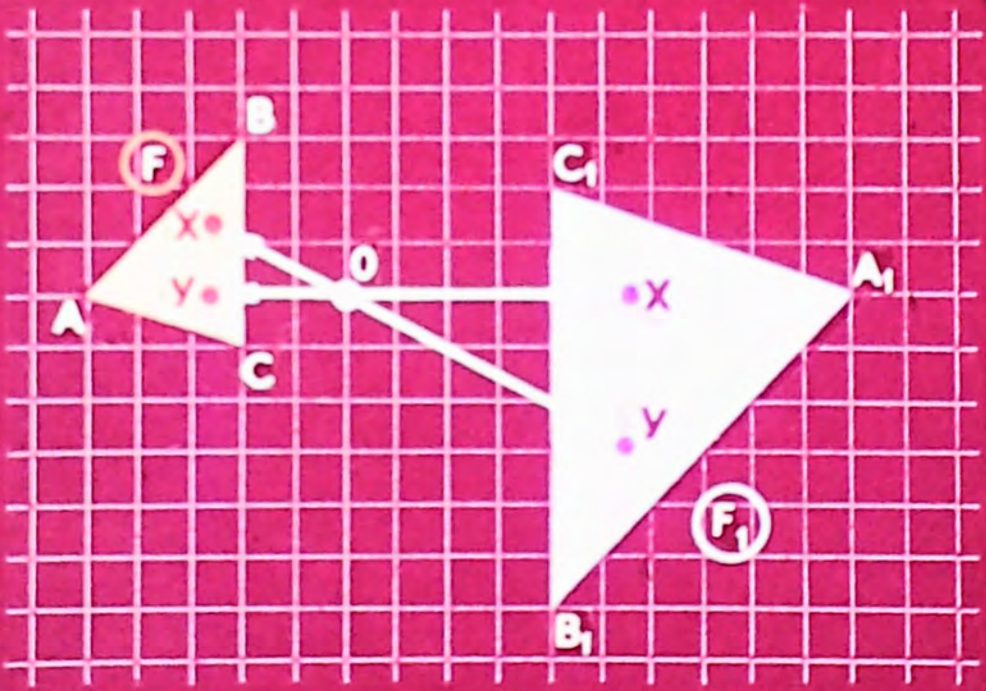
__Дано:__ $H_O^k(F)=F_1$. __Доказать:__ $F \sim F_1$.



Рассмотрим произвольные точки X и У фигуры F. Пусть $H_O^k(X)=X_1$, $H_O^k(У)=У_1$. Принадлежат ли X_1 и $У_1$ фигуре F_1? Выразите $\overline{OX_1}$ через $\overline{OX}$; $\overline{OУ_1}$ через $\overline{OУ}$.

Дано: $H_O^k(F)=F_1$. *Доказать:* $F \sim F_1$.

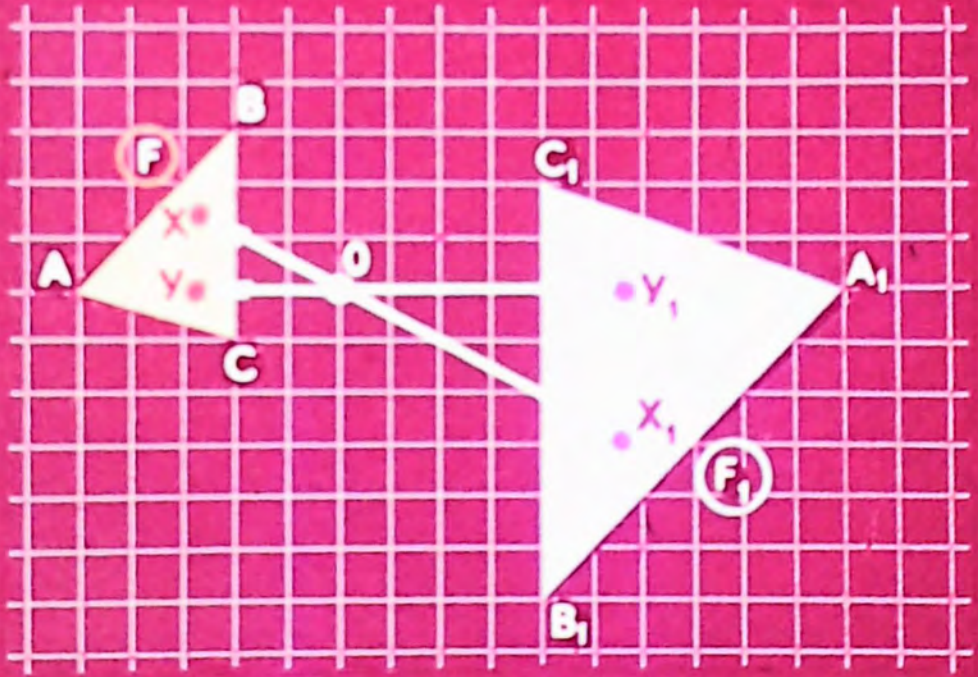
Пусть $X \in F$, $Y \in F$, $H_O^k(X)=X_1$, $H_O^k(Y)=Y_1$. Тогда $X_1 \in F_1$, $Y_1 \in F_1$, $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY_1}=k\overrightarrow{OY}$...



Выразите $\overrightarrow{X_1Y_1}$ через $\overrightarrow{OX_1}$ и $\overrightarrow{OY_1}$; через $\overrightarrow{XY}$.

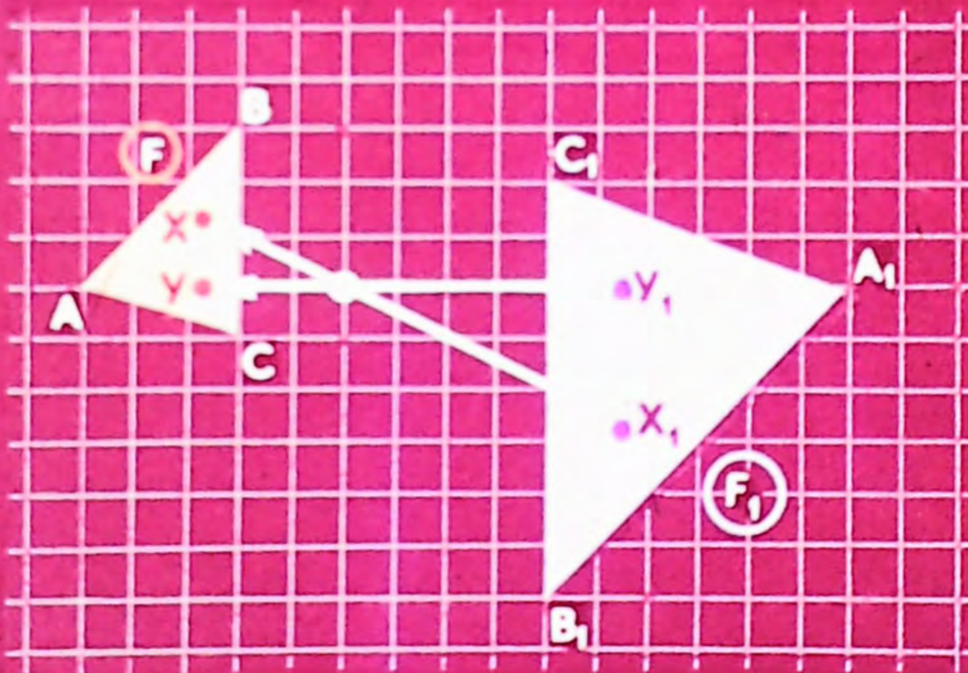
Дано: $H_O^k(F)=F_1$. *Доказать:* $F\sim F_1$.

Пусть $X\in F$, $Y\in F$, $H_O^k(X)=X_1$, $H_O^k(Y)=Y_1$. Тогда $X_1\in F_1$, $Y_1\in F_1$, $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY_1}=k\overrightarrow{OY}$. Отсюда $\overrightarrow{X_1Y_1}=\overrightarrow{OY_1}-\overrightarrow{OX_1}=$ $=k(\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX})=k\overrightarrow{XY}$...



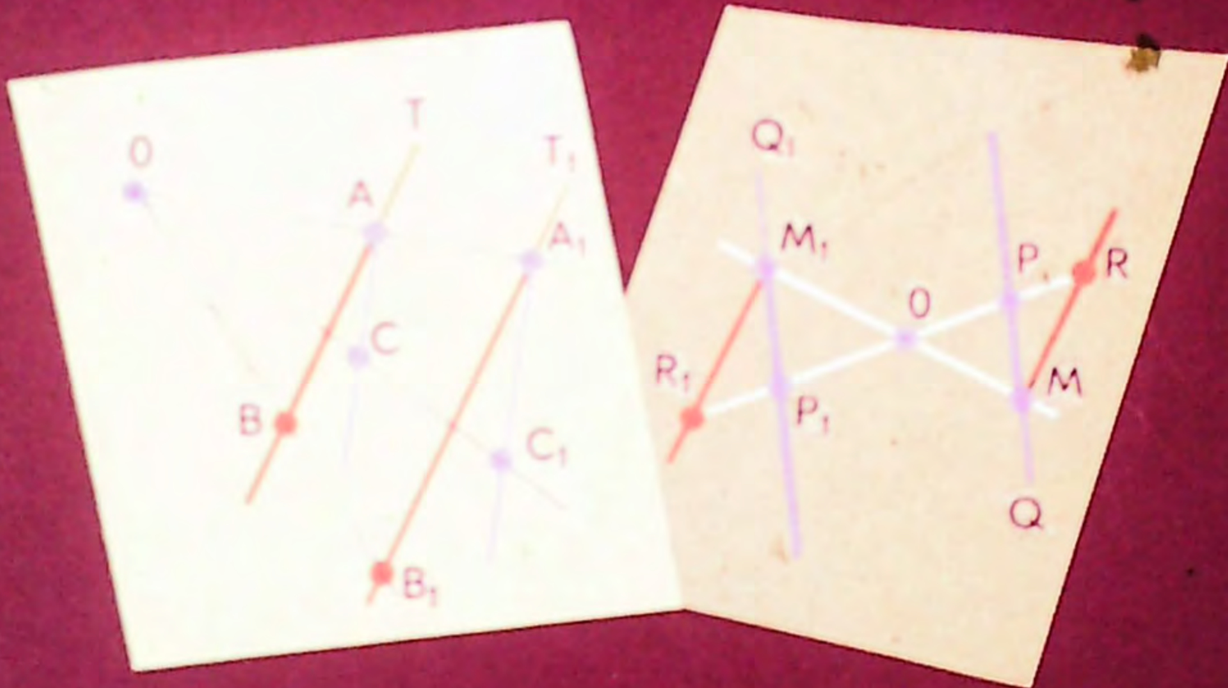
Какое равенство связывает $|X_1Y_1|$ и $|XY|$? Можно ли на основе этого равенства утверждать, что $F\sim F_1$?

1) $H_O^k(F)=F_1$. 2) Пусть $X\in F$, $Y\in F$, $H_O^k(X)=X_1$, $H_O^k(Y)=Y_1$.
3) $X_1\in F_1$, $Y_1\in F_1$, $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY_1}=k\overrightarrow{OY}$. 4) $\overrightarrow{X_1Y_1}=\overrightarrow{OY_1}-\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{XY}$.
5) $|X_1Y_1|=|k||XY|$. 6) $F\sim F_1$.



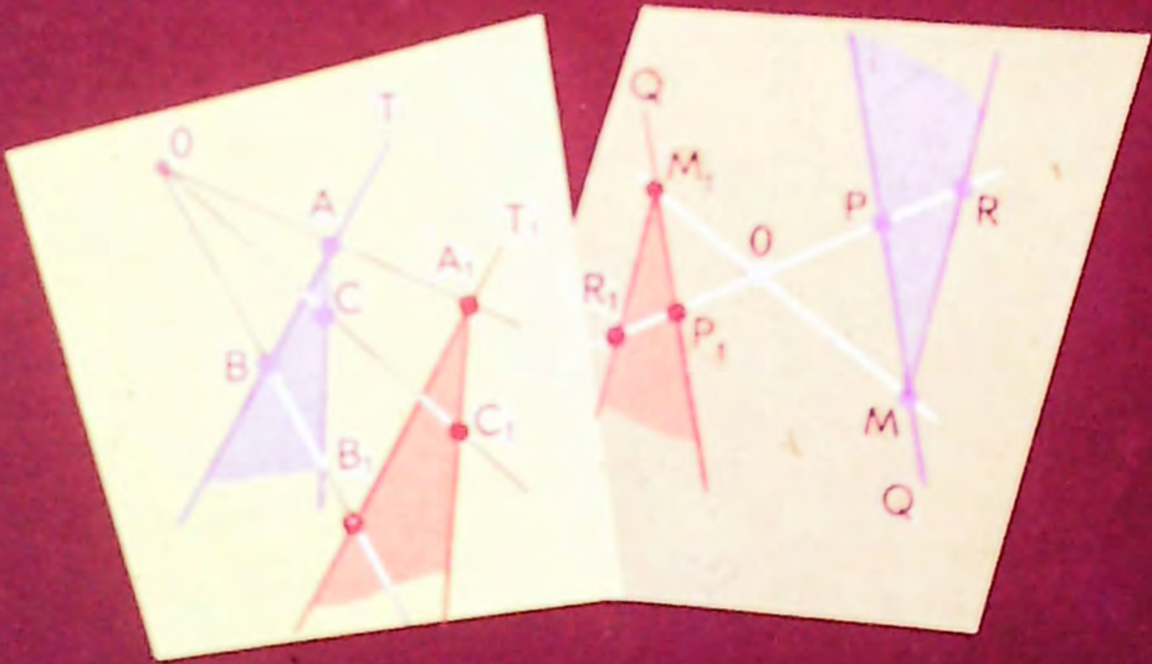
Проведите полное доказательство по этим записям и чертежу.

Можно доказать: при гомотетии каждый луч переходит в луч.



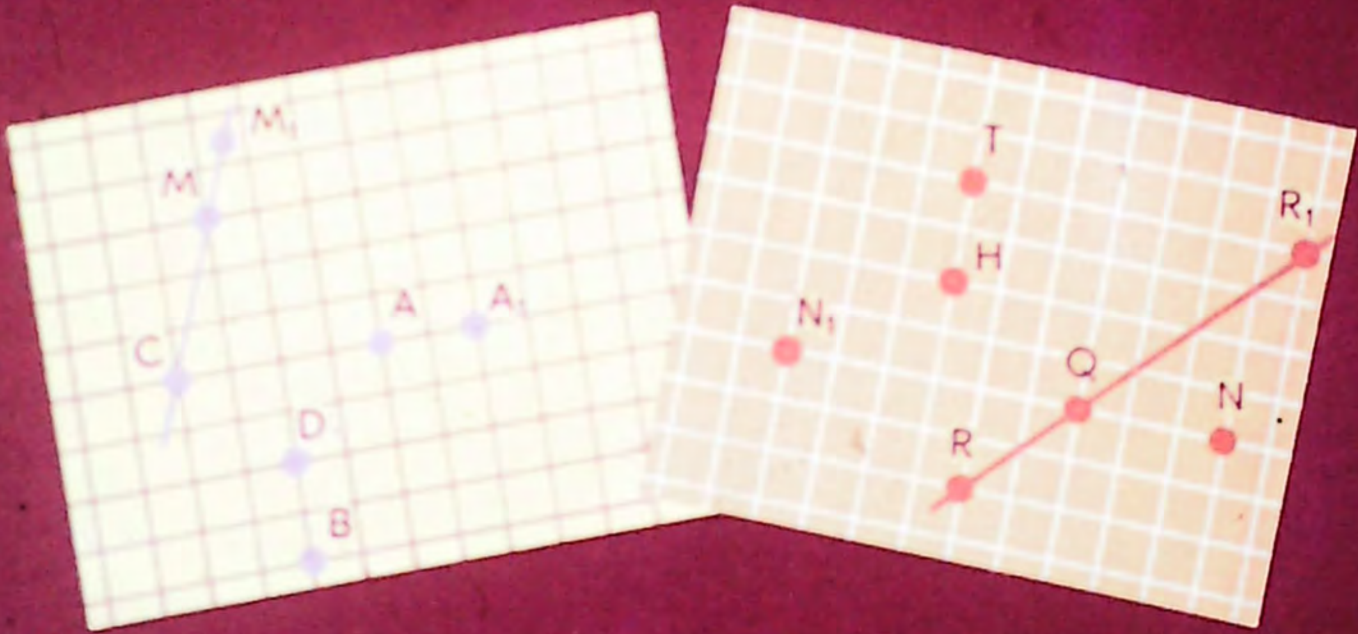
H_O^k ([XY))=[X_1Y_1). Сравните направления [XY) и [X_1Y_1), если 1) k>0; 2) k<0.

В какую фигуру переходит при гомотетии а) прямая; б) отрезок; в) угол?

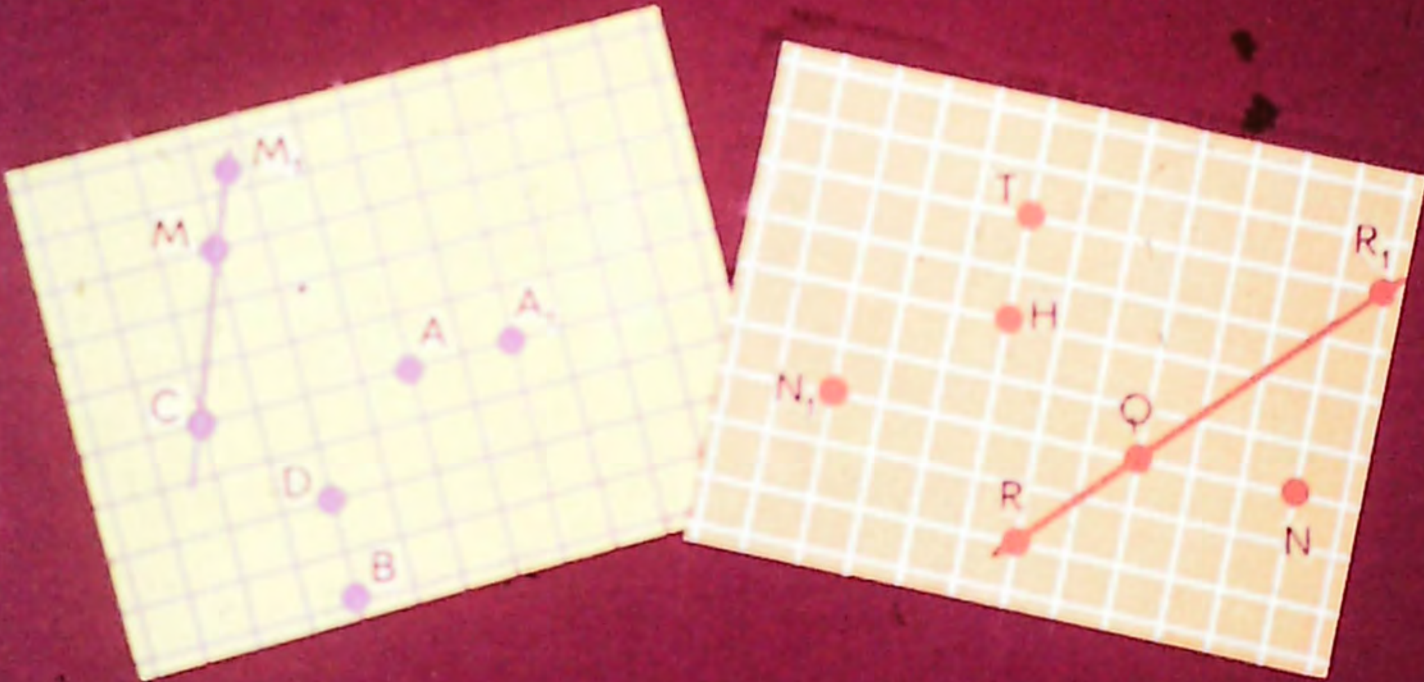


Как расположены прямая и ее образ; отрезок и его образ? Сравните величины угла и его образа; отрезка и его образа.

Теорема. **Если три точки O, X и X_1 принадлежат одной прямой, то существует единственная гомотетия с центром O, отображающая точку X на X_1.**

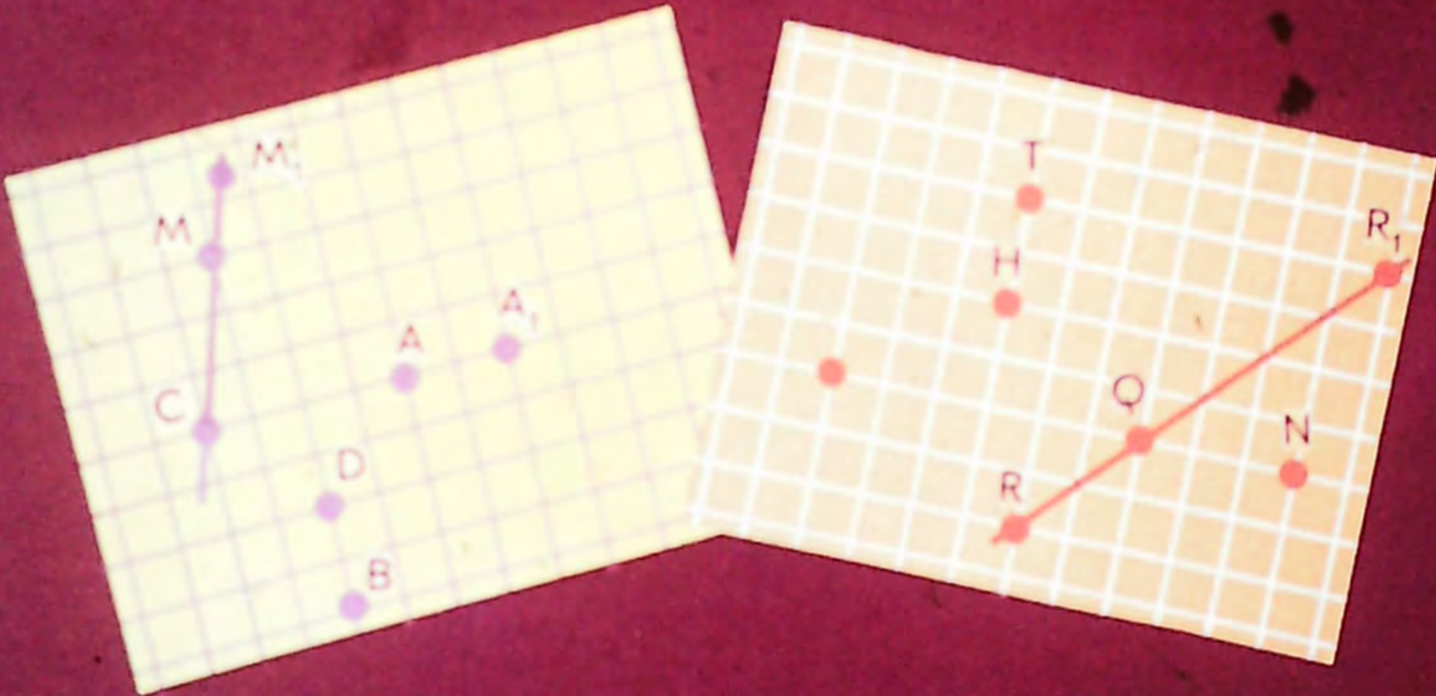


Какие точки удовлетворяют условию теоремы? Что говорит о них теорема?



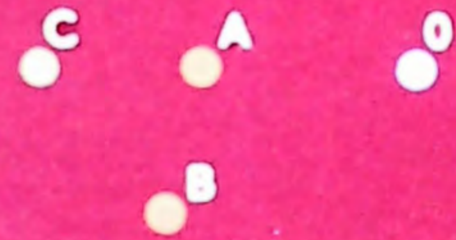
Какие объекты и величины достаточно указать для задания гомотетии? Из какого равенства можно получить значение $|k|$?

По определению гомотетии $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$. Значит, $|k|$ однозначно определяется частным $\frac{|OX_1|}{|OX|}$.



Определите знак коэффициента k, если 1) $X_1 \in [OX)$; 2) $X_1 \notin [OX)$.

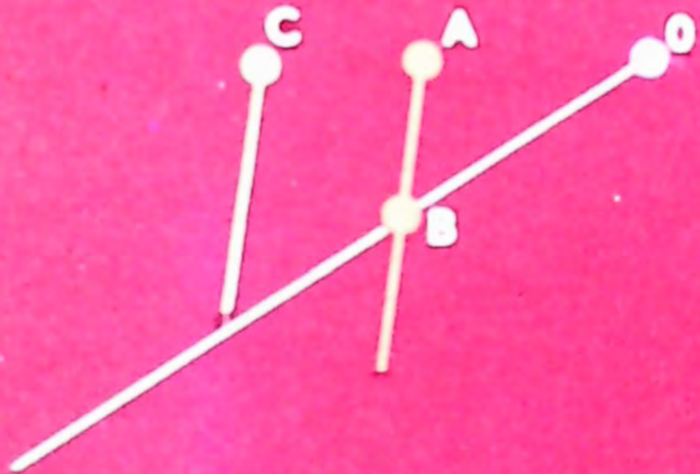
<u>*Задача.*</u> **Дано: точки A, B, O; $C = H_O^k(A)$.**
Построить: $D = H_O^k(B)$.



Каково взаимное расположение точек O, A, C? Точек O, B, D? В какую фигуру перейдет [AB) при заданной гомотетии?

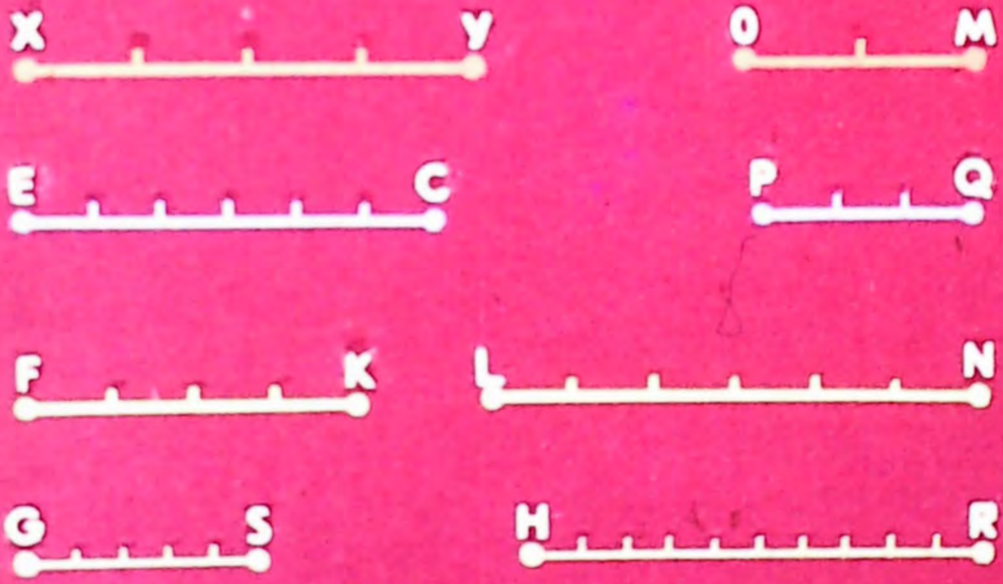
Дано: точки A, B, O; $C=H_O^k(A)$.

Построить: $D=H_O^k(B)$.



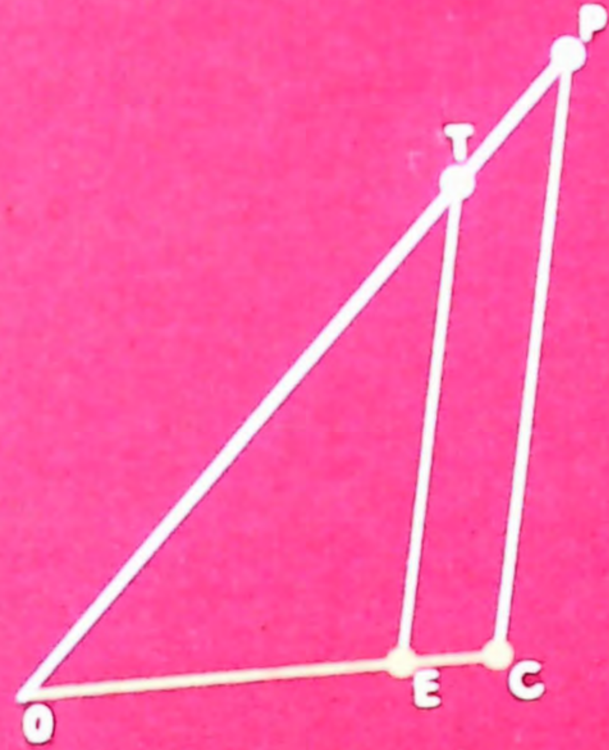
Закончите и объясните решение задачи.

Отрезки AB и CD называются *пропорциональными отрезкам* A_1B_1 и C_1D_1, если пропорциональны их длины: $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$.



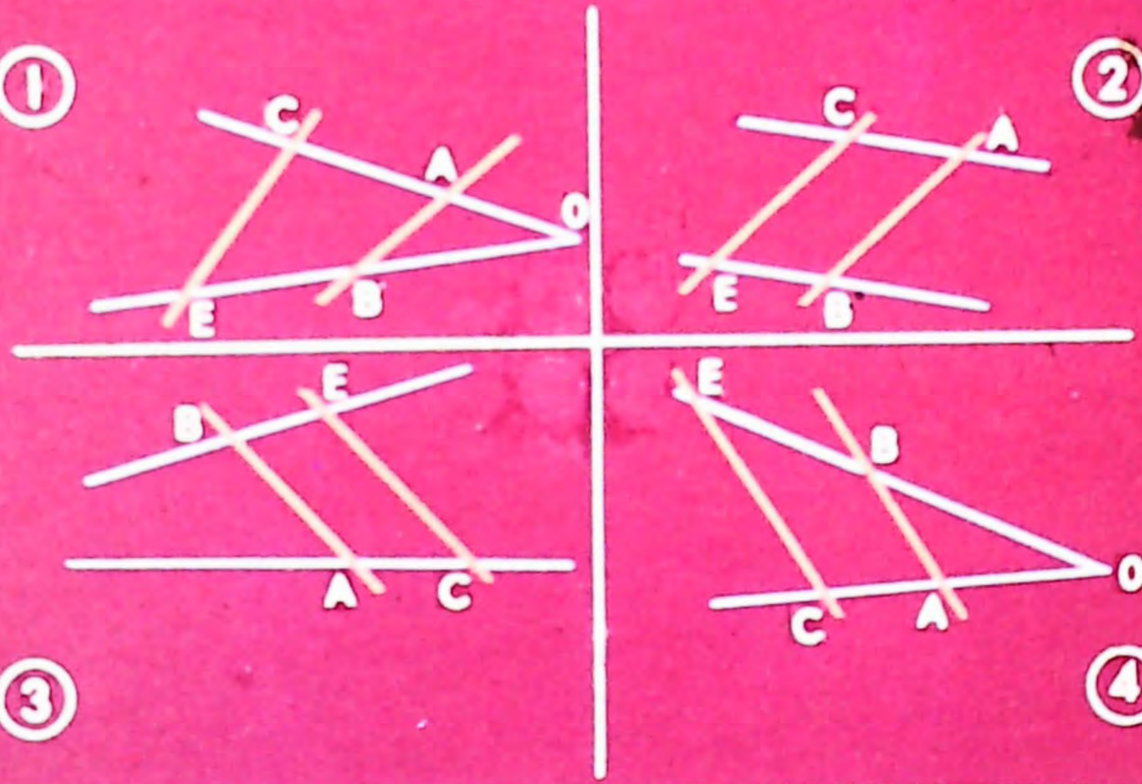
Каким отрезкам пропорциональны [XУ] и [OM]?

[OP] и [OT] пропорциональны [OC] и [OE]. Что из этого следует?



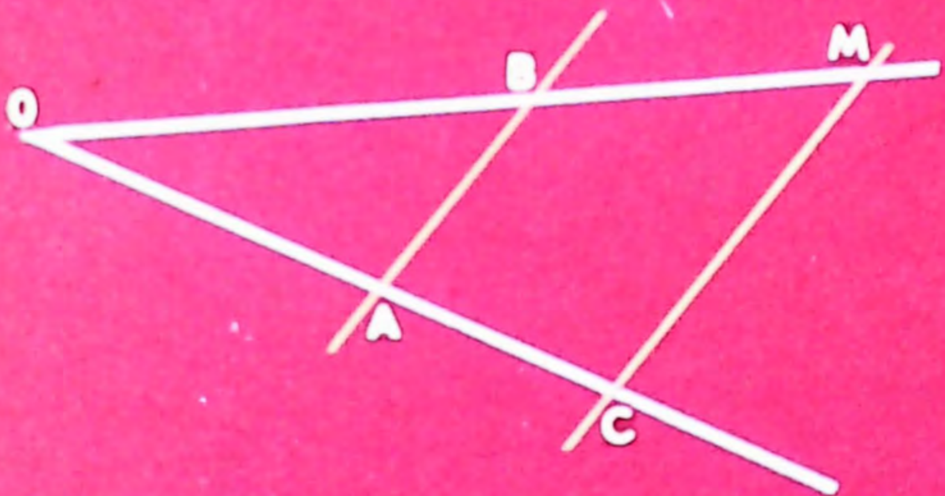
Вычислите $|OC|$, если $|OP|=3{,}5$ м, $|OT|=90$ см, $|OE|=1{,}2$ м.

Теорема. **Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.**



Какой чертеж соответствует условию теоремы? На каком из чертежей [OA] и [OC] пропорциональны [OE] и [OB]?

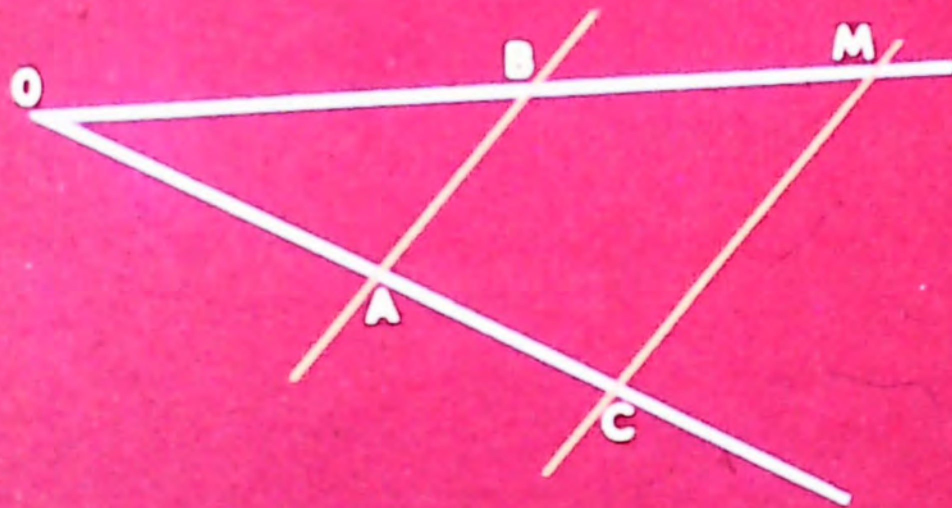
__Дано:__ $(AB)\parallel(MC)$. __Доказать:__ $|OC|:|OA|=|OM|:|OB|$.



Пусть $H_O^k(A)=C$. Укажите образы прямой OB, прямой AB, точки B.

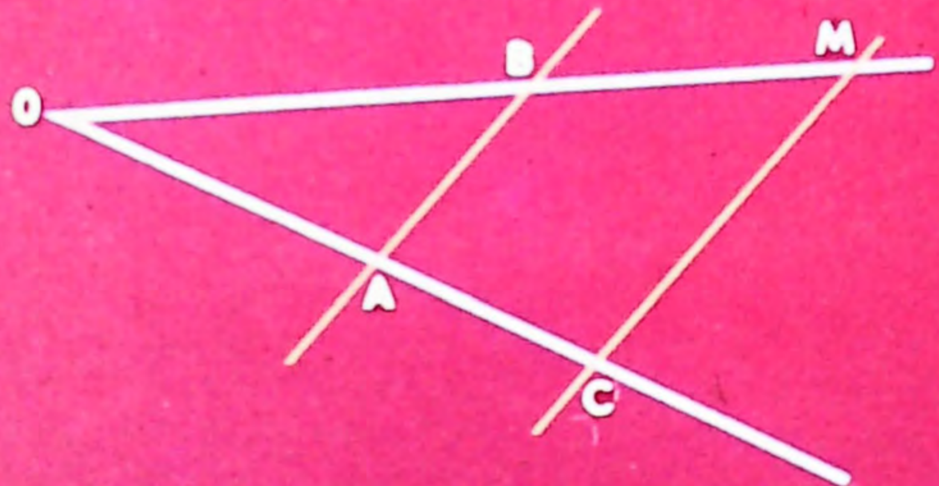
Дано: $(AB) \parallel (MC)$. *Доказать:* $|OC| : |OA| = |OM| : |OB|$.

Пусть $H_O^k(A) = C$. Тогда $H_O^k(B) = M$...

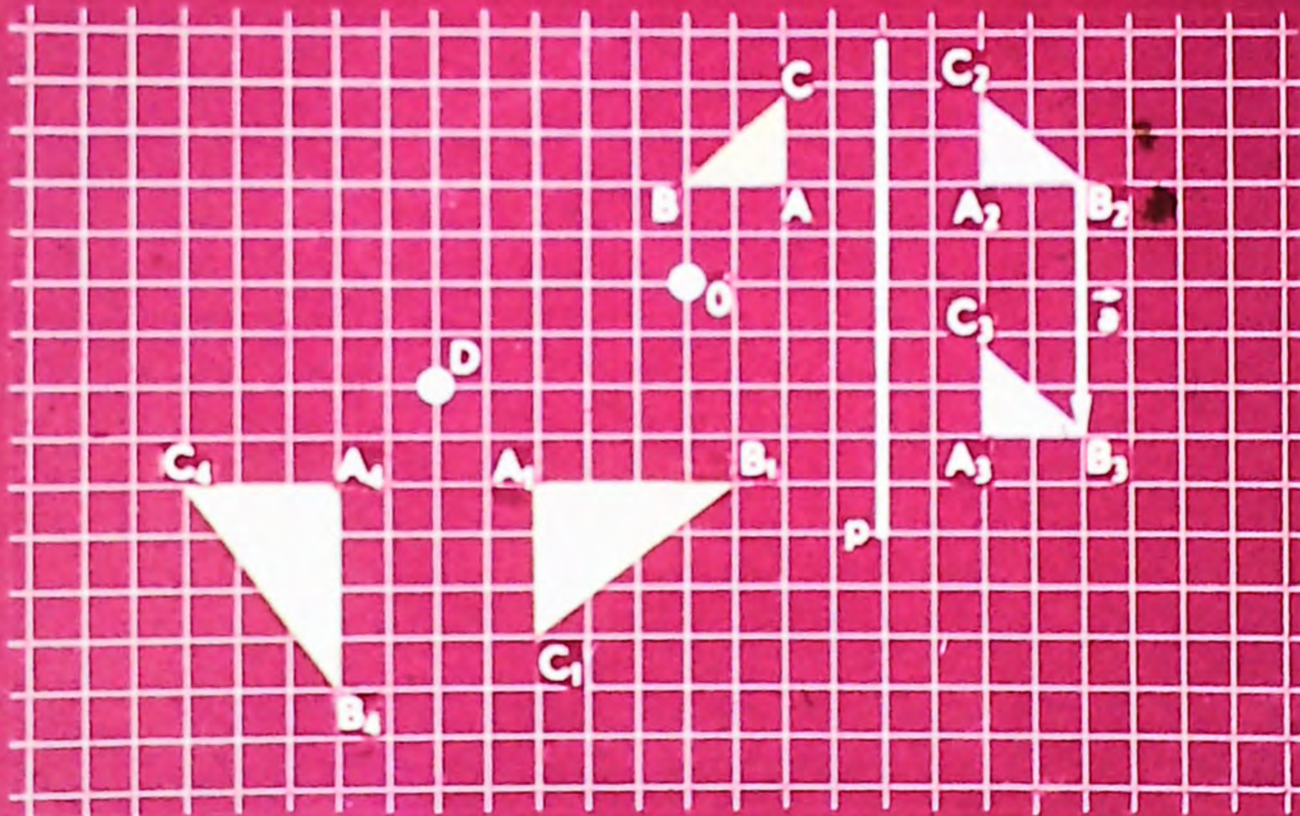


Какие равенства связывают $|OC|$ и $|OA|$; $|OM|$ и $|OB|$? Можно ли из этих равенств сделать вывод, что $|OC| : |OA| = |OM| : |OB|$?

1) $(AB) \parallel (MC)$. 2) Пусть $H_O^k(A) = C$. 3) $H_O^k(B) = M$.
4) $|OC| = |k| \cdot |OA|$ и $|OM| = |k| \cdot |OB|$. 5) $|OC| : |OA| = |OM| : |OB|$.



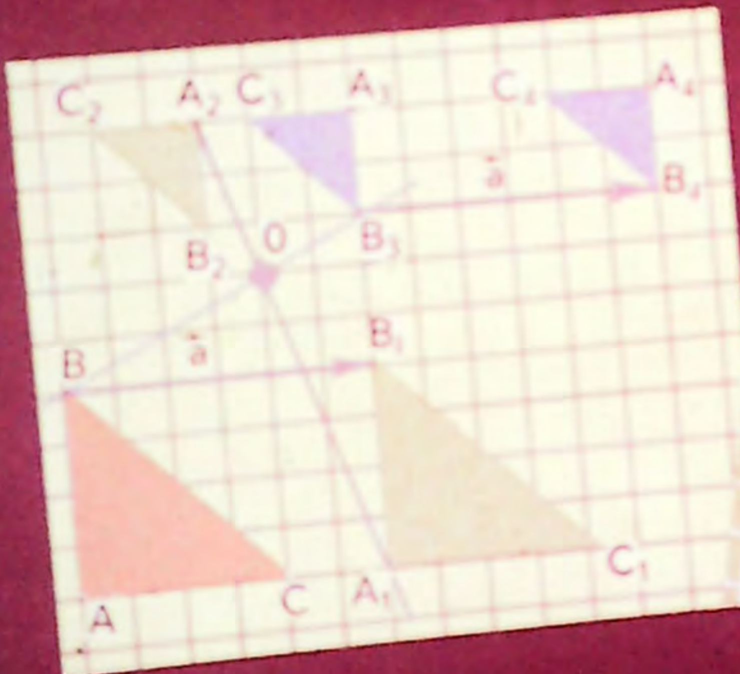
Проведите полное доказательство теоремы по этим записям и чертежу.

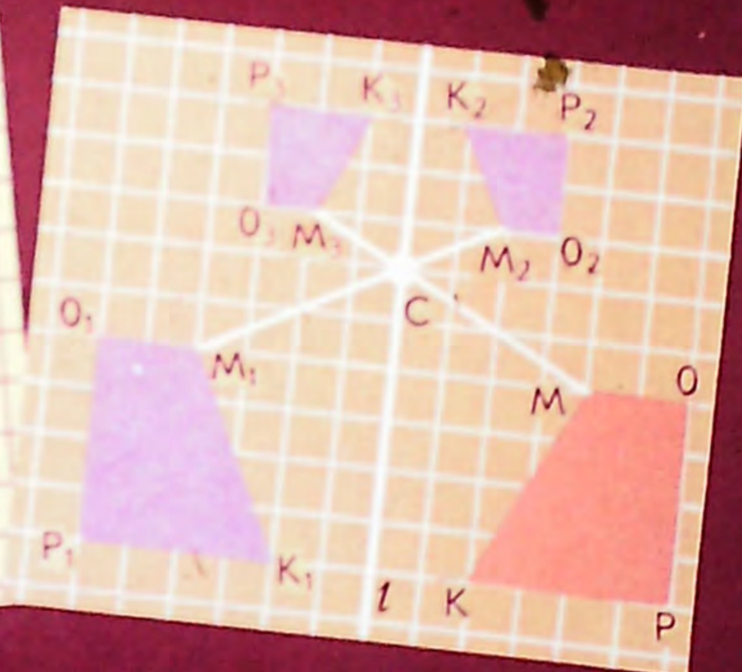


$\triangle A_1B_1C_1 = H_O^{-2}(\triangle ABC)$; $\triangle A_2B_2C_2 = S_p(\triangle ABC)$;
$\triangle A_3B_3C_3 = \vec{a}(\triangle A_2B_2C_2)$; $\triangle A_4B_4C_4 = R_D^{-90^\circ}(\triangle A_1B_1C_1)$.

Какие фигуры а) конгруэнтны; б) гомотетичны; в) подобны? Найдите коэффициенты гомотетии и подобия.

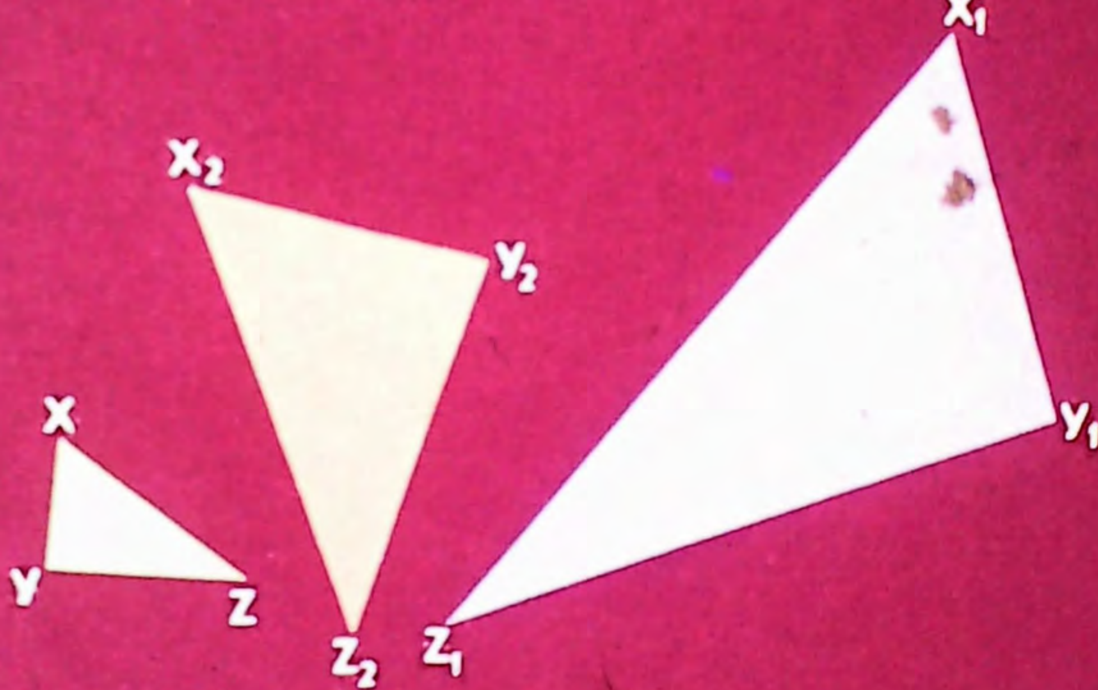
Можно доказать: 1) композиция гомотетии и перемещения есть преобразование подобия; 2) каждое преобразование подобия есть композиция гомотетии и перемещения.





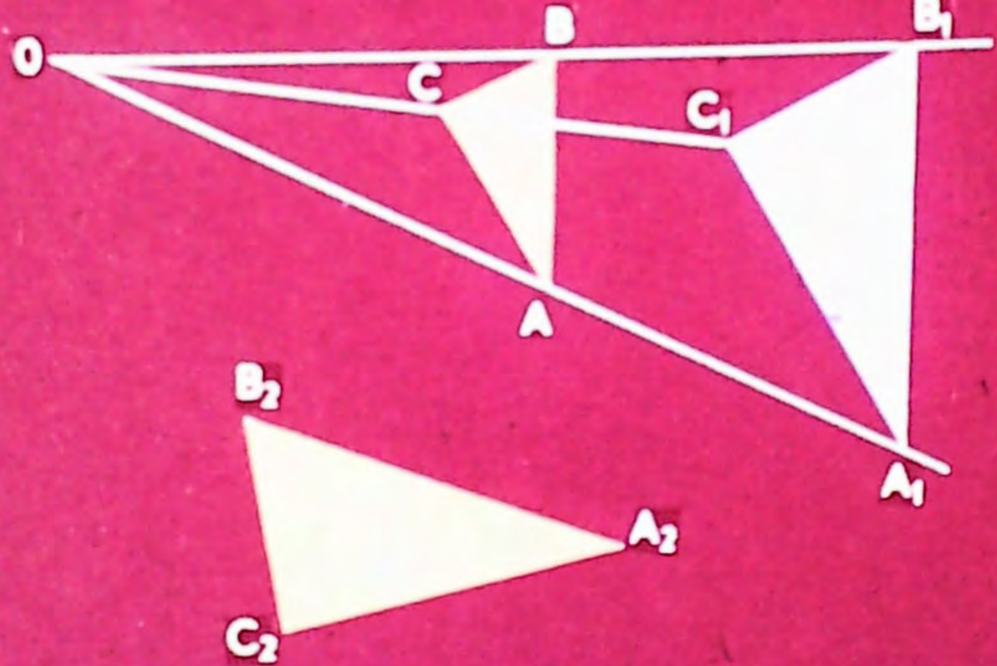
P—перемещение, H—гомотетия. Всегда ли H•P=P•H?

Теорема. **Если три стороны $\triangle ABC$ пропорциональны трем сторонам $\triangle A_2B_2C_2$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.**



Стороны $\triangle XYZ$ равны 3 см, 6 см и 5 см; $\triangle X_1Y_1Z_1$ — 6 м, 12 м и 11 м; $\triangle X_2Y_2Z_2$ — 15 дм, 30 дм и 25 дм. Какие треугольники удовлетворяют условию теоремы? Что говорит о них теорема?

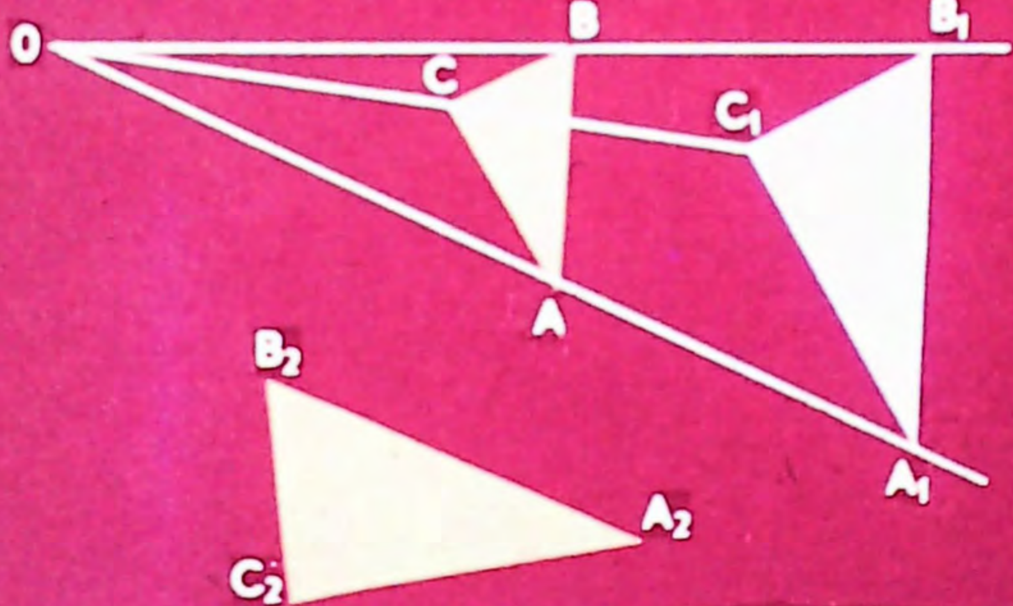
Дано: $\frac{|A_2B_2|}{|AB|}=\frac{|B_2C_2|}{|BC|}=\frac{|C_2A_2|}{|CA|}=k.$ *Доказать:* $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2.$



Пусть $\triangle A_1B_1C_1 = H_O^k(\triangle ABC)$. Какие равенства связывают $|A_1B_1|$ и $|AB|$; $|B_1C_1|$ и $|BC|$; $|C_1A_1|$ и $|CA|$? Подобны ли треугольники ABC и $A_2B_2C_2$?

Дано: $\frac{|A_2B_2|}{|AB|}=\frac{|B_2C_2|}{|BC|}=\frac{|C_2A_2|}{|CA|}=k$. *Доказать:* $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.

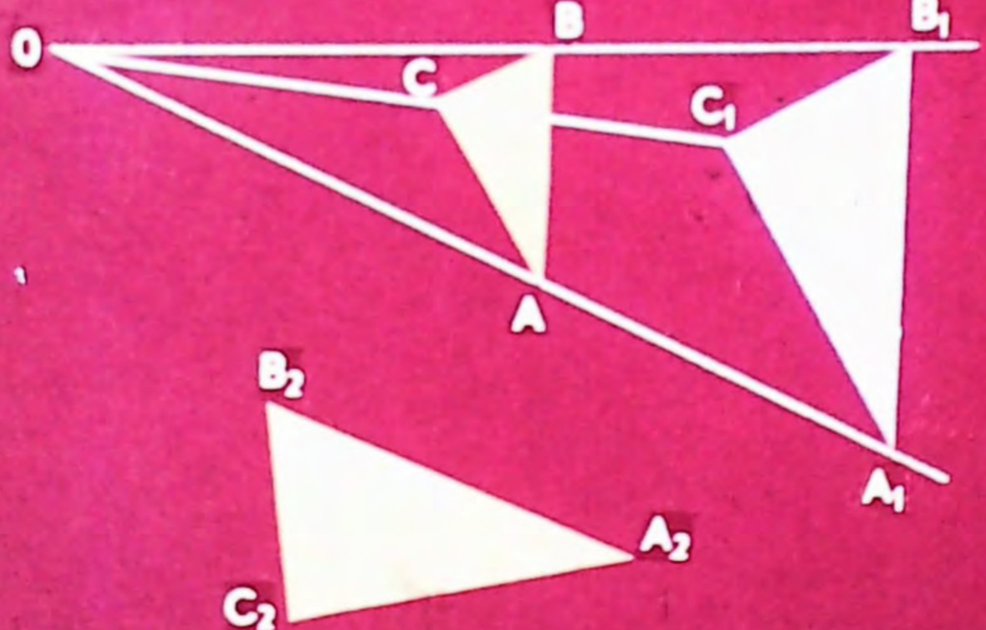
Пусть $\triangle A_1B_1C_1 = H_O^k(\triangle ABC)$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $|A_1B_1| = k|AB|$, $|B_1C_1| = k|BC|$, $|C_1A_1| = k|CA|$...



Сравните стороны $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$. Верно ли, что $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$; $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$?

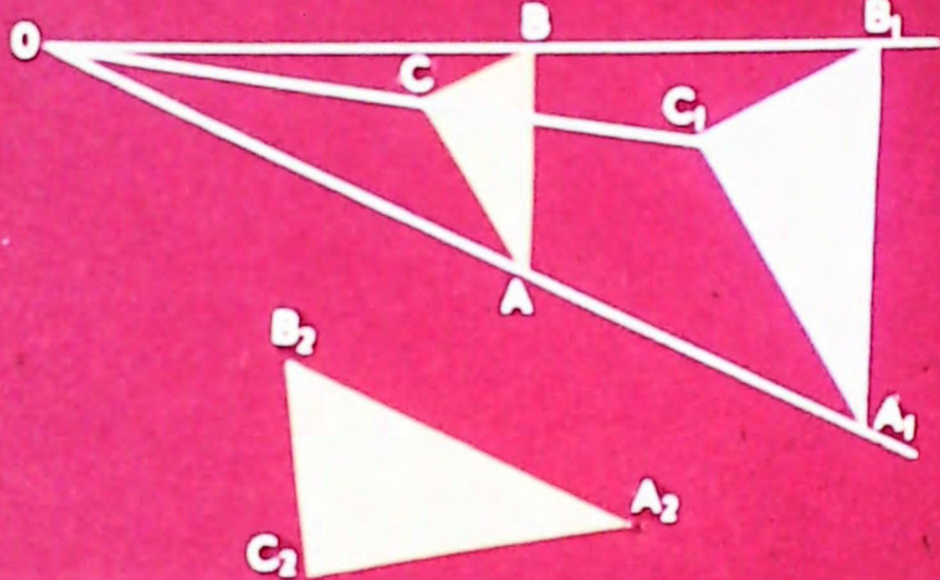
Дано: $\frac{|A_2B_2|}{|AB|}=\frac{|B_2C_2|}{|BC|}=\frac{|C_2A_2|}{|AC|}=k$. *Доказать:* $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Пусть $\triangle A_1B_1C_1=H_O^k(\triangle ABC)$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $|A_1B_1|=k|AB|$, $|B_1C_1|=k|BC|$, $|C_1A_1|=k|CA|$. Значит, $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$...



Из каких утверждений следует, что $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$?

Проведите полное доказательство теоремы, используя эти записи и чертежи.



1) $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{|B_1C_1|}{|BC|}=\frac{|C_1A_1|}{|CA|}=k.$

2) Пусть $\triangle A_1B_1C_1=H_O^k(\triangle ABC)$.

3) $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$.

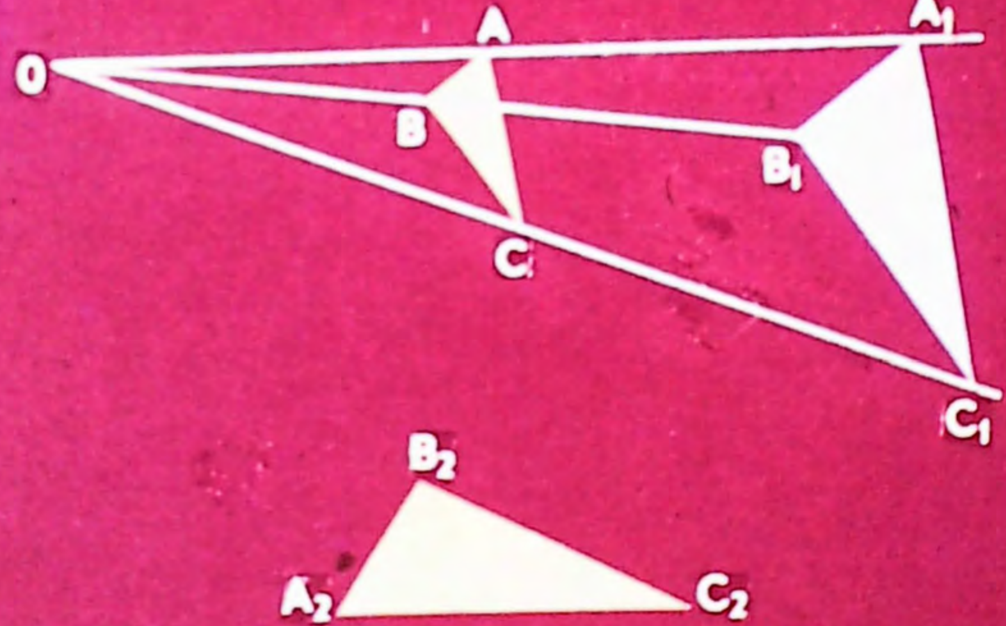
4) $|A_1B_1|=k|AB|$, $|B_1C_1|=k|BC|$, $|C_1A_1|=k|CA|$.

5) $\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle A_2B_2C_2$.

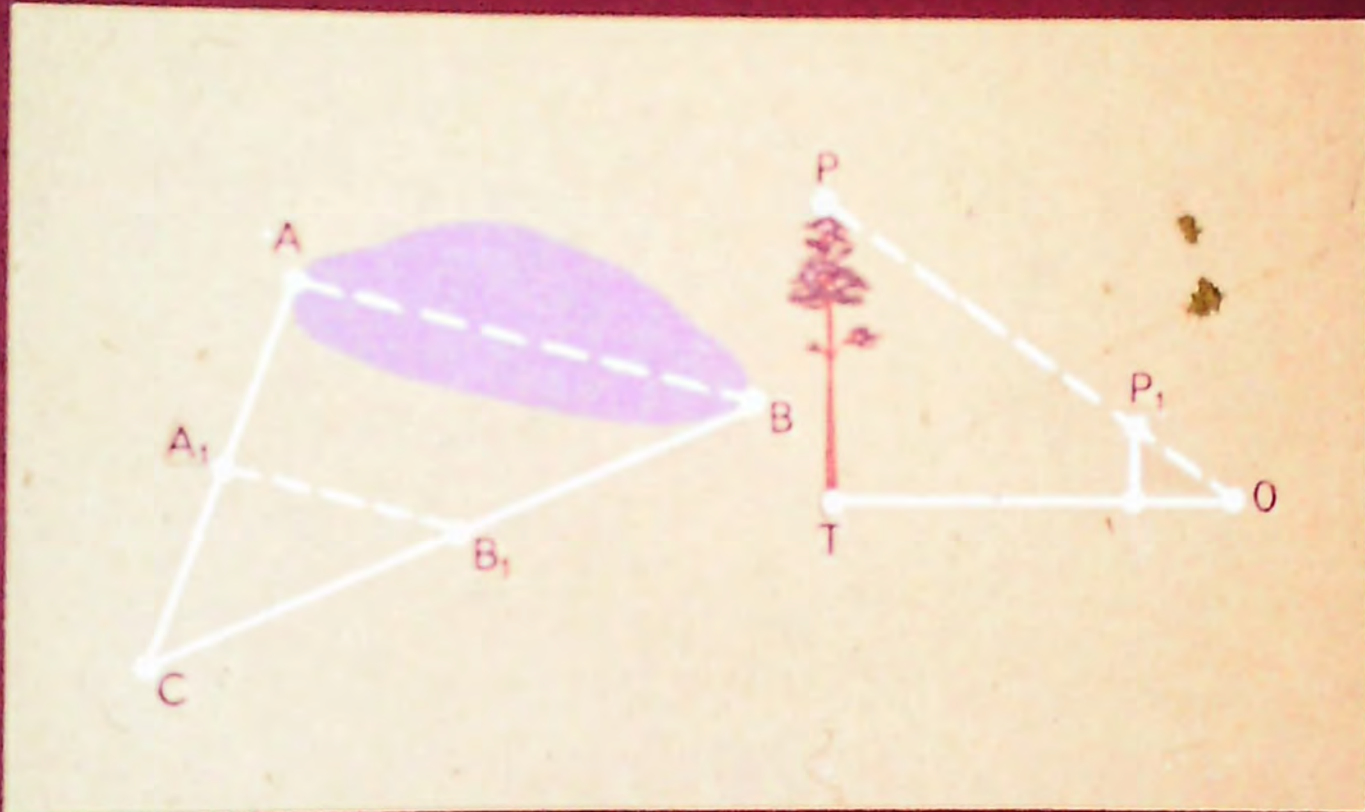
6) $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle A_2B_2C_2$.

7) $\triangle ABC\sim\triangle A_2B_2C_2$.

Можно доказать: $(\hat{A}_2=\hat{A}$ и $\hat{B}_2=\hat{B}) \Rightarrow (\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2)$.

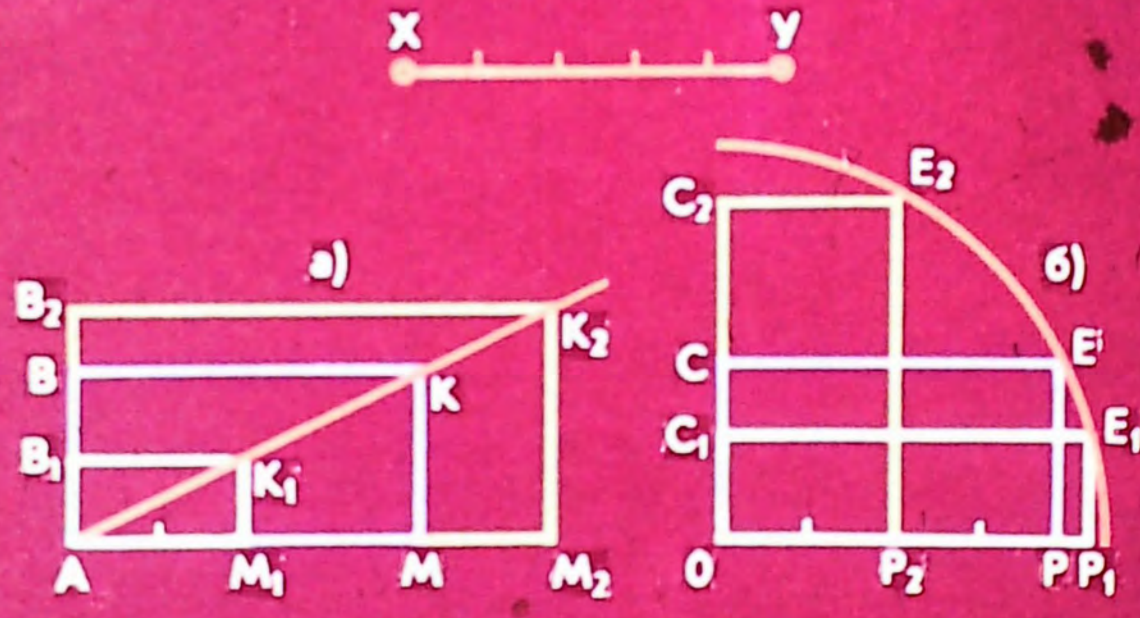


Можно доказать:
$(|A_2B_2| : |AB| = |B_2C_2| : |BC|,\ \hat{B}_2=\hat{B}) \Rightarrow (\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2)$.



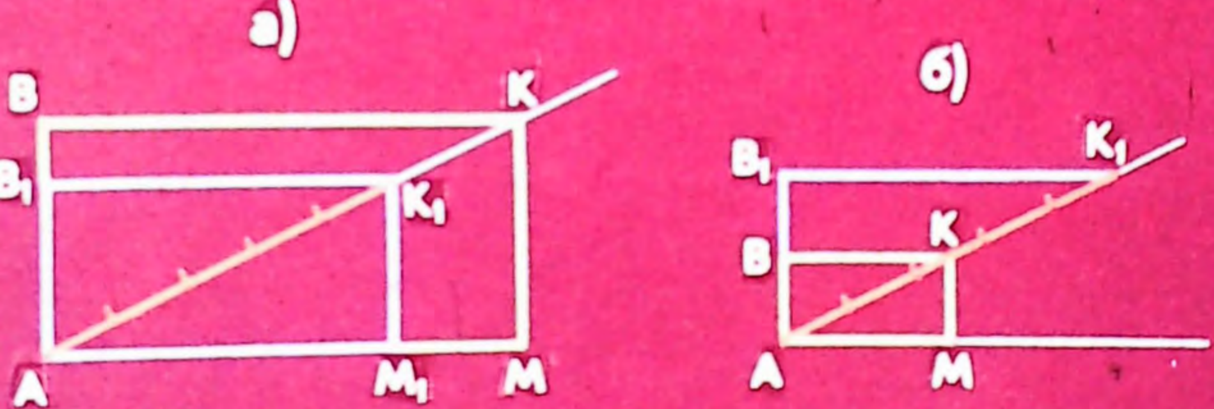
На основе каких теорем можно вычислить длину пруда и высоту дерева? Какие расстояния для этого нужно измерить?

Задача. **Постройте прямоугольник, если отношение длин его смежных сторон равно 2:1, а длина диагонали равна |XY|.**



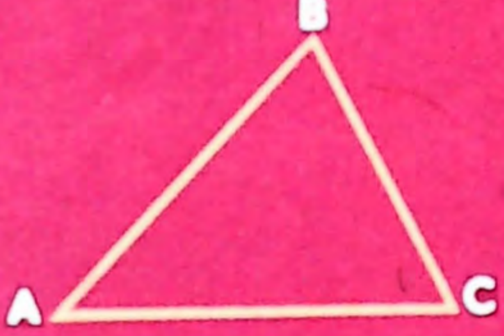
Какие прямоугольники удовлетворяют первому требованию задачи? Второму? Первому и второму?

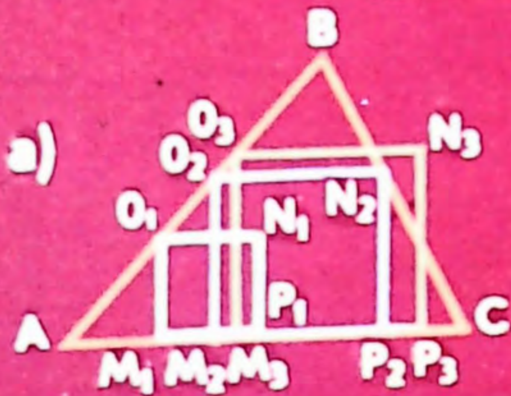
Первое требование задачи позволяет построить прямоугольник, подобный искомому. Второе—конгруэнтный искомому.

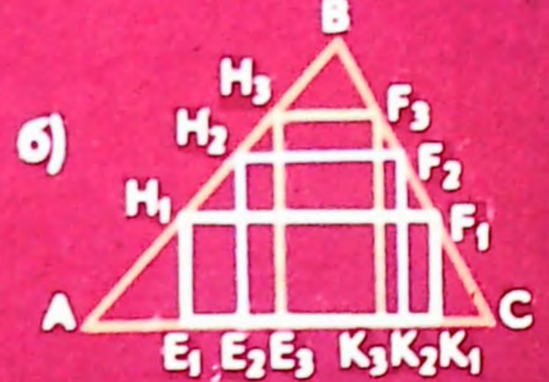


Построим образ прямоугольника ABKM при гомотетии с центром A так, чтобы $|AK_1|=|XY|$. Объясните построение. Докажите, что прямоугольник $AB_1K_1M_1$ искомый.

Задача. **Вписать в $\triangle ABC$ квадрат так, чтобы две вершины лежали на [AC], а две другие — на [AB] и [BC].**

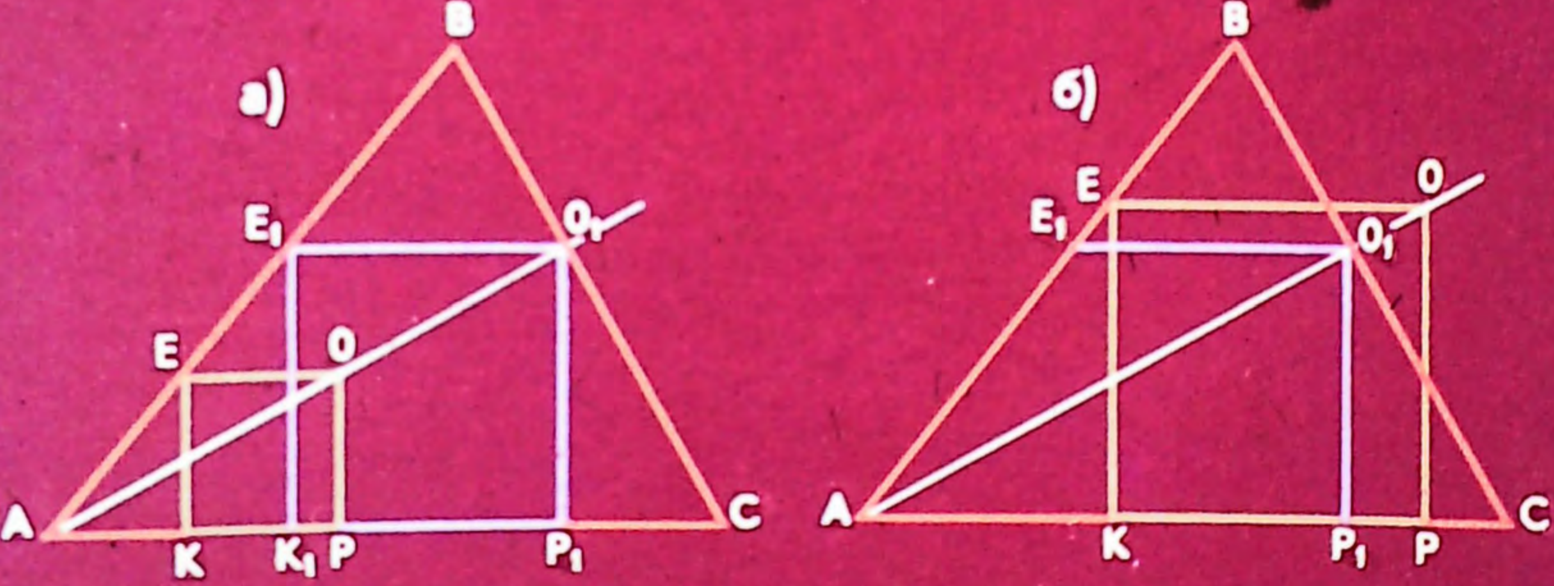






Какие четырехугольники удовлетворяют задаче?

Построим квадрат KEOP, три вершины которого лежат на сторонах треугольника. Построим образ квадрата при гомотетии с центром A так, чтобы $O_1 \in [BC]$.



Объясните построение. Докажите, что полученный четырехугольник искомый.

К сведению учителя

Диафильм содержит 6 фрагментов, соответствующих пунктам 62—66, 82 учебного пособия «Геометрия 6—8» 1979 г., и предназначен для объяснения нового материала. Конец каждого фрагмента отмечен знаком ▲ в правом нижнем углу кадра.

При работе с кадрами 2, 4—8 учитель может задать вопросы, аналогичные приведенным в кадрах. Особое внимание следует уделить чтению учащимися символических записей, формированию правильной математической речи.

Для работы с каждой доказываемой теоремой или задачей отводится несколько кадров. Первый содержит формулировку, следующие— доказательство или вопросы, помогающие понять его.

Работая с формулировкой теоремы, учащиеся выделяют ее условие и заключение, устанавливают следствия из условия. При рассмотрении очередного кадра результаты этой работы сопоставляются с текстом доказательства, приведенном в этом кадре. Работая с доказательством, учащиеся должны сформулировать пропущенные предложения и привести обоснования.

КОНЕЦ

Диафильм по математике для 7—8 классов
Сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Автор *Ю. ГЛАЗКОВ*
Художник-оформитель *И. ШАТАЛОВА*
Редактор *Г. ВИТУХНОВСКАЯ*

101 000, Москва, Центр, Старосадский пер., 7
Цветной 0-30

Д-331-79 Т02301