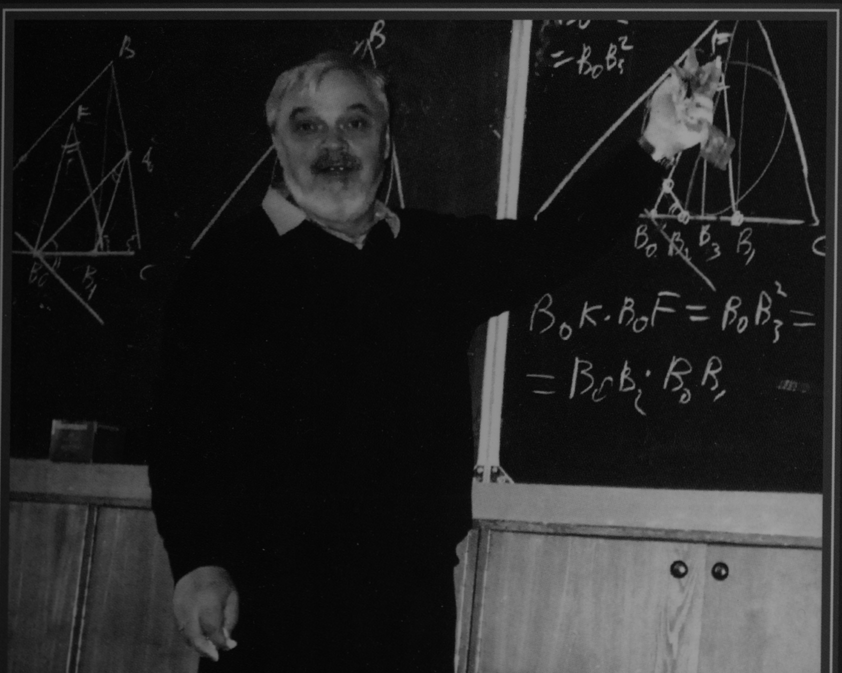
ИГОРЬ ФЁДОРОВИЧ ШАРЫГИН

К семидесятилетию со дня рождения



ИГОРЬ ФЁДОРОВИЧ ШАРЫГИН К семидесятилетию со дня рождения

ИГОРЬ ФЁДОРОВИЧ ШАРЫГИН

К 70-летию со дня рождения

Составители: А. А. Заславский, В. Ю. Протасов,
Д. И. Шарыгин

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51(07)
ББК 22.1
И26

И26 **Игорь Фёдорович Шарыгин. К 70-летию со дня рождения** / Сост. А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, Д. И. Шарыгин. — М.: МЦНМО, 2007. — 304 с., 8 с. ил.

ISBN 978-5-94057-281-7

В книге собраны различные материалы, связанные с жизнью и деятельностью выдающегося педагога и учёного, популяризатора науки Игоря Фёдоровича Шарыгина (1937–2004), его статьи и воспоминания о нём.

Отдельная часть книги содержит задачи и подробные решения геометрических олимпиад им. И. Ф. Шарыгина, проводимых с 2005 года.

Книга предназначена для всех интересующихся вопросами математического образования, школьных учителей и руководителей кружков.

ББК 22.1

ИГОРЬ ФЁДОРОВИЧ ШАРЫГИН

К 70-летию со дня рождения

Редактор Быкова М. Г.

Подписано в печать 15.04.2007 г.
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 19.
Тираж 1000 экз. Заказ № 1356

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-281-7

Оглавление

От составителей

13 февраля 2007 года исполняется 70 лет со дня рождения Игоря Фёдоровича Шарыгина (1937–2004). Эта книга является попыткой отдать дань памяти этому замечательному человеку, талантливому математику и выдающемуся педагогу.

В первой части книги содержатся воспоминания Игоря Фёдоровича и некоторые из его статей и выступлений, посвящённых проблемам математического образования. Особое внимание в этих работах уделено элементарной геометрии, которая всегда была главной любовью Игоря Фёдоровича.

Во вторую часть вошли воспоминания об Игоре Фёдоровиче его коллег, друзей, учеников. Здесь же приведены наиболее яркие из многочисленных придуманных им задач.

В третьей части собраны материалы геометрических олимпиад, которые проводятся в память И. Ф. Шарыгина начиная с 2005 года.

И.Ф.Шарыгин о математике и не только о ней

Избранные статьи и выступления

О себе

Как-то в детстве я, Шарыгин Игорь Фёдорович, родившийся 13 февраля 1937 года в Москве, отождествив самого себя со своим обозначением, или координатами, был поражён проницательностью своих родителей. Каким образом они догадались, что я есть именно Игорь, а не кто-либо иной? Происхождение двух других координат было достаточно очевидно.

Далее по анкете. Русский. Ранее беспартийный, ныне неверующий. Несудимый, а значит, и нереабилитированный.

Отец — уроженец Башкирии (родился под Стерлитамаком), из бедной семьи. После 1917 года вступил в комсомол и стал первым секретарём укома Башкирии, был делегирован на III съезд комсомола, тот самый, где выступал Ленин, вступил в партию и остался в Москве. (Ранее в Музее революции в Уфе был стенд, посвящённый моему отцу.)

Мать была седьмым или восьмым ребёнком в бедной еврейской семье (всего было 11 детей, но многие умерли в младенческом возрасте, кажется, лишь пятеро дожили до зрелого возраста), проживавшей до революции за чертой оседлости в Гомеле. В начале 1920-х годов она приехала в Москву с сестрой, больной раком, где и познакомилась с отцом.

До революции 1917 года возникновение подобных супружеских пар было теоретически исключено. У нас дома по воскресеньям готовили фаршированную щуку и сибирские пельмени. Возможно, главная заслуга большевиков перед Россией, как это ни кощунственно и цинично звучит или выглядит, как раз и состоит в генетическом улучшении российской нации. Особенно поначалу, когда Россия превратилась в гигантский котёл, или, если угодно, тигель, в котором перемешались и переплавились не смешивавшиеся ранее и не смешиваемые породы, т. е. социальные слои. Поколения, родившиеся в 1920-30-е годы, дали невиданное количество классных учёных и деятелей искусства. И многие — в первом колене. К сожалению, и говна много оказалось. Селекционерами большевики оказались скверными. Особенно это ясно сегодня. Впрочем, глядя на остальной мир, понимаешь, что с селекцией всюду плохо.

К началу войны отец занимал ответственный пост в системе Министерства финансов. После начала войны стал заместителем начальника управления по финансированию строительства оборонных объектов, но ушёл добровольцем на фронт (лишь после третьего заявления с него сняли бронь) младшим лейтенантом в пехоту. Окончил войну майором и демобилизовался.

Сначала снова дали высокую должность, но поругался с министром Зверевым (послал на... Надо сказать, что отец всегда говорил: ругаться можно с начальником, нельзя ругаться с подчинёнными) и был отправлен на курсы повышения квалификации (у него практически не было образования), после окончания которых был значительно понижен в должности (переведён в район). До конца жизни был активным коммунистом (явно) и самогонщиком (для личного употребления и тайно). Мать после рождения (в начале войны) моей младшей сестры (ещё есть старший брат) нигде не работала. Никто из близких не был репрессирован, и я искренне плакал, узнав о смерти Сталина. В настоящее время я живу с семьёй: жена, два сына, 1974-го и 1976-го годов рождения. Все четверо окончили мехмат МГУ.

Математикой увлёкся с пятого класса. Учитель математики, Царик Илья Терентьевич, отправил меня на районную, а затем на городскую олимпиаду, где я успешно выступил. Понравилось решать интересные задачи. В 9-м классе пошёл в кружок при МГУ (руководители Бахвалов и Крылов). Наибольший успех в математике пришёл именно в то время, я сумел решить одну очень трудную задачу по элементарной математике (про точку Торричелли). Думал целую неделю. С тех пор потихонечку деградирую (в смысле математики).

В общем, я вполне самостоятельно (с добавлением кружка, школа не в счёт) занимался математикой и, естественно, пошёл на мехмат. Прошёл собеседование (серебряная медаль) и поступил. Практически все задачи, предлагавшиеся мне во время собеседования, я знал. И об этом информировал экзаменаторов: «Эту задачу я тоже знаю». Очевидно, при подготовке мы пользовались одинаковыми книгами и информацией. Тон, правда, задал сам экзаменатор, укорив, что я быстро решил первую задачу лишь потому, что знал её. Ошибся один раз на самой простой и чисто школьной задаче, почему-то решив, что тангенс — это косинус, делённый на синус (я не понимал логики, почему это — тангенс, а то — котангенс, а не наоборот), но мне это простили.

Памятные моменты учёбы? Их очень много. Но вылезают какие-то пустяки. Как Вадим Аркин в течение пяти минут объяснял полковнику Блинову, что опоздал на две минуты 17 секунд. Блинов терпеливо ждал и подытожил: «Не будем мелочными. Запишем две минуты». Кстати, тот же Блинов дал Рождественскому исчерпывающую характеристику из трёх букв (!): «Вял».

Или как Стасик Кудрин сдавал на втором курсе зачёт по интегралам с параметром Камынину. Сначала за него решали мы, находясь в коридоре и подсовывая решения под дверь, потом нам, не ведая о том, помог Исаак Аронович Вайнштейн, решив задачу, с которой мы общими усилиями не могли справиться. После чего Камынин и вовсе озверел и дал Стасу неберущийся интеграл. Когда мы указали ему на это (раскрасневшийся Камынин вышел в коридор), он заявил: «У меня Кудрин всё возьмёт». И тот таки взял интеграл, сделав замену $x = \ln t$. Камынин с удовольствием сообщил нам об этом, после чего поставил зачёт.

Или как Кузнецов получил по анализу-3 у Пал Сергеевича Александрова сначала два, а на пересдаче пять, не сказав ни одного (!) слова ни в первый, ни во второй раз. Как я сам получил три по политэкономии, хотя просил поставить мне два и даже требовал задать для этого ещё один вопрос. Затем, наученный горьким политэкономическим опытом, стал любимым учеником у преподавателя диамата Куроедова. Понимая, что нормальным путём мне этот предмет не сдать, совершил ряд гнусностей, например, во время перекура притворился болельщиком «Спартака». При этом умудрился не выступить ни на одном семинаре. Правда, перед каждым семинаром говорил преподавателю: «Я дома подумал и понял, что Вы были правы». Попытался было на халяву сдать через год тому же Куроедову истмат. Билет списал. Но тот зачем-то дал дополнительный вопрос: «Когда возникли нации?». Мой ответ — «Давно» — его не удовлетворил. С третьей попытки я попал в цель — перечислил в хронологическом порядке все известные мне общественные строи, пока не добрался до капитализма. Преподаватель очень сожалел, что никак не может поставить мне пять и приглашал на пересдачу. Вообще, для меня сдача зачётов и экзаменов по общественным дисциплинам, начиная с зачёта на первом курсе и кончая госом и даже вступительным в аспирантуру и кандидатским, — череда курьёзов и пакостей (с моей стороны).

Математикой, не считая учебной, во время учёбы практически не занимался, а после второго курса занимался лишь в сессию. Ткнулся пару раз на какие-то научные семинары, но, ничего не поняв, бросил. Об этом сейчас весьма сожалею.

В общественной жизни практически никакого участия не принимал. Не имел нагрузок, не посещал собраний, не ездил ни в колхозы (один раз поехал, но сбежал через два дня, вызвавшись сопровождать Глеба Еремеева), ни на целину. После окончания мехмата был оставлен в аспирантуре, причём не по той кафедре, которую кончал. Помог по старой памяти Коля Бахвалов, согласившийся стать моим руководителем, сначала дипломным, а затем и в аспирантуре. Удалось за последний оставшийся до защиты месяц состряпать неплохой диплом. Одну теорему мне, по сути, подарил Бахвалов, а другую удалось доказать самостоятельно. Позже, когда я готовил первую публикацию, Бахвалов лично вычеркнул благодарность себе.

После аспирантуры работал в МГУ. Сначала на мехмате, а затем на ВМК. Сдуру, а точнее спьяну, подписал, не читая, какое-то письмо в защиту Есенина-Вольпина, которое мне в вестибюле МГУ подсунула Ира Кристи. (Да ещё заставил подписать Кондратьева — профессора с кафедры дифуров.) В тот же вечер об этом письме сообщил «Голос Америки». (Ира же уверяла, что письмо в родное ЦК, и про Америку ничего не говорила.) Когда перечислялись подписи, я оказался в числе «и другие». Да и Кондратьев тоже. Оказались мелковаты для «Голоса». Но было бы нечестно утверждать, что подписание письма стало основной причиной моего ухода из МГУ. После ухода из МГУ в 1972 году, по сути, начал новую жизнь.

Особых званий нет (кандидат и доцент на нашем курсе не в счёт), государственных наград и премий и вовсе никогда не было. Сейчас занял некоторую международную позицию. Являюсь членом Исполкома международной комиссии по математическому образованию (1999–2002 гг.) В настоящее время числюсь (согласно записи в трудовой) заведующим лабораторией геометрии в Московском центре непрерывного математического образования (вся лаборатория — это я сам). Есть и другие места работы, точнее зарабатывания. Основной источник доходов — авторские гонорары за книги. Всего издал порядка 40 книг. Все после 1986 года. Рекордным стал 1995 год, когда у меня вышло не то 15, не то 17 книг. Главные — задачники и учебники для средней школы.

Сочинил много оригинальных задач (не одну сотню), публиковавшихся в разных журналах и участвовавших в разных олимпиадах. Можно сказать, вернулся в детство. (Высшее достижение — две небольшие книжки для 2-го класса.) Раньше было много «хоббей»: собирал книги, держал экзотических животных, был болельщиком, ходил на ипподром — в общем, много чего. Ну и конечно, и то самое, и это. Жил, зарабатывая репетиторством. Старался во всём, чем увлекался, быть профессионалом.

Регулярных контактов с кем-то с нашего курса, по сути, нет. Авторитетов не имею. Впрочем, в последние несколько лет увлёкся творчеством Бродского. С моей точки зрения, его жизнь — чуть ли не единственный известный мне пример нравственной безупречности среди современников. По большому счёту. «Те, кто не умирают — живут до шестидесяти, до семидесяти, бедствуют, строчат мемуары, путаются в ногах». Это про нас сказал Бродский. (Трагедия русского поэта в эмиграции — английский вытесняет русский.)

Что сбылось? Вот, хотелось дожить до XXI века — это сбылось. Возможно, мог сделать больше, а может, наоборот, сделал больше, чем мог. В начале жизни есть много путей и выбор не всегда зависит от тебя. Много случайного. Я не верю тем, кто говорит, что, доведись ему, он вновь прожил бы такую же жизнь. Хочется ещё кое-что сделать. Долгов много накопилось. Успеть бы отдать.

С клёна падают листья ясеня... или Ностальгия по 37 году

Се вид Отечества, лубок...
Пускай Художник, паразит,
другой пейзаж изобразит.

Иосиф Бродский

Человек! Это звучит гордо!

Из монолога Сатина
в пьесе Горького «На дне»

Некогда в Никитском ботаническом саду можно было увидеть клён с табличкой: «Клён, посажен в 1937 году». В этом, 2002 году, тому клёну должно исполниться один миллион лет и один год. (Соответственно, в 2001 ему исполнился миллион.) А именно, 1 000 001 год. В двоичном исчислении. Чем не юбилей? Надеюсь, не посмертный.

1937-й год! Год, ставший символом эпохи. Им сегодня пугают маленьких детей в нашей стране: «Вот будете себя плохо вести, не слушаться дяденек-демократов не пить кока-колу, не учить английский, не заниматься бизнесом, тогда вернутся злые коммунисты и настанет 37-й год». И вообще, России как-то не везёт с 37-ми годами. Что произойдёт в 2037 году, кроме 200-летия со дня гибели Пушкина и 100-летия памятного 1937 года? Недавно по телевизору «говорил, ломая руки, краснобай и баламут», описанный ещё Высоцким (серьёзным учёным доступ на телевидение, как всегда, закрыт). Он утверждал, что примерно лет через 40 наступит что-то вроде конца света. Может, это как раз в 2037 году и произойдёт? Бог любит троицу.

Но не один клён был посажен 1937 году. В том же году (или немного раньше, или позднее) появилась на свет новая генерация людей, по сути, первое поколение Настоящих Советских людей. Потомки бедняков и богачей, аристократов и беспородных, героев и стукачей, русских и евреев, интеллигентов и разнорабочих, тюремщиков и узников. Стремительно сменившие друг друга эпохи: революция, гражданская война, НЭП и, наконец, эпоха всеобщего единения, апофеозом которой стал 1937 год, как в гигантском тигле переплавили все эти разные и даже несовместимые материалы. Ничто так не объединяет людей, как общий страх, охвативший все слои: от рабочих и крестьян до министров и маршалов (страх этот в соответствии с законами природы возрастал по мере приближения к логову хищника-людоеда, но тем не менее многие стремились подобраться к этому логову поближе). Возникло новое этнографическое явление — Советский Народ. Был выведен новый вид млекопитающего: «homo sovetiko». Правда, к счастью или сожалению, вид этот оказался не очень жизнеспособен. И сегодня мы наблюдаем его постепенное вымирание.

Противоречивая генетическая информация, на основе которой селекционировался «homo sovetiko», и стала в результате причиной его саморазрушения. Возможно, процесс саморазрушения вида «homo sovetiko» начался одновременно с процессом его формирования. Нынче наше общество болеет тяжёлым психическим недугом. К маниакально-репрессивному психозу, от которого оно так и не излечилось (похоже, никогда и не излечится), добавились раздвоение личности (и не в традиционно-национальном сочетании мании величия и комплекса неполноценности: «я — царь, я — раб», а на вульгарно-примитивном уровне социально-бытовых и идеологических рефлексов), расщепление сознания и нравственности (в результате оказался разрушенным общественный вестибулярный аппарат), а также тяжёлая наркотическая интоксикация молодого поколения. И это не может не отразиться на потомстве. Нет никакой уверенности, что на смену «homo sovetiko» не придёт и вовсе ужасный монстр, уже даже и не «homo».

И всё же, отбросим чрезмерный и не очень уместный сарказм, что за явление это — «советский человек»? Если мы попытаемся провести генетический и спектральный анализ поколения 1937 года, то сможем увидеть этот вид периода расцвета во всех его самых типичных и крайних проявлениях. А как можно провести этот анализ? Кто может достаточно полно и объективно написать биографию поколения? Более всего искажают историю именно очевидцы. И дело даже не в том, что годы стирают память, что-то важное исчезает, а на поверхность всплывает второстепенное. Очевидец способен исказить даже событие, случившееся пять минут назад. Ведь худшая из неправд — это частичная правда, правда взгляда с одного бока. (Я вижу чёрную козу, говорит он, забывая добавить, с правого бока.) Но знаем-то мы лишь эту, частичную правду.

Нынче все занялись воспоминаниями (возможно, это «нынче» охватывает всю историю цивилизации). Как говорится, «размемуарились». Когда нечего сказать, но очень хочется, пиши мемуары. «Другие по живому следу пройдут твой путь за пядью пядь...» Какая самоуверенность! Кому, на хрен, интересен твой путь? Тем более что путь этот из одних поражений и состоит. Или почти. Да и не скажешь ты всё равно всей правды. Даже под пыткой. Иная правда унизительна.

Однако. (Можно ли начинать абзац с этого слова и делать из него предложение?) Я пытаюсь понять смысл существования поколения 37-го года. Хотя бы потому, что сам к нему принадлежу. Зафиксировать этот «смысл» на бумаге. И не для потомков, а для самого себя. «Познай себя, и ты станешь...» Уже никем и не станешь, если до сих пор не стал чем-то. Главное — успеть отдать долги. Жизнь состоит из двух половин. В первой половине мы живём в долг, а во второй — отдаём долги. Но отдаём их совсем не тем, у кого занимали. Занимали у отцов и матерей, отдаём детям и внукам, занимали у учителей, отдаём ученикам. Давид Самойлов как-то воскликнул: «Благодарю своих учителей за то, что я не многим им обязан». (Он же добавляет: «Не доверяй ученикам, они испортят дело».) Лучшей похвалы в адрес учителя придумать трудно. Учителя́ Самойлова выполнили свой учительский долг. «Не навреди». «Выяви суть». «Уйди вовремя».

Поколение 1937 года — уходящая натура. Постепенно, какими-то неровными скачками редеют наши ряды. Мы стареем. «Здравствуй, моё старение», — воскликнул молодой Бродский. «А у старения есть и положительные стороны», — говорим мы. Например, ноги перестали потеть и не так воняют. Но ещё хочется чего-то, хочется хотеть. По весне ухаживаешь за дамами, в душе надеясь получить решительный отказ. Начинаешь писать. И понимаешь, что за поколение ты выдаёшь ε-окрестность самого себя.

И всё же... Детство моего поколения было озарено всполохом Великой Войны. Эта война задала поначалу и основной вектор развития. Не слишком сытые, учились мы с удовольствием. Пища духовная с успехом компенсировала нехватку пищи физической. Окончание школы почти совпало со смертью Большого Тирана. Правда, о том, что умер именно Тиран, узнали мы гораздо позднее. А в тот момент многие искренне, как и я, плакали. Дальше просто: институт-университет, работа... Жизнь протекала в трёх измерениях: профессия, водка и анекдот. Было ещё и четвёртое — любовь. Но об этом, прикрываясь маской цинизма, мы не любили говорить. Вернее всё же сказать, цинизм был не маской, но защитной раковиной, в которой пряталось тело сентиментального моллюска-интеллигента.

Нынче мы на каждом шагу сталкиваемся с маской цинизма. На сей раз это именно маска, пытающаяся скрыть лицо истинного циника. Волку на маскараде, чтобы скрыть свою сущность, лучше всего одеть маску волка. Нелепо благородному рыцарю маскироваться рыцарскими доспехами. Плюс на плюс в жизни может дать минус.

Конечно, были и другие интересы: спорт, искусство. Что касается искусства, то интересовались всем: литературой, живописью, музыкой. «Советский народ — самый читающий народ в мире» — это про нас. Помнится странный диспут, наверняка санкционированный Высшим Руководством, — «физики и лирики». Диспут был явно надуман. Настоящие лирики, знатоки искусств были как раз среди математиков и физиков. Хочешь знать литературу — иди на мехмат. Но искусство, литература образовывали некую общую атмосферу. Конкретными же координатами были отмеченные три. Именно в этих трёх измерениях наиболее полно фокусировались и отражались процессы, приведшие к разрушению Советского Союза.

Военное и научное развитие страны некоторое время после смерти Сталина продолжалось по инерции. Система, выстроенная при нём, ещё продолжала работать и развиваться. Напрашивается забавная аналогия. Научные успехи Советского государства базировались на достижениях России царской. Научное развитие Советского Союза в послесталинский период основывалось на системе, созданной Главным учёным всех времён и народов. И лишь через десяток лет, когда Советский Союз преодолел пик своего научно-профессионального развития, началась профессиональная деградация интеллектуальной элиты, что и стало одной из главных причин развала Советского Союза.

Профессиональные дилетанты

Дайте мне «Мою семью»!

Из современной телевизионной рекламы

«Кадры решают всё», — говаривал Вождь Всех Народов. И этой заповеди верно следовал цепной пёс (приклеивая этот ярлык, я лишь следую сложившейся терминологии) Берия, создавая военно-промышленный комплекс. При этом он даже изредка нарушал другие важнейшие заповеди: «Незаменимых людей нет» и «Нет человека — нет проблем». Профессионализм мог стать охранной грамотой, если, конечно, он относился к соответствующей, полезной для советского государства, сфере деятельности. После смерти наводившего ужас хозяина, челядь, как и положено, быстро осмелела и даже обнаглела. Но страх засел в генах.

Надо было выстроить систему безопасности для самих себя. Репрессивные устремления «органов» были ограничены сверху. Единственным критерием отбора на верхних этажах власти стала личная преданность.

А кто может быть более предан лично тебе, чем твои родственники? Старый Хозяин не признавал даже самые близкие родственные связи. Новые признавали только такие. Но всякое общество выстраивается сверху вниз по принципу самоподобия. Пробиться наверх только за счёт высокого профессионализма стало почти невозможно.

«Нет, внучек, маршалом ты не станешь, у маршала свои внуки есть», — так отвечал на вопрос внука старый генерал из известного анекдота. Страна подобно феодальному княжеству разделилась на семейные кланы. «Не имей сто рублей, а женись как Аджубей» — таков был девиз для тех, кто хотел сделать карьеру. Если вы по молодости лет не знаете, поясняю: журналист Аджубей, женившись на дочери Хрущёва Раде, в мгновение ока стал редактором «Известий» и одним из самых влиятельных людей страны. Его ещё прозвали «околорадский жук». Справедливости ради (или Рады) следует заметить, что Аджубей был определённо талантливым человеком, чего не скажешь об абсолютном большинстве марьяжных карьеристов. Так что если говорить о таком явлении, как «семья», то появилось оно ещё при Хрущёве, развилось при Брежневе и доведено до крайности уже при Ельцине. Преемственность заметна.

Семейно-клановый строй, возникший в стране, не соответствовал основной форме собственности. Власть, должность, а с ними и роскошная жизнь могли быть в один миг утеряны. Да и по наследству они плохо передавались (генерал из анекдота выдавал желаемое за действительное), особенно если наследники были бесталанны. Дядюшка Джо оставил после себя из личного имущества лишь галифе да трубку. Всё остальное принадлежало государству, к коему и отошло. Новые хозяева, наученные горьким опытом старой номенклатуры, накопили изрядные богатства. Но как их сохранить? Нужна была частная собственность как гарантия незыблемости лично-кланового благополучия. А значит, надо было менять государственное устройство.

Другим, и основным, способом сделать карьеру было вступление в партию. «Для чего, Вася, ты вступил в партию?» — приставали друзья к приятелю. «Я вступил в партию для карьеры», — отшучивался Вася. «Ой, врёшь, Вася, ты вступил в партию для карьеры!» Партийность также являлась хорошим средством реализовать себя вне профессии.

При этом новые партийцы практически полностью отказались от нравственных принципов, которые свято соблюдали представители старой гвардии. Возродилась почти забытая (и даже почти невозможная) в сталинскую эпоху традиционная российская взятка. Взятка в сочетании с партийностью стала необычайно эффективным способом для карьерных скачков. Борьба с партийными взяточниками велась, но имела своеобразный характер. Для каждой должности были свои расценки (в южных республиках, говорят, вплоть до секретаря обкома), для каждого уровня своя норма. Самым страшным преступлением было взять не по рангу. Некоторые принципиальные партийцы даже пытались платить (а может, и платили) партвзносы со взяток. Это, конечно, также не способствовало повышению профессиональной квалификации кадров.

Впоследствии, когда наступила перестройка, члены партии смогли сделать очередной карьерный рывок, торжественно выйдя из партии. (Дошло даже до публичного сожжения партбилета по телевидению.) По сути, они использовали партию дважды, вступив в неё и выйдя из неё. Коммунисты ещё раз доказали, что партия была и остаётся передовым отрядом нашего общества. И когда кто-то говорит, что после развала Союза благодаря свободе и рынку все мы получили равные возможности, хочется сказать: «О каких равных возможностях вы говорите, если один бегун стартовал на круг впереди другого, да к тому же он молод и полон сил, а его соперник уже стар и ещё не отдышался от изнурительного марафона по жизни?» И даже хуже, когда был дан знак для массового старта, выяснилось, что призовой фонд уже весь разворован.

Забавно, что все эти карьерные партийцы, отрёкшись от партии, не отказались ни от должностей, полученных благодаря партии, ни от наград, ни от учёных степеней. Правы были старые партийные бонзы, направляя своих сынков и внуков по научной стезе. Научное звание не отнимут. И проводят у нас сегодня рыночные реформы крупные учёные, защитившие диссертации, в которых доказывали преимущества колхозного земледелия перед фермерским и плановой экономики перед рыночной. Профессиональные дилетанты, воспитанные советской властью, порождённые ею (здесь я имею в виду также небольшую категорию людей, о которой скажу в следующем абзаце), встали у руля Новой Страны и приступили к систематическому грабежу, в коем всё же проявили истинный профессионализм.

Ещё об одном мелком, но забавном явлении, развившемся в эпоху застоя, следует сказать. Речь идёт о движении диссидентов, т. е. инакомыслящих. У диссидентов было две точки опоры, две ноги: одна на Западе, точнее в США, а другая — в Союзе, в КГБ. С точки зрения КГБ, если бы диссидентов не было, то их стоило бы придумать. Возможно, так оно и было. С исчезновением «врагов народа» огромная армия «специалистов» оказалась не у дел. Представьте себе, у вас имеется свора свирепых псов. Ведь её надо держать в боевой форме, на ком-то тренировать. Наконец, хорошо кормить. А с другой стороны, большая часть диссидентов подкармливалась с Запада, была ориентирована на эмиграцию. И участие в диссидентском движении было удобным способом набрать очки, чтобы получить хорошие позиции после эмиграции.

Самые удачливые добились высылки. Но таких было всего несколько. (Были, конечно, и исключения. Ярчайшим является гениальный Бродский.) Диссидентство для большинства инакомыслящих было чуть ли не единственным средством добиться определённого жизненного успеха, поскольку среди них были в основном люди, не достигшие больших успехов в своей профессиональной деятельности или не сумевшие сделать карьеру иным, более стандартным путём. Помню одного начинающего учёного, который не был принят в партию, после чего пошёл в диссиденты и эмигрировал. В самом КГБ проблемами диссидентов занималась большая армия работников, далеко не высшего сорта. (Специалисты занимались внешней разведкой, ловили настоящих шпионов, раскрывали шифры.) Возник своеобразный симбиоз — одна категория непрофессионалов оправдывала существование другой. При этом, подобно тому, как это нередко бывает в природе, когда один из симбиотической пары является хищником, сосуществование это было не бесконфликтным. Но, повторяю, диссиденты и КГБ были нужны друг другу. А также Западу, который имел уникальную возможность за гроши разрушать изнутри своего основного стратегического конкурента.

И сегодня, когда вчерашние диссиденты приезжают к нам «оттуда» в роли духовных пастырей, поучают с экранов телевизоров и газетных страниц, как нам жить, принимают премии от восторженной демократической общественности и лобызаются с властью, когда престарелый и несгибаемый лидер Хельсинкской группы сгибается в подобострастном поклоне перед полковником КГБ, я не удивляюсь, а говорю: что и требовалось доказать.

А как мы пили молодыми

Всем погибшим в неравной
схватке с Зелёным Змием

Борьба с пьянством стала ещё одной причиной разрушения советской власти. Мудрый вождь, обладавший абсолютной властью, всё же понимал: нельзя замахиваться на святое. И его наследники первое время не занимались борьбой с пьянством. Ну, вводили ограничения на продажу: лишь с одиннадцати утра и до семи вечера. Так это только раззадорило пьющую публику. Любой профессиональный алкаш знал, как, где и за сколько можно достать водку в любое время суток. Ну, цены повышали. Народ кряхтел, но держался. Многим пьющим даже удавалось и до семьи что-то донести из получки.

Алкогольная политика в России — важнейший инструмент идеологического и экономического управления страной. Здесь важно найти оптимальный режим. Слишком закрутишь гайку — может взорваться котёл. Полностью откроешь клапан — выйдет весь пар и механизм перестанет работать. Разрушая семейный бюджет, пьяницы наполняли доходную часть бюджета государственного. «Что будет, если все пьяницы Союза в течение хотя бы недели откажутся от выпивки?» — спрашивал стоящую вокруг молодёжь опытный пьяница, выпив стакан водки. И сам же отвечал: «Страна развалится!» И поэтому, когда во второй половине 1980-х годов началась безумная антиалкогольная кампания, я понял: это — всё, это — агония режима. Создалась революционная ситуация, но в иной модификации. Весь народ, и верхи и низы, сплотился против непьющей кучки высших руководителей страны.

Да, конечно, недовольство пьющих народных масс постепенно росло. За 15 лет, предшествовавших началу антиалкогольной кампании, цены на водку выросли многократно по сравнению с началом 1970-х годов, когда цены стабилизировались на отметке 2 р. 87 коп. за пол-литра и 1 р. 49 коп. за четвертинку. Это был период расцвета. «Мне 2,87 и одну копейку в рыбный». (Это за кильки.) Такую просьбу в кассе можно было рассматривать как претензию на остроумие. В математическом фольклоре появились даже соответствующие задачи. Например. Большая селёдка и маленькая вместе стоят 2 рубля. Сколько стоит большая селёдка? (Ответ: большая селёдка стоит 51 копейку. Понятно, почему?) Кто-то заметил, что $1{,}49^{2.87} = \pi$ с большой точностью. Это ли не является доказательством сбалансированности советской экономики того периода? Пол-литра стало основной и вполне свободно конвертируемой валютой в стране. Во всяком случае на бытовом уровне. Старички и старушки с их помощью поддерживали своё существование, расплачиваясь за услуги сантехников или даже подторговывая.

Вообще феномен российско-советского пьянства весьма интересен и ещё ждёт своего исследователя. Но, боюсь, так и не дождётся. Очень точно и сдержанно показан этот феномен в творчестве Высоцкого. Но это поэзия. Принято рассматривать произведение В. Ерофеева «Москва—Петушки» чуть ли не как энциклопедию советского пьянства периода застоя (запоя, застолья или чего ещё). На мой взгляд, это неплохая, но поверхностная и вредная зарисовка (а вот повесть Виля Липатова «Серая мышь» следовало бы изучать в школе), сделанная человеком, для которого пьянство — некая разновидность спорта, развлечение. Человеком, ещё не нырнувшим в его страшные глубины, из которых редко кто возвращается живым и в здравом уме. А уж тех, кто смог прожить долгую жизнь, оставаясь на высоком уровне в пьянстве и профессии, и вовсе единицы. Я знаю лишь одного. Конечно, пьянство не есть чисто российское явление. На Западе также пьют. Прочитайте хотя бы повесть Стейнбека «Квартал Тортилья-Флэт» (и сравните с повестью «Москва—Петушки»). Прекрасное произведение и не вредное для нашего читателя, поскольку всё происходящее в повести воспринимается как некая сказка.

И всё же есть существенная разница между тем, как пьют на Западе, и тем, как пьют в России. Главное состоит в том, что на Западе пьют малыми дозами и с удовольствием. В России стаканами, но с отвращением. На Руси пили всегда. Достижением советской власти можно считать интеллигентное, а вернее, интеллигентское пьянство, а ещё точнее, пьянство научно-технической интеллигенции, поскольку артисты и писатели пили издавна и помногу. Для советского интеллигента пьянство стало способом внутренней эмиграции. Здесь можно выделить несколько стадий.

Обычно интеллигентское пьянство начинается на студенческой скамье как забава, бравада, демонстрация сил, которых в избытке, а девать некуда, с шутками и приколами. Для выпивки нужен повод? Великолепно! Покупаем шнурки. Вот и повод. Покупку нужно обмыть. Или обратная ситуация. Купили в общежитии новый радиоприёмник. Опять же, покупку надо обмыть. Обмыли. Не хватило выпивки, а денег нет. Загнали тот же приёмник за треть цены и продолжили пьянку-гулянку. Студенты математики придумали понятие «производная от пьянки». Под этим термином понималась стоимость оставшейся пустой посуды. Пьянка считалась «существенной», если её четвёртая производная была положительной.

Взрослеем. Пошли на работу. Денег не прибавилось. Основным видом общения и пития становится в те годы знаменитое «на троих». И вовсе не из-за недостатка общедоступных питейных заведений. Вопреки законам математики бутылка водки легче всего делилась на три равные части. Появилось понятие «строить». Впрочем, многие считают, что его придумал Владимир Владимирович (Маяковский). Помните его строку: «Я с теми, кто вышел строить». Притягиваемые друг к другу особым запахом, три личности мужского пола, как мотыльки, сходились в некоей точке магазина, и один из них произносил сакраментальное чапаевское: «По рублю!» Или же другой вариант. Входя в магазин, жаждущий намётанным взглядом находил одиноко стоящего человека, державшего напоказ два пальца. Он молча становился рядом, уже показывая один палец. Вскоре появлялся и третий приятель. Зачастую тут же подскакивал и четвёртый, но заметив, что является лишним, спокойно занимал освободившуюся позицию и поднимал руку, демонстрируя два пальца.

Далее события развивались обычным путём. Запасшаяся единицей горючего, наша тройка находила в ближайшем сквере «стаканодержателя». Этот человек выдавал напрокат стакан, за что получал пустую или почти пустую тару, а также «чаевые» в виде оставшейся на донышке жидкости. Несмотря на то что разливали и пили по очереди, отмеренные объёмы совпадали до миллилитра. Так что не было никакой необходимости выпускать специальные бутылки с двумя рисками. Как предлагал один рационализатор.

Пили обычно либо «под мануфактуру» (занюхивали рукавом), либо под хлебную корочку, либо под леденец. После распития не полагалось сразу уходить. И если какой-нибудь спешивший полуинтеллигент вдруг после выпитого стакана разворачивался и пытался уйти, его тормозили: «Куда? А поговорить!» Должность «стаканодержателя» была престижной. Почти руководящей. Работа здоровая, весь день на свежем воздухе, и вполне доходная. Можно было даже иметь надбавку «за степень».

Учёных уважали. Рассказывают, что в церемонии «на троих» однажды принял участие Джон Стейнбек. Произошло это в известном москвичам районе под названием Марьина роща. (Известный писатель не мог не восхититься столь романтическим названием.) Об этом писатель будто бы рассказал в своих заметках о путешествии в Россию. Не знаю, не читал, но охотно верю. Если же возникало более организованное и устойчивое сообщество граждан, желающих выпить в спокойной и комфортной обстановке, то, запасшись «горючим» в гастрономе, компания направлялась в ближайшую точку общепита. Своеобразный банкет приобретал особую пикантность, если над столиком висело объявление: «Приносить и распивать спиртные напитки строго запрещается».

Простое пьянство переходило в более серьёзную стадию, когда возникал устойчивый синдром похмелья (абстиненция, говоря научным языком). Характерные признаки. Сильное дрожание рук (тремор или «гилельс», в честь известного пианиста), иногда сопровождавшееся общим сотрясением всего тела (так называемый зусман, точное происхождение термина мне неизвестно; похоже, был такой джазовый музыкант). Тошнота по утрам. Пьяница начинал регулярно похмеляться и переходил в категорию алкоголиков. Водка становилась уже лекарством. «Иду я как-то утром в аптеку», — рассказывал один уважаемый алкаш. «В какую аптеку?» — интересовались неофиты. «Как в какую? В гастроном». Однажды, помнится, продавщица в гастрономе сделала замечание одетому в лохмотья и трясущемуся субъекту, покупавшему на последние деньги бутылку. Мол, лучше одежонку себе справил бы. На это замечание субъект резонно ответил, что здоровье дороже.

Процесс похмеления существенно отличается от процесса пития. Здесь самое главное, чтобы не вылетела, прижилась первая доза. Именно поэтому она должна быть небольшой. Иногда эта первая доза несколько раз путешествовала от зажатого рукой рта до желудка и обратно, пока не затихала в нижней точке. (Помню одного рыдающего алкоголика, который поутру втайне от коллег выкушал чекушку и не удержал её. Никакого сочувствия он, конечно, не дождался. Принцип товарищества всегда был главной чертой советского человека, а пьющего — тем более.) После первой дозы можно было уже спокойно продолжать лечение. Доходить до нужной кондиции. После чего возникала потребность в очередной раз опохмелиться. Один пьяница, не просыхавший почти год, говорил, что выпил он лишь один раз, год назад, а с тех пор только похмеляется.

Было известно о существовании и номенклатурного пьянства. Но всё было на уровне слухов. Лишь после того, как Ельцин стал президентом, стали понятны отличия между народным пьянством и номенклатурным. Главное различие вовсе не в качестве потребляемых продуктов. Номенклатурный пьяница не стесняется никого, стоящего ниже его на иерархической лестнице (вспомните рабовладельцев, спокойно справлявших естественную нужду в присутствии рабов). А поскольку Ельцин занимал высшее положение в стране, то он никого вообще не стеснялся. (Простой пьяница нередко похмеляется ещё и потому, что ему стыдно перед всем миром.)

Помимо водки к элитным напиткам среди простых людей относились спирт и одеколон. Самогон в городе был редким зверем, поскольку гнали его партийцы и беспартийные исключительно для лично внутреннего потребления. Продавать его было столь же опасно, как и заниматься валютными операциями. Молодёжь по недомыслию потребляла также всевозможные портвейны и «плодово-выгодные» вина. Спирт пили медики, работники элитных КБ и северяне. Он входил в категорию стратегических продуктов, и достать его было непросто.

По поводу одеколона существовали разные мнения. Были любители, предпочитавшие его водке с точки зрения вкусовых качеств и эффективности. Чем меньше величина, полученная после деления стоимости продукта в рублях на объём в литрах, умноженный на крепость в градусах, тем эффективность напитка выше. Знаменитый «Тройной одеколон», поступавший в сельпо, разбирался в мгновение. Этот же одеколон был важной составной частью северного завоза. Регулярное пьянство — штука не очень дешёвая, даже если потребляешь одну водку без закуски. (Закуска лишь ослабляет эффект.)

Понятно, что возможности получения постоянной работы для алкаша очень ограничены. Хотя и говорят, что мастерство не пропьёшь, но его и не продемонстрируешь в состоянии глубокого опьянения или жестокого похмелья. Отсутствие денег вынуждало переходить на всякие суррогаты. Экспериментальным путём решалась задача линейного (или динамического) программирования — максимальный кайф за минимальные деньги.

Пили всё, что льётся. Из политуры путём добавления соли и взбалтывания изготовляли «болтушку», которая либо полностью сжигала желудок, либо превращала его в саркофаг. На химфаке МГУ, следуя традициям Менделеева, разработали технологию по использованию клея БФ. (Я даже знаю конкретного человека, который разработал эту простую технологию, но, по скромности, не запатентовал своё открытие; нынче это крупный учёный.) Потребляли тормозную жидкость, средство от потения ног. Лётчики на Севере, рискуя собственными жизнями и жизнями пассажиров, пили антиобледенитель. Не знаю, как там насчёт «Слезы комсомолки», — скорее это фантазия Венички, уж больно сложна технология, но кружка пива с «тремя пшиками» хлорофоса била наповал.

Где-то в середине шестидесятых появились первые признаки наркомании. Конечно, и раньше покуривали анашу, «ширялись», но как-то в стороне от главных дорог. В уголовной среде был распространён «чифирь» (50-граммовая пачка чая на стакан воды). Отнести «чифирь» к категории наркотиков сложно. Ведь чай продавался и продаётся совершенно открыто.

Надо прямо сказать, что наркомания и алкоголизм — трудно сочетаемые явления. Да и российскому менталитету наркомания плохо соответствует ввиду отсутствия должного ритуала. Так что за её широкое распространение среди сегодняшней молодёжи мы должны «благодарить» прежде всего цивилизованные страны, к числу которых Россия пока ещё (к счастью?) не относится. Российская наркомафия сформировалась по западным образцам, после того как стараниями реформаторов-демократов была уничтожена иммунная система, худо-бедно функционировавшая при коммунистах (её составные части: правоохранительные органы, медицина, образование).

Начавшаяся же в шестидесятые годы наркомания имела наиболее примитивную и даже безобидную (по сравнению с наблюдаемой сегодня) форму. Алкаши начали использовать некоторые медицинские препараты, жидкие или в виде таблеток («колёса»), в качестве заменителя алкоголя или же для усиления его действия. Один дедуля, моложе меня сегодняшнего, любил со вкусом закусывать аспиринчиком. Обычно же использовались более действенные препараты. В те блаженные годы эфедрин являлся стандартным средством от насморка, кодеин можно было купить в аптеке без рецепта. Особо одарённые умудрялись ловить кайф даже от пургена. А полтаблетки намбутала и полстакана водки по действию заменяли литр водки и обеспечивали полную интеллектуальную деградацию в кратчайшие сроки.

Но настоящим лицензированным алкоголиком человек становился, пройдя соответствующий курс лечения. Имелись две возможности лечения: амбулаторно и стационарно. А также два типа лечения: медикаментами и психологическим воздействием, внушением. Скажу прямо, в психологические методы лечения я не верю, как, впрочем, и в иные. Помню рассказ одного пьяницы, который, пройдя курс гипноза, некоторое время воздерживался от употребления. Затем он встретил в центре Москвы своего гипнотизёра. И на радостях они вдвоём крепко «загудели».

Где-то в 70-е годы появились и первые специалисты по кодированию от алкогольной зависимости. Их методы были ориентированы и вовсе на малограмотных, коих среди советских алкашей не было совсем. (Сегодня при расцвете демократии такие вроде появились вновь.) При медикаментозном лечении было два типа медикаментов. Одни должны были вырабатывать устойчивую рвотную реакцию на алкоголь. Другие были несовместимы с алкоголем. Человек не мог пить под страхом смерти.

В амбулаторном варианте главное действие происходило примерно по следующему сценарию. Небольшая группа алкашей рассаживалась вокруг ведра. После чего медперсонал обходил эту группу с двумя подносами. На одном стояли стаканы с водкой, а на другом — с напитком под названием «буренковка» (по всей видимости, по фамилии врача, составившего рецепт этого напитка). Каждый из пациентов брал в одну руку стакан напитка, а в другую — стакан водки. Некоторые пытались взять два стакана водки, но такие попытки пресекались на корню. Затем полагалось выпить сначала стакан «буренковки», затем стакан водки и приступить к процедуре заполнения ведра. Те, у кого рвотный рефлекс был ослаблен, пили в больших количествах воду. После нескольких таких сеансов у начинающих алкоголиков развивалось стойкое отвращение к водке (обжегшись на молоке, дуем на воду), и, когда у них в очередной раз появлялось желание вступить в неравную схватку с пагубным недугом, они ложились в стационар.

Стационарное лечение было бесплатным (о, славная советская медицина!) или почти бесплатным, поскольку каждый пациент должен был сдать несколько бутылок водки для обеспечения курса лечения (вся водка за время лечения не выпивалась и становилась достоянием медперсонала), продолжалось 30–40 дней и рассматривалось некоторыми ветеранами алкогольного фронта, успевшими пропить всё что только можно, включая паркет в квартире соседа, как заслуженный отдых, почти курорт. Работающие интеллигенты при выписке из клиники получали бюллетень с загадочным диагнозом: pseudodipsamania (непонятно, почему pseudo?).

Проходило лечение в два этапа. На первом этапе снималась интоксикация, возникшая вследствие неумеренного употребления алкоголя. Затем приступали собственно к лечению. По сравнению с амбулаторными, арсенал методов был более широк. Помимо уже известной «буренковки» в качестве рвотного использовался также лейкоподий (настой спор то ли маньчжурского, то ли ещё какого-то плауна). Этим средством пользовали ещё русских купцов при царе-батюшке, выводя их из запоя. Средство это считалось более эффективным по сравнению с «буренковкой». Хотя это и сомнительно, поскольку советский интеллигент был более вынослив и закалён, чем купец времён проклятого царизма. Главное же, лейкоподий являлся экологически чистым продуктом. Никакой химии. Использовался также и трихопол (он же метронидазол). Причём по системе и в лошадиных дозах. Так что пациент, имевший в своём букете трихомоноз (хотя многие об этом даже и не подозревали), мог заодно избавиться и от этой напасти, впрочем не слишком его беспокоящей.

Другой тип медикаментов использовался, чтобы у пациента выработался страх смерти от употребления алкоголя. В те времена в этом качестве использовался антабус (он же тетурам). Процесс лечения проходил следующим образом. Сначала организм пациента насыщался в течение некоторого периода антабусом. Затем устраивалась «провокация». Больному предлагали выпить водочки. Если реакция была ослаблена, устраивали ещё одну «провокацию», а в случае надобности и ещё одну, пока не доводили испытуемого до кондиции. Например, нижнее давление падало почти до нуля, или даже наступала клиническая смерть. Затем приступ купировали (кстати, с помощью обычной синьки, которой тогда синили бельё) и человеку объясняли: вот что с тобой будет, если выпьешь, а мы, врачи, будем далеко. Но все эти провокации имели единственное следствие. Они губили здоровье пациента, печень и сердце, лучше любого алкоголя. «Потихоньку тает печень, / сердце бег свой тормозит. / Чем лечить свои увечья? / Кроме водки, вроде нечем. / И опять ты паразит». Так писал неизвестный поэт на досуге между двумя «провокациями».

И кроме того, как вывести постепенно накопившийся в организме антабус, знали все уже на следующий день после поступления в клинику. Особо нетерпеливые использовали более суровый способ. Они после выписки подъезжали к родному дому (т. е. клинике) с бутылкой водки, которую выпивали у порога приёмного покоя. В случае чего, помощь поспевала во время. Были и такие, кого не забирал и антабус. По всей видимости, они попали в алкогольную клинику по ошибке. Их следовало бы взять в отряд космонавтов. Я знавал одного гиганта, использовавшего завалявшуюся в кармане таблетку антабуса в качестве закуски после приёма стакана (или более профессионально: стаканА; сравните: компАс).

Одним словом, эффективность всех средств лечения была весьма низкой. Период ремиссии иногда исчислялся лишь временем, за которое вышедший на свободу с абсолютно чистой совестью человек успевал доехать до обжитых краёв. И всё-таки были и такие, кто смог остановиться и завязать. И даже через длительное время начать пить цивилизованно. Но не благодаря лечению, а вопреки ему. В больнице, если у тебя сохранились остатки интеллекта, можно было, сняв интоксикацию, остановиться, передохнуть, обдумать свою жизнь и на самых наглядных примерах увидеть своё будущее в случае, если не изменить образ жизни.

Список антиалкогольных учреждений будет неполным, если не упомянуть о так называемых ЛТП (лечебно-трудовых профилакториях). Это была разновидность тюрьмы, куда следовало направлять по решению суда на несколько лет. На самом деле решение суда определял участковый уполномоченный. ЛТП представляли маленький островок известного Архипелага. О том, что там происходило, известно очень мало. В поле зрения правозащитников они не попали из-за отсутствия заказа с Запада. Живых же свидетелей уже, наверно, и не осталось ввиду повышенной смертности среди много пьющего населения.

Для полноты картины остаётся добавить одну деталь. Самым радикальным средством завязать с пьянством было «зашиться». Человеку под кожу зашивали некий препарат. Назывался он, кажется, «эспераль». Или попросту «спираль». Насколько я понимаю, это была некая разновидность антабуса продлённого действия. Операции «зашивания» предшествовал настоящий обряд. Больной давал расписку, что предупреждён о возможности летального исхода в случае употребления алкоголя.

Более простым по сравнению со «спиралью» вариантом считалась так называемая торпеда. Нужный препарат вводился в кровь. Нередко, однако, некоторым наиболее ненадёжным (а были ли надёжные?) вшивали или вводили так называемое плацебо (латинское placebo буквально означает 'понравлюсь'). А именно, под видом антиалкогольного препарата использовалось какое-нибудь вполне безобидное средство, вроде витамина. Как только пациенты прознали про возможность «плацебо», а произошло это сразу же, эффективность подобных методов значительно снизилась. Зато возникла новая разновидность «русской рулетки».

Сегодня методика «плацебо» широко распространена в экономике и политике, в результате последних президентских выборов мы получили гигантское «плацебо». Это особенно кажется верным, если вспомнить первоначальное значение этого слова.

Справедливости ради следует сказать, что хотя наркологическая служба и входила в систему советской психиатрии, славящейся своим репрессивным характером, по отношению к алкоголикам она выглядела сверхгуманной. И это вполне объяснимо, если вспомнить определение душевнобольного, данное в вышедшей в 1920-е годы книге П. И. Карпова

«Творчество душевнобольных и его влияние на развитие науки и техники». (Эту книгу, похоже, до сих пор не переиздали. А жаль.) Вот это определение: «Душевнобольным считается тот душевнобольной, который вступил в конфликт с обществом». (Как говорится, без комментариев.)

И ещё. Один глубоко и вдумчиво пьющий человек решил получить инвалидность с диагнозом шизофрения. Собрали консилиум для вынесения окончательного приговора. Один из профессоров спросил клиента: «А как Вы сами считаете, Вы человек нормальный или нет?» И тот ответил экспромтом (так он уверял): «Вопрос имеет злую форму. / Ответ покажется коварен. / Ведь если Вас принять за норму, / то я, конечно, ненормален». Желанное свидетельство было получено. Эту историю мне рассказал её герой. И я ему верю. Главное — что принять за норму. А норма у каждого своя.

Смейся, Паяц!

Жить стало лучше, жить стало веселее.

И. В. Сталин

Одной из причин развала Советского Союза стал политический анекдот. Вернее было бы говорить о наличии очень сильной обратной связи: внутреннее гниение режима мгновенно отражалось в анекдоте, анекдот же ускорял этот процесс гниения, обнажая пороки и освобождая людей от накопившегося страха. Нет ничего страшнее для репрессивного государства, чем отсутствие страха перед ним. Уместно здесь вспомнить известную притчу о том, как один завоеватель собирал дань с порабощённых людей. «Как там народ?» — спрашивал он вернувшихся мытарей. «Плачет», — отвечали ему. Тогда он вновь отправлял своих людей за очередной данью. Но когда ему ответили, что люди смеются, он понял, что больше с них взять нечего.

Период, длившийся почти 40 лет с начала 1950-х, стал периодом расцвета политического анекдота в нашей стране. Это было по-настоящему анекдотическое время. К известным сериям про евреев, генералов, геморрой добавились новые циклы: вопросы армянского радио, анекдоты про Чапаева, раскручивалась ленининиана. Наверняка были умельцы и сочинить и рассказать анекдот и во времена Сталина. Но они были обречены на недолгую жизнь. «Раз ГПУ пришло к Эзопу / и хвать его за ж... / Смысл этой басни ясен: / не надо басен». Или иначе: «„А“ и „Б“ сидели на трубе, „А“ упало, „Б“ пропало, „и“ служило в КГБ».

Роль анекдота в сталинскую эпоху отражена в следующем известном анекдоте. Два человека сидят на нарах. Один спрашивает другого, за что его посадили. «За лень», — отвечает тот. «??» — «Как-то был в компании. Один человек рассказал анекдот. Я поленился сразу о нём сообщить. Думаю, утром успею. А утром меня и взяли». — «А кто заложил, знаешь?» — «Трудно сказать. На свободе сейчас из всей компании один. Тот, кто рассказал анекдот».

Сам Отец народов обладал своеобразным чувством юмора. Его можно считать также и отцом модного впоследствии чёрного юмора. Примером такого юмора является, в частности, эпиграф к этому разделу. Думаю, что именно Сталину принадлежит остроумная идея переименовать Владимирский тракт в шоссе Энтузиастов. Как-то Советский Союз посетил известный французский писатель Андре Жид. Вышедшая потом во Франции книга его впечатлений о поездке очень не понравилась вождю. А как раз в памятном 1937 году в Москву приехал немецкий писатель Лион Фейхтвангер. Говорят, что Сталин, размышляя о том, пускать ли в Союз Фейхтвангера, мрачно пошутил: «Как бы этот еврей не оказался жИдом». Написанная затем Фейхтвангером книга «Москва, 1937 год» показалась вполне безобидной, была переведена на русский и издана. Но всё же позднее её запретили.

Похоже, что все анекдоты про Сталина были сочинены в послесталинский период. В одних показывалась атмосфера эпохи. Как в следующем классическом анекдоте. Был проведён конкурс проектов на памятник Пушкину. Третью премию получил проект: стоит Пушкин и держит в руках книгу «Биография товарища Сталина». Вторую премию получил проект: стоит Сталин и держит в руках томик стихов Пушкина. И наконец, первую премию получил проект: стоит Сталин и держит в руке «Краткий курс истории ВКП(б)».

Но если в анекдоте фигурировал сам Сталин, то он никогда не выставлялся в смешном свете. В послевоенных анекдотах действующими лицами нередко были Сталин, Черчилль и Рузвельт. И Сталин, как и положено былинному русскому (!) молодцу, побеждал иноземцев. Обычно указанная троица занималась дележом послевоенной добычи на Ялтинской конференции. Первый пример. На Ялтинской конференции. Черчилль: «Нам бог обещал после войны полмира». Рузвельт: «Как он мог обещать вам полмира, когда он нам обещал весь мир?» Сталин: «Не помню, не помню, чтобы я кому-то что-то обещал». Второй пример. Там же. Черчилль (обращаясь к Сталину): «Великобритания помогла вам победить в войне. Не могли бы вы за это подарить нам Крым?» Рузвельт: «А нам Кавказ?» Сталин (показывает руку с тремя оттопыренными пальцами: большим, указательным и средним): «Вот угадаете, какой из этих трёх пальцев средний, выполню вашу просьбу». Черчилль указывает на средний, потому что он так и называется. Рузвельт указывает на указательный, так как он оказывается средним по отношению к двум другим. Сталин: «А вот и не угадали». (Складывает известную фигуру из трёх пальцев, в каковой большой оказывается как раз средним.)

А далее, как в песне: «Потом Никитушка, он ростом был с аршин, но много славного он также совершил». Можно сказать, что Никита Сергеевич стал по-настоящему Народным артистом Советского Союза разговорного жанра. Говорят, что роль шута он исполнял уже при дворе Сталина. После смерти Хозяина Хрущёв стал демонстрировать свой талант на всесоюзной и даже на мировой арене. Познакомиться с очередными шедеврами Никиты, к сожалению немного приглаженными, удобнее всего было посредством самой читаемой среди интеллигенции газеты «Советский Спорт». Эта газета публиковала лишь самое главное: те выжимки из очередного выступления генсека, которые сопровождались комментарием: «оживление в зале», «смех в зале» и даже «хохот».

Надо признать, что в редакции газеты «Советский Спорт» работали смелые люди с хорошим чувством юмора. Так, однажды, ещё до разоблачения личности Сталина, газета в связи с очередным юбилеем Советской Армии написала, что под мудрым руководством Верховного Главнокомандующего (пропустить букву «л» в последнем слове — ночной кошмар военных редакторов) Крым был дважды (!) освобождён от немецко-фашистских захватчиков. Не помню кто и также к юбилею Советской Армии, написал патриотические стихи и послал их в газету: «Ну-ка сунься, ну-ка сунься, ну-ка сунься, подлый враг! / Ну-ка сунься, ну-ка сунься на поля и на овраг! / Ну, поди, сломай берёзу, / Ну, попробуй, навреди. / Ну, воткни-ка нам занозу. / Спереди и позади. / Мы — граждане и гражданки, мы тебе ответим так: / Ну-ка сунься, ну-ка сунься, ну-ка сунься подлый враг!» К сожалению, стихи не опубликовали.

Никита Сергеевич был человеком импульсивным. Последствия его благородного порыва — взял и подарил Украине Крым — нам ещё долго предстоит расхлёбывать. Кроме того, как и положено генсеку, он был специалистом во многих областях человеческой деятельности. Но особенно прославился Хрущёв своими новациями в сельском хозяйстве и глубоким пониманием изящных искусств. В своё время Екатерина стала насаждать на Руси картошку, за что ей всенародное спасибо. Никита Сергеевич увлёкся кукурузой и даже заслужил прозвище «кукурузник». Хорошо, что он не заинтересовался чем-то более экзотическим.

В области же изящных искусств своё глубокое понимание Никита Сергеевич продемонстрировал во время известного посещения художественной выставки в Манеже, на которой впервые более или менее широко были представлены абстракционисты и другие представители нетрадиционной ориентации в искусстве. Поэтому совершенно справедливо прозвучал возглас возмущённого Хрущёва: «Пидарас-сы!» Далее, по рассказам очевидцев, Никита стремительно прошёл мимо ряда картин, вдруг остановился перед особо не понравившейся ему физиономией и спросил: «А это что за ж... с ушами?» И ему ответили, что это зеркало.

Кстати о живописи и о ж... (помните того генерала, которому объяснили, что анекдоты следует рассказывать «кстати»; он долго молчал в компании, потом неожиданно воскликнул «пиф-паф, да, кстати, о выстрелах...»). Один мой знакомый придумал классификацию различных «писей». Во-первых, собственно «живо-пись», затем «выжо-» и, наконец, «вжо-». Советские люди, воспитанные в основном на искусстве третьей категории, нередко принимали произведения второй категории за настоящую живопись. Но всё же, как ни странно, именно среди произведений самого аполитичного искусства — изобразительного — возникли работы, разрушающие самые основы социалистического строя. И власти это быстро заметили.

Место Никиты путём дворцового переворота занял Леонид Ильич Брежнев. Надо отдать должное благородству нового царя. Вопреки многовековой русской традиции предшественник остался жив. Его всего лишь отправили на пенсию. Новый генсек постоянно давал пищу для анекдотов, являлся объектом насмешек. Высмеивались его чрезмерная амбициозность, страсть к наградам, званиям и должностям, стремление приписать себе несуществующие заслуги.

Например, во время войны Брежнев имел какое-то отношение к боям на Малой земле. Когда он стал главой страны, он вспомнил об этом и подумал: «А ведь меня могли там убить!» И вот один из эпизодов Великой Войны становится чуть ли не центральным сражением, изменившим её ход. «Где вы были во время войны? Сражались ли на Малой земле или отсиживались в окопах Сталинграда?» Ещё один анекдот на эту тему. Жуков приходит к Сталину и излагает свой план взятия Берлина. Сталин говорит: «План мне нравится, но всё же посоветуйтесь с полковником Брежневым».

Через некоторое время после устранения Хрущёва с главной партийной должности Брежнев стал и Председателем Президиума Верховного Совета, убрав с этой должности Н. В. Подгорного. Позднее появился анекдот. К Подгорному, проживающему на даче, приезжает корреспондент. «Здравствуйте, Николай Викторович! Как поживаете? Что делаете?» — «Да вот, собачку прогуливаю». — «Читаете ли Вы газеты? Смотрите ли Вы телевизор? И вообще, интересуетесь ли Вы политикой?» — «Газет я не читаю, телевизор не смотрю и вообще политикой не интересуюсь». — «Но Вы хотя бы знаете, кто сейчас Папа Римский?» — (С изумлением) «Не может быть!!!»

Манию величия Брежнева обыгрывали по-разному. Издан указ о переименовании Ленинграда в Лёнинград. Зовите меня просто Ильичём (из выступления Брежнева на встрече с трудящимися). Указ о награждении Ордена Ленина за заслуги в награждении Генерального секретаря (кажется, придумал А. Зиновьев).

В эпоху Брежнева возникло много кратких политических анекдотов и афоризмов. (Возможно, я и ошибаюсь, и многие просто дошли до меня в тот период.) Некоторые из них оказались пророческими. Приведу небольшой список.

Какая разница между портками и парткомом? В портки влезает одна задница, а в партком много. Почему у нас система однопартийная? Две партии не прокормить. (!!! Теперь убедились.) При капитализме человек человеку волк, а при социализме — товарищ волк. Урна — твой друг, плюнь в неё. В артиллерийской академии висит плакат с надписью «Наша цель — коммунизм!» (Цель накрыта!)

Много анекдотов было связано с продовольственными проблемами. В дверях своей квартиры стоит интеллигент с пустой авоськой и пытается вспомнить, куда он направляется, в магазин или из магазина. В магазине покупатель обращается к продавцу: «Взвесьте мне, пожалуйста, 300 грамм еды». Опять же в магазине покупатель обращается к продавцу: «Не могли бы Вы порезать мне 200 грамм колбаски?» Тот отвечает: «Пожалуйста. Давайте колбаску! Порежу!» Загадка: Длинный хвост, горящие глаза и грязные яйца. Что это такое? Ответ: очередь за куриными яйцами по 90 копеек.

Кстати о еде. Общефилософское настроение той эпохи отражает следующий известный анекдот. Идут два человека по дороге (иногда указывают их национальность). Лежит куча дерьма. Один спрашивает другого, может ли он съесть эту кучу за 1000 рублей? Деньги по тем временам немалые. Тот съел, получил деньги. Идут дальше. Видят: лежит ещё одна куча. Тому, кто съел первую, стало немного обидно, и он спрашивает приятеля, сможет ли он сам съесть эту кучу за 1000 рублей? Приятель пожалел деньги. Съел. Получил 1000 рублей. Идут дальше, и один другому говорит: «Тебе не кажется, что мы задаром по куче дерьма съели?»

Затем в конце 70-х годов началась Эпоха Пышных Похорон. Один за другим уходили наши геронтократы, престарелые члены Политбюро. Брежнева на год сменил умирающий Андропов, а его, в свою очередь, находящийся при смерти Черненко. Люди шутили, что члены Политбюро живут с девизом «Умрём Генсеками».

Мрачноватый анекдот того времени. Вызывает начальник подчинённого и говорит: «На первомайской демонстрации будете нести портрет

Черненко». «Почему?» «А на предыдущей вы несли портрет Андропова. У вас рука лёгкая».

Потом появился сравнительно молодой Горбачёв. По этому поводу даже говорили, что Горбачёв единственный член Политбюро, который не пользуется поддержкой в ЦК. Появившийся несколько позднее стишок очень точно объяснил причины, почему Горбачёв так и не справился с ношей власти: «Бабы стонут, девки плачут. Этак дело не пойдёт. Михаил умеет нАчать, но углУбить не могёт».

Развернулась антиалкогольная кампания. Народ настолько опешил, что почти забыл об анекдотах. Но кое-что всё же появилось. Ограничусь одним примером, в некотором смысле протестным. Лежат в канаве двое пьяных. Один задаёт другому извечный вопрос: «Ты меня ув-важаешь?» «Я т-тобой горжусь!» — отвечает коллега. В воздухе запахло большими переменами. Появились анекдоты, предсказывающие будущее. Приходит как-то в конце 80-х годов ко мне приятель. Слегка навеселе и немного удивлённый. «Что случилось?» — спрашиваю. «Да вот, был в парткоме и рассказал там анекдот». — «Какой анекдот?» — «Да и не анекдот, а сценку. Значит, так. Толчок...» — «Что за толчок?» — не понимаю я. «Ну, рынок. Стоит Надежда Константиновна и торгует из под полы майками с надписью РСДРП. Мимо бежит Дзержинский и кричит: „Крупа, атас! Картавый на книжках засыпался“». — «Ну и что они?» — спрашиваю. «А ничего, а я вот вышел и на всякий случай выпил». Шла Перестройка. Надвигался Рынок. Мы приближались к линии смены дат.

О ветвях власти и об их плодах

Висит Груша, нельзя скушать.
Загадка не для детей

Главным признаком новой эпохи в России всегда было переписывание истории. Прежде всего переписывается история предшествующих десятилетий и меняются на прямо противоположные оценки важнейших событий. Теперь события октября 1917 года, которые раньше назывались Великой Октябрьской Революцией (всё с большой буквы) называются переворотом (с маленькой буквы), совершённым небольшой группой людей. «Мятеж не может кончиться удачей, / в противном случае его зовут иначе», — сказал поэт. Мы всегда свято верим в ярлыки и полагаем, что от них зависит смысл событий. Не буду спорить. Пусть в 1917 году произошла не революция, а переворот. Но стоит заметить, что революции могут быть как удачными, так и неудачными, а вот переворот всегда удачен. В противном случае его зовут попыткой переворота.

Согласившись с таким переименованием событий 1917 года, мы имеем теперь все основания сравнить их с тем, что произошло в декабре 1991 года, а также сравнить и последствия. Во-первых, и то, и другое — переворот, сделанный небольшой группой людей (успешность первого не подвергалась сомнению более 70 лет, второй также пока кажется успешным). Результатом первого и второго переворотов стала экспроприация. Только после первого экспроприации подверглись более богатые слои населения, а в результате второго, наоборот, беднейшие. И после первого, и после второго переворотов победители не смогли воспользоваться награбленными богатствами, поскольку к власти пришли наименее профессионально подготовленные люди и началась разруха.

За переворотом 1991 года началась продолжающаяся до сих пор вереница всевозможных реформ. Рыночных реформ. Показательно, что люди, называющие себя рыночниками, совершенно не разбираются в рыночных механизмах. Они, в частности, убеждены, что свободный рынок может что-то отрегулировать, что-то стабилизировать. Сам по себе рынок только разрушает, причём разрушает важнейшие части государственного механизма: социальную сферу, образование, медицину, а также окружающую среду.

Рыночные отношения стремятся максимизировать одну целевую, явно линейную, функцию — прибыль. А точнее, прибыль в единицу времени. И даже весьма упрощённую трёхэтапную марксовскую формулу деньги-товар-деньги рынок стремится заменить на двухшаговую деньги-деньги (вернее, деньги-Деньги). А более длинные и жизненно необходимые обществу для развития циклы деньги—образование—наука—производство—товар—деньги и вовсе не рассматриваются в рамках рыночных отношений. Профессионализм становится нерентабельным.

Но максимальное значение линейная функция достигает на границе своей области существования. И рынок выталкивает общество именно на эту границу, где оно существует на нищенском уровне (тому примеров сегодня масса). А иногда и за неё, и тогда возникают серьёзные социальные потрясения (последний пример — Аргентина). Это происходит с государствами с рыночной экономикой, которые живут в основном за счёт лишь своих внутренних ресурсов. Процветающее же общество с ярко выраженной рыночной структурой, чтобы поддерживать сложившийся высокий уровень потребления основной массы населения, вынуждено использовать внешние ресурсы во всё бóльших и бóльших масштабах. Именно это и делают нынешние Соединённые Штаты, объявившие весь мир зоной своих национальных интересов.

В принципе любое общество, использующее единственную и примитивную целевую функцию (рыночную или идеологическую), будет сползать на границу области существования. Возможно, человечеству следует взять за образец китайскую модель, в которой смешаны идеологические и рыночные критерии. Может, выход из тупика — в использовании шведского опыта. Не знаю. Во всяком случае, чрезмерная роль рыночных отношений в мире внушает серьёзные опасения за будущее человечества. И здесь я выскажу одну крамольную и почти кощунственную мысль. Возможно, человечество смогло относительно благополучно преодолеть рубеж XX столетия лишь благодаря появлению Советского Союза. И дело не в победе над фашизмом. Хотя и в этом тоже (кстати, необходимость во внешних ресурсах и толкнула Германию на путь войны). Главное, с возникновением Советского Союза у капиталистического мира появился серьёзный враг, возникла ещё одна целевая функция — борьба с коммунизмом, которая значительно уменьшила негативное влияние чисто рыночных отношений.

Сегодня руководители России надеются, что, двигаясь дорогой рыночных реформ, в отдалённом будущем мы сможем догнать по уровню жизни хотя бы Португалию. Не выйдет, в силу всё тех же рыночных законов. Как только и если только мы на несколько шагов сможем приблизиться к так называемым цивилизованным странам, нам в очередной раз укажут на своё место: «Здесь, ребята, и без вас тесновато. Так что качайте свою нефть, пока она ещё имеется, ешьте наши окорочка и не рыпайтесь».

Но я немного отвлёкся и увлёкся. Вернёмся к перевороту 1991 года. Зато, говорят нам, обошлось без большой крови. Как отделить большую кровь от малой? Кровь была и продолжает литься. Но не только в этом дело. Мы видим огромное море «бескровной крови». Это сокращение средней продолжительности жизни, уменьшение численности населения, мучительное умирание стариков, психическое и физическое вырождение детей. Помнится, святая инквизиция прибегала к сожжению еретиков, поскольку это была казнь «без пролития крови».

Вообще, между нынешним и вчерашним днём весьма много общего. Гораздо больше, чем это кажется на первый взгляд. Например, выборы. Как и прежде, избиратель никакого влияния на них не оказывает. Каждый в отдельности может быть «против», а все вместе мы всё равно «за» (за единственного включённого в бюллетень — раньше, за того, кого нужно — сегодня). Только раньше были выборы без выбора, а нынче выборы без выборов.

Раньше выборы были днём всенародного праздника. Это был День Единогласия (термин Е. Замятина). Это был день, когда все взрослые жители страны одновременно (!) испытывали чувство глубокого удовлетворения. Процедура была отлажена до совершенства. Избиратель в окружении близких и детей входил в участок (!), получал бюллетень с единственным кандидатом от блока коммунистов и беспартийных, сияя улыбкой и стараясь его не испортить, торжественно нёс бюллетень к ближайшей урне (упаси бог, избирательной!) и, исполнив долг, отправлялся в буфет, где было пиво и бутерброды с дефицитными продуктами. Иногда явка избирателей и число проголосовавших «за» превышала 100% от списочного состава. Тогда соответствующие величины (сейчас сказали бы «цифры») по указанию партийных органов корректировали, чтобы не нарушались законы математики.

Нынче всё иначе. Во-первых, мы уже не избиратели, а электорат. При этом совершенно неважно, придём ли мы на участки или же останемся дома, проголосуем за кого-то или против всех, результат от этого никак не зависит. Я думаю, уже сегодня главный политтехнолог определил результаты ближайших президентских выборов с точностью до 1%. Соответствующие данные уже имеются в его компьютере, и их не очень трудно узнать. Но это не так интересно, поскольку принципиально результат известен каждому. Если сегодня выборы кому-то и нужны, то не электорату.

Нынче выборы — это грандиозный бизнес (напомню, бизнес — это способ зарабатывания денег, не создающий никакого общественно полезного продукта), смысл которого состоит в том, что одни роют ямы, а другие эти ямы закапывают (от «копáть», а не от «кáпать»). На федеральном уровне объёмы финансовых потоков на выборах сравнимы со всем бюджетом страны. Кто же от этого откажется? Следует всё же признать, что на региональном уровне ещё встречаются случаи относительной неясности в исходе выборов чуть ли не до последнего момента. Это бывает, когда сталкиваются две равные по силам мафии и ни одна не в состоянии уничтожить другую до выборов.

Трудно со стороны разобраться в великом множестве предвыборных и выборных технологий. Я хочу выделить три: метод «от противного» (им иногда даже пользуются математики), уже упоминавшееся «плацебо» (заимствован из медицины) и «кукла» (изобретение уголовников). Метод «от противного» очень прост, как и все настоящие математические методы. Необходимо так очернить своего главного противника, чтобы он стал противен самому себе. И кто угодно будет лучше него. В идеале он должен вообще отказаться от своих притязаний.

Для обеспечения нужного результата существуют высокооплачиваемые мастера заплечных дел, настоящие виртуозы. О методе «плацебо» ('нравлюсь') я уже упоминал. Этим методом пользуется огромная армия высокооплачиваемых (приходится повторяться, поскольку все профессии, связанные с выборами, являются высокооплачиваемыми) специалистов. Широко распространён он и в самых цивилизованных и демократических государствах (например в США), но, как и положено, до совершенства или почти до совершенства доведён в России. Основная задача, как в театре, — создать правильный образ кандидата в депутаты. Как и в театре, есть узкие специалисты. Драматурги, режиссёры, гримёры, осветители и прочее и прочее. Называют их, правда, иначе — политтехнологи, имиджмейкеры, спичрайтеры и пр. Но в любом случае кандидат и депутат — абсолютно разные фигуры. И избиратель, увидев своего избранника, с изумлением бормочет: «Позвольте, позвольте, но ведь тот был совсем другой. И внешность у него была иная, и говорил он не то и не так». Я думаю, что в недалёком будущем на роль кандидатов в депутаты будут просто нанимать артистов. И это станет, помимо рекламы, основным видом заработка для артистов.

И наконец, третий широко распространённый приём, используемый в избирательных кампаниях, — это так называемая кукла. Приём этот заимствован в уголовной среде и используется при выборах по партийным спискам. В чём смысл мошенничества под названием «кукла» — известно всем. Но всё же напомню схематично одну из наиболее распространённых модификаций. Мошенник передаёт клиенту в уплату за что-то большую пачку. Клиент полагает, что в этой пачке деньги. На самом деле настоящие купюры находятся только сверху, а все остальные листки — просто бумага.

Партийные списки — «кукла» в наиболее дистиллированной форме. Избирателю сообщаются лишь первые три фамилии, которые должны быть известными избирателю и вызывать у него доверие. При этом политические мошенники идут дальше мошенников обычных. После того как «кукла» попала в думу или ещё куда-то, из неё исчезают как раз первые три фигуры, остаётся одна резаная бумага. Забавно, что одного и того же человека на один трюк дважды не поймаешь. А вот электорат оказывается гораздо более наивным. Приём «кукла» уже дважды продемонстрировала партия власти. Причём во второй раз даже с бóльшим успехом, чем в первый. Интересно, что придумают в следующий раз? Какая будет ведущая тройка? Могу предложить два варианта (отдаю идею даром). Одна тройка: Касьянов, Романцев (или Фетисов, хотя после печальной истории с Карелиным суеверные спортсмены могут и отказаться), Акунин. Другая: Пугачёва, Киркоров, Орбакайте.

Широко применяются в период предвыборных кампаний различные методы устрашения населения и провокации (помните, как лечили алкоголиков?). Иногда просто невозможно разобраться, кто и что сделал, и кому это выгодно. Взорваны дома. Первым делом обвиняют чеченцев. Это сделали они, чтобы запугать население. Да нет, объясняют нам, чеченцам это невыгодно. Их и так не любят и боятся. Эти взрывы организованы

ФСБ, чтобы люди ещё больше возненавидели чеченцев. И тут возникают третьи, просчитывающие уже на три шага вперед. Как раз именно чеченцы и организовали эти взрывы. Ведь умные люди, просчитывающие на два хода, сразу же заподозрят ФСБ. И вовсе не так, горячатся четвёртые. Эти взрывы организовал Березовский, чтобы шантажировать и чеченцев, и ФСБ. И так далее и так далее. И сегодня понять, кто совершил эти страшные преступления, совсем невозможно. Непонятно также, зачем?

И всё же подчёркиваю, что все эти изящные и преступные избирательные технологии и приёмы никакого отношения к самим выборам не имеют, в некотором роде это искусство в чистом виде, правда, искусство не ради искусства, а ради больших денег, но всё же. Голосуй не голосуй, сердцем или другим органом, всё равно получишь результат, предсказанный Глебом Павловским.

Конечно, за последнее время и формально и по сути произошло много изменений. Так, например, при коммунистах была лишь одна власть — партийная, иногда употреблялся термин «советская власть», но лишь по инерции. На самом деле была только власть партии, точнее ЦК КПСС, ещё точнее — Политбюро ЦК. Генеральный секретарь был полноценным диктатором. Партийная диктатура была не только карающим мечом, но и выполняла роль защитника для простого человека. Никто другой, кроме партии, не имел права обижать простого советского человека, а тем более его кушать. Сидя в камере, советский человек чувствовал себя в относительной безопасности. Он даже мог пожаловаться на то, что его лишили возможности читать партийную периодику. Сегодня его освободили, даже не спросив, хочет ли он этого.

«Свобода — это когда забываешь отчество у тирана», — любят иногда цитировать Бродского наши либерал-эстеты. Вернее, цитировали одно время, поскольку сегодня есть один (и только один) человек в стране, которого все и всегда непременно называют и по имени, и по отчеству. Но, цитируя Бродского, наши ценители изящного постоянно забывали второе слагаемое формулы свободы, выведенной Бродским: «А слюна во рту слаще халвы Шираза». Отказаться от халвы, причём, извините, халявной халвы, — это выше сил наших демократов. Да и диктатор сегодня иной. Он не только без отчества (на Западе, куда мы стремимся, вообще нет отчеств), но даже и без фамилии, но зато с кликухой. Имя его Доллар, кличка Бакс. И он гораздо более безжалостен, чем все сталины и гитлеры вместе взятые.

Рыночная идеология ничем не лучше любой иной идеологии. Она даже хуже коммунистической по первоначальному посылу. И самая главная ложь — в утверждении, что качество жизни возрастает с увеличением зарабатываемых денег. Я лично испытываю скорее чувство злорадства, нежели жалости, когда представляю себе образ жизни, а точнее существования, наших олигархов. Даже пивка попить не с кем. И негде. Не говоря уже о...

Прислуживают нынче Доллару несколько так называемых ветвей власти. Три, как говорится, легитимных и ещё несколько не очень. Первые три — законодательная, исполнительная и судебная власти. С литературной точки зрения забавно выглядит, что именно исполнительная власть руководит нынче двумя другими. Как-то в 1993 году законодатели попытались было получить ведущую роль, но их мягко, но твёрдо поставили на своё место и даже немного пониже, т. е. опустили. О том, как формируется законодательная власть, я уже немного говорил. О её деятельности можно много сказать. Первое время после введения демократии законодатели даже восполняли недостаток зрелищ. Заседания Думы были увлекательнее триллеров и имели такое же отношение к жизни страны, как и эти триллеры. Деятельность сегодняшней Думы проходит в глубокой тайне. И телезрителю стало намного скучнее. Сегодняшние законодатели и регионального, и федерального уровней — люди бесправные. Но похоже, что их бесправие неплохо оплачивается, и желающих занять появляющиеся время от времени вакансии хватает.

Деятельность исполнительной власти, да и сам способ её формирования лично для меня является загадкой, разгадывать которую не очень хочется. Поэтому скажу несколько слов о третьей власти — судебной. С этой третьей властью на Руси всегда возникали серьёзные проблемы. Вероятно потому, что именно через неё две другие ветви изредка соприкасались с народом. В повседневной жизни простые люди общаются только с чиновниками и милиционерами. Именно они олицетворяют власть для рядового гражданина, подобно тому, как старшина олицетворяет абсолютную власть для рядового. Так что чиновник и милиционер — определённо власть. Но к какой ветви они относятся, сказать трудно. Похоже, что к пятой, о которой несколько позже.

Своё отношение к судебной власти народ выразил в своих поговорках и пословицах. По мнению историков, на Руси исстари вред от дурных законов уменьшался их всеобщим неисполнением. При советской власти это утверждение перестало быть верным. Основной закон — Советская Конституция — была образцом для всех демократических государств. Но всё дело в том, что создавалась она как чисто художественное произведение. Поэтому лозунг «Соблюдайте Советскую Конституцию», с которым выходили на демонстрации диссиденты, вполне справедливо считался одним из наиболее антисоветских лозунгов.

Сегодня ситуация с судебной властью снова изменилась. Можно сказать, что нынче действие дурных законов усиливается их ещё более дурным исполнением. Появление же такой «цивилизованной» формы освобождения из-под стражи, как выход под денежный залог, только подчёркивает полное бесправие основной массы населения. И когда простому человеку предлагают в случае нарушения его прав обратиться в суд, то это является обычным издевательством и ещё одним нарушением прав. Но кроме трёх уже перечисленных и формально легитимных ветвей власти есть ещё несколько.

Четвёртой властью сегодня называют, а точнее, сами себя назвали, журналисты и другие служители СМИ. Я не буду говорить о том, сколь трудна и опасна нынче работа журналиста, особенно честного журналиста, а таковых, если судить по газетам и телевидению, сейчас вовсе не подавляющее большинство. Не в этом дело. При чём здесь власть? Получается, что молодой человек, окончив институт и устроившись на работу в печатный орган, сразу становится носителем властных функций. Мягко говоря, это не совсем правильно и совсем несправедливо. В отличие от представителей других профессий, журналист имеет возможность высказывать своё мнение, навязывать свои идеи, и если его возможности при этом вдруг начинают ограничивать, то раздаётся обращение к обществу с призывом защитить свободу слова. А есть ли она сегодня — свобода слова? И вообще, что это за зверь такой, «свобода слова»? Советская интеллигенция уже в годы правления Брежнева обрела полную свободу слова. У себя на кухне. И сегодня у неё этой свободы не стало больше.

Свобода слова бессмысленна при отсутствии слышимости. «Что такое случилось со мною? / Говорю я с тобою одною, / а слова мои почему-то / повторяются за стеною. / И звучат они в ту же минуту / в ближних рощах и дальних пущах, / в близлежащих людских жилищах / и на всяческих пепелищах...» Так писал Леонид Мартынов. Удивительно мощное «эхо» было при советской власти. Любой шёпот почти мгновенно разносился по стране. И первым делом он достигал ушей власти, которая реагировала быстро и решительно.

Сегодня кричи не кричи, тебя никто не услышит. Власть не обращает внимания на обвинения в самых ужасных преступлениях. Когда сегодня журналисты говорят о свободе слова, они имеют в виду свободу слова для себя любимых. Когда они выступают против цензуры, они не желают, чтобы цензура касалась их творений. Сами же журналисты, редакции газет и телевизионное начальство исполняют обязанности цензоров вполне профессионально. Только критерии нецензурности у всех свои. И называют журналисты свою внутреннюю цензуру не цензурой, а позицией редакции. Попробуйте, например, в такой сверхоппозиционной газете, какой является «Новая газета», обратить внимание на то, что манишка

Явлинского не столь уж белоснежна. Редакция такой пассаж не пропустит. Но, друзья, чтобы иметь право пользоваться своим правом, надо строго выполнять свои обязанности и не нарушать чужих прав.

Возьмём, например, рекламу. Телевизионная реклама постоянно нарушает права телевизионного зрителя, в частности его право на полноценный отдых, и даже наносит серьёзный вред здоровью. Нарушаются права автора в тех редких случаях, когда по телевизору демонстрируется Художественное произведение. Нарушаются священные в рыночной экономике права потребителя, который, приобретая телевизор, получает продукт, не соответствующий его рекламе. Если бы существовала нормальная судебная система, можно было бы подать в суд за нанесение тяжёлого морального и физического вреда. Когда вы смотрите интересный фильм (такое иногда ещё бывает) и трансляция вдруг, обычно на самом захватывающем месте, прерывается пятиминутным рекламным блоком, это больно бьёт по вашим нервам.

Вспоминаю передачу, посвящённую трагедии на подлодке «Курск». Вела её Светлана Сорокина, претендующая чуть ли не на роль нравственного эталона. И когда она вдруг, мило улыбаясь, сообщила: «А сейчас мы сделаем рекламную паузу», — стало совсем страшно. Я долго не мог уснуть в ту ночь. Следует законодательно заставить телевидение включить в рекламный блок ещё одну рекламу: «Минздрав предупреждает: реклама опасна для вашего здоровья».

Забавно также, что телевизионная реклама вовсе не выполняет своих рекламных функций. Ни один любитель пива не станет покупать рекламируемое пиво, поскольку рекламируются именно худшие сорта. Кроме того, у потенциального покупателя возникают устойчивые негативные связи. Рекламируемый товар прочно связывается с тем раздражением, которое вызвала не к месту возникшая телевизионная реклама. И его не хочется покупать. Возможно, реклама различных жвачных изделий направлена на наших стариков и старух, лишённых нормальной стоматологической помощи вместе с зубами. Ну а реклама роскошных автомобилей выглядит обычным издевательством не только в нищей провинции, но и в небогатой столице.

В ряде же случаев вообще непонятно, что рекламирует и что означает сюжет, включенный в рекламный блок. Можно высказать предположение, что рекламируется вовсе не товар, но некий образ жизни, что реклама — это средство для промывания мозгов. Похоже, что это ближе к истине. Но мне всё же кажется, что эффективность этого способа промывки мозгов даже меньше, чем методы, использовавшиеся коммунистами. Не думаю, что деревенская бабулька, насмотревшись телевизионной рекламы, помчится голосовать против Зюганова. Скорее наоборот.

Я всё же полагаю, что основная функция рекламы несколько иная. И об этом служители телеэфира с большой долей лицемерия сообщают: мол, реклама — основа нашей финансовой независимости. Всё верно. СМИ — это власть. Наибольшей властью на этой ветке обладает телевидение. Но власть в России, в рыночной России, — это деньги. Телевидение популярно объясняет производителям и непроизводителям товаров, что они должны проявлять лояльность к власти, платить ей отступного. Наиболее удобным способом для этого является реклама. Благодаря рекламе даже мелкие служители телемельпомены могут жить намного лучше, чем оболваниваемое ими население.

Но есть ещё и пятая, пожалуй, самая главная сегодня власть. В отличие от четвёртой, она сама себя властью не называет и особенно не стремится на подмостки под свет юпитеров. Пятая власть — это власть криминала. В определённом смысле она сегодня заменила власть партии. По своей вездесущности и всепроникновенности. Любой человек постоянно сталкивается с этой властью. Когда пытается организовать своё мелкое дело. Когда приходит к чиновнику за справкой. Когда его останавливает на улице милиционер. Сотни тысяч матерей по всей России в панике начинают глотать таблетки, если их ребёнок вовремя не пришёл домой. Но хватит. Не буду дальше перечислять возможности столкнуться с властью криминала.

Особенности русской национальной преступности уже знают далеко за пределами России (признаюсь, что говорю это не без злорадства). Официальные власти регулярно заявляют о необходимости борьбы с криминалом и даже составляют программу этой борьбы, основным пунктом которой является амнистия ворам, обокравшим Россию. Но как можно начинать борьбу с преступностью, когда тысячи жутких преступлений до сих пор не раскрыты и, похоже, никогда не будут раскрыты, а значит, целая армия преступников свободно разгуливает по стране?

Нам приводят в пример Америку. Практически всё коренное население Америки — потомки ссыльных преступников, почти все значительные состояния нажиты преступным путём. Нынче эти потомки, говорят нам, превратились в законопослушных людей, нисколько не похожих на своих предков-преступников. Но, во-первых, это не так, даже если судить по продукции американской массовой культуры. Во-вторых, американское государство формировалось на пустом месте (аборигены не в счёт, с ними расправились даже более жёстко, чем Сталин с чеченцами) и начало отсчёт своей истории, когда Россия уже имела богатое историческое прошлое, со своими традициями и менталитетом. В-третьих, только через пару столетий своего развития США смогли более или менее избавиться от своего криминального прошлого (может, и нам осталось немного подождать, сотню-другую лет). Но, в основном, в своей внутренней жизни. В своей же внешней политике США демонстрируют методы, характерные для преступного мира.

Нельзя всё же сказать, что с криминалом у нас не борются. Но эта борьба на поверку оказывается борьбой самих криминальных структур друг с другом. В принципе, такой способ возможен. Так, на корабле, заполненном крысами, для борьбы с ними иногда используют следующий способ. Несколько десятков живых крыс сажают в одну клетку и не кормят. Они начинают пожирать друг друга. В конце концов остаётся одна, пожравшая всех других, царь-крыса. Её выпускают на волю, и она достаточно быстро уничтожает всех оставшихся на корабле крыс.

В человеческом сообществе этот эксперимент проделать можно, но, поскольку «крыс» трудно изолировать, сначала «крысы» уничтожат всё кругом, а уж только затем примутся друг за друга. Возможно, что скоро мы придём к такой ситуации. Ну а что потом? Этот способ в нашей истории уже был опробован. В результате мы получили однопартийную систему. Стоит ли идти ещё на один виток? Есть и другой, даже более радикальный, способ избавиться от крыс на корабле — затопить корабль. Похоже, что он также изучается нашими демократами.

Россия сегодня: между панелью и папертью

Только змеи сбрасывают кожи,
Чтоб душа старела и росла.
Мы, увы, со змеями не схожи,
Мы меняем души, не тела.

Николай Гумилёв

После переворота 1991 года в России началась Эпоха Смены Душ. Возможно, что-то подобное происходило и после октября 1917 года. Но всё же не в таких масштабах. Герои стали холуями (а может, и были), коммунисты — антикоммунистами, воинствующие атеисты превратились в не менее воинствующих христиан, русские оказались евреями, законопослушные инженеры — бандитами, бандиты — законодателями. Трудно приходится тому, кто был беспартийным и стал неверующим. Всеобщее православие сочетается с не менее всеобщим сквернословием. Церковь получает лицензию на беспошлинную торговлю табаком и алкоголем и старается не замечать Чечни. Грустно становится, когда подумаешь о том, на какие средства и какими средствами восстанавливался храм Христа Спасителя.

Молодые барышни не только без стеснения, но даже и не замечая, используют непотребную лексику, а телевидение устраивает дискуссию на тему «Как правильно ругаться матом». (Возможно, правда, название было иным, поскольку начало передачи по каналу «Культура» (!) я не застал.) «Нам демократия дала / свободу матерного слова. / И нам не надобно другого, / чтоб описать её дела». (Прошу прощения у автора, имени которого не знаю.)

Самым любимым занятием наших СМИ во главе с телевидением стало сегодня подглядывание в замочную скважину, копание в грязном бельё и смакование интимных подробностей. Экраны телевидения заполнили толпы эксгибиционистов, лиц нетрадиционной сексуальной ориентации и страдающих от избытка гормонов прыщавых юнцов. Нормальный мужчина становится редкостью. Получается почти по Чуковскому: «Шли по лесу дровосеки, оказались гомосеки. Ехали педики на велосипедике. А за ними...» Признаться же в нелюбви к этим самым — значит расписаться в том, что ты расист, человеконенавистник и не достоин жить в цивилизованном обществе.

Какой-то нездоровый ажиотаж вызвала передача «За стеклом». Мне кажется, что этот ажиотаж был раздут самим телевидением. Не могу себе представить психически здорового и интеллектуально развитого человека, способного выдержать эту передачу в течение более чем одной минуты. Правда, организаторы этой передачи почему-то были убеждены, что все хулители тем не менее тайком смотрели передачу. Лицемеры твёрдо убеждены, что все вокруг сплошь лицемеры. Нередко авторы той или иной порнопередачи в ответ на протесты телезрителей отвечают, мол, не хочешь — не смотри. Есть кнопка для переключения каналов. Не буду дальше копаться в дурнопахнущей продукции нашего телевидения. Сплошной или сплошная связь-инцест. (Встречаются, но очень редко, интересные программы, прямые спортивные трансляции и даже иные передачи, но не буду их называть, поскольку это лишь моё мнение, и даже мои политические пристрастия.)

Да, у телезрителя есть право не смотреть то, что ему не хочется. А есть ли у него право смотреть то, что хочется? Когда по всем каналам идут американские боевики, передачи про то и про это и бесконечная реклама, начинаешь думать, что «Лебединое озеро» по всем программам не так уж и плохо.

Среди всех СМИ телевидение наиболее эффективно, поскольку воздействует непосредственно на безусловные рефлексы обывателя через первую сигнальную систему. Труднее приходится СМИ на бумажном носителе, которые должны ориентироваться на вторую и даже третью сигнальные системы. Им по-настоящему приходится вести борьбу за выживание. Здесь есть, впрочем как и почти для всего населения России, два пути: на панель и на паперть.

На каждом из этих путей имеются разветвления. Можно продаться (отдаться) в руки (?) какого-нибудь олигарха. Однако олигархи не любят ни с кем делиться и при первом подозрении в измене могут дать коленом и под зад, и в пах. Можно избрать более публичный и общедоступный путь. И в случае удачи... Не стану развивать очевидно возникающие здесь аналогии и ассоциации.

На паперти тоже есть своя иерархия. С одной стороны, это откровенно маргинальные издания, большею частью коммунистического толка, с минимальными тиражами, живущие за счёт случайных подаяний. Есть наглые: «Барышня, дай пятак, а то плюну, а у меня сифилис». Встречаются богатые нищие, точнее, должны быть по закону жанра. Но вычислить их не так просто, поскольку богатые нищие хорошо маскируются. Говорят, что встречаются на Руси и абсолютно честные газеты. Большею частью в провинции. Охотно верю и даже надеюсь.

Очень интересен феномен газеты «Московский комсомолец». Коммунисты должны были бы подать на эту газету в суд за использование принадлежащего им товарного знака. Тем более что сама газета всё последнее время находилась на переднем крае антикоммунистического лагеря, нарушая все законы, моральные и даже формальные. Так, во время президентских выборов 1996 года, когда развернулось подобие борьбы за пост президента, в дни проведения первого и второго туров эта газета печатала материалы в поддержку Ельцина и против Зюганова. Но я не об этом.

Я хочу обратить внимание на одну маленькую деталь, которой должно быть достаточно, чтобы уважающий себя журналист отказался печататься в этой газете. В каждом номере газеты публикуются объявления о, скажем прямо, борделях. Если ещё добавить, что тема «про это» является основной темой газеты, то картина становится вполне определённой. Похоже, что именно сводническая деятельность и является основой не только независимости газеты, но и её финансового благополучия. И когда на первой странице этой газеты вдруг появляется сообщение о том, что милиция раскрыла и накрыла очередной тайный (!) публичный дом, трудно отделаться от впечатления, что хозяева (здесь можно использовать известное французское слово) наказывают провинившихся. Возможно даже, что телефон накрытого борделя имеется в том же номере газеты. Ну а то, что проституция является одним из главных источников дохода нашей милиции, известно всем.

Да, символами сегодняшней России являются панель и паперть. И не о тех несчастных людях, которых преступная деятельность реформаторов выкинула на обочину жизни, стоит говорить. Вся Россия сегодня на обочине. Продажность и нищенство стали сегодня образом жизни на всех уровнях. Продаются всё и вся. От чиновника (это, впрочем, не ново) до депутата. Вопрос лишь в цене. Нищенство же стало чуть ли не основой государственной политики.

Ну а что поделывают наши «инженеры человеческих душ»? Если судить по литературе, заполняющей уличные прилавки, издаются сегодня большею частью растлители человеческих душ. «Кому быть живым и хвалимым, / кто должен быть мёртв и хулим, — / известно у нас подхалимам / влиятельным только одним», — писал Пастернак. Нынче кумиров творят деньги. Появился термин «раскрутка». Вложив достаточно большую сумму, можно «раскрутить» любую бездарность.

Недавно я, соблазнённый рекламой на обложке книги (каюсь), купил книгу одного модного писателя. На обложке было написано, что это Агата Кристи, Достоевский, Борхес и Умберто Эко в одном флаконе. Меня даже не насторожила истерически-восторженная кампания, организованная вокруг имени этого писателя. С большим трудом дочитал эту книгу до конца, благо находился в больнице и другого чтения не было. Согласен, в советское время не писали детективные романы. Но всё же Аркадий Адамов был интереснее новомодных авторов «криминального чтива», почему-то убеждённых, что являются писателями.

Вновь раздаётся вопрос: «С кем вы, мастера искусств?» (Но появляется и другой вопрос: «Где вы, мастера искусств?») Как и прежде, вопрос этот оказывается чисто риторическим, поскольку ответ не изменился с советских времён. «А мы с властью». Только раньше наиболее приближённые к власти становились депутатами Верховного Совета, а нынче депутатами Думы (поэтом ты не можешь быть. А депутатом?). Раньше некоторые бойцы сатирического фронта исполняли роль шутов и массажистов в предбанниках партийных саун, нынче звёзды эстрады охотно выступают на свадьбах криминальных авторитетов. (Прислуживаться рад, служить, однако, тошно.)

Возможно, да нет — наверняка, и сегодня есть прекрасные писатели, которые могут повторить слова Ахматовой: «Я была тогда с моим народом там, где мой народ, к несчастью, был». Но голос их пропадает в шуме толпы, который заглушает всякое высказывание в разрез надёжнее кляпа. Недавно застал конец телевизионной передачи «Умерла ли русская литература?». Похоже, участники передачи отождествляли себя и некую писательскую «тусовку», к которой они принадлежат, с современной русской литературой. Одна дама не без пафоса заявила, что русская литература не умерла потому, что существуют... И затем она назвала длинный список ничего не говорящих мне фамилий.

Русская литература не умерла. Она не может умереть, поскольку она бессмертна. Гениальный Бродский поставил гигантский восклицательный знак, подведя итог русской поэзии второго тысячелетия. Мудрый Солженицын продолжает своё служение Отечеству, подавая нравственный пример новым поколениям. Продолжает тихо писать свои произведения Маканин. 1937-го года рождения. И интерес к настоящей литературе, настоящему искусству, несмотря на все усилия растлителей, не пропал. Недавно я смотрел «Вишнёвый сад» в театре Моссовета в абсолютно классической и традиционной постановке Л. Хейфеца. Спектакль был самый рядовой. Зал был полон. Половина зала составляла молодёжь. Так что надежды ещё питают нас.

А что же дальше?

Наверно, после смерти пустота —
И вероятнее, и хуже Ада.

Иосиф Бродский

Под крем ораторий идём в крематорий.
Под шорох регалий займём колумбарий.
Из чрева подушно, а в черви колонной.
Законопослушно, коленопреклонно.

Гаврила Привалов

А может, упомянутый в самом начале «краснобай и баламут» не так уж и неправ, пугая нас глобальными катаклизмами. Здесь можно усмехнуться, мол, старики всегда говорят о падении нравов у нового поколения, а скорый и неизбежный конец света начали предсказывать ещё до появления современной цивилизации. Это, конечно, верно, но не забывайте об экспоненте. Она может в одночасье уничтожить то, что создавалось веками. И сегодня экспонента раскрутила скорости, на которых движется земная цивилизация, до немыслимых величин, вплотную подойдя к световому барьеру.

И здесь одна примитивная мысль не даёт мне покоя. Ведь если вероятность появления разумной жизни больше нуля, а она больше нуля, поскольку мы существуем и эту самую разумную жизнь представляем, то должны быть и другие цивилизации, в том числе и далеко обогнавшие нас в своём развитии. От них должен бы исходить мощный сигнал. Однако окружающий нас космос молчит, не подаёт признаков цивилизованной жизни. Так, может, эти цивилизации врезались в световой барьер и были съедены экспонентой? А может, они смогли решить возникшие проблемы, избавиться от рыночной и коммунистической идеологий (и религиозной?), и спокойно, погасив скорость, нащупали положение устойчивого равновесия, где и продолжают развиваться, не претендуя на покорение космических пространств? Второй вариант выглядит более привлекательно.

...А создать гениальное произведение очень легко. Например, так. Рождается человек. Запишем крик новорождённого в течение одной минуты. Через год вновь в течение минуты будем записывать звуки, издаваемые годовалым ребёнком. На ту же плёнку. И так далее. Каждый год будем записывать сначала звуки, затем слова, потом более осмысленную речь. До тех пор, пока не закончится земной путь человека. Получившееся произведение назовём «...минут из жизни человека». Окончательное название мы узнаём только в конце. В конце жизни. И тут уж кому как повезёт.

Москва, 2002 год

Где ошибка?

Большинство граждан любой страны, Соединённых Штатов или России, Японии или Израиля, в том числе и считающиеся хорошо образованными, имеют весьма смутное представление о математике и с недоверием воспринимают даже вполне математически обоснованные утверждения, если они не соответствуют сложившимся стереотипам. Причём это незнание и недоверие относится и к самым элементарным вещам. Попробуем, например, решить следующую очень простую задачу на чисто школьную тему, на проценты.

1. Фермер собрал 10 т арбузов и отправил их на барже по реке в ближайший город. Как известно, арбузы почти целиком состоят из воды. В момент отправления содержание воды в них равнялось 99%. За время транспортировки арбузы несколько усохли, содержание воды уменьшилось на 1%. (Стало равным 98%.) Чему равна масса арбузов, прибывших в город?

Многие, узнав ответ, даже самостоятельно найдя этот ответ, отказываются в него верить. (Решите эту задачу самостоятельно.) С другой же стороны, рядовые граждане зачастую просто неспособны к простейшим мыслительным действиям и готовы поверить любому идиотскому рассуждению, особенно если это рассуждение произносится уверенным тоном и публично. Рассмотрим, например, следующую старинную задачу.

2. Один отставной генерал решил продать свои сапоги. Он послал своего денщика на базар, дал ему пару сапог и велел продать их за 15 руб. Денщик встретил на базаре двух одноногих ветеранов и продал каждому из них по сапогу за 7,5 руб. Когда он рассказал об этом генералу, тот заявил, что с ветеранов и инвалидов можно было бы взять и поменьше. Генерал дал денщику 5 руб. и велел вернуть их покупателям. По дороге денщик 3 руб. прогулял в трактире и вернул каждому инвалиду по 1 руб. А теперь давайте считать. Каждый инвалид заплатил по 6,5 руб. Умножаем 6,5 на 2 и получаем 13 руб. Да ещё 3 руб. денщик прогулял.

Впервые напечатано в журнале «Quantum» № 7–8, 1998. Печатается в сокращении.

13+3 = 16 руб. Откуда взялся лишний рубль? (Подобным образом некоторые политические деятели предлагают добывать деньги на социальные программы.)

Конечно, предыдущий пример достаточно прост, но он вполне чётко показывает схему получения многих математических парадоксов. Читателю навязывается некоторое правдоподобное рассуждение, содержащее ошибку. В результате получается утверждение, противоречащее очевидным или же известным математическим фактам. (Иногда эта ошибка бывает достаточно тонкой и найти её не так просто.) В качестве примера приведём одну «теорему» по геометрии.

3. Ещё один признак равенства треугольников. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются следующие равенства: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то эти треугольники равны.

«Доказательство». Построим треугольник $AB'C$ как на рис. 1. В этом треугольнике $\angle CAB' = \angle C_1A_1B_1$, $AB' = A_1B_1$. По соответствующему признаку равенства треугольники $AB'C$ и $A_1B_1C_1$ равны. (Ведь по условию $AC = A_1C_1$.) Значит, в соответствии с условием,

$$\angle AB'C = \angle ABC, \quad AB' = AB.$$

Проведём отрезок BB'. Треугольник BAB' равнобедренный. Значит,

$$\angle ABB' = \angle AB'B.$$

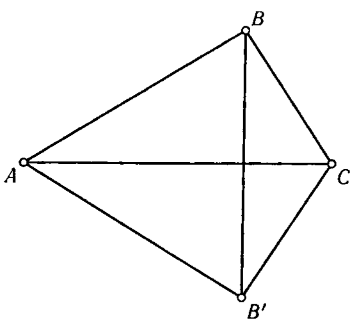


Рис. 1

Далее получаем, что $\angle CBB' = \angle CB'B$. Таким образом, треугольник CBB' также является равнобедренным и $CB = CB'$. Итак, треугольник ACB' равен треугольнику ACB по трём сторонам, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Теорема доказана?

Мы не просим вас опровергнуть утверждение теоремы. То, что она неверна, доказать нетрудно. Вопрос: где ошибка в «доказательстве»? В математике неверность того или иного утверждения далеко не всегда очевидна. Умение найти ошибку, содержащуюся в том или ином рассуждении, почувствовать наличие логического пробела является одним из важнейших умений в профессиональной математической деятельности. В математической науке известны случаи, когда через многие годы, через десятилетия обнаруживались ошибки в считавшихся безукоризненными доказательствах, более того, оказывалось, что и сами теоремы неверны. Мы рассмотрим здесь ещё несколько чисто учебных примеров. Для каждой из следующих задач будет предложено решение. Решение это содержит ту или иную ошибку, которую вы должны обнаружить.

4. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle ABD = 40°$. Известно также, что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CAD, расположены на BD. Чему равен $\angle ABC$?

«Решение». Пусть O и Q — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CAD. Поскольку перпендикуляры из этих центров к стороне AC делят эту сторону пополам, то прямая OQ перпендикулярна диагонали AC параллелограмма. Теперь из условия задачи следует, что диагонали параллелограмма перпендикулярны. Значит, данный параллелограмм является ромбом и $\angle ABC = 80°$.

Вы удовлетворены этим решением?

5. Известно, что числа p и q удовлетворяют уравнению $x^2+px+q = 0$. Найти p и q.

«Решение». По теореме Виета получаем систему: $p + q = -p$, $pq = q$. Решая эту систему, получим два решения: $p = q = 0$ и $p = 1$, $q = -2$. Есть ли у Вас какие-нибудь замечания по поводу этого решения?

6. Решить уравнение $\operatorname{tg}(x + \pi/4) = 3\operatorname{ctg} x - 1$.

«Решение». Левую часть уравнения преобразуем по формуле тангенса суммы и перейдём к новой переменной $y = \operatorname{tg} x$. Получим для этой переменной уравнение:

$$\frac{y+1}{1-y} = \frac{3}{y} - 1.$$

Из этого уравнения найдём $y = 3/5$. Значит, $x = \operatorname{arctg} 3/5 + \pi k$. И всё?

7. Сколько решений имеет уравнение $\log_{1/16} x = (1/16)^x$?

«Решение». В левой и правой частях уравнения находятся две хорошо известные взаимно обратные функции. Строим графики этих функций и «видим», что эти графики пересекаются в единственной точке, расположенной на биссектрисе первого координатного угла. Значит, данное уравнение имеет одно решение. У вас есть возражения?

Следующие две задачи не совсем соответствуют нашей теме. Их условия кажутся невыполнимыми. На это мы и обратим внимание.

8. Через вершину прямого кругового конуса проведено сечение наибольшей площади. Оказалось, что это сечение по площади в два раза больше осевого сечения конуса. Найти угол в осевом сечении конуса.

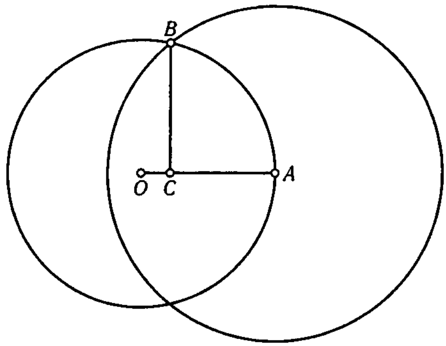


Рис. 2

Условие задачи представляется неверным, поскольку наибольшую площадь имеет именно осевое сечение конуса.

9. На поверхности первого шара расположен центр второго шара. Известно, что площадь части поверхности первого шара, расположенной внутри второго, в 5 раз меньше поверхности второго шара. Найти отношение радиусов данных шаров.

Для решения этой задачи нам потребуется формула площади поверхности шарового сегмента: $S = 2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — высота сегмента.

«Решение». Пусть R и r — соответственно радиусы первого и второго шаров. Проведём сечение плоскостью, проходящей через центры шаров (рис. 2). Имеем $OA = OB = R$, $AB = r$. Опустим из B перпендикуляр BC на OA. AC есть высота шарового сегмента, представляющего собой часть поверхности первого шара, лежащую внутри второго. Пусть $AC = h$. По теореме Пифагора для треугольников ABC и OBC составляем уравнение: $r^2 - h^2 = R^2 - (R - h)^2$.

Из этого уравнения найдём $h = r^2/2R$. Теперь по формуле площади поверхности шарового сегмента найдём $S = \pi r^2$. Но вся поверхность второго шара равна $4\pi r^2$, т. е. площадь части первого шара внутри второго всегда в 4 раза меньше площади поверхности второго. А по условию она в 5 раз меньше. Противоречие. Значит, задача не имеет решения?

Объяснения

1. Масса арбузов уменьшится ровно в два раза и составит 5 т. Для многих это кажется удивительным.

2. Неверно к 13 прибавлять 3 рубля. Тем самым деньги, которые денщик прогулял, мы считаем дважды. На самом деле $13 = 10 + 3$, где 10 рублей — деньги, полученные генералом, а 3 рубля — потраченные денщиком.

3. Если прямая BB' пройдёт через точку C, то наши рассуждения не проходят. Углы CBB' и $CB'B$ равны, но они равны $0°$, а значит, мы не можем воспользоваться признаком равнобедренного треугольника.

4. Возможен ещё один случай: когда центры указанных в условии окружностей совпадают с центром параллелограмма. Тогда этот параллелограмм оказывается прямоугольником. Задача имеет второй ответ: $90°$.

5. В условии не сказано, что p и q — два корня уравнения и других корней нет. Если $p = q$, то возможно наличие других корней, и задача имеет ещё одно решение: $p = q = -1/2$.

6. При таком решении происходит сужение области определения функций, входящих в уравнение, и теряется серия $x = \pi/2 + \pi n$.

7. Нетрудно убедиться, что числа $1/2$ и $1/4$ удовлетворяют уравнению. Но два корня уравнение иметь не может, число решений обязательно нечётно. На самом деле оба графика очень сильно прижимаются к осям координат, и тогда они вполне могут пересекаться более одного раза. Методами математического анализа несложно доказать, что в данном случае число решений уравнения равно трём. И вообще, уравнение $\log_a x = a^x$ имеет не более трёх решений. (Доказательство основано на известной теореме анализа: между любыми двумя нулями функции имеется хотя бы один нуль её производной.)

8. Все сечения конуса, проходящие через вершину, представляют собой равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами. Если α — угол в осевом сечении конуса, а γ — угол между равными сторонами в произвольном сечении, то $0 < \gamma \leqslant \alpha$. Но площадь сечения пропорциональна $\sin\gamma$. Отсюда следует, что если $\alpha \leqslant 90°$, то наибольшую площадь имеет именно осевое сечение. Если же $\alpha > 90°$, то наибольшую площадь имеет сечение, для которого $\gamma = 90°$. Теперь из условия получаем, что $\alpha > 90°$ и $\sin\alpha = 1/2$, откуда $\alpha = 150°$.

9. Мы должны сделать вывод, что второй шар содержит первый шар целиком и 5 есть просто отношение площади поверхности второго шара к площади поверхности первого; отношение радиусов (второго к первому) равно $\sqrt{5}$. Вот если бы данное в условии отношение было меньше четырёх, равнялось бы, например, трём, то задача не имела бы решения.

Откуда берутся задачи?

После некоторого размышления я решил начать эту статью с двух противоречащих друг другу высказываний, которыми следовало бы её завершить. Во-первых, не хотелось бы, чтобы каждый школьник, прочитавший эту статью, а таковые, надеюсь, найдутся, сразу кинулся сочинять собственные задачи. А во-вторых, я приглашаю всех желающих принять участие в конкурсе по составлению задач (в первую очередь геометрических)[1]. Теперь к делу. Я хочу поделиться своим довольно большим опытом в деле составления различных геометрических задач, раскрыть некоторые секреты своей кухни, сформулировать эстетические и даже этические принципы. Начну с того, что задачи удобно разделить на три группы: учебные, конкурсные и олимпиадные. Можно говорить ещё и о творческих задачах, но это скорее подтекст, нежели формальный признак, характеристика «творческая» более относится не к самой задаче, а к процессу её решения. Впрочем, стоит всё же выделить в отдельную группу задачи «проблемного» типа. Существует определённый набор характерных технических приёмов, достаточно часто используемых при составлении тех или иных видов задач.

Перефразировка

Начну с примера.

Задача 1. Докажите, что для произвольного треугольника проекция диаметра описанной около него окружности, перпендикулярного одной стороне этого треугольника, на другую его сторону равна третьей стороне.

Решение. За этой изящной словесностью скрывается широко известный факт, сопутствующий теореме синусов: $a = 2R\sin A$. (Здесь и далее a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противоположные им вершины, h_a, h_b, h_c — высоты к соответствующим сторонам, R —

Впервые опубликовано в журнале «Квант» № 8, 9, 1991.

[1] Хотя с момента написания статьи прошло более 15 лет, это приглашение остаётся в силе. Задачи можно присылать по электронной почте (адрес geom_olymp@isa.ru).

радиус описанной окружности.) Формулировка этой задачи литературно настолько привлекательна, что перед её чарами не устояли даже видавшие виды руководители «Задачника „Кванта“», включившие её в свой задачник. Задача эта скорее учебная, чем олимпиадная. Её смысл — показать известный факт с новой, неожиданной точки зрения.

Весьма распространённым является приём, который можно назвать «замена опорной фигуры». Я, как ведущий раздела «Задачи» в журнале «Математика в школе», нередко прибегаю к нему, если мне не хватает для этого раздела какой-либо не очень трудной задачи (подобные задачи обычно даются без авторской подписи). Такие задачи встречаются довольно часто. Вот пример с XXIV Всесоюзной олимпиады по математике (1990).

Широко и давно известна следующая теорема.

Теорема. *Если на прямых AB, BC и CA взяты произвольно точки C', A' и B' соответственно, отличные от вершин треугольника ABC, то окружности, проходящие через A, B', C'; A', B, C' и A', B', C, имеют общую точку.* (Иногда эту теорему называют теоремой Микеля, а общую точку пересечения окружностей обозначают через M и называют точкой Микеля.) Доказывается эта теорема в общем-то несложно. Единственная трудность, если не прибегать к ориентированным углам, состоит в необходимости перебора различных случаев взаимного расположения точек A', B' и C'. В ситуации, изображённой на рис. 1, обозначив через M точку пересечения окружностей $AB'C'$ и $A'BC'$, легко покажем, что точки A', B', C, M лежат на одной окружности.

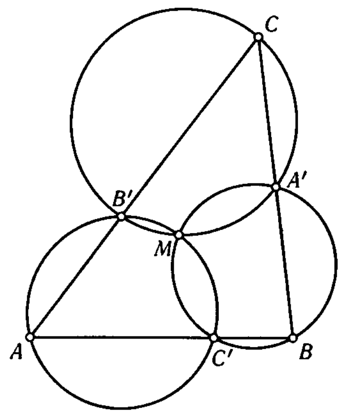


Рис. 1

А вот задача Всесоюзной олимпиады.

Задача 2. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята точка E, отличная от точек A и B. Отрезки AC и DE пересекаются в точке F. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, CDF и BDE, имеют общую точку.

Решение. Присмотревшись к рис. 2 и вдумавшись в условие, мы без труда заметим, что задача 2 совпадает с теоремой, если указанную в ней конфигурацию привязать к треугольнику AEF (переобозначив при этом буквы $E \to B$, $B \to C'$, $F \to C$, $C \to B'$, $D \to A'$). Конечно,

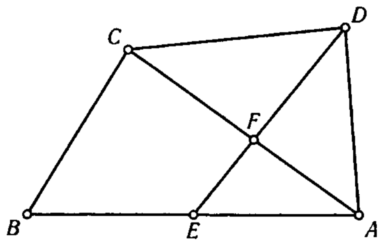


Рис. 2

формулировка задачи 2 менее естественна, а следовательно, менее эстетична, чем формулировка теоремы. Возможно, что я и ошибся в своих предположениях и неверно «вычислил» происхождение этой задачи 2. Ну что ж, тем хуже для организаторов олимпиады.

Очень красивые и эффектные задачи могут возникать при переводе геометрической задачи с геометрического языка на алгебраический. Например, возьмём известную задачу на построение треугольника по трём высотам (можете ли вы решить эту задачу?). Идея состоит в том, что треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$ по третьему признаку подобия треугольников. Пусть теперь высоты треугольника равны a, b, c, а его стороны x, y, z. Если этот треугольник остроугольный, легко получаем систему уравнений для x, y, z. Итак, имеем задачу (рис. 3).

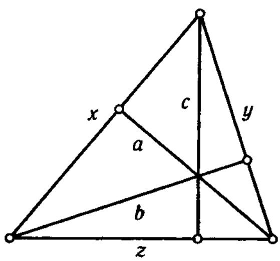


Рис. 3

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = z, \\ \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = x, \\ \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = y. \end{cases}$$

Зная происхождение этой системы, мы без труда найдём условие, при котором она совместна (остроугольность треугольника со сторонами $1/a$, $1/b$, $1/c$), а затем и решим саму систему. (Докажите при этом, что система, как и задача на построение, не может иметь более одного решения.)

К этому же разделу, хотя и с некоторой натяжкой, можно отнести изменение формулировки, связанное с переходом от прямого утверждения к обратному. (Стоит заметить, что границы между типами задач весьма размыты, условны. Одна и та же задача часто может служить иллюстрацией различных приёмов, тем более что во многих случаях итоговая задача получается за счёт комбинации различных приёмов.) Здесь возможен широкий спектр различных случаев и разновидностей, поэтому я ограничусь одним примером, показывающим, как из тривиального по сути прямого утверждения получается вполне богатая геометрическим содержанием задача. Совершенно очевидно, что точка пересечения высот (точка H) остроугольного треугольника ABC обладает следующим свойством:

$$\angle HAB = \angle HCB, \quad \angle HBA = \angle HCA, \quad \angle HAC = \angle HBC.$$

В связи с этим вполне естественно возникает задача.

З а д а ч а 4. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых имеют место равенства

$$\angle MAB = \angle MCB, \quad \angle MBA = \angle MCA,$$

где ABC — данный остроугольный треугольник.

Р е ш е н и е. Понятно, что искомому месту точек внутри треугольника принадлежит точка пересечения его высот. Кстати, здесь возникает отнюдь не тривиальная задача: единственна ли такая точка внутри треугольника? Мы докажем её единственность. Для этого продолжим AM, BM и CM до пересечения со сторонами треугольника в точках A_1, B_1

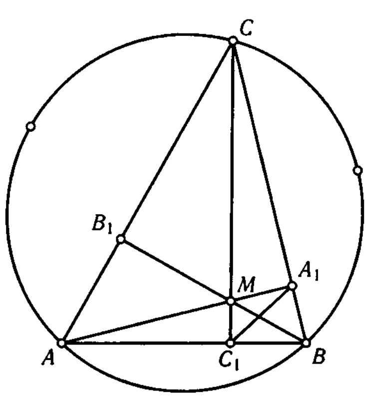


Рис. 4

и C_1 (рис. 4). Точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Значит,

$$\angle MA_1C_1 = \angle MCA = \angle MBC_1 \quad \text{и} \quad \angle MAC = \angle MC_1A_1.$$

Таким образом, точки M, B, A_1 и C_1 также лежат на одной окружности и

$$\angle MBA_1 = \angle MC_1A_1 = \angle MAC.$$

Обозначив теперь $\alpha = \angle MCA$, $\beta = \angle MCB$ и $\gamma = \angle MAC$, найдём, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, из чего следует, что AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты нашего треугольника. Однако наше геометрическое место не исчерпывается одной точкой пересечения высот. В него входит также дуга AB описанной около ABC окружности, а также середины дуг BC и CA (докажите это).

Конструкции

Чаще всего в задачах этого типа «сооружается» некая геометрическая конструкция, в качестве деталей которой берутся некие фигуры и их элементы.

Иллюстрацией здесь могут служить стереометрические задачи-«монстры», встречающиеся на экзаменах в такие вузы, как МФТИ, мехмат и ВМК МГУ и некоторые другие. Я не буду приводить примеры подобных задач, тем более что за ними не надо далеко ходить. Достаточно вспомнить стереометрические задачи из вступительных вариантов, опубликованные в журнале «Квант», № 1, 2 за 1990 и 1991 годы.

Усложнение геометрической конструкции почти наверняка приводит к многоходовости задачи, превращает её в своего рода задачу-«этажерку» (много полочек и на каждой своя задачка) или задачу-«матрёшку» (несколько задач, одна в другой).

Впрочем, такого рода задачи не обязательно должны иметь в основе сложную геометрическую конструкцию. Вот простой пример, составленный из двух (или из трёх) задач-«полочек».

Задача 5. Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.

Задача 6. Докажите, что из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решите задачи 5 и 6 самостоятельно, а мы из них сконструируем следующую задачу.

Задача 7. В окружность единичного радиуса вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Найдите площадь S этого четырёхугольника, если известно, что произведение площадей треугольников ABM и CDM равно $1/4$.

Решение. Чтобы решить эту задачу, достаточно заметить (рис. 5), что

$$S_1S_3 = S_2S_4 = \frac{1}{4}$$

(задача 5), а также что

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{S_1S_3} + 2\sqrt{S_2S_4} = 2$$

(неравенство о среднем арифметическом).

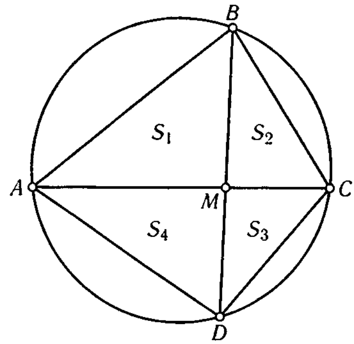


Рис. 5

Кроме того (задача 6), $S \leqslant 2$, так как площадь квадрата, вписанного в единичную окружность, равна 2. Из всего этого следует, что $ABCD$ — квадрат и его площадь 2.

Иногда целью конструкции является маскировка основной идеи или, говоря шахматным языком, добавление вступительной игры. Обычно это приводит к появлению в условии лишних деталей, мало и даже вовсе не работающих в решении, что, конечно же, снижает эстетический уровень задачи («Каждое ружьё должно стрелять!»). В качестве примера, возможно не очень убедительного, поскольку мой анализ основывается на личных домыслах, вновь возьму задачу с XXIV Всесоюзной олимпиады.

Задача 8. На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного $2n$-угольника $A_1A_2\ldots A_{2n}$ так взяты точки K и N соответственно, что

$$\angle KA_{n+2}N = \frac{\pi}{2n}.$$

Докажите, что NA_{n+2} — биссектриса угла KNA_3.

Решение. Вся суть задачи в следующем. Возьмём произвольный треугольник ABC и проведём в нём биссектрису угла B и биссектрисы углов, смежных с углами A и C (рис. 6). Эти три прямые, как известно, пересекаются в одной точке — центре вневписанной окружности треугольника ABC. (Если вы этого не знаете, докажите самостоятельно. Рассуждение полностью аналогично доказательству того, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.) Обозначим эту точку через P. Нетрудно доказать, что $\angle APC$ равен $90^\circ - (1/2)\angle B$. Верно и обратное утверждение: если на биссектрисе угла B вне треугольника ABC взята такая точка P, что

$$\angle APC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B,$$

то AP и CP будут являться биссектрисами внешних углов этого треугольника. (Докажите.) Вот и всё. Именно в этом суть ситуации, описанной в условии задачи 8. (Роль треугольника ABC играет треугольник KA_2N, вместо точки P — вершина A_{n+2}.) Весь антураж в виде правильного $2n$-угольника нужен лишь для того, «чтобы вы не догадались».

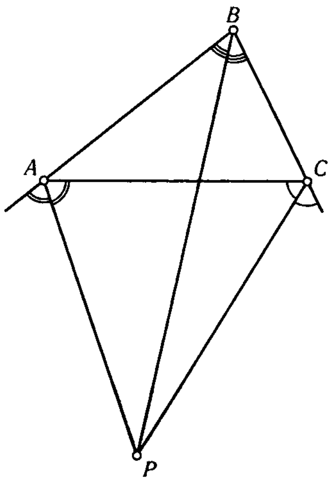


Рис. 6

Многие задачи конструируются авторами под понравившуюся им идею решения. Правда, довольно часто «решатели» находят другие, отличные от авторского, иногда более простые решения.

В связи с задачей 8 хочу в качестве примера взять одну из своих задач. Мне захотелось сконструировать задачу, в которой рассуждение о том, что три биссектрисы пересекаются в одной точке, а вернее, что в треугольнике через точку пересечения биссектрис двух углов (не обязательно внутренних, см. рис. 6) проходит третья, повторялось бы дважды, причём второй этап существенно опирался бы на первый. Получившуюся задачу нельзя назвать очень удачной, поскольку идея была реализована на известной конструкции, но всё же...

Задача 9. В треугольнике ABC $\angle B$ равен 120°. На стороне AC взята точка M, а на прямой AB точка K так, что BM — биссектриса угла ABC, а CK — биссектриса угла, смежного с ACB. Отрезок MK пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle APM = 30^\circ$.

Решение. Вот это двухходовое рассуждение. Для треугольника BMC отрезки BK и CK — биссектрисы внешних углов B и C (рис. 7). Следовательно, MP — биссектриса угла BMC, а P — точка пересечения биссектрис углов, внешних к углам B и M треугольника ABM. Значит, AP — биссектриса угла BAC.

Окончательно получаем

$$\angle APM = \angle PMC - \angle PAM = \frac{1}{2}(\angle BMC - \angle BAM) = 30^\circ.$$

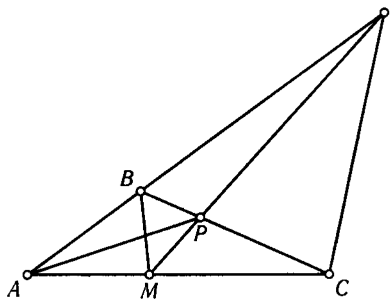


Рис. 7

Ну и наконец, задачу можно конструировать «под ответ» (так часто поступают в учебных задачах) или, более широко, «под результат». Хочу в качестве примера привести одну задачу-ловушку (весьма редко встречающийся тип задач), в которой специально подобранные числовые данные задают непривычную геометрическую ситуацию. Несмотря на определённые недостатки (пришлось прибегнуть к маленькой хитрости в формулировке условия), задача эта мне весьма дорога. Правда, её нельзя отнести ни к олимпиадным — не принято давать на олимпиадах задачи с числовыми данными, ни к конкурсным задачам — попасться в ловушку могут даже самые сильные, а это не соответствует идее конкурса. Скорее, это всё же учебная задача с воспитательным оттенком.

З а д а ч а 10. В основании четырёхугольной пирамиды лежит выпуклый четырёхугольник, две стороны которого равны 6, а две оставшиеся 10, высота пирамиды равна 7, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объём пирамиды.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что двугранные углы при основании равны или 60° или 120° (но не обязательно только 60°, именно в этом небольшая тонкость в формулировке!), а вершина пирамиды проектируется в точку, равноудалённую от сторон, а вернее, от прямых, образующих четырёхугольник. Из последнего следует, что четырёхугольник в основании не может быть параллелограммом. Две соседние его стороны равны 6, две другие, также соседние, равны 10. Но если для четырёхугольника $ABCD$ имеют место равенства

$$AB = BC (= 10), \quad AD = DC (= 6),$$

то для него есть две точки O_1 и O_2, равноудалённые от его сторон (рис. 8). Из условия следует, что расстояния от проекции вершины

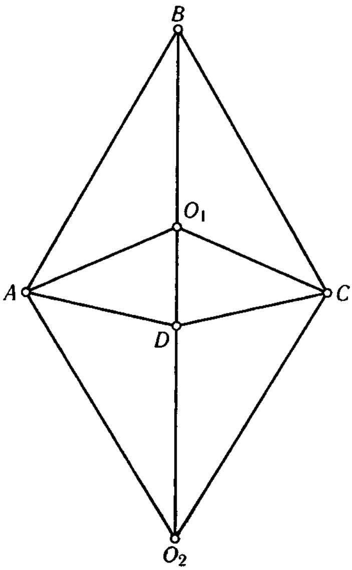


Рис. 8

пирамиды до её сторон равны $7/\sqrt{3}$. Если вершина проектируется в точку O_1 — центр вписанной в $ABCD$ окружности, то площадь $ABCD$ должна быть равной $16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$. Но площадь $ABCD$ не превосходит 60 (она равна 60, если углы A и C прямые), а $16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} > 60$. Значит, вершина проектируется в точку O_2, расстояния от которой до прямых, образующих четырёхугольник $ABCD$, равны $7/\sqrt{3}$. Теперь легко найдём

$$S_{ABCD} = (10 - 6)\frac{7}{\sqrt{3}},$$

а затем и объём пирамиды

$$V = \frac{196}{3\sqrt{3}}.$$

Частный случай

Многие общие теоремы, вооружающие нас мощным средством решения задач, такие как теорема Чевы в геометрии или неравенства о средних в алгебре, могут выступать и в качестве инструмента составления задач. Возьмём, например, теорему Паскаля: если A, B, C, D, E и F — шесть точек, расположенных на окружности, то три точки, в которых пересекаются попарно прямые AB и DE, BC и EF, FA и CD, расположены на одной прямой. Рассмотрим также задачу.

Задача 11. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке K. Докажите, что касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой KM.

Не надо обладать большой наблюдательностью, чтобы заметить, что эта задача является частным, а вернее, предельным случаем теоремы Паскаля.

Профессиональные математики, занимающиеся также и организацией математических олимпиад, нередко черпают красивые и интересные задачи из своей научной деятельности, перенося на школьную почву частные случаи серьёзных математических теорем, приспосабливая к ней те или иные леммы, в большом числе возникающие при доказательстве почти любой серьёзной математической теоремы. Правда, в геометрии такие примеры не слишком часты, серьёзная математика всё же очень далека от школьной геометрии. (Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как упрёк геометрии.) Поэтому я ограничусь одним примером, возможно, не очень ярким и характерным.

Есть такая теорема «о зигзаге». Даны две окружности (возможно, в пространстве). Известно, что существует набор из $2n$ таких точек $A_1, \ldots, A_{2n}$, что точки с нечётными номерами расположены на одной окружности, точки с чётными номерами — на другой и

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{2n}A_1.$$

Тогда таких наборов из $2n$ точек существует бесконечно много, причём в качестве точки A_1 можно взять любую точку первой окружности, а расстояние между последовательными точками будет таким же, как у исходного набора точек.

Я не знаю элементарного доказательства этой теоремы. Однако её частные случаи вполне можно использовать в качестве элементарных задач. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 12. На плоскости даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием между центрами a. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся на другой.

Задача эта достаточно проста, поэтому я ограничусь лишь указанием ответа: $\sqrt{R^2 + r^2 - a^2}$.

Варьирование условий

Простейший пример, достаточно точно иллюстрирующий этот приём, даёт такая серия задач: построить треугольник по а) трём сторонам; б) трём медианам; в) трём высотам; г) трём биссектрисам. На этом примере видно, сколь сильно может меняться уровень сложности при подобном варьировании условий. В нашей четвёрке за совершенно элементарной первой задачей следует вполне содержательная, не очень, правда, сложная, вторая задача. Третья задача уже существенно сложнее, а четвёртая — и вовсе не решается при помощи циркуля и линейки.

Любопытную идею, с помощью которой можно создавать серии задач, предложил киевский учитель математики В. Куценок. Возьмём какое-нибудь геометрическое соотношение, допустим, равенство $ah_a = bh_b$, и зададимся вопросом: каковы свойства треугольника, для которого выполняется соотношение, получающееся из рассматриваемого заменой высот на медианы или биссектрисы? В результате можно получить такую задачу.

Задача 13. На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место таких точек плоскости C, что для треугольника ABC имеет место равенство:

а) $am_a = bm_b$ (m_a и m_b — медианы треугольника ABC);

б) $al_a = bl_b$ (l_a, l_b — биссектрисы треугольника ABC).

Решение в обоих пунктах весьма сходно. Рассмотрим пункт а).

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника, AA_0 и BB_0 — медианы. Из условия следует подобие треугольников AA_0A_1 и BB_0B_1. Возможны два случая расположения точек A_1, A_0, B_1, B_0 на сторонах треугольника ABC, они изображены на рис. 9. В первом случае точки A, B, A_0 и B_0 расположены на одной окружности. Из этого, ввиду параллельности A_0B_0 и AB, следует равнобокость трапеции AB_0A_0B, а значит, равенство $AC = BC$. Во втором случае на одной окружности оказываются точки C, M, A_0, B_0. Во вписанном четырёхугольнике CA_0MB_0 диагональ A_0B_0 есть половина AB и делится диагональю CM пополам. Диагональ CM есть $2m_c/3$ и делится диагональю A_0B_0 в отношении $3:1$. Из равенства произведений отрезков диагоналей найдём

$$m_c^2 = \frac{3}{4}AB^2.$$

Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в середине AB и радиусом $AB\sqrt{3}/2$.

В пункте б) точка расположена также или на серединном перпендикуляре к AB, или на дуге окружности, из точек которой отрезок AB виден под углом $60°$.

Вообще, при варьировании условий задачи могут возникать любопытные серии. Приведу пример двух таких серий (не стремясь к их полноте).

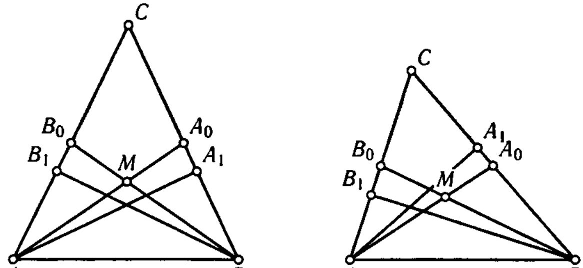


Рис. 9

Известна классическая теорема, утверждающая, что из равенства двух внутренних биссектрис треугольника следует его равнобедренность (теорема Штейнера—Лемуса). Само по себе утверждение этой теоремы вполне естественно и ожидаемо, если бы не трудности, с которыми приходится сталкиваться при её доказательстве, в отличие от родственных тривиальных теорем, касающихся медиан или высот. Уже здесь виден скверный нрав биссектрис. Но в полной мере он проявляется в следующей задаче.

Задача 14. Будет ли равнобедренным треугольник ABC, если у него:

а) равны биссектрисы внешних углов A и B,

б) равны отрезки KA_1 и KB_1, где AA_1 и BB_1 — биссектрисы внутренних углов треугольника, а K — точка их пересечения,

в) равны расстояния от точки C_1 (CC_1 — биссектриса угла C) до середин сторон CA и CB,

г) имеет место равенство $C_1A_1 = C_1B_1$,

д) окружность, проходящая через точки A_1, B_1 и C_1, касается стороны AB данного треугольника?

Во всех пяти пунктах ответ отрицательный. Наиболее нетривиально это получается в пунктах г) и д).

Ограничусь рассмотрением последнего пункта, о котором я узнал лишь недавно из фольклорных источников. При этом я покажу только, как можно построить пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего условию, не объясняя, как до этого можно додуматься.

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC (рис. 10). Возьмём на продолжениях сторон AC и BC точки A_2 и B_2 так, что $CA_2 = CA_1$, $CB_2 = CB_1$. Понятно, что точки A_1, A_2, B_1 и B_2 расположены на одной окружности. Если при этом окажется, что AC_1 и BC_1 равны касательным, проведённым из A и B к этой окружности, то она касается AB в точке C_1. (Если длина отрезка равна сумме касательных, проведённых из его концов к окружности, то этот отрезок касается окружности. Докажите это самостоятельно.) Следовательно, должны выполняться равенства

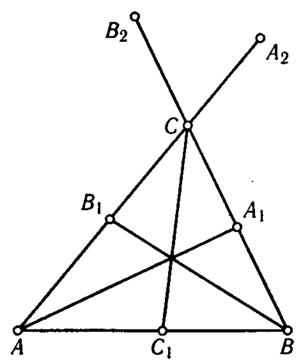


Рис. 10

$$AC_1^2 = AB_1 \cdot AA_2, \quad BC_1^2 = BA_1 \cdot BB_2.$$

Выражая отрезки сторон треугольника ABC через стороны ($AB_1 = bc/(c+a)$ и т. д.), увидим, что каждое из этих двух равенств эквивалентно соотношению

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b).$$

Остаётся убедиться, что существует неравнобедренный треугольник, стороны которого удовлетворяют этому соотношению. Нетрудно найти конкретный числовой пример. Пусть $c = 1$, $a + b = 1 + \lambda$. Тогда получим

$$ab = \lambda(2+\lambda)^2.$$

Если λ достаточно мало, то можно найти a и b, при этом $a \neq b$.

Ещё одна интересная серия задач связана с условием равногранности тетраэдра. Напомним, что тетраэдр (произвольная треугольная пирамида) называется равногранным, если все его грани — равные между собой треугольники. Известен целый ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы тетраэдр был равногранным. Не стремясь к полноте, а тем более к рекорду, сформулирую следующую многопунктовую задачу.

Задача 15. Какие из следующих условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы тетраэдр $ABCD$ был равногранным:

а) противоположные рёбра попарно равны,

б) периметры всех граней равны между собой,

в) суммы плоских углов при трёх вершинах равны $180°$,

г) выполняются равенства $\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC$,

д) выполняются равенства $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BAD = \angle BCD$,

е) все грани имеют равные радиусы описанных окружностей,

ж) все грани имеют равные радиусы вписанных окружностей,

з) все грани имеют равные площади,

и) отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны,

к) центр описанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра,

л) центр вписанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра,

м) центры вписанной и описанной сфер совпадают,

н) сумма косинусов двугранных углов равна 2,

о) на описанной около тетраэдра сфере расположены центры четырёх шаров, каждый из которых касается одной грани во внутренней точке и плоскостей трёх других граней?

Уф!.. Пожалуй, достаточно. В принципе, подобных условий можно выписать несколько десятков, особенно если учесть, что некоторые из них можно смешивать. Так, например, первые 8 условий записываются в виде трёх равенств, и мы имеем возможность выписывать новые условия, взяв, скажем, одно равенство из пункта а) (равны два противоположных рёбра) и два равенства из пункта в) (суммы плоских углов при двух вершинах равны 180°).

В данной задаче почти все условия являются необходимыми и достаточными, чтобы тетраэдр был равногранным. Вы уже, наверное, догадались, что исключением, скорее всего, является пункт ж) — опять биссектрисы безобразничают. Так оно и есть. Попробуйте сами построить пример тетраэдра с неравными гранями, но с равными радиусами вписанных в них окружностей. В качестве граней можно взять две пары неравных равнобедренных треугольников, имеющих нужное свойство.

Весьма нетривиально доказывается пункт о). Во всяком случае, достаточно элементарного доказательства я не знаю.

Кстати, пункт д) возник уже в процессе работы над статьёй. Здесь интересно, что существенной является «пространственность» тетраэдра. Если A, B, C и D лежат в одной плоскости, этого недостаточно для равенства треугольников.

Обобщение

Всё развитие математики представляет собой путь постоянных обобщений. Конечно, при использовании этого приёма для получения новых элементарных задач мы, как правило, на многое не претендуем, но тем не менее помнить и понимать его значение необходимо.

Обобщение может идти по различным направлениям. Иногда оказывается возможным в рассматриваемой задаче снять некоторые ограничения и распространить соответствующее утверждение на более широкое множество объектов. Так, однажды в старом математическом журнале я встретил следующую задачу.

Задача 16. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD является диаметром окружности, а биссектрисы углов B и C пересекаются на AD. Докажите, что имеет место равенство $AB + CD = AD$.

Решение этой задачи, приведённое в журнале, мне не понравилось. После некоторого размышления удалось найти другое решение, в котором никак не использовалось то, что AD — диаметр окружности. Это условие оказалось лишним. В результате возникла вполне новая задача.

Задача 16′. Докажите, что если биссектрисы углов B и C вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD, то

$$AD = AB + CD.$$

Суть упомянутого мною решения (есть много других) состоит в следующем. Возьмём точку P на AD, в которой пересекаются биссектрисы углов B и C. Опишем около BCP окружность и обозначим через M вторую точку пересечения этой окружности с AD. Тогда, учитывая равенство соответствующих углов вписанных четырёхугольников $ABCD$ и $BCPM$, докажем равнобедренность треугольников ABM $(AB = AM)$ и CDM $(CD = DM)$. Проделайте эти рассуждения самостоятельно.

Из этого примера также видно, сколь полезно при решении задачи не ограничиваться одним методом, рассматривать различные пути решения, уделяя особое внимание более геометричным, поскольку они глубже вскрывают внутренние свойства фигур, позволяют отделить главное от второстепенного. В связи с этим ещё один, более свежий пример. На Всероссийской олимпиаде в 1990 году (см.: «Квант» № 10, 1990) была предложена следующая задача.

Задача 17. Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC. Точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и BM пересекают сторону AC в точках T и P. Докажите, что

$$TP \leqslant \frac{1}{3}AC.$$

Уже сама формулировка вызвала у меня лёгкое чувство протеста. Слишком громоздко, много буквенных обозначений, без которых вполне можно было обойтись. Также не удовлетворило меня и решение этой задачи, приведённое в журнале. Оно в некоторой мере противоречило выработанным мною принципам, выглядело неестественным (для меня). Найдя устраивающее меня решение, я сумел также и несколько переформулировать эту задачу, сделать её более общей.

Задача 17′. Из вершины угла выходят два луча, расположенные внутри угла. Некоторая прямая пересекает стороны угла в точках D и E, а лучи — в точках K и M. Докажите, что отношение KM/DE будет наибольшим, если $DK = ME$.

Для доказательства рассмотрим какую-то другую прямую, причём можно считать, что она проходит через E и пересекает другую сторону и лучи в точках D_1, K_1 и M_1 (рис. 11). Положим $DK = ME = a$, $KM = b$, $OD_1 = \lambda OD$. Проведя через D_1 прямую параллельно DE, будем иметь

$$D_1K_2 = \lambda a, \quad K_2M_2 = \lambda b, \quad \frac{D_1M_1}{M_1E} = \frac{\lambda(a+b)}{a},$$

$$D_1M_1 = \frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a}\cdot D_1E, \quad D_1K_1 = \frac{\lambda a}{\lambda a+b+a}\cdot D_1E,$$

$$K_1M_1 = \left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} - \frac{\lambda a}{\lambda a+b+a}\right)D_1E.$$

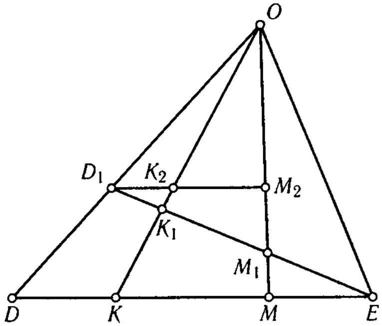


Рис. 11

Окончательно задача сводится к доказательству несложного алгебраического неравенства

$$\frac{\lambda(b^2+2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a+a+b)} \leqslant \frac{b}{2a+b},$$

которое преобразуется к виду $(\lambda-1)^2 a(a+b) \geqslant 0$.

Другим возможным направлением обобщения является перенос некоего геометрического факта с одних объектов на другие, в частности, выход из плоскости в пространство. Так возникла следующая задача.

Задача 18. К двум сферам проведены две касательные AB и CD, A и C находятся на поверхности одной сферы, B и D — на другой. Докажите, что проекции AC и BD на прямую, проходящую через центры сфер, равны.

В плоском варианте эта задача вполне проста. Да и в пространстве она не слишком сложна. (Всё следует из того, что середины общих касательных к двум сферам лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров. Докажите это утверждение.) Здесь, на мой взгляд, интереснее то обстоятельство, что пространственный аналог планиметрического утверждения остаётся верным. Такое случается не слишком часто. Нередко смысл пространственного обобщения состоит в построении опровергающего примера. Так, простейшее в планиметрии утверждение: основание хотя бы одной высоты треугольника лежит на соответствующей стороне, а не на её продолжении, — в пространственном исполнении трансформируется в вопрос.

Задача 19. Верно ли, что для любого тетраэдра основание хотя бы одной высоты принадлежит соответствующей грани этого тетраэдра?

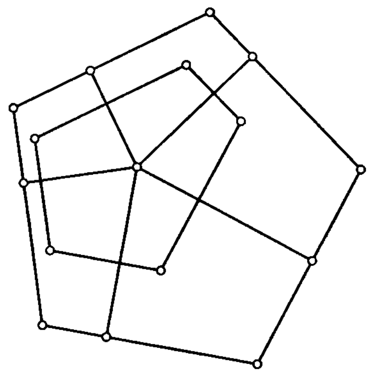


Рис. 12

Ответ на этот вопрос отрицательный. Контрпримером является тетраэдр, у которого два двугранных угла, соответствующие двум скрещивающимся рёбрам, являются тупыми.

Нередко одна и та же задача может обобщаться в различных направлениях, порождать целые обобщающие серии. Возьмём широко известную теорему: *сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна.* (Для тех, кто не знаком с этой задачей, обозначим доказательство. Площадь рассматриваемого правильного треугольника равна сумме площадей трёх треугольников, основания которых — стороны правильного треугольника, а общая вершина — какая-то точка внутри этого треугольника. И т. д.)

Утверждение этой теоремы очевидно обобщается на произвольный выпуклый равносторонний многоугольник. Менее очевидно, что она обобщается и на равноугольный многоугольник. В самом деле, пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — равноугольный многоугольник (рис. 12, $n = 5$). Рассмотрим правильный n-угольник $A'_1A'_2\ldots A'_n$ со сторонами, параллельными сторонам исходного n-угольника, и содержащий его. Для любой точки M внутри $A_1\ldots A_n$ сумма расстояний до сторон постоянна. Но расстояние до какой-то стороны исходного n-угольника меньше, чем расстояние до параллельной ей стороны второго правильного n-угольника, на постоянную величину. Значит, и вся сумма расстояний от M до сторон n-угольника $A_1\ldots A_n$ отличается от суммы расстояний от M до сторон $A'_1\ldots A'_n$ на постоянную величину, т. е. и сама является постоянной.

Можно сделать и ещё один шаг обобщения, объединяющий два предыдущих (равносторонность и равноугольность). В итоге можно сформулировать следующую теорему.

Задача 20. На плоскости даны n различных единичных векторов, сумма которых равна нулю. Рассмотрим выпуклый n-угольник, стороны которого перпендикулярны соответствующим векторам. Тогда для всех внутренних точек этого n-угольника сумма расстояний до его сторон одна и та же.

Возможны и другие пути обобщения исходной теоремы про правильный треугольник. Например, выход в пространство. Кстати, возникает вопрос, верна ли в пространстве теорема-задача 20, вернее, её аналог?

Открытия и проблемы

Предыдущие примеры иллюстрировали те или иные технические приёмы. И всё же главный источник новых задач — это любознательность, стремление всякий раз докопаться до существа дела, умение увидеть привычное с неожиданной точки зрения. Вот тогда-то и появляются самые интересные геометрические задачи, задачи-открытия. К этой категории, на мой взгляд, относится одна из наиболее симпатичных олимпиадных задач последних лет.

Задача 21. Можно ли из деревянного единичного куба выпилить три правильных тетраэдра с единичным ребром?

Задача эта предлагалась на Всероссийской олимпиаде в 1989 году. Здесь интересно то, что во многих олимпиадных сборниках обсуждалась задача о выпиливании из единичного куба двух тетраэдров. А оказывается, можно выпилить целых три! (Возьмём три попарно скрещивающиеся ребра куба. Каждое из них будет ребром одного тетраэдра. Середины противоположных рёбер каждого тетраэдра совпадают с центром куба. Докажите теперь, что эти тетраэдры более не имеют общих точек.)

Конечно, вовсе не обязательно красивый факт, обнаруженный лично вами, окажется открытием и для всего человечества. Это не так уж и страшно, тем более что многие старые геометрические теоремы являются откровением для признанных геометрических экспертов. Многое, слишком многое из тысячелетней геометрической культуры утеряно.

Одним из своих любимых геометрических открытий я считаю следующую задачу.

Задача 22. Какое наибольшее число прямых можно провести через какую-то точку в пространстве так, чтобы все попарные углы между ними были бы равны?

Ответ: 6. При этом я прекрасно понимаю, что наверняка этот факт был известен в глубокой древности, например Архимеду. То, что таких прямых не может быть более шести, несложно доказать. В самом деле, пусть l_1 и l_2 — две прямые нашего семейства, проходящие через точку O. Тогда все оставшиеся прямые должны принадлежать пересечению двух конических поверхностей: осью одной из них является прямая l_1, а прямая l_2 является одной из образующих; для второй — наоборот, l_2 — ось, l_1 — образующая. Такие две конические поверхности пересекаются не более чем по четырём прямым.

Примером шестёрки прямых, обладающих нужным свойством, могут служить диагонали икосаэдра — правильного двадцатигранника (двенадцативершинника). Если вы плохо представляете себе икосаэдр, то можете построить нужный пример следующим образом. Возьмём шесть векторов: $(a, \pm b, 0)$; $(\pm b, 0, a)$; $(0, a, \pm b)$ в качестве направляющих векторов наших прямых. Поскольку все векторы имеют одну и ту же длину, то должны быть равными абсолютные величины всех попарных скалярных произведений. Считая, что $a \geqslant b > 0$, приходим к равенству

$$a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Можно взять

$$b = 1, \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

В геометрии, как, наверное ни в одном предмете, короток путь от учебной задачи к нерешённой проблеме. В конце концов, не так уж сильно разнятся по постановке задачи: «найти наименьшее значение площади треугольника, содержащего единичную окружность» и «найти фигуру наименьшей площади, которой можно покрыть любую плоскую фигуру диаметра 1». Но если первая — простая школьная задача, то вторая — до сих пор не решённая проблема Лебега о минимальной «покрышке». Но для того, чтобы сформулировать подобную содержательную проблему, надо обладать хорошей математической культурой и вкусом. Не следует забывать пословицу, утверждающую, что один дурак может задать столько вопросов, что и сотня мудрецов не ответит.

В отличие от других математических дисциплин в геометрии возможен эксперимент в прямом, физическом смысле этого слова. Многие геометрические открытия древности явились следствием наблюдений и эксперимента. Очень возможно, что известный современный геометр Коннели, построивший деформирующийся многогранник (многогранник, который может деформироваться так, что каждая из его граней остаётся неизменной), в процессе своей работы много экспериментировал — склеивал или как-то иначе создавал пространственные модели. Многогранник Коннели разрешил одну из старейших математических проблем, а то обстоятельство, что решение этой проблемы оказалось вполне элементарным и полностью было опубликовано в журнале «Квант» (№ 9, 1978), учитывая уровень развития современной математики, кажется фантастическим. Такое возможно только в геометрии, и то крайне редко.

Здесь я хочу привести пример другого «маленького» открытия, сделанного экспериментальным путём. В элементарной геометрии есть следующая проблема: какое наибольшее число единичных квадратов можно вырезать из квадрата со стороной $4+\alpha$, где $0 < \alpha < 1$? Этой проблемой занимались многие крупные геометры, в частности, известный венгерский геометр Эрдёш. Она послужила поводом дать в журнале «Математика в школе» ради эксперимента, хотя и в ином смысле, следующую задачу.

Известно, что из квадрата со стороной $4+\alpha$ *можно вырезать* 17 *единичных квадратов. Указать как можно меньшее* α, *при котором это можно сделать.*

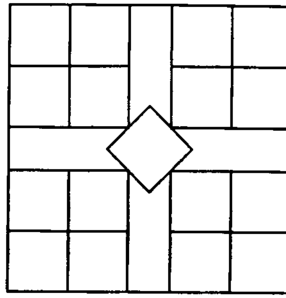


Рис. 13

Возможно, эта задача выглядит не очень красиво, но всё же некоторый смысл в ней есть. Понятно, что никто не рассчитывал на то, что читатели найдут наименьшее такое α. Большинство читателей прислали расположение, изображённое на рис. 13, для которого $\alpha = \sqrt{2}/2$.

Неожиданностью оказалось письмо от участников математической секции «Горизонт» при школе № 51 города Киева (руководитель Б. Н. Школьник). В письме было сказано, что, проделав соответствующий эксперимент (!), члены секции пришли к заключению, что наименьшее α достигается для расположения, указанного на рис. 14. (Проверьте самостоятельно, что для такого расположения α на несколько сотых меньше, чем для рис. 13).

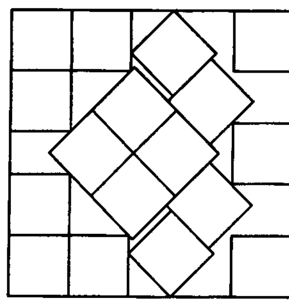


Рис. 14

Не зная описания эксперимента, трудно судить о справедливости этого утверждения. Кроме того, математическое воспитание не позволяет с полным удовлетворением воспринять подобное «доказательство». (А собственно, почему?) Очень возможно, что указанное расположение и в самом деле является оптимальным для нашего частного случая. Но самое главное, эта задача показывает, что геометрические открытия доступны буквально любому школьнику, а не только математическим гениям. Дерзайте! Да сопутствует вам успех!

Нужна ли школе XXI века Геометрия?

Ни тридцать лет, ни тридцать столетий
не оказывают никакого влияния на ясность
и красоту геометрических истин.

Льюис Кэрролл

Не знающий Геометрии не допускается.

Надпись при входе в Академию Платона

Вступление

Развивая мысль Пуанкаре, высказанную ещё в начале XX столетия, доводя её в некотором смысле до абсурда, Владимир Арнольд в конце того же столетия говорит: «Математика — это часть физики». Соглашаясь с этой формулой, я всё же хотел бы её продолжить: «А физика — часть Геометрии».

И вновь вернёмся к началу прошлого столетия. Великий французский архитектор Ле Корбюзье как-то воскликнул: «Всё вокруг геометрия!» Сегодня, уже в начале XXI столетия, мы можем повторить это восклицание с ещё большим изумлением. В самом деле, посмотрите вокруг — всюду геометрия! Современные здания и космические станции, авиалайнеры и подводные лодки, интерьеры квартир и бытовая техника, дорожные развязки и городские парки, микросхемы и даже рекламные ролики. Воистину, современная цивилизация — это Цивилизация Геометрии.

Геометрические знания и умения, геометрическая культура и развитие являются сегодня профессионально значимыми для многих современных специальностей: для дизайнеров и конструкторов, для рабочих и учёных. И уже этого достаточно, чтобы ответить на вопрос: «Нужна ли в XXI веке геометрия в школе?» И всё же сегодня мы отчётливо слышим голоса, призывающие если и не полностью исключить геометрию из школьных программ, то, по крайней мере, значительно сократить программу по геометрии. При этом голоса эти раздаются и со

Впервые напечатано в «Математическом просвещении» № 8, 2004.

стороны людей, причисляющих себя (я полагаю, по недоразумению) к профессиональному математическому сообществу. Странным образом самому существенному сокращению подвергаются программы по пространственной геометрии, наиболее практически значимому сегодня разделу. (Стереометрия полностью исключена из международных математических олимпиад!) И если де-юре Геометрия пока ещё сохраняется в (российской) школе, то де-факто она почти исчезла. Знакомство же с материалами ЕГЭ вынуждает нас убрать это самое «почти». И вообще, система тестирования несовместима с геометрией. Поэтому приходится подробно отвечать на вопрос, зачем нужна школьная геометрия?

Об образовании и устройстве мира

(Двусмысленность в заглавии отнюдь не случайна.) Говоря о целях, которые реализуются при изучении того или иного предмета, мы должны исходить из общих целей системы образования. А здесь главными являются две: воспроизводство существующей в стране социальной системы и её развитие. И в зависимости от уровня развития страны и даже просто от качества жизни основной массы жителей ведущей целью является либо первое, либо второе. Понятно, что в этом месте расходятся главные цели образования для стран с высоким уровнем развития и стран отстающих. Проще говоря, для богатых и бедных стран. Понятно также, что копирование слаборазвитыми странами систем образования стран высокоразвитых приведёт к сохранению сложившейся иерархии между странами, а значит, стратегически полезно именно странам с наиболее высоким уровнем развития.

Глобализация экономики, создание единой общемировой рыночной системы привели к резкой поляризации в мировой цивилизации. В результате значительной разности потенциалов между полюсами возникли мощные потоки. От одного полюса к другому следуют ресурсы всех видов: природные, людские, интеллектуальные, а обратно направляется готовая продукция и управляющие сигналы. При этом «добавленная стоимость» целиком остаётся на одном из полюсов, увеличивая эту разность потенциалов. Однако общемировой образовательный ландшафт не совсем соответствует ландшафту экономическому. Да и система образования плохо подчиняется рыночному управлению. И в этом таятся определённые угрозы существующей иерархии мира.

Что же касается непосредственно геометрии, то следует заметить, что она является очень мощным средством развития личности в самом широком диапазоне. Возможно, именно по этой причине в странах, где качество жизни большей части населения высоко, геометрия обычно изучается на очень низком уровне. Ведь геометрия развивает свойства личности (она способствует творческому развитию, нравственному воспитанию, независимости суждений и поведения), весьма привлекательные с общечеловеческих позиций, но при широком их распространении угрожающие стабильности отдельно взятому даже процветающему сообществу (страшно подумать, что случится, если к власти придут творчески думающие и высоконравственные люди).

Даже среди дисциплин математического цикла геометрия выделяется своим вольнодумством, неким особым свободолюбивым характером, нежеланием подчиняться стандартам, нормам, алгоритмам и даже логике. Поэтому можно понять стремление руководителей разных мастей и уровней ограничить программы по геометрии, сузить пространство её учебных целей. («Целью обучения геометрии является логическое развитие учащихся».)

А с другой стороны, само образование является элементом рынка. И при разумном подходе стрáны, не очень преуспевающие в экономике, но с хорошей системой образования могут использовать её элементы на внешнем рынке и помочь себе тем самым экономически. В условиях всё той же глобализации Россия могла бы выступать не только в качестве поставщика сырья богатым странам, но и предоставлять услуги по развитию математического образования. Российское математическое образование пока ещё котируется в мире. И возможно, именно школьная геометрия могла бы здесь сыграть ведущую роль.

Кстати, торговля российским математическим образованием уже давно развернулась по всему миру, но дивиденды получают отдельные ловкие люди, зачастую просто присвоившие себе не принадлежащую им интеллектуальную собственность. Можно даже углядеть определённое сходство с природными ресурсами (также присвоенными) в виде наличия ренты. Там природной, здесь интеллектуальной.

В последнее время внимание учёных — математиков и специалистов в области математического образования — всё больше и больше привлекает элементарная геометрия. И здесь, на мой взгляд, лидерство России наиболее заметно. Похоже, именно в геометрии особо заметен евразийский характер русской культуры. В истории геометрии ярко видны две ветви, западная и восточная. Западная геометрия строилась по Евклиду, а затем по Декарту. Здесь во главу угла ставились точные логические конструкции, систематичность, общие теории. Восточная геометрия опиралась на наглядность, геометрия была скорей элементом культуры, искусства, даже культа, нежели наукой. И эти две ветви тесно переплелись в России, географически и геометрически служившей мостом между Западом и Востоком. Само положение России наиболее благоприятствовало развитию синтетической геометрии, которая сегодня особенно привлекает специалистов. И я убеждён, что в области преподавания геометрии мы занимаем лидирующее положение в мире. Нам есть, что предложить миру. Пока есть.

И эти два обстоятельства — несоответствие устройства мировой системы образования экономическому устройству мира и её рыночные возможности — и определяют наблюдаемое сегодня стремление единственной оставшейся супердержавы взять под контроль общемировую систему образования. В первую очередь математического, ведь именно математическое образование интернационально в своей основе (имеет «ртутный» характер) и оказывает самое большое влияние на развитие земной цивилизации. И поэтому не следует удивляться тому, что всё руководство в различных международных структурах, занимающихся проблемами математического образования, оказалось в руках представителей этой самой супердержавы, в которой, по общему мнению, математическое образование едва ли не худшее в мире. На этом всемирном образовательном рынке действуют обычные рыночные механизмы. Более сильные и богатые не пускают на него более слабых и бедных, несмотря на то, что и качество продукта лучше, да и цена меньше. И в средствах сильные, как всегда, не стесняются.

И в конце этого раздела я хочу сказать, возможно, не совсем по делу, несколько слов в связи с проходящей в России реформой — модернизацией среднего образования. По мнению многих специалистов, это не реформы и не модернизация, а разрушение сложившейся системы образования. Так в чём же дело? Почему реформы продолжаются и поддерживаются на самом высоком уровне? Неужто там сидят люди уж совсем ничего не понимающие? По этому поводу высказывалось много мнений. Добавлю одно соображение.

В Советском Союзе сложилась хорошая система образования, основной целевой установкой которой было творческое развитие учащегося (что, признаемся, весьма странно для тоталитарного режима). Математическое образование же в Советском Союзе чуть ли не официально признавалось лучшим в мире. И я убеждён, что именно система образования была фундаментом всех значимых побед Советского Союза (индустриализация, война, атомная бомба, выход в космос), и она же стала одной из главных причин, приведших к распаду Советского Союза (не буду заходить здесь слишком далеко и вычленять особо роль геометрии). Её сохранение на прежнем уровне может стать источником постоянно действующей угрозы для новой, а по сути перекрасившейся старой номенклатуры. И дважды повторять не приходится, инстинкт самосохранения у номенклатуры развит посильней, чем у зверя. А возможностей для соединения у номенклатур разных стран гораздо больше, чем у пролетариев.

Воспитание геометрией

Целью изучения геометрии, конечно, является знание. Но следует признать, что эта цель по отношению к геометрии второстепенна, поскольку большинство школьных геометрических знаний не востребовано ни в практической жизни человека, ни даже в научной деятельности. Более важно, что геометрия есть феномен общечеловеческой культуры. Некоторые теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников мировой культуры. Человек не может по-настоящему развиться культурно и духовно, если он не изучал в школе геометрию; геометрия возникла не только из практических, но и из духовных потребностей человека.

История человечества пишется в трёх книгах. Это История Вражды, история войн, революций, мятежей и бунтов. Из них большею частью складывается История Государства. Это История Любви. Её пишет Искусство. И это История Мысли человеческой. История Геометрии не только отражает историю развития человеческой мысли. Геометрия издавна является одним из самых мощных моторов, двигающих эту мысль. Возникшая несколько тысячелетий тому назад теория конических сечений, пополненная открытыми Кеплером законами, вымостила дорогу человечества в космос. (Кстати, о прикладном и практическом значении геометрии.)

Геометрия, да и математика в целом, представляет собой очень действенное средство для нравственного воспитания человека. В романе «Война и мир», характеризуя старшего князя Болконского, Николая, Л. Н. Толстой пишет: «Он говорил, что есть только два источника людских пороков: праздность и суеверие, и что есть только две добродетели: деятельность и ум. Он сам занимался воспитанием своей дочери и, чтобы развить в ней обе главные добродетели, давал ей уроки алгебры и геометрии и распределял всю её жизнь в беспрерывных занятиях».

Научной и нравственной основой курса геометрии является принцип доказательности всех утверждений. И это единственный школьный предмет, включая даже предметы математического цикла, полностью основанный на последовательном выводе всех утверждений. Людьми, понимающими, что такое доказательство, трудно и даже невозможно манипулировать. В то время как власть никогда не утруждает себя доказательствами. (Отсюда совет тем, кто хочет стать политиком, идти во власть: не занимайтесь геометрией.)

Какая геометрия?

Итак, вроде всё ясно, Геометрия — один из важнейших предметов, причём не только среди предметов математического цикла, но и вообще среди всех школьных предметов. Её целевой потенциал охватывает необычайно широкий ареал, включает в себя чуть ли не все мыслимые цели образования. Так почему же ещё продолжаются споры о роли и месте геометрии в школе?

Следует сказать, что спор по поводу школьной геометрии напоминает порой известный спор из чеховских «Трёх сестёр»: «Черемша — лук. Чехартма — мясо». Спорят о разных предметах. И поэтому, когда мы пытаемся ответить на вопросы: Нужна ли в XXI веке школьная Геометрия? Зачем будет нужна в школе Геометрия? — необходимо пояснять, о какой Геометрии идёт речь. Есть Геометрия и геометрия.

Перефразируя известное высказывание Толстого, мы можем сказать: «Хорошие курсы Геометрии могут быть построены разными способами, плохие же большею частью очень похожи друг на друга». Есть три основных способа уничтожить Геометрию и соответственно три основных типа курсов анти- (лже-, псевдо-) геометрии. Причём, несмотря на различие подходов, соответствующие учебники схожи друг с другом, они плохо структурированы, написаны на скверном языке (и литературном, и изобразительном), изобилуют логическими неувязками.

Самое удивительное, что логические пробелы и проколы характерны для курсов, претендующих чуть ли не на абсолютную логическую строгость, концептуально построенных на формально-логической (аксиоматической) основе. Такие курсы весьма распространены в российской школе. Характерные признаки: множество чисто формальных определений, зачастую делающих определяемое понятие неузнаваемым; длительная возня с первоначальными понятиями, в результате чего в течение чуть ли не половины курса школьник не узнает ничего нового; обилие многословных рассуждений, а точнее пустых сочетаний слов, выдаваемых за рассуждения, доказывающих очевидные факты и делающих этот очевидный факт абсолютно непонятным, а самое главное, дискредитирующих саму идею доказательства. Подобные курсы быстро и надёжно убивают всякий интерес к предмету. Как говаривал незабвенный Николай Озеров, «такой хоккей нам не нужен».

Следующей разновидностью псевдогеометрии являются курсы практическо-прикладного типа. При этом практическая направленность понимается в узкоутилитарном смысле. Всё содержание сводится к небольшой подборке формул для вычисления длин, площадей и объёмов. Подобные курсы были распространены в России на заре советской власти, а сегодня они характерны для западной школы, в частности американской (насколько мне известно). Исторически подобные курсы оправдывает этимология слова «геометрия». Но геометрия уже давно вышла за узкие рамки «землемерия». Да и практическая деятельность людей ставит перед ними сегодня совершенно иные практические задачи, в том числе и геометрические. Далеко не «землемерные». И получается, что обе рассмотренные разновидности геометрических курсов не соответствуют заявленной концепции: формально-логические содержат формально-логические ошибки, а практически-прикладные не дают знаний и умений, полезных в прикладной и практической деятельности.

И если с этими двумя типами геометрических курсов всё понятно, то с третьей разновидностью, которую я тоже причисляю к антигеометрии, всё не столь однозначно. Речь идёт о «королевском» пути в Геометрии, указанном Декартом. Созданный им метод координат позволяет, как полагал его создатель, среднему и даже посредственному человеку достичь высот, доступных ранее лишь особо одарённым. Кто-то из последующих классиков заметит, что «Декарт покрыл Геометрию паршой алгебраических формул».

Надо признать, что координатный метод позволяет единообразно решать самые трудные геометрические задачи. Даже среди победителей международных олимпиад встречаются школьники, владеющие, по сути, лишь одним координатным методом, но владеющие им виртуозно, способные решить этим методом чуть ли не любую из предлагаемых на олимпиадах геометрических задач. (И здесь, кстати, следует сделать серьёзное замечание по поводу качества геометрических задач на современных математических олимпиадах.) И всё же я убеждён, метод координат (наряду с тригонометрией) является одним из самых действенных методов борьбы с геометрией, и даже уничтожения геометрии. И вреден он на всех этажах школьного образования, и для слабых школьников и для самых способных.

Что касается слабых, отстающих или попадающих по тем или иным причинам в категорию отстающих по математике школьников, то здесь опасность чрезмерной алгебраизации достаточно очевидна. Большей частью в этой группе находятся дети, которые плохо считают, с трудом понимают и запоминают формулы и т. д. Для этих детей Геометрия могла бы стать предметом, за счёт которого они могли бы повысить свой статус в классе, компенсировать недостатки общематематического развития. А вместо этого она ложится на них дополнительным грузом, причём на ту же чашу весов, где находится и алгебра, вынуждает заниматься неинтересной и трудной для них деятельностью.

А чем же опасна подобная алгебраическо-координатная геометрия для одарённых детей? Дело в том, что координатный метод, алгебраический метод оставляют в стороне геометрическую суть изучаемой геометрической ситуации. Воспитывается исполнитель, решающий заданную конкретную задачу. Не меньше, но и не больше. Не развивается геометрическая и даже математическая интуиция, столь необходимая математику-исследователю. Возможно, именно поэтому (отчасти) победители международных олимпиад не так уж часто становятся высококлассными учёными. Однако координатный метод очень удобен, он универсален, его легко формализовать, тренировать, и прочее и прочее. И пока на международных олимпиадах сохранится нынешний стиль (качество задач, способы проверки и оценки), пока целью ведущих стран будет оставаться победа любой ценой, учебники по «координатной геометрии» будут одними из самых востребованных школьных учебников, во всяком случае, при обучении сильных школьников (одарённых?).

Безусловно, тремя этими разновидностями вовсе не исчерпывается плохая геометрия. Нередко встречаются всевозможные логическо-практические смеси, рядом возникают модернистские и даже постмодернистские интегрированные естественнонаучные курсы. Но ещё раз подчеркну, все эти курсы легко узнаваемы. И чтобы их узнать, достаточно прочитать оглавление и пролистать учебник.

Итак, какой не должна быть Геометрия, более или менее понятно. А какой же она должна быть? Не думаю, что возможен полный ответ на этот вопрос. Даже представления об идеальном курсе у разных людей, и простых и великих, различны. Но идеалы, как известно, недостижимы. Да и не следует объяснять другим, каким должен быть этот курс, как бы ты сам его написал, если бы умел. «Сделай сам». И всё же одно мне кажется бесспорным. Вспоминая изречение Брежнева «Экономика должна быть экономной» (с моей точки зрения, абсолютно верное утверждение и даже вовсе не бессмысленное), я говорю: «Геометрия должна быть геометрической», а не аналитической или алгебраической. Я также не согласен с известным определением: «Геометрия — это искусство правильно рассуждать на неправильном чертеже». Какой-то мазохизм! Всё равно что: «Вокал — это умение правильно петь под фальшивую музыку». Главным действующим лицом Геометрии должна быть фигура (на плоскости — треугольник и окружность), а главным средством обучения — рисунок, картинка. Правильный рисунок и красивая картинка! *Геометрия, впрочем, как и алгебра, является носителем собственного метода познания мира.* Овладение этим методом — важнейшая цель образования.

Хочу добавить ещё одно утверждение по этому поводу, вполне очевидное для меня, но с которым не все, наверное, согласятся. Учебник по геометрии не должен сводиться лишь к выстраиванию геометрической теории. Процесс изучения Геометрии включает самые разнообразные виды деятельности. В том числе, и даже в первую очередь — решение задач. Задача — это не только умения, это и элемент знания.

Ученик должен ознакомиться с определённым набором достаточно трудных геометрических задач, освоить некоторые геометрические методы, научиться решать задачи, следуя известным образцам. Кстати, именно в этом и состоит, по сути, процесс обучения алгебре. Мы показываем ученику методы, приёмы, сообщаем алгоритмы, которые трудно, почти невозможно найти самостоятельно.

В геометрии, в отличие от алгебры, подобных алгоритмов очень мало, почти нет. Почти каждая задача по геометрии является нестандартной. Поэтому при обучении возрастает значение опорных задач, сообщающих полезный факт либо иллюстрирующих метод или приём. Я полагаю недопустимым предлагать задачи на минимальном уровне, на тройку. Задача должна быть нормальной задачей, а оценивать мы должны, сколь далеко ученик ушёл от полного нуля и приблизился к полному решению. (Кстати, именно так обычно оцениваются задачи на олимпиадах и вступительных экзаменах.)

Геометрия при обучении одарённых и отстающих детей

Одной из важнейших социально-педагогических задач, стоящих сегодня перед системой образования, является задача дифференцированного обучения, обучения детей с разным уровнем развития и различными способностями. И здесь очень важна роль геометрии. Геометрия становится одним из немногих (единственным?) универсальных средств, в равной мере работающим на различных этажах образования, включая крайние, и даже особенно на крайних: при обучении одарённых детей и при обучении отстающих детей.

Следует иметь в виду, что два обозначенных множества (одарённые и отстающие дети) имеют вовсе не нулевое пересечение. Большинство из нас (я имею в виду не рядовых учителей, а математиков, занимающихся проблемами образования) большею частью имеют дело именно с одарёнными детьми. Но многие дети попадают в разряд отстающих (по математике) вследствие плохих программ по математике, неудачных методик и даже конфликта с учителем. И здесь возникает важнейшая общественно-педагогическая задача: помочь им вовремя избавиться от ярлыка. Ведь среди них нередко встречаются и одарённые дети. Но, наверное, ещё более общественно и социально важной задачей является проблема реабилитации детей действительно отстающих в своём развитии. В определённом смысле при обучении одарённых детей геометрия — это спорт, со своими профессионалами и даже рекордсменами, в то время как для остальных школьников геометрия — это вид деятельности наподобие физкультуры.

Свои корректирующие и развивающие функции геометрия реализует различным образом на разных этапах школьного образования. (Я исхожу не из того, что есть на самом деле, а из того, что, по моему мнению, должно быть. Как сказал Бродский: «Не в том суть жизни, что в ней есть, но в вере в то, что в ней должно быть».) С 1-го по 6-й класс геометрия, по сути, является разновидностью физкультуры, интеллектуальной физкультурой. И включиться в занятия геометрией можно в любой момент. А это, признаемся, нетипично для математики. Здесь большею частью даже небольшой пропуск по болезни или по иной причине, незнание или непонимание одной темы может привести к отставанию, которое не так легко ликвидировать. С 7-го класса в российской школе по традиции (и я не вижу причин отказываться от этой традиции) начинается систематический курс геометрии, или курс систематической геометрии. И здесь уже исчезает либерализм, присущий предшествующему этапу. Курс выстраивается в жёсткой последовательности (возможно, различной для разных учебников), и выпадение одного звена разрушает эту последовательность. (Кстати, курс алгебры, наоборот, распадается на отдельные темы.)

Что надо сделать, чтобы систематический курс смог охватить разные категории учащихся? Здесь, на мой взгляд, необходимо уделить особое внимание первому, начальному этапу (7-й класс). Хорошо, если мы имеем дело с ребёнком, который познакомился с хорошей Геометрией в предыдущих классах. Если же нет, то нашей первой задачей является задача заинтересовать. И эта задача вступает в серьёзное противоречие с требованием «систематичности»: мы изначально рассматриваем ученика как своего рода «чистый лист» (с точки зрения геометрических знаний), который следует заполнить в определённой последовательности. Мы не имеем права использовать уже имеющиеся у него знания, знания «со стороны», и даже апеллировать к здравому смыслу. И возникает опасность не то что не развить интерес к Геометрии, но, наоборот, отбить всякий интерес, привить идиосинкразию к ней.

Но всё же я убеждён, что задача «заинтересовать» на первом этапе вполне решаемая. Главные инструменты: красивая картинка, хорошая задача и живой язык. Мы должны достаточно долго держать открытой дверь в Геометрию, заманивая туда ученика. Надо постараться в некотором смысле развить в нём зависимость от Геометрии: интеллектуальную, психологическую, а может, и физиологическую (?). И тогда мы легче сумеем решить задачу второго этапа систематического курса — научить.

На последнем этапе (я имею в виду цикл с 7-го по 9-й классы) в числе прочих возникает важная методическая задача «повторить». На этом этапе мы имеем возможность компенсировать оставшиеся пробелы и пропуски и (что самое главное) показать ученику Геометрию целиком, в виде единого и готового здания, которое мы в течение трёх лет строили.

Но роль Геометрии при обучении математике не исчерпывается собственно Геометрией. Широкое использование геометрии в негеометрических разделах школьного курса может значительно улучшить общематематическую подготовку школьников. Геометрические интерпретации позволяют лучше понять вывод алгебраических формул, правил и законов арифметики, сделать их наглядными, более понятными, запомнить их. Психофизиологической основой, позволяющей геометрии в равной степени и развивать детей одарённых, и реабилитировать детей отстающих, является выявленная физиологами функциональная асимметрия головного мозга человека.

Оказывается, наши полушария по-разному думают. Левое ведает логическим, алгоритмическим мышлением. Работает левое полушарие лишь во время бодрствования. Когда человек спит, оно выключается. Правое отвечает за чувственную, образную сферы нашего сознания. Правое полушарие функционирует постоянно. Наши сновидения — продукт деятельности правого полушария. Некоторые из известных методик обучения математике чрезмерно перегружают левое полушарие. Это очень опасно именно на ранних ступенях школьного обучения и особенно в отношении детей с доминирующим правополушарным типом мышления, а таких детей довольно много, возможно даже, подавляющее большинство. В результате мы имеем учебные перегрузки, стрессы и даже неоправданную дебилизацию некоторых учеников, которые начинают отставать в своём интеллектуальном развитии. Широко известно, что переучивание левши может привести к ослаблению его умственных возможностей. Переучивание же «интеллектуального левши» может привести и вовсе к трагическим последствиям.

Отсюда можно сделать вывод, и этот вывод уже подтверждён практикой, что при широкой геометризации школьной математики на её начальных ступенях значительно сокращается число отстающих, лучше усваиваются и негеометрические разделы. У детей развивается воображение, а тем самым значительно возрастает творческий потенциал. Геометрия очень важна для полноценного физиологического (не только интеллектуального) развития ребёнка. Уже сам процесс занятий геометрией имеет большое развивающее значение.

Геометрия является первичным видом интеллектуальной деятельности как для всего человечества, так и для отдельного человека. Мировая наука начиналась с геометрии. Ребёнок, ещё не научившийся говорить, познаёт геометрические свойства окружающего мира. Многие достижения древних геометров (Архимед, Аполлоний) вызывают изумление у современных учёных, и это несмотря на то, что у них полностью отсутствовал алгебраический аппарат. И замечу, продолжая аналогию между общечеловеческим и индивидуальным, что геометрические возможности детей младшего и среднего возраста почти не зависят от уровня их математической подготовки.

И теперь отдельно несколько тезисов о работе с математически одарёнными школьниками. *Работа с математически одарёнными детьми состоит из трёх этапов: заинтересовать, выявить (отобрать), научить.* Здесь я хочу подчеркнуть, что этап «заинтересовать» может длиться чуть ли не до окончания школы. Очень важна роль геометрии на первых двух этапах. Посредством геометрии можно заинтересовать математикой многочисленные категории школьников, даже не очень хорошо обученных (об этом я уже говорил). И опять же, посредством геометрического материала мы можем отбирать детей именно талантливых, а не специально обученных.

В основе работы с одарёнными детьми должен лежать парный принцип: демократизм и элитарность. С одной стороны, мы должны дать возможность получить полноценное образование детям всех социальных слоёв, на всех этапах обучения оставляя открытыми двери для талантливых детей (демократизм). А с другой, обеспечить высокий уровень подготовки одарённых детей, чтобы создать подлинную научную элиту. Талантливость и обученность — вот два критерия отбора в эту элиту. Геометрия прекрасно соответствует сформулированному принципу. Нередки случаи, когда прекрасно подготовленный олимпиадный профессионал не справляется на олимпиаде с геометрической задачей, и именно эту задачу, чуть ли не единственную, решил не подготовленный специально школьник. Многие задачи олимпиад высокого уровня просто непонятны не только обычным школьникам, но и рядовым учителям. Единственное, что ещё соответствует на олимпиадах содержанию школьных программ, это задачи по геометрии. Кроме того, олимпиада, особенно в своей геометрической части, если, конечно, она разумно выстроена, нередко даёт возможность проявить себя и не слишком успевающим по школьной программе детям.

Следующий принцип работы с одарёнными детьми — комфортность и многоступенчатость. Система олимпиад, являющаяся важнейшим элементом работы с одарёнными детьми, да и сам процесс обучения нередко образуют достаточно жёсткую конкурентную среду. И эта среда может самым губительным образом воздействовать на психически не подготовленного ребёнка. А ведь психика именно одарённых детей особенно ранима. Поэтому очень важно для каждого одарённого школьника определить ту ступень, на которой он может комфортно работать.

Слишком высокий уровень может оказаться для него просто непосильным. В результате ребёнок потеряет уверенность в себе. Одновременно не следует одарённому школьнику задерживаться на слишком низком для себя уровне. Он может остановиться в развитии. Особенно чётко эта иерархичность и многоступенчатость видна в системе олимпиад.

Разрыв между школьной и международной олимпиадами необычайно велик. Геометрия является тем стержневым предметом, который соединяет всю эту многоступенчатую систему. Кроме того, геометрия даёт возможность талантливому ребёнку развиваться постепенно, препятствует искусственным ранним скачкам, форсированию развития, из-за которого мы нередко теряем талантливую молодёжь. (Куда девались многочисленные вундеркинды, о которых ещё несколько лет тому назад с восторгом писали наши газеты?)

В области геометрии достигает своего наименьшего значения расстояние между математической наукой и школьной математикой. Некоторые самые современные достижения профессиональных математиков-геометров могут быть вполне доступно изложены школьникам. И сами эти достижения, и соответствующие идеи могут стать источником олимпиадных задач. Причём не только для старших школьников. А с другой стороны, геометрия даёт возможность одарённым детям уже на школьной скамье начать заниматься полноценными научными исследованиями, а не их имитацией, что нередко бывает на школьных научных конференциях. И здесь могут проявить себя дети не олимпиадного типа.

Геометрия способствует полноценному эмоциональному развитию ребёнка. Как показывают исследования психологов, эмоциональное развитие является основой общеинтеллектуального развития. Его составной частью является эстетическое воспитание. Именно геометрия предоставляет огромные возможности для эстетического развития, эстетического воспитания. В математике мы достаточно чётко можем отличить «красивое решение» от просто решения. Но особенно часто понятие «красивое решение» мы связываем с геометрическими задачами. Хороший математик, просто учёный должен обладать достаточно развитым эстетическим чувством. А о том, насколько важно создание хорошего эмоционального фона при работе с отстающими детьми, можно и не говорить.

Я могу привести много примеров, иллюстрирующих сказанное, но ограничусь одним. В мае 2001 года мне позвонила учительница из города Чебоксары. Она рассказала следующую историю. В начале учебного года у неё в классе появился второгодник. Новый ученик по геометрии был на полном нуле (как и вообще по математике), а упомянутая учительница особое внимание уделяла именно геометрии. (Вынужден признаться, что занималась она по моему учебнику, почему и позвонила мне.) Учительница дала ученику учебник и заставила того начать изучать геометрию с самого начала. Короче говоря, этот ученик на проходившей в городе в апреле 2001 года математической олимпиаде получил вторую премию.

Геометрия в XXI веке. Что нового?

Человечество вступило в Новый Век. Посмотрим вокруг: что происходит? Здание земной цивилизации значительно выросло за последние десятилетия и продолжает стремительно расти. Деятели образования в разных странах предпринимают отчаянные, но тщетные попытки угнаться за ростом этого здания. Заметно выделяются два пути решения проблемы: модернизация (в узком смысле) и дифференциация. При этом зачастую и модернизация, и дифференциация понимаются очень примитивно.

В чём смысл предложений «модернизаторов» от образования? Поскольку сегодня в мире возникло много новых профессий, много новых видов человеческой деятельности и даже наук, возникли новые информационные технологии, следует потеснить в школе старые и традиционные предметы, заменив их современными. Что же касается математики, то необходимо сократить прежде всего геометрию (частично или полностью) как предмет устаревший, почти не изменившийся за последние несколько тысячелетий, мало используемый в практической жизни. А вместо неё ввести современные разделы: математический анализ, теорию вероятностей и прочее. Что здесь плохого?

Дело в том, что образовательные процессы подчиняются строгим биологическим законам и ускорить их невозможно, подобно тому как нельзя ускорить процесс вынашивания плода, который в своём развитии проходит этапы, совершенно не нужные с точки зрения взрослой особи. Не существует такого скоростного лифта, который мог бы вознести ребёнка или даже молодого человека сразу на верхние этажи здания цивилизации. Такие попытки в образовании, в том числе и математическом, уже делались, и неоднократно, но все они кончались плачевно.

Чем выше здание, тем прочнее должен быть фундамент. Человек, получивший хорошее фундаментальное образование, гораздо быстрее приспособится к условиям современной жизни, сумеет найти в ней своё место, чем тот, кто поверхностно познакомился с многочисленными современными механизмами, научился нажимать кнопки сложных приборов, не понимая сути происходящих в них процессов. Владение же геометрическим методом очень полезно современному человеку, так как позволяет ему быстро и наглядно понять суть сложного явления, дать ему ясную интерпретацию.

Дифференциация в образовании (в широком смысле модернизация включает в себя дифференциацию) задаёт несколько иной путь решения возникшей перед современным обществом проблемы. Школа в старшем звене становится специализированной, возникают школы различного типа: гуманитарные, физико-математические, биологические, даже музыкально-спортивные и бог знает какие. С одной стороны, это необходимо. Но с другой, чрезмерное дробление может привести к полному распаду школы. Уже реальностью становится дифференциация школы по региональному принципу. А это для России не просто опасно, но смертельно опасно. Поэтому для России очень важны стержневые школьные предметы, которые должны противостоять возрастающим центробежным силам. Одним из таких предметов является математика.

Чрезмерная дифференциация на школьном уровне может помешать её выпускникам в будущем реализовать свои основные общечеловеческие права: право на свободное передвижение, право на выбор профессии. Как показывают недавние социологические исследования, человеку в течение жизни приходится неоднократно, до 25 раз, менять профессию.

Кроме того, это в муравейнике можно посредством питания выращивать по заказу солдат или рабочих, производителей или прислугу. Человечество не муравейник. Кем станет человек в будущем, на школьной скамье решить трудно. Даже ставить такую задачу безнравственно.

И мы вновь приходим к выводу о необходимости усиления именно фундаментальной подготовки выпускников наших школ. И этот принцип фундаментальности выдвигает на первое место именно математическое образование. А внутри этого математического образования всё более важную роль должна играть геометрическая составляющая благодаря таким качествам, как наглядность и универсальность.

И всё же полностью отказываться от принципов дифференциации не следует. Здесь важно уловить разумную грань, за которой образование распадается на отдельные феодальные хозяйства. Возможно, для математики достаточно обойтись всего лишь двумя разновидностями. Не вдаваясь в детали, замечу, что математические курсы, основанные на принципах наглядности, на геометрических идеях, дают возможность дать полноценное (или достаточное) математическое образование представителям самых далёких от математики специальностей (гуманитариям, но не только).

Заметным явлением сегодняшней цивилизации стал компьютер. И здесь особо следует сказать о взаимоотношениях между геометрией и компьютером. С одной стороны, геометрический тип рассуждений наименее поддаётся компьютеризации. (А отсюда, в частности, следует, что его сохранение и развитие особенно важно именно в настоящее время.) Геометрия остаётся одной из немногих сфер интеллектуальной деятельности, где человек ещё не проиграл соревнование компьютеру. А с другой, компьютер является очень полезным инструментом в геометрических исследованиях. С его помощью можно экспериментально обнаруживать новые интересные геометрические факты. Человеку же остаётся важнейшая роль — эти факты доказывать (всего лишь!). При этом в геометрическую деятельность с использованием компьютеров могут включаться школьники и сильные, и слабые (с точки зрения математики), технари и гуманитарии. И получается, что *первонаука, которой является геометрия, получила новый толчок к развитию как образовательный предмет и как наука благодаря самым современным компьютерным технологиям.*

Важнейшим фактом и фактором современной жизни является научно-техническая революция, которая, вопреки смыслу слова революция, стала постоянно действующим явлением. Резко возросли психологические и интеллектуальные нагрузки на человека, на его мозг, причём с самого раннего возраста. И нагрузки эти не равномерны, они разбалансированы, значительно перегружается левое полушарие. Отсюда стрессы, нервные и психические заболевания, начинающие разрушать организм ребёнка ещё до его рождения. Скорость изменения окружающей среды, среды обитания столь велика, что человек как биологический вид просто не успевает приспособиться к этим изменениям.

В последнее время всё большее влияние получает в обществе движение в защиту окружающей среды. Люди очень озабочены тем, каким воздухом они дышат, какие продукты питания потребляют, естественные или синтезированные, экологически чистые или же содержащие химические добавки, и прочее и прочее. Но пора создавать и движение в защиту образовательной среды, нужны глубокие исследования по экологии образовательной среды.

Для нормального развития ребёнку необходимо полноценное питание. Для нормального интеллектуального развития необходима разнообразная интеллектуальная пища. Сегодня математика, особенно геометрия, является одним из немногих экологически чистых и полноценных продуктов, потребляемых в системе образования. Геометрия может и должна стать предметом, с помощью которого мы можем сбалансировать работу головного мозга, улучшить функциональное взаимодействие между полушариями. *Геометрия — витамин для мозга.*

Но Геометрия — это продукт, который должен быть приготовлен очень умелым кулинаром. Иначе она может не только утратить свои питательные качества, но и принести вред организму. Мы должны также помнить, что Геометрия, возникшая не только из практических потребностей человека, но и из его духовных потребностей, и сегодня открывает человеку — любому человеку — путь в мир чистого и идеального. И именно этого так не хватает сегодня в нашей орыноченной жизни.

В мире Геометрии реализуются почти все мыслимые идеалы человечества. Здесь царит полное равенство и братство. Представители всех религиозных конфессий, а также атеисты, говорят на одном языке, а маститый учёный, как с равным, общается с неофитом. Я знаю многих людей, далёких от математики, на всю жизнь сохранивших любовь к школьной геометрии.

Мир Геометрии гармоничен и красив. «Красота спасёт мир», — сказал гениальный Достоевский. Так, может, пора начать спасать мир? Может, руководству ИКМИ (Международная комиссия по математическому образованию) стоит подумать о создании какой-нибудь студии, наподобие «Геометрия против наркомании» или «Геометрия против терроризма»?

...И замкнулся круг. То есть может замкнуться. Геометрия, стоявшая у колыбели человеческого разума, может помочь сегодня человеку сделать ещё один скачок в своём развитии. Интеллектуальном, духовном и нравственном. Надо не упустить эту возможность... Не знающий Геометрии не допускается?

Образование и глобализация

Вступление

Встречаются как-то два психиатра, и один спрашивает другого: «Скажите, куда исчез ваш больной, который страдал манией преследования?» — «Да он уже почти совсем вылечился, но тут его и пристрелили». Нечто подобное может произойти с нашим образованием. Нынче многие пытаются его спасти от разрушения. Скоро мы его совсем спасём, но, боюсь, к тому моменту российское образование будет окончательно уничтожено.

И ещё одна давняя история вспоминается мне. На заре холодной войны, последовавшей сразу по окончании войны горячей, появился в США военный министр по фамилии Форрестол (возможно, я не те буквы в его фамилии удвоил). Так этот министр сошёл с ума и с криком «Русские идут!» выбросился из окна небоскрёба. Он поспешил, конечно. А мы уже опоздали.

Холодная война закончилась. Горбачёв в компании с Ельциным оформил акт о безоговорочной капитуляции. Советский Союз потерпел поражение и был стёрт с политической карты. На просторах Родины чудесной и побеждённой первыми появились мародёры и расхватали то, что плохо и хорошо лежит. Победители же занялись обычной, рутинной для победителей работой — переделом, управлением и переустройством захваченных территорий. Кстати, авторство этой мысли принадлежит не мне. Так думают и говорят в Америке: «А вы чего хотели? Победитель, как известно, получает всё!» Сейчас, похоже, американцы всерьёз взялись за наше образование. Возможно, это последний рубеж обороны, за которым кончается Россия.

Сколько денег нужно образованию?

В декабре 2003 года в России состоялись выборы в Государственную думу. Удивительно, но ни одна из партий в своих программных заявлениях всерьёз не говорила об образовании. (Впрочем, у этих партий вообще

Впервые опубликовано в журнале «Новый мир» № 10, 2004.

не было вразумительных программ.) И это действительно странно. Ведь школьное образование — это то, с чем соприкасается любая российская семья, непосредственно или косвенно. Население страны, или, в терминах избирательной компании, электорат, усвоило (усвоил) основной капиталистический принцип: каждый выживает (и умирает) в одиночку, и многие семьи это выживание связывают с хорошим образованием своих детей и внуков. (В скобках и некстати, поскольку забегаю вперед, замечу: нынче населению вбивают в голову мысль, что хорошее образование можно получить лишь за границей.)

Нет, об образовании во время бестолковой избирательной кампании иногда говорили. Но очень узко. Ахали по поводу нищенского уровня жизни учителя, ужасались бедственному состоянию школьных зданий. В стороне остались самые главные и жизненно важные для России вопросы: цели и содержание образования.

И здесь я хочу высказать одну почти кощунственную мысль: сегодня материальное положение работников системы образования вовсе не такое уж бедственное, как об этом продолжают (из укоренившейся привычки ходить с протянутой рукой) говорить. Это относится и к учителям, но особенно, как и положено, к руководящим работникам, и к Москве, и к провинции. Финансовые потоки, протекающие через систему образования России, достаточно велики, чтобы наша страна, учитывая традиции и опыт, имела качественное и одно из лучших (а может, и лучшее) в мире школьное образование. Здесь я не говорю о том, как формируется упомянутый финансовый поток. Интересно также разобраться и в том, как он распределяется. Но оставим эти вопросы так называемым компетентным органам, которые почему-то в таких случаях оказываются удивительно некомпетентными.

А я же хочу к одной кощунственной мысли добавить другую, ещё более кощунственную. Бедное образование — это беда (нечаянный каламбур). Но когда в образовании появляются большие деньги, это катастрофа. Данное утверждение я отношу прежде всего к России, но не исключено, что этот закон справедлив и для остального мира. Большие деньги привлекают малограмотных жуликов и проходимцев, которые быстро и надёжно вытесняют из системы образования истинных профессионалов — подвижников и бессребреников. А без них образование существовать не может. Но не буду далее развивать эту мысль, тем более что я нечаянно уже проскочил самое начало размышлений.

Три грани образования

Начнём от печки. Что такое образование, в смысле «система образования», а не образование чего-нибудь (например новой партии) или какое-то (хорошее или, не дай бог, злокачественное)? Я пытаюсь размышлять и, похоже, не получив приличного педагогического образования, ломлюсь в открытую (неужели ж до сих пор закрытую?) дверь. Ну что ж, сами с усами!

В образовании, как известно, есть две основные ступени: среднее образование (школа) и высшее (институт, университет). В среднем, то есть в среднем образовании (сплошные каламбуры), в свою очередь, мы различаем три этапа: начальная школа (начальное образование), основная школа (неполное среднее образование), старшая школа (среднее образование).

Процесс получения образования, особенно на начальных стадиях — это обучение. В некотором смысле образование — это результат обучения. Этап обучения в своём развитии проходят многие животные, практически все птицы и млекопитающие. Плохо обученное животное вскоре погибает. Так что в животном мире не принято халтурить и отлынивать. Не так у людей. И если в начале обучения все дети учатся честно и со старанием, и результаты этого обучения заметны буквально каждый день и велики, то на более поздних этапах нередко можно встретить имитацию и даже фальсификацию процесса обучения.

Система образования — понятие, которое, опять же в некотором смысле, само себя определяет (наподобие понятия «наибольшего общего делителя»). В идеале система образования должна помочь любому человеку определить оптимальную траекторию (а иногда и навязать её несмышлёным) развития и получения образования на всём пути от попадания в систему и до выхода из неё.

Говоря о системе образования в целом, можно выделить три разновидности, или, если угодно, три стороны одной медали, которую мы зовём образованием: это реальное, заявленное и потенциальное образование. В пояснении нуждается третья разновидность, поскольку смысл двух первых достаточно ясен. Здесь я имею в виду тот наивысший уровень образования, который страна может обеспечить, для которого имеются соответствующие специалисты, литература и традиции. Так, если ранее, утверждая, что российское математическое образование лучшее в мире, мы имели в виду его реальный уровень, то сегодня это утверждение относится скорее к уровню потенциальному, к потенциалу в виде специалистов, литературы и традиций, которые пока ещё не утеряны.

Если же, к примеру, взять образование экономическое, то, сколько бы мы ни заявляли о его высоком уровне, этот уровень никак не может соответствовать имеющемуся в стране потенциалу. Ведущими специалистами-рыночниками являются ныне либо (в лучшем случае?) представители советской школы, обосновывавшие в своих диссертациях превосходство плановой экономики по сравнению с рыночной и колхозного землепользования по сравнению с фермерским, либо (в худшем случае?) специалисты, получившие образование в западных, в первую очередь американских, университетах и не имеющие ни малейшего представления о российской специфике. И пока в России не будет создана своя новая экономическая школа, нельзя будет говорить о наличии у нас в стране достойного экономического образования.

Общий же потенциальный уровень системы образования определяется потенциалом главных, или стержневых, или системообразующих, предметов. Для среднего образования таковыми, на мой взгляд, являются два: родной язык и литература (я объединяю их в один предмет, что не совсем верно) и математика. Важным достижением советской власти, я говорю о периоде расцвета, был высокий уровень реального образования, практически совпадавший с заявленным уровнем. И это утверждение относится не только к математике и естественнонаучным предметам. В Советской России было хорошо поставлено и преподавание русского языка и литературы. Советская литература последнего времени, хорошая литература, выросла из школьного сочинения.

Сегодня реальный уровень образования резко снизился и продолжает снижаться недопустимо быстро. Причин много. Я хочу выделить одну, одну из самых важных. В нынешней России полностью отсутствует положительная зависимость между качеством образования и личным успехом в жизни. Скорее наоборот, эта зависимость отрицательна. Личные связи и неразборчивость в средствах — основные средства для достижения успеха. Что касается образования, то нужны не знания, а справка об образовании, диплом. Причём не важно какой. Дипломированные неучи делают карьеру быстрее и успешнее, чем хорошо обученные профессионалы. Эта деградация началась уже на исходе советской власти, когда можно было встретить инженера-электрика, не знающего закон Ома. И сегодня ситуация доведена до абсурда. Человек, окончивший вечерний факультет МАДИ, становится премьер-министром. Ну а чтобы стать миллиардером, самое лучшее — не иметь и среднего образования. Кстати, а как там у них? Похоже, что самый богатый человек в мире Билл Гейтс не имеет нормального образования.

Внимательный читатель может усмотреть противоречие между последним пассажем и сделанным ранее утверждением о том, что многие семьи в России сегодня связывают своё будущее с хорошим образованием своих детей и внуков. Да, противоречие налицо. И автор не может его хорошо логически разъяснить. Разве что дело в идеализме русского человека, сохранившего ещё наивную веру в учение. Ученье — свет! Учись, сынок, человеком станешь! Это единственная надежда вырваться из нищеты.

О целях образования

Прошло уже почти полтора десятка лет, как в стране сменился строй. Всё это время система образования России реформируется, и при этом радикально. Но до сих пор новые правители (знакомые всё лица!) не сформулировали чётко и конкретно, в чём же основная цель образования. Понятно, с их точки зрения... И тут у меня возникает одна странная мысль, я гоню её прочь. Но она всё время всплывает. А может, эта цель такова, что её просто нельзя открыто объявить? В чём вообще цель (цели) системы образования? Прежде всего школьного. Самая общая цель, безотносительно к тому, о какой стране идёт речь (а может, и в масштабе всей Земли)?

Цель образования (как я полагаю) — это воспроизводство и развитие социальной системы, системы, которая в этой стране существует. Безусловно, с точки зрения интересов разных слоёв населения эти цели могут различаться, и даже значительно. Но, в общем, можно утверждать, что в зависимости от качества жизни основной массы населения ведущей целью системы образования является либо первое, либо второе, либо воспроизводство, либо развитие. Понятно, что в этом месте расходятся главные цели образования для стран с высоким уровнем развития и стран отстающих. Проще говоря, для богатых и бедных стран. Понятно также, что копирование слаборазвитыми странами систем образования стран высокоразвитых приведёт к сохранению сложившейся иерархии между странами, а значит, стратегически полезно именно странам с наиболее высоким уровнем развития.

С другой стороны, между обозначенными целями, а вернее подцелями, существует определённый антагонизм, или, как было принято ранее говорить, диалектическое противоречие. Для того чтобы система образования стала средством развития социальной системы, нужно сначала саму эту систему образования достаточно развить и вывести её на высокий уровень.

Но в этом случае может возникнуть серьёзная угроза сложившемуся в обществе равновесию, его социальной структуре. Хорошее всеобщее, равно доступное для всех социальных слоёв и бесплатное образование, дающее человеку научные знания и творческое развитие, опасно для правящих слоёв (классов). Социальные волнения и смуты очень часто начинаются в студенческой среде. В благополучной Франции проявление творческой инициативы со стороны учащихся пресекается самым решительным образом. На уроках математики, например, решать задачи ученик должен, следуя заданным образцам, а не демонстрировать свою сообразительность.

Если же страна (руководство страны) под давлением обстоятельств, часто внешних, всё-таки ставит задачу развития системы образования, развития личности через эту систему, то здесь очень важно чётко задать точное направление этого развития, ограничить его чёткими рамками. Так, например, коммунисты-большевики, начав с разрушения российской буржуазной системы образования, достаточно быстро (быстрее, чем нынешние власти) спохватились и начали активно развивать систему образования, опираясь именно на лучшие достижения системы образования России царской. К этому их принудил враждебный капиталистический мир. За что ему, этому миру, надо сказать спасибо.

Следует добавить, что и капиталистический мир, столкнувшись с непосредственной угрозой своему существованию в лице Советского Союза, был вынужден значительно скорректировать свою социальную политику. При этом западная цивилизация, возможно благодаря этой угрозе, избежала другой, более серьёзной и скрытой угрозы или даже катастрофы, которая могла бы разразиться уже в XX столетии, если бы мир продолжал существовать, подчиняясь лишь внутренним законам капитализма и рынка. Об этом, кстати, должны подумать те, кто убеждён, что если бы не Ленин и большевики, то Россия уже в XX столетии была бы процветающей страной, а её жители все сплошь ходили бы в белых штанах и отдыхали только на Гавайях (именно так, по мнению писателя Виктора Ерофеева, высказанному им в одной телевизионной передаче, выглядит жизнь в процветающей стране; что ж, какая эпоха — такие и писатели).

Я также полагаю, что созданная в Советском Союзе система образования не только оказала огромное влияние на весь мир, но и помогла сохранить относительно высокий уровень образования в мире в целом. Особенно в области математических и естественнонаучных дисциплин. Следствием же этого стал, в свою очередь, научно-технический прогресс, точнее, перманентная научно-техническая революция, наблюдаемая со второй половины XX столетия. Так что современные лайнеры, доставляющие отдыхающих на Гавайи, и компьютеры, на которых пишут свои неизвестные мне творения ерофеевы, могли и не быть изобретены и сконструированы, если бы не было Советского Союза. (Впрочем, далеко не очевидно, что интеграл от благ, даваемых научно-техническим прогрессом, положителен.)

Важно, что коммунисты смогли точно определить и гениально просто сформулировать основную цель (направление развития) образования для Советского Союза (30-е годы прошлого столетия): создание армии инженерных работников, соответствующих самым современным требованиям, на базе хорошего естественнонаучного и математического образования. Эта конкретная, но узкая цель, достаточно быстро была достигнута (ввиду именно своей конкретности), и созданная система образования длительное время (лучше скажем — некоторое время) способствовала развитию советской системы.

Но подобные узкие и конкретные цели не могут быть долговременными. И когда возникла необходимость сформулировать новую цель, эта задача не была решена. Система продолжала работать в том же режиме, во многом вхолостую, пожирая и самоё себя, и многое вокруг. В этом, по моему мнению, состоит одна из главных причин застоя и загнивания брежневской эпохи. С другой стороны, высвобождающаяся и неиспользуемая творческая энергия, вырабатываемая в системе образования, стала одним из мощных факторов, приведших к разрушению советской системы. Но я опять ушёл в сторону и отклонился от намеченной линии. К этой теме я ещё вернусь. А сейчас о другом.

Новый строй

Что мы видим сегодня? Сегодня в мире идёт, и весьма интенсивно, процесс глобализации. У этого процесса, как и положено, две стороны. Хорошая и не очень. Этот процесс обусловлен прежде всего современными информационными технологиями и средствами сообщения. Самые отдалённые уголки планеты надёжно связаны друг с другом скоростными магистралями, информационными и транспортными, а блага цивилизации проникают в самые дикие места. Человечество получило огромные возможности для резкого скачка в развитии, для улучшения качества жизни всех людей без исключения. Но чтобы это произошло, надо, чтобы принципы нравственности, равенства и справедливости стали главными в отношениях между людьми и государствами (всего-то!!).

К сожалению, рыночно-денежные принципы, ставшие сегодня единственным регулятором всех отношений, безнравственны по определению (в принципе!). В дальнейшем, говоря о глобализации, я ограничусь лишь обсуждением негативной стороны процесса, поскольку многое положительное остаётся лишь в потенциале.

Глобализация экономики, создание единой общемировой рыночной системы привели к резкой поляризации в мировом сообществе. В результате значительной разности потенциалов между полюсами возникли мощные потоки; от одного полюса к другому следуют ресурсы всех видов: природные, людские, интеллектуальные, а обратно направляется готовая продукция и управляющие сигналы. При этом «добавленная стоимость» целиком остаётся на одном из полюсов, увеличивая эту разность потенциалов.

Мир, к сожалению, устроен так, что почти всю прибыль от продажи яблок получает тот, кто этой продажей занимается. Тем, кто яблоню посадил и вырастил, достаются крохи. Нередко даже для бо́льшей эффективности, чтобы собирать яблоки было удобнее, саму яблоню спиливают.

Процесс глобализации происходит не только в экономике. Им охвачены все стороны человеческой жизни: культура, наука, спорт, правовые отношения, преступность. Процесс протекает по единообразной схеме. Рыночные законы и механизмы вытесняют из межчеловеческих отношений все прочие законы и механизмы. Деньги становятся единственным критерием результата. А здесь главным является известное народное правило: деньги к деньгам. Всё как в покере: победить соперника, у которого на порядок больший капитал, невозможно. И после каждой игры эта разница капиталов будет возрастать.

Система, оптимизирующая единственную линейную целевую функцию, всегда скатывается на границу своей области существования. Попытки подправить действие рыночного механизма с помощью различных антимонопольных законов дают локальный и временный результат. Процесс глобализации — это, по сути, возврат к двойному стандарту, который действовал во времена существования Советского Союза. Возврат и де-факто, и де-юре. Только ранее разделительной чертой являлась идеология, а нынче — размеры капитала.

Глобализация сопровождается резким расслоением между странами и внутри стран. Особенно это внутреннее расслоение заметно в экономически отсталых странах. Развивается своего рода VIP-демократия, а по сути, новый феодальный строй. В мире возникают несмешивающиеся (почти несмешивающиеся) сословия-касты: дворяне, прислуга и чернь. Принципы феодализма распространяются на весь мир — страна-император, страны-сеньоры, вассалы и прочие.

А может, возникающий строй — это и не феодализм, а вовсе даже новая разновидность рабовладельческого строя? Посткапиталистическое рабовладение. Сегодня мы видим очень много явлений, характерных именно для позднего рабовладения. Знать абсолютно не стесняется проявлять и удовлетворять в присутствии рабов и черни свои естественные и противоестественные потребности. (В новогодней программе одного из центральных каналов российского телевидения одна известная в масштабах России певица исполняла нецензурные частушки, как бы подчёркивая это пренебрежение знати к чувствам простых людей.)

Народу надо дать «хлеба и зрелищ». Хлеба чёрного, а зрелищ примитивных. Высокое искусство доступно сегодня только самым богатым. Для черни же всё те же бои гладиаторов. И не важно, что нынешние гладиаторы нередко оказываются состоятельными людьми. Их, как и в далёкие века, продают и покупают.

Формирующееся общество настолько далеко от идеалов демократии, что у меня возникает очередная, уже абсолютно кощунственная мысль. Получается, если строго формально проанализировать, что наивысший уровень демократии в России был в период сталинской диктатуры и некоторое время после смерти тирана. Было всеобщее бесплатное и равное образование (дети высших сановников, в том числе и самогó... посещали те же школы, что и простые смертные), реально осуществлялись права на работу, лечение, отдых и жильё. Транспорт был дёшев, искусство общедоступно и учило доброму и вечному. Советский народ — самый читающий народ в мире. Это утверждение не есть измышление коммунистической пропаганды. Даже перед законом, который олицетворял лично тиран, были все равны. Ну да, не было выбора. Зато были выборы. Ну а сейчас есть выбор (формально), но нет выборов. Это лучше?

Расслоение образования в условиях глобализации

Однако процесс глобализации протекает не так гладко, как хотели бы нынешние правители мира. Самая большая проблема: как создать единую мировую систему образования, соответствующую новому мировому устройству? Речь идёт именно об образовании, поскольку производная от образования — наука — оказалась глобализованной одной из первых. Для этого не потребовалось даже много денег.

Но не всё так просто с образованием. Здесь две проблемы, два противоречия, осложняющие процесс глобализации образования. Первая проблема-противоречие заключается в следующем. Современная техника, создающая комфорт и обеспечивающая безопасность, должна обслуживаться, производиться и разрабатываться. А для обслуживания и производства необходима достаточно большая армия соответственно обученных и образованных работников и рабочих. Снижение уровня образованности этих категорий рабочих и служащих приведёт к возрастанию количества техногенных катастроф, число которых и без того опасно и быстро увеличивается. Достаточный уровень грамотности требуется и от работников некоторых сфер услуг. Не забудем и про армию. Недостаточно образованному солдату нельзя доверить суперсовременное и супердорогое оружие. Это с одной стороны.

А с другой — идеология глобализации включает и расслоение образования. Для лучшей реализации своей руководящей функции правящий слой должен быть и лучше образован; а чтобы уменьшить риск социальных потрясений необходимо соответственно ограничить образовательный уровень основной массы населения. Одним из напрашивающихся путей разрешения указанного противоречия является расслоение системы образования. Образуются две ветви. Двигаясь по одной, вы получаете широкое, фундаментальное образование. Это образование платное и даже весьма дорогое. На другой ветви даётся, возможно, и совсем неплохое, но узкоспециализированное образование, строго ограничивающее функциональные возможности ученика, определяющее его социальные роль и место. При этом отдельные наиболее одарённые дети имеют возможность получить хорошее фундаментальное образование независимо от своего социального происхождения. Тем самым интеллектуальное и генетическое устройство общества приводится в соответствие с его социальным устройством. Определённое значение имеет и пропагандистский идеологический эффект. Создаются новые варианты стандартных рождественских сказок про Золушку, про Принца и Нищего и др.

Впрочем, если повнимательнее присмотреться к сегодняшним процессам с точки зрения проблем образования, вырисовываются не две, а целых четыре ветви. По принципу дихотомии каждая из двух, отмеченных в предыдущем параграфе, в свою очередь делится на две. Этот дихотомически ветвящийся процесс можно продолжить, но я ограничусь двумя верхними (или, в зависимости от того, как растёт наше дерево, нижними) этажами. На самом верху находятся, и условно говоря, и безусловно, наследные принцы. Они занимают высшее положение уже по праву наследия и особо не нуждаются в образовании. А вот отмеченное в предыдущем абзаце хорошее фундаментальное образование смогут получать дети придворных высшего ранга и достаточно богатых людей.

Узкоспециализированное образование — это третья ветка. Здесь система обучения выстроена достаточно жёстко, обеспечивая нужное качество благодаря достаточному демократизму и небольшой пропускной способности. И наконец, на четвёртой ветке — образование для всех, для низшего сословия. Человек низшей касты должен уметь читать, писать, считать не обязательно, так как есть калькуляторы и компьютеры, он должен понимать приказы начальников (виноват, хозяев), беспрекословно им подчиняться (здесь капиталистическая система выстроена намного жёстче системы социалистической) и уметь выполнять простейшие операции (нажимать кнопки, складывать кирпичи, проверять билеты при входе и прочее). И хотя на этой четвёртой ветке располагается бóльшая часть населения, обсуждать эту четвёртую разновидность образования не имеет смысла ввиду полного отсутствия образования. Поэтому поговорим несколько подробнее о трёх высших.

Начнём с самого верха. Тут располагается даже не элита, а небожители. Разделительная черта проходит где-то на уровне одного миллиарда долларов личного капитала. Таких семей на земле ничтожно мало. Математик сказал бы, что соответствующее множество имеет нулевую меру. Но совокупный капитал, которым они владеют, соизмерим со всем оставшимся капиталом. Здесь я хочу сделать одно не совсем лирическое отступление от темы. Я убеждён, что человек, имеющий в своём личном распоряжении миллиард долларов, а тем более десятки миллиардов, социально опасен. Никто не может чувствовать себя в безопасности даже в случае намёка на конфликт с таким человеком (вспомните хотя бы клан Кеннеди). И это великое благо, что большинство из нас живёт далеко за пределами внимания и зоны чувствительности подобных людей.

И чтобы закончить отступление, предлагаю читателю решить две простенькие арифметические задачи. Какую толщину имеет пачка купюр достоинством в 100 долларов, содержащая миллиард? Сколько времени потребуется обычному человеку, чтобы пересчитать указанную сумму? (Толщина или высота этой пачки должна превышать 500 метров, т. е. она выше Останкинской башни. Для получения этой оценки я исходил из предположения, что пачка из 100 купюр имеет толщину не менее 0,5 см. Чтобы пересчитать указанную сумму, не хватит и месяца.) Помнится, у Маяковского есть строки: «Много ль человеку (даже Форду) надо?» Правильнее было бы не «надо», а «можно», «дозволено». Миллиард долларов можно. Ну а сто триллионов? Купить футбольную команду можно. А весь земной шар? Похоже, он стоит менее ста триллионов. И где проходит черта, отделяющая «можно» от «нельзя»? Но всё это вопросы досужие и риторические. Вернёмся к теме.

Обучение и воспитание на этом верхнем этаже носит штучный характер. Этим занимаются многочисленные няни, гувернёры и частные учителя. Формально для воспитания и обучения своих отпрысков самые богатые люди планеты могут нанимать лучших воспитателей и учителей. Но это с формально-рыночной точки зрения. Профессии учителя и лакея несовместимы. И какие бы доверительные отношения ни сложились между учителем и обучаемым сановным дитём, лакейский привкус всё равно останется, а значит, качество обучения будет невысоким.

Спустимся немного пониже. На отмеченной под вторым номером ветке расположена очень важная со стратегической точки зрения часть образования. Здесь обучается будущая элита общества: политики, топменеджеры, банкиры. Здесь же обучается и фундаментальная наука. Конечно, принципы отбора на разные направления различны и (к огорчению идеологов) не всегда носят рыночный характер. Кое-что, а иногда и очень многое, зависит от способностей. И всё же система стремится выйти на единый рыночный механизм платного обучения, сделав способности человека элементом этого рынка. Если ты беден, но у тебя есть способности и ты хочешь получить достойное образование, ищи спонсора. Им может быть и частное лицо, и государство.

И наконец, третья ветка, которой соответствует специализированная система образования. Здесь получают образование, а точнее, обучаются специалисты узкого профиля: инженеры соответствующих специальностей, банковские служащие, программисты. Парадокс сегодняшнего устройства мира заключается в том, что можно быть хорошим специалистом в определённой узкой части спектра профессий и оставаться при этом, по сути, необразованным.

Ярким примером могут служить многие представители огромной армии программистов (не забудем про хакеров). Общаясь с ними, иногда поражаешься несоответствию между низкой образованностью и даже недостаточным интеллектуальным развитием, с одной стороны, и виртуозным пониманием нюансов компьютерной жизни, с другой. Хотя компьютер в целом знают и понимают не все, одни специализируются по «железу», другие по «софту» (прошу прощения за жаргон).

Сегодняшнее устройство мира всё более и более начинает напоминать муравейник. Отдельная особь (не входящая в элиту) выполняет строго свои функции, даже не осознавая, какова их взаимосвязь с деятельностью других особей и полезность для деятельности сообщества. А система образования должна обучать и воспитывать новые поколения, выращивая из них посредством соответствующего питания рабочих, солдат, прислугу и прочее, жёстко ограничивая тем самым личную свободу граждан под несмолкаемые крики либералов и демократов о необходимости соблюдать личную свободу.

Впрочем, виноват, системы образования в том смысле, о котором я говорил ранее, глобализация не предусматривает. Возникает, с одной стороны, рынок образовательных (чуть не сказал «интимных») услуг, а с другой — сеть ночлежек с бесплатными и дешёвыми обедами. Безусловно, изображённая мною картина — это лишь схема, эскиз. Но мне кажется, что есть силы, стремящиеся подогнать под этот эскиз наш мир. Я был бы рад ошибиться.

Образование и экономика

Теперь о второй проблеме. Общемировой образовательный ландшафт не совсем соответствует ландшафту экономическому. Да и система образования плохо подчиняется рыночному управлению. И в этом таятся определённые угрозы существующей иерархии мира. Это вновь с одной стороны.

А с другой — образование является элементом рынка. И при разумном подходе стра́ны, не очень преуспевающие в экономике, но с хорошей системой образования могут использовать её в целом и по частям на внешнем рынке и помочь себе тем самым экономически. В условиях всё той же глобализации Россия могла бы выступать не только в качестве поставщика сырья богатым странам, но и предоставлять услуги по развитию образования, например (здесь я пользуюсь возможностью оседлать любимого конька — и, как тот вшивый о бане, о своей бане) математического образования, каковое, по мнению многих экспертов, являлось до недавнего времени одним из лучших (даже лучшим) в мире и пока ещё пользуется спросом.

Кстати, торговля российским математическим образованием уже давно развернулась по всему миру, но дивиденды получают просто отдельные ловкие люди, зачастую просто присвоившие себе не принадлежащую им интеллектуальную собственность. Можно даже углядеть определённое сходство с природными ресурсами (также присвоенными) — в виде наличия ренты. Там природной, здесь интеллектуальной.

В последнее время внимание математиков и специалистов в области математического образования всё больше и больше привлекает элементарная геометрия. И здесь, на мой взгляд, лидерство России наиболее заметно. Похоже, именно в геометрии особо заметен евразийский характер русской культуры. В истории геометрии ярко видны две ветви, западная и восточная. Западная геометрия строилась по Евклиду, а затем по Декарту. Здесь во главу угла ставились точные логические конструкции, систематичность, общие теории. Восточная геометрия опиралась на наглядность, геометрия была скорей элементом культуры, искусства, даже культа, нежели наукой. И эти две ветви тесно переплелись в России, географически и геометрически служившей мостом между Западом и Востоком. Само положение России наиболее благоприятствовало развитию синтетической геометрии, которая сегодня особенно привлекает специалистов. И я убеждён, что в области преподавания геометрии мы занимаем лидирующее положение в мире. Нам есть что предложить миру. Пока есть.

Но рыночные возможности образования не сводятся лишь к торговле на рынке его элементами, на рынке внутреннем, но особенно на внешнем. В нормальную рыночную схему должно быть включено и образование в качестве одного из элементов этой схемы: деньги, образование, наука, производство, товар, деньги (помните у Маркса: деньги — товар — деньги). Но в этой цепочке образование находится в самом начале и слишком далеко от конечных денег. Глобализация не даёт возможности реализовать эту схему в полной мере, рынок не может ждать. Основной сегодня становится схема: деньги — деньги, точнее, деньги — Деньги. Рынок в первую очередь уничтожает образование, уничтожает не сук, а всё дерево, на котором сидит цивилизация.

И эти два обстоятельства — несоответствие устройства мировой системы образования экономическому устройству мира и её рыночные возможности — и определяют наблюдаемое сегодня стремление единственной оставшейся супердержавы взять под контроль общемировую систему образования. В первую очередь математического, ведь именно математическое образование интернационально в своей основе (имеет «ртутный» характер) и оказывает самое большое влияние на развитие цивилизации.

И поэтому не следует удивляться тому, что всё руководство в различных международных структурах, занимающихся проблемами математического образования, оказалось в руках представителей этой самой супердержавы, в которой, по общему мнению, математическое образование едва ли не худшее в мире. На этом всемирном образовательном рынке действуют обычные рыночные механизмы. Более сильные и богатые не пускают на него более слабых и бедных, несмотря на то что и качество продукта лучше, да и цена меньше. И в средствах сильные, как всегда, не стесняются.

Идеологическая оккупация. Проблема Вавилонской башни

Есть ещё и третье обстоятельство, относящееся к проблемам глобализации и образования, не совсем рыночное, но необычайно важное. Дело в том, что система образования, и прежде всего школьное образование, выполняет ещё и важнейшую функцию воспитания, в первую очередь идеологического воспитания. Хороший раб — убеждённый раб, осознающий уже на уровне рефлексов полное превосходство хозяина. Такой раб не будет бунтовать. И его надо воспитывать с детства.

Идеологическая агрессия, которой сегодня подвергся весь мир со стороны последней супердержавы, не имеет аналогов в мировой истории. Её результат — почти полная идеологическая оккупация. Тема эта очень интересна, но бо́льшая её часть находится за рамками заявленной темы, и поэтому попробую быть кратким и не удаляться от этих рамок далеко. Положение в мире вызывает определённые сомнения в том, что холодная война закончилась, а самое главное — в том, кто выиграл, а кто проиграл. Похоже, победитель один. К нему многие пытаются примазаться, в том числе и с противоположной стороны. Это не очень удаётся. В зону оккупации попал весь остальной мир.

Важнейшие элементы управления оккупированными территориями — доллар и язык. Замечаемое в последнее время противостояние доллара и евро напоминает попытку младшего брата увеличить свою долю в семейном бизнесе, причём попытку не очень подготовленную. Впрочем, эта сфера финансов находится явно вне моей компетенции и нашей темы, поэтому оставим её, эту сферу. А вот языковая экспансия имеет самое непосредственное отношение к проблемам образования. Прежде всего раб должен знать язык хозяина. Желательно на примитивном уровне: понимать команды, отвечать на простейшие вопросы и т. д. в этом роде.

Кроме того, единое пространство — экономическое, интеллектуальное, технологическое, культурное — требует и единого языка. Нынче эту роль исполняет английский, виноват, американский язык. Хорошо это или плохо, сразу и не скажешь. В общем, как и всё масштабное, и хорошо, и плохо. Вавилонская башня развалилась из-за разноязыкости её строителей. Сегодня мы видим Вавилонскую башню, но перевёрнутую. Вряд ли это положение устойчиво.

Большинство людей, проживающих вне англоязычного мира (остался ли ещё такой?) и относящих себя в той или иной мере к интеллектуальному сообществу, и многие другие социальные группы принимают сложившееся положение как должное и безропотно учат английский, хотя по-настоящему овладевают им немногие. И вот уже великий учёный, нобелевский лауреат и прекрасный человек, Виталий Гинзбург на скверном английском языке рассказывает корреспондентам историю своей жизни.

Не знать английский язык в учёных кругах считается неприличным. Практически все международные конференции и конгрессы в качестве рабочего языка заявляют английский язык. Я с большой симпатией и уважением отношусь к китайским коллегам, мне нравится их твёрдость в отстаивании интересов своей страны, но я был неприятно удивлён, когда на открытии Всемирного конгресса по математике 2002 года в Пекине все выступавшие, в том числе и члены правительства КНР, говорили по-английски. Впрочем, об этом можно было лишь догадываться, поскольку понять смысл произносимого было почти невозможно.

И если в математике, которая, по сути, сама является международным языком, достаточно легко овладеть английским на нужном уровне, чтобы обсуждать с коллегами профессиональные проблемы, то в гуманитарных дисциплинах, в частности в педагогике, методике преподавания, это не так. В результате, например, на международных конференциях и конгрессах по образованию практически исчезли дискуссии. Яркий пример — IX конгресс по математическому образованию, проходивший в Макухари (Япония).

Очень трудно высказываться на неродном языке по тонким вопросам методики и психологии обучения, когда и на родном языке не всегда просто изложить некоторые мысли. Нелегко понять точно устное утверждение на чужом языке, когда речь идёт о спорных проблемах педагогики и методики. Иные даже письменные тексты и на родном языке по этим темам понять не просто. Почти невозможно вести полноценную дискуссию на языке, на котором ты не думаешь, с человеком, который впитал этот язык с молоком матери. При этом самое опасное не незнание языка, но недостаточное знание. Если ты не понимаешь собеседника — это плохо. Но гораздо хуже, если ты понимаешь его наоборот и приписываешь ему своё мнение.

Каким бы прекрасным специалистом в области преподавания математики ты ни был, плохое владение английским закрывает тебе двери в международные комитеты и комиссии по проблемам преподавания математики. В очередной раз нарушается один из важнейших демократических принципов — принцип равных возможностей. Если ты, например, родился в России, то должен изучать английский, в противном случае ты считаешься некультурным, плохо образованным и твои возможности карьерного развития очень ограничены. В то время как американец может не утруждать себя изучением никакого иностранного языка, и никто на этом основании не обвинит его в недостаточном образовании и бескультурье. Несправедливо!

Кроме того, способности к освоению иностранного языка различны у разных людей и далеко не всегда входят в число профессионально значимых способностей. Я, например, полагаю, что профессиональному литератору не очень полезно хорошо владеть иностранным языком. В опровержение этого утверждения мне могут привести Набокова или Бродского, считающихся писателями двуязычными. Я же вижу в них как раз подтверждение моего тезиса. Набоков к концу жизни практически перестал писать на русском языке. Те же редкие произведения, которые поздний Набоков писал на языке предков, по структуре языка, по стилистике похожи более на перевод с английского, чем на оригинальное русское творение. То же у Бродского, который постепенно терял свой русский. (Я могу привести конкретные примеры, подтверждающие это.)

Вторжение английского языка в языковое пространство России выглядит уже настоящей катастрофой, и пора принимать решительные меры по защите русского языка. Нужен соответствующий закон. Вот только разрабатывать и принимать его некому. Наши министры (в том числе и министр образования) и депутаты не владеют русским языком на уровне требований, предъявляемых к ученику начальной школы. И я представляю себе эту сюрреалистическую картину: «Обсуждение в Российской думе закона о защите русского языка»! (Группа разработчиков во главе с Черномырдиным и Филипповым.)

Кстати, процесс всемирного распространения английского языка вовсе не так уж благоприятен для культуры языка английского. И дело даже не только в том, что распространяется не собственно английский, но его американская разновидность (по сути жаргон), который в пуританской Англии не все хорошо понимают. Важнее то, что возникает новая языковая разновидность — иностранный «инглиш» и даже много разновидностей: «рашен инглиш», «чайна инглиш» и бог знает какой. Примитивные по смыслу и ужасные по произношению. И этот «якобы английский» оказывает очевидное негативное влияние на настоящий язык.

Так что же делать? С одной стороны, сегодня в условиях глобализации человечеству жизненно необходим универсальный язык, точнее, универсальное средство общения между людьми. На Земле проживают тысячи, а может, и десятки тысяч народов и народностей, говорящих на разных языках. Каждый язык самоценен, он является незаменимым и невосполнимым элементом общечеловеческой культуры. Но с точки зрения роли в межчеловеческих отношениях эти языки имеют всё же разный статус. Равная поддержка всех языков и наречий не только является классической формой Вавилонской башни. Она невозможна в принципе.

С другой стороны, по моему глубокому убеждению (не знаю, смог ли я достаточно аргументированно это убеждение обосновать), навязываемое сегодня миру одноязычие на базе языка английского не даёт нам выхода и также невозможно. Я не знаю, каково оптимальное решение. Я даже не могу сформулировать соответствующую оптимизационную задачу. Моя цель — обозначить проблему. Назовём её «проблемой Вавилонской башни».

По мере возрастания уровня глобализации возрастает и идеологическое давление на мир, точнее, давление на общественное и личное сознание. Или ещё точнее, всё изощрённее становятся методы зомбирования этого сознания. И важнейшая роль здесь отводится системе образования. На примере системы образования России мы достаточно отчётливо видим эти явления. И начинается всё уже в начальной школе. Это очень важно. Детский ум ещё не овладел приёмами критического мышления, ребёнку свойствен инстинкт подражания и всё внушаемое его мозг, его сознание не просто воспринимает, но берёт в рост. И мы, ведя борьбу против разрушения образования и сосредотачиваясь на поздних школьных этапах, можем прозевать нечто более важное, когда в старшую школу придёт поколение детей, скверно обученных и утративших связь с нашими национальными традициями.

И даже многочисленные примеры возникновения различных церковно-приходских и приютских школ лишь усугубляют ситуацию, разрушая единство российской школы. Не будучи специалистом в этой области, я не стану развивать эту тему дальше, но ещё раз хочу подчеркнуть её необычайную важность.

На следующих этапах школьного образования картина несколько меняется. Свою идеологическую нагрузку получают практически все предметы. Одни выполняют её косвенным образом, как, например, иностранный язык и математика, другие непосредственно, как история и литература. Иностранный язык, а именно английский (напомню, речь идёт о России) становится насильственной нагрузкой к образованию, а владение им на минимальном уровне — необходимым условием для любого карьерного продвижения. И никакой китайский сегодня не может заменить английский (не знаю, впрочем, что будет лет через пятьдесят).

Математика — предмет вредный и опасный. Человеком, знающим математику, владеющим математическим методом, трудно манипулировать, такой человек привык мыслить творчески, он принимает решения самостоятельно и осознанно, а не подчиняясь чужой воле, и также самостоятельно и осознанно действует. Для общества, существующего в условиях глобализации, переизбыток людей такого типа смертельно опасен. Поэтому необходимо сократить школьные программы по математике и перекроить их в пользу тем, посвящённых алгоритмам, формальным манипуляциям и утилитарно-прагматическим приложениям.

В отличие от иностранного языка и математики, история и литература — предметы прямого идеологического действия. Их приходится пересматривать самым коренным образом.

Помнится, с каким удовольствием ёрничали по поводу российской истории наши либералы и демократы. Мол, Россия — страна с непредсказуемым прошлым. Сегодня наше прошлое пересматривается, причём не только российское, но и общечеловеческое, даже не столь отдалённое, а совсем недавнее — ещё очевидцы живы, и не все из них дряхлы, и не в очередной раз, а как раз впервые. Пересматривается нагло и беспардонно под идеологическим руководством нового хозяина мира — Соединённых Штатов Америки. Здесь я конкретно имею в виду историю Второй мировой войны.

Верхом цинизма выглядят появляющиеся в России школьные учебники по истории, в которых отсутствует упоминание о Сталинградской битве, а главные сражения Второй мировой войны происходят в Африке. В Америке уже сегодня молодёжь убеждена, что во Второй мировой войне Соединённые Штаты Америки победили Германию, на стороне которой воевал Советский Союз. Уже и в России появляется, пока вне школы, литература, внушающая молодёжи подобные мысли. Остаётся ждать появления соответствующих школьных учебников.

Что же касается литературы, то здесь мы видим два механизма. Уродуется содержание и вводятся разрушительные учебные технологии. Из школьных программ исключаются лучшие писатели, а у самых выдающихся выбирают наиболее незначительные произведения. Зато в программе возникают какие-то малоизвестные и случайные авторы, и даже не писатели, а графоманы. А с другой стороны, из школы пытаются изгнать сочинение, а вместо него для оценки знаний (и умений?) вводятся тестовые технологии, которые просто несовместимы с обучением литературе.

Модернизация образования в России и глобализация

Мы должны признать и признаться, что система образования в России за последние десятилетия значительно деградировала и продолжает деградировать. Но система образования обладает достаточно хорошими способностями к регенерации и саморазвитию. Если, конечно, не уничтожен её потенциал. Но для этого надо предоставить ей эту возможность, не беспокоить частым вмешательством извне. Чтобы рана зажила, её не следует часто тревожить. Даже с самыми благими намерениями. Подозревать же в наличии этих самых благих намерений нынешних высших чиновников от образования не приходится.

Нынче в России Министерство образования проводит масштабные мероприятия по реформированию или модернизации системы образования. По мнению многих специалистов, это не реформы и не модернизация, а разрушение сложившейся системы образования, разрушение самого главного — потенциала образования. Так в чём же дело? Почему реформы продолжаются и поддерживаются на самом высоком уровне? Почему практически все политические силы, правые, левые и центральные, если и не поддерживают прямо проходящую модернизацию, то, во всяком случае, не выступают решительно против? Почему большие капиталы дальней стороной обходят образование, а если что и финансируют, то как раз проводимую модернизацию?

В Советском Союзе сложилась хорошая система образования, основной целевой установкой которой было творческое развитие учащегося (что, признаемся, весьма странно для тоталитарного режима). Математическое же образование в Советском Союзе чуть ли не официально признавалось лучшим в мире. Именно система образования была фундаментом всех значимых побед Советского Союза (индустриализация, война, атомная бомба, выход в космос), и она же стала одной из главных причин, приведших к распаду Советского Союза.

Но с некоторого момента высокий творческий потенциал, которым располагала система образования Советского Союза, оказался невостребованным на государственном уровне и нашёл выход в разрушительной деятельности. Этот урок новая номенклатура (по сути, перекрасившаяся старая) усвоила прочно: хорошая система образования является источником постоянной угрозы, поэтому эту систему надо жёстко ограничить.

Вкладывать деньги в образование не следует уже по этой причине. И, кроме того, вкладывать деньги в образование просто невыгодно.

Слишком долог путь до конечного продукта. Можно и не дождаться дивидендов.

И наконец, уж совсем примитивное размышление. Период первичного накопления капитала — так нежно сегодня называют период массового грабежа и мародёрства, которыми сопровождалась эпоха Ельцина, — закончен. Собственность и власть захвачены и поделены. Теперь главное — сохранить всё это для себя и своих потомков. И приумножить, поскольку потомки во множественном числе. Хороших мест для кормления не так много. Они нужны нашим (понятно, каким «нашим») детям и внукам. Нужное образование при необходимости мы им сможем дать. Например, за границей. Мы уже понимаем: чтобы воровать, образование не нужно. Но чтобы много воровать, нужно хорошее образование. Но зачем нам хорошее и бесплатное образование в России? Зачем создавать лишнюю конкуренцию нашим детям и внукам? А то, не дай бог, «кухаркины дети» выучатся и захотят управлять государством и начнут реальную борьбу с коррупцией.

Это с точки зрения внутренних интересов правящего класса. Но есть ещё и внешний, интернациональный интерес. Классовая теория, созданная Марксом и развитая его последователями, взята сегодня на вооружение правящими элитами. Главный тезис: классовые интересы выше национальных. Девиз объединяться, адресованный Марксом пролетариям, подхвачен и в полной мере реализован сегодня классом правящим, классом богатых. Похоже, что этот новый — какой по счёту? — Интернационал, проводящий свои ежегодные съезды в Давосе, будет долговечнее своих предшественников. Я полагаю, что где-то (примерно где — понятно) находится некий стратегический центр, управляющий проходящими в системе российского образования процессами, финансирующий упомянутую модернизацию.

Тому есть много доказательств, конечно косвенных, поскольку прямыми доказательствами может располагать лишь разведка. Главным является обычное в науке рассуждение. Если мы видим много странных явлений и существует гипотеза, все эти явления объясняющая, то с большой вероятностью эта гипотеза справедлива. Палеонтологам нередко приходится по отдельным фрагментам конструировать доисторическое животное. И не их вина, если получается страшный монстр, а не грациозная антилопа.

Вот несколько фактов-фрагментов. В России давно действует так называемый Национальный фонд подготовки кадров. Именно в этот центр регулярно поступают немалые по российским меркам кредиты от Всемирного Банка Развития, направляемые в систему образования. Эти кредиты в основной своей части расходуются на оплату заокеанских консультантов и отечественных модернизаторов. Единственная программа, которая финансируется НФПК в полном объёме, — это программа создания сети школ для умственно отсталых детей. Цель — загнать наших детей в эти школы, которые и оборудованы лучше обычных и финансируются лучше. (Вот ещё один яркий пример того, как благое дело может стать орудием зла.)

Кроме того, НФПК проводит конкурсы школьных учебников, на которых побеждают упомянутые учебники по истории и неграмотные учебники по математике. (Ради полноты картины следует добавить, что аналогичные конкурсы учебников проводил также и фонд Сороса.) О том, что под крышей НФПК процветает абсолютная коррупция, к которой причастны самые высокие руководители Министерства образования и Российской академии образования, широко и давно известно. По сути, это и не скрывается. Выиграть какой-либо тендер или конкурс по линии НФПК со стороны и без серьёзного отката (интересно, появилась ли уже в новых словарях русского языка новая трактовка этого старого русского слова?) нереально. Но Фонд продолжает действовать. Значит, это кому-то нужно.

Далее. Во всемирно известном научном и образовательном центре, расположенном в небольшом американском городе Принстоне, создана специальная структура, занимающаяся разработкой и внедрением тестовых технологий. (Кстати, именно тестовые технологии чуть ли не единственный по-настоящему рыночный продукт, потребляемый в системе образования.) Основная сфера интересов — развивающиеся страны и, прежде всего, страны постсоветского пространства, страны СНГ. Эта структура занимает большую территорию и её деятельность носит секретный характер. Основная услуга, которую она оказывает упомянутым странам (Прибалтика, Грузия, Казахстан и прочие, включая даже Белоруссию батьки Лукашенки), — организация проведения ЕГЭ. Пока бесплатно (стандартный приём наркоторговцев — первая доза бесплатная). Россия действует самостоятельно. Но это тоже пока.

И последний пример. Министр образования В. М. Филиппов, под чьим руководством проходит модернизация образования (хотя на роль идеолога он никак не тянет), получил орден почётного Легиона, высший орден Франции. Интересно, за что?

И в заключение о том, о чём говорил вначале. Среди партий либерального толка (их всего-то две: «Яблоко» и СПС) наибольшее внимание, т. е. некоторое внимание проблемам образования уделяла партия «Яблоко». Умеет говорить Григорий Алексеевич, ничего не скажешь! Слушая его, хочется плакать, и аплодировать, и подписываться под каждым словом. Сердцем я «за», но мешает знание. Почему-то многие мои знакомые факт поражения «яблочников» на выборах (пусть даже это поражение и фальсифицировано) сочли за благо для образования. Почему? Дело в том, что политику «яблочников» в сфере образования олицетворяет человек по фамилии Шишлов, который в течение полутора лет (с осени 2002 по декабрь 2003 года) возглавлял Комитет думы по науке и образованию. Так вот, этот самый Шишлов оказался самым верным союзником Филиппова и других модернизаторов от образования. Филиппов и Шишлов нередко образовывали также сладкую пару в различных телевизионных шоу, посвящённых образованию. Многолетний руководитель Комитета по науке и образованию коммунист Мельников не часто мог появляться на телеэкране.

И ещё одна история вспоминается. Во время каких-то давних выборов вдруг всплыла, т. е. не совсем вдруг, но всё же всплыла история о том, как Григорий Алексеевич прочитал лекцию в Америке, получил за неё гонорар в 20 тысяч долларов и не уплатил с этой суммы налог. Да бог с ним, с налогом! Меня удивляет другое. Законодатель, человек, баллотировавшийся на должность президента России, читает в другой стране лекцию, получая за неё гонорар, в десятки раз превышающий гонорар, положенный нобелевскому лауреату! А ведь принимаемые Думой законы могут затрагивать интересы и той страны. Например, закон об образовании. Пустячок? Потому и противно! Ну и совсем уж в заключение, следуя закону рамки, анекдот. В отличие от анекдота, рассказанного в начале, с некоторым душком, но зато точный. Встречаются как-то две дамы, и одна спрашивает другую: — А вот в первый раз, это самое... у тебя как было, по любви или за деньги? — Ну конечно же, по любви. Разве ж пять рублей это деньги? Извините! А Явлинский особо и ни при чём. Он даже лучше многих других. Тем и плох.

Приложение. Об утечке мозгов

Несколько лет тому назад меня пригласили на телевидение принять участие в какой-то телепередаче. Со стороны тех, кто меня пригласил, это была явная глупость. Но ещё большую глупость совершил я, приняв это приглашение. Передача называлась, кажется, «Добрый день». Программа, в которой я принимал участие, была посвящена двум темам. Вначале говорили об отъезде наших молодых девушек за рубеж, принявшем в последнее время массовый характер (эту часть передачи я просидел за ширмой). Затем обсуждали так называемую утечку мозгов.

Принимавший участие в передаче известный писатель выступал в качестве эксперта по обоим вопросам. Само соединение этих двух, столь далёких (на первый взгляд) тем, показалось мне забавным. Я даже попытался съязвить, мол, наконец-то проблема утечки мозгов вышла на серьёзный уровень и даже поставлена в один ряд с волнующей всех «утечкой... этого самого» (я не смог подобрать нужного слова, т. е. нужного и приличного).

Конечно, нет ничего глупее, чем принимать участие в теледискуссиях. При этом чем важнее обсуждаемая тема, тем бессмысленнее сама дискуссия и ничтожнее результат. В моём случае всё обсуждение темы происходило в течение десяти (!) минут. Сначала известный писатель заявил, что не видит ничего плохого в означенной «утечке». Произнёс даже какие-то слова в качестве аргумента. Я же настолько опешил от этого заявления, что начал выкрикивать что-то нечленораздельное, пока меня не остановила ведущая.

И вот теперь, по прошествии нескольких лет, я решил вернуться к этой теме, которая, к сожалению, всё ещё актуальна. А может, стала ещё более актуальной. Наблюдая за многочисленными шоу-дискуссиями, шоу-конкурсами по телевизору, убеждаешься в том, что утечка мозгов уже даёт конкретные и видимые результаты. Кроме того, означенная тема имеет самое непосредственное отношение к статье, к которой она прилагается, иллюстрируя и развивая основные положения статьи.

Начну с того, что немного напомню историю. Утечка мозгов — это процесс, который начался примерно 40 лет назад во времена Советского Союза. Прошла «оттепель», слегка приоткрылся «железный занавес» и в образовавшуюся щель не то чтобы хлынул, но потёк небольшой поток из новоэмигрантов. Поток этот направлялся в Израиль. Перевалочным пунктом служила Вена. Кому-то удавалось прямо из Вены, минуя Израиль, попасть в США. Но многие всё же добирались именно до Израиля и либо оседали там, либо позднее перебирались в другую страну.

Впрочем, назвать начавшийся процесс утечкой мозгов было бы неправильно. Пропускная способность канала была ничтожно мала. Надо было получить приглашение с «той» стороны, т. е. из Израиля, и доказать, что ты еврей в каком-то колене или что твой ближайший родственник — еврей. Некоторые специально, чтобы иметь возможность уехать, женились на еврейках. Власти также не раздавали налево и направо разрешения на выезд. Стандартным поводом для отказа было наличие допуска к секретным работам. Возникло целое сообщество так называемых отказников.

Кроме того, профессиональный уровень большинства отъезжающих был не столь высок, чтобы о них сожалеть. Очень многие попросту не состоялись в профессиональном плане и пытались придать себе вес участием в умеренных политических акциях и в движении диссидентов. Эту первую после оттепели волну эмиграции можно определить как еврейско-диссидентскую. Власти иногда использовали образовавшийся канал, чтобы избавиться от некоторых одиозных личностей (безусловно, пользовались им и спецслужбы, но здесь — ничего, кроме догадок). Так, например, руководство страны долго не могло решить проблему известного философа Александра Зиновьева. Одно время ему предлагали эмигрировать в Израиль. Александру Александровичу даже пришлось доказывать в райкоме, куда его пригласили, что он не еврей (рассказ самого Зиновьева). Ему поверили и нашли другой способ избавиться.

И ещё одно важное обстоятельство. В первое время все уезжающие должны были оплатить затраты на своё образование. Не могу сказать, поскольку не знаю, как зависела сумма выплаты от учебного заведения и стажа работы по специальности. Важен факт. Мировая общественность усмотрела в этом требовании нарушение прав человека, и под давлением этой самой общественности оно было отменено. Когда это точно произошло, сказать затрудняюсь.

Итак, процесс, который нынче мы называем утечкой мозгов, длится уже примерно четыре десятилетия, целое поколение. «Мозги» — это всего лишь часть общего эмиграционного потока, исходящего из России. С приходом эры «демократии» размеры этой части значительно выросли. Уезжают молодые, талантливые и образованные люди. Почему?

Что нужно учёному? По сути, ему нужно очень мало и даже всего лишь возможность заниматься любимым делом. Но именно этой возможности учёные сегодняшней России не имеют. О какой науке может идти речь, если жизнь превращается в сплошную борьбу за существование. Прямо как в первобытные времена. Честно говоря, я не слишком хорошо представляю нынешнюю ситуацию в полной мере, а более или менее знаком с тем, что происходит в науках математических, в том числе и в математическом образовании.

Особое и выигрышное положение математики состоит в том, что для занятий математикой и для обучения ей не нужно дорогостоящее и специальное оборудование. Возможно, в этом состоит одна из причин, почему Россия всё ещё сохраняет высокий уровень и математического образования, и математической науки (плюс, конечно, традиции и люди). А этот высокий уровень является, в свою очередь, причиной продолжающейся «утечки» учёных и специалистов, получивших математическое образование в России. Это также доказывает, что, несмотря на очевидное снижение уровня математического образования в стране, в своей высшей, элитарной части оно по-прежнему является одним из лучших в мире, причём реально, а не только потенциально.

Количество уехавших математиков и учёных смежных специальностей я боюсь даже оценивать. На любой международной конференции по математике или математическому образованию вы можете встретить «бывший наш народ», причём количество этих «бывших» обычно намного превышает число делегатов из нынешней России.

В последние десятилетия (полтора-два) процесс утечки несколько изменился. Во-первых, возраст уезжающих учёных значительно снизился. Представители старшего и среднего поколения, пожелавшие уехать, давно уехали. Уезжают теперь выпускники ведущих вузов, не успевшие отработать и одного дня. Уже начали уезжать выпускники школ, причём лучшие, победители различных олимпиад. Убеждён, что из числа победителей математических олимпиад самого высокого уровня (Международных, Всероссийских) последних 15–20 лет уехало из России не менее половины.

В условиях глобализации наиболее развитые страны предпочитают размещать некоторые предприятия (заводы, фабрики) в отсталых странах, где рабочая сила более дешёвая. И готовить себе высококлассных специалистов (по некоторым специальностям) они также любят в странах, где уровень жизни невысок, но имеется хорошая система образования. Это намного дешевле, чем готовить специалистов у себя.

В Москве уже есть учебные заведения, выпускники которых чуть ли не поголовно уезжают в США. И это учебные заведения именно физико-математического направления. (Говорят, что один выпуск лучшей физико-математической школы Москвы, 57-й школы, целиком, хотя и не сразу, перебрался за океан. Независимый московский университет готовит специалистов почти исключительно для дальнего зарубежья.)

А во-вторых, большое распространение в последние годы получила, если так можно выразиться, полуэмиграция. Здесь имеется много разновидностей и оттенков, и стричь всех под одну гребёнку не следует. С одного края находятся учёные, работающие в основном в России и время от времени выезжающие за рубеж, причём не только в развитые страны, чтобы немного пополнить семейный бюджет. С другого — наоборот, учёные, в основном проживающие с семьями на Западе, работающие и преподающие там, но изредка возвращающиеся на родину, чтобы отдохнуть и напомнить о себе. Эти последние, как правило, занимают очень высокие руководящие посты в России и ни в коем случае не собираются их терять.

Продолжающаяся утечка мозгов хорошо иллюстрирует многие тезисы основной статьи. Хорошее образование представляет собой дорогостоящий рыночный продукт. Впрочем, рыночным продуктом является не столько само образование, сколько люди, его получившие (в сиюминутном истинно рыночном понимании). Прибыль даёт не автомобильный завод, а производимая им продукция. Но если продолжить эту автомобильную аналогию, то получается абсолютно бредовая картина.

Предположим, в некоторой стране имеется означенный завод. Он построен на деньги налогоплательщиков. Все выпускаемые модели разработаны местными инженерами и изготовлены из собственных материалов. Все они высокого качества (речь идёт не о России). На внутреннем рынке выпускаемые заводом автомобили стоят достаточно дорого (пока не важно, кто платит за них), зато на внешний отдаются бесплатно. Абсурд! Но именно это происходит в сфере российского образования.

Мне могут возразить, что сравнение неправомерно. Там автомобили, а здесь человек со всеми его правами и свободами. И опять двойной стандарт. Причём многократно двойной. Возьмём хотя бы футболистов и прочих спортсменов. Конечно, получаемые ими деньги несравнимы с зарплатами учёных. Но важно другое. Классный и даже не очень классный футболист является собственностью хозяина клуба. У него имеется чёткая рыночная стоимость (у каждого своя), в соответствии с которой он продаётся и покупается. Я вовсе не хочу, чтобы в подобном положении оказались и учёные. Но всё же, неужели подготовить классного учёного легче и дешевле, чем хорошего футболиста?

Далее! К своим собственным выпускникам США относятся куда как бережнее и расчётливее. Если ты получил образование за счёт штата или федерального правительства, то изволь сначала отработать затраченные на тебя деньги, можно и просто их вернуть, а уж потом гуляй где хочешь. Безусловно, внутри страны образование должно быть бесплатным, точнее, оплачиваться государством. И при этом государство должно требовать со всех уезжающих полную компенсацию своих затрат на образование. Если, конечно, к моменту отъезда человек эти затраты не окупил. Наши западники и демократы любят ссылаться на зарубежный опыт: во всём мире так, а у нас... Поступлю так же.

Сегодня в России заработная плата учёного или преподавателя самая низкая в мире и в относительном, и в абсолютном исчислении. (Возможно, кое-где на постсоветском пространстве положение ещё хуже, но это там, где уже нет ни образования, ни науки.) Это нельзя объяснить ни экономическими интересами, ни действием рыночных механизмов. Значит, это политика.

Для сравнения можно взять Китай. Это страна бедная. Возможно, в расчёте на душу населения Китай беднее России. Но в Китае черта бедности определяется образованием. Человек, получивший высшее образование, по уровню благосостояния соответствует среднему классу. Причём по меркам международным. Заработная плата профессора в Китае обеспечивает ему достаточно высокий уровень жизни. В России же грузчик при овощном магазине получает больше профессора. Российские учёные выталкиваются за рубеж огромным разрывом в материальном, социальном и моральном положении учёного здесь и там.

Я полагаю (и это хорошо вписывается в теорию), что разрыв создан искусственно и искусственно же поддерживается. Такая ситуация соответствует классовым интересам Всемирного Интернационала Богатых. Сегодня положение усугубляется ещё и тем, что начинается серьёзное расслоение внутри научного сообщества России. И это также очень опасно.

Привести конкретные, как сейчас принято говорить, цифры (вот ещё один распространённый англицизм: в русском языке понятия «число» и «цифра» строго разграничены, в английском языке слово «number» означает и число, и цифру) я не могу, но полагаю, что интеллектуальные потери России сопоставимы с потерями в настоящей горячей войне. Их, конечно, можно оценить и, как принято, в денежном эквиваленте. Здесь речь идёт о сотнях миллиардов, конечно же долларов. Только надо иметь в виду, что, помимо прямых потерь, есть ещё потери и косвенные. При этом косвенность может быть разного уровня. Здесь и наши ученики, получившие худшее, чем могли бы, образование, и ученики этих учеников. Надо не забывать, что наши потери оборачиваются приобретениями для США и их партнёров, увеличивая и без того огромную разность потенциалов.

И ещё одно, далеко не самое незначительное обстоятельство. Уезжают молодые люди в расцвете сил и даже просто начинающие жить. Здоровые, хорошо развитые интеллектуально и физически, как правило непьющие. Происходит генетическое ограбление нации. Так что авторы упомянутой в начале статьи телевизионной программы, объединившие столь разные темы, похоже, были не так уж и неправы.

Нестандартный стандарт

Я первый раз в жизни видел такого писателя. Он был еле грамотный.

Михаил Зощенко. Литератор

А за столом, между прочим, семь человек сидят — три бабы и два мужика.

Михаил Зощенко. Муж

Представьте, что вы приходите в магазин и видите непонятный продукт. Какие-то странные серовато-чёрные комочки размером чуть больше крупной фасоли с неприятным запахом. Абсолютно по виду и запаху несъедобные. Цена, правда, почти символическая. Вы присматриваетесь к ценнику и с удивлением узнаёте, что это картофель. «А-а-а, понятно, это нестандарт», — догадываетесь вы. Но продавец разъясняет, что это как раз именно стандарт. Но это минимальный стандарт. «Позвольте, позвольте, — соображаете вы, — ведь стандарт — это норма, образец». И опять продавец, терпеливо и ласково улыбаясь, объясняет, что это неправильное понимание, на самом деле стандарт — это как раз минимально допустимый уровень, ниже которого уже ни-ни. «Ну ладно, — сдаётесь вы, не желая вступать в лингвистическую дискуссию, — а другой съедобный картофель у вас имеется?» Продавец указывает на соседний отдел. Там продаётся другой, не то чтобы высококачественный, но вполне съедобный на вид картофель. Но цена повергает вас в состояние шока. Этот картофель явно штучного производства. Вы в панике выскакиваете на улицу и вечером долго не можете заснуть, размышляя о стандартах на картофель и алкоголь, на жильё и сантехнику, на самолёты и пароходы. И наконец осознаёте, что, по всей видимости, ваш уровень жизни вполне соответствует действующему стандарту. Представили?

А теперь представьте себе, что в военкомат приходит призывник. По всем параметрам этот призывник соответствует минимально допустимым

Впервые напечатано в «Независимой газете» 28.08.2002.

нормам. По зрению, по слуху, по росту, по весу, по умственному развитию и по всему прочему. Это же инвалид! Но, к счастью, найти такого субъекта невозможно. Или почти невозможно. Природа всегда старается компенсировать недостаточное развитие одного органа лучшим развитием другого. У плохо видящего человека развивается слух. И наоборот. Не думаю, чтобы военкоматам приходилось встречаться с призывниками, находящимися на минимальном уровне по всем показателям. И кроме того, наши военные никогда не объявляли свои минимальные требования стандартом.

А вот деятели нашего образования объявляют, что образовательный стандарт — это минимальный уровень, на котором ведётся обучение в школе. По окончанию каждого класса ученик должен соответствовать соответствующему (извините!) стандарту по каждому предмету. И так вплоть до окончания школы. Здесь эталоном должен быть итоговый стандарт.

Существуют и теоретики, обосновывающие этот минималистский подход к образовательным стандартам. Как, например, было раньше, говорят они. Мы имели представление о высшем балле, пятёрке, и исходя из неё посредством вычитания получали четвёрку и далее тройку. Теперь же мы разрабатываем минимальный уровень, он же стандарт, — тройку и, отталкиваясь от него, с помощью операции сложения получаем четвёрку и затем пятёрку. Правда, как показывает опыт последних лет, никак от этой самой тройки мы не можем оттолкнуться и начинаем расщеплять её на собственно тройку, четвёрку и пятёрку по совсем уж неуловимым признакам. В качестве теоретического обоснования выдвигается также забота о нравственном здоровье троечника. Оказывается, раньше мы ставили ему незаслуженную тройку, и он, осознавая это, испытывал адские муки совести. Теперь же на вопрос, что ты знаешь, он может чистосердечно ответить, что ничего не знает, и получить уже заслуженную тройку. Вспоминается совет экзаменатору: «Не смотрите пристально на студента, когда он готовится к экзамену, ведь тот может подумать, что вы подозреваете его в списывании, и обидится».

Удивительное понимание столь странное понимание (опять извините) понятия «стандарт» находит в среде нашей демократической интеллигенции. Вот уже известный телеведущий, собрав в своей программе небольшую, как теперь принято говорить, «тусовку» из реформаторов-модернизаторов от образования во главе с министром, согласно кивает головой, дескать, ясно, стандарт — это минимальный уровень. Кому же выгодно такое «минимальное» понимание образовательных стандартов, внушаемое, виноват, уже внушённое обществу? Да многим.

Во-первых, это очень удобно и выгодно многочисленным специалистам, этот самый стандарт разрабатывающим. Возьмём, например, школьную математику. Более 15 лет тому назад в системе РАО (Российская академия образования), называвшейся тогда АПН (Академия педагогических наук, ещё Союзная) были разработаны Обязательные результаты обучения, всё тот же минимальный уровень требований по математике. Эти Обязательные результаты под разными соусами предлагались (продавались!) государству. Нынче они уже претендуют на роль образовательных стандартов. Но самое смешное здесь то, что одни и те же стандарты предлагаются уже различными коллективами. Одни просто отпочковались от исходной группы. Другие перехватили старую идею. Третьи дошли своим умом, благо идея уж больно примитивна и удобна. Разрабатываются региональные стандарты: московские, свиногорские и прочие. Все объявляют себя авторами идеологии, разработчиками этих стандартов, вызывая праведный гнев специалистов из РАО. Многие пытаются продать свою дурно пахнущую продукцию, поскольку государство неплохо платит и постоянно забывает, что однажды уже купило этот продукт. Но это понятно, ведь от имени государства в качестве покупателей и продавцов выступают одни и те же люди.

Кроме того, по моему мнению, специалисты, разрабатывающие минимальный стандарт, по своему профессиональному уровню соответствуют именно этому минимальному стандарту. Но не более. Так что они внедряют в школу как раз то, что сами не без труда освоили, допуская ляпы даже на минимальном уровне. При этом достигается ещё один немаловажный эффект. С помощью подобного занижения образовательной планки из системы образования вытесняются подлинные профессионалы, неспособные выдержать подобной конкуренции снизу. Серьёзная литература не может конкурировать с порнографией. Всякая попытка хоть немного приподнять уровень обучения встречает негодующие возгласы типа: «Вы не знаете уровень сегодняшних школьников, сегодняшних учителей».

С одной стороны, это правда, многие учителя не очень хорошо владеют предметом (кстати, именно они и образуют группу поддержки для идеологов минимального уровня), да и ученики с трудом осваивают азбуку изучаемого предмета. Но ведь, чтобы низвести учителей и учеников до нынешнего состояния, немало усилий приложили авторы учебников и ведущие методисты, способные превратить в учебную каторгу самый интересный предмет (например, математику). Да и нищенское существование учительского сословия вовсе не способствует повышению квалификации.

А с другой стороны, это вовсе и неправда. Среди учителей немало прекрасных специалистов, разбирающихся в предмете лучше представителей педагогической науки и некоторых авторов учебников. Да и среди учеников ещё встречаются талантливые ребята, способные противостоять оглупляющему обучению. Однако вся наша педагогика и методика ориентируется на троечников и даже двоечников.

Кроме того (это во-вторых), понимание образовательных стандартов как минимального уровня образования удобно руководящим работникам системы образования и чиновникам, выступающим от имени государства. Они заявляют, что государство берёт на себя обязанность гарантировать каждому ученику бесплатное обучение на уровне стандарта. За более высокий уровень придётся платить. И это понятно, на то он рынок и есть. Рынок образовательных услуг вместо системы образования. Но тут возникает странность.

Кстати, вы ещё не забыли про картошку? Вы будете ещё более потрясены, когда узнаете, что этот картофель выведен и выращивается по специальному заказу. И стоит он огромных денег заказчику. А продаётся намного ниже себестоимости. (Ау! Рынок!) Более того, выращивать нормальную картошку не то чтобы запрещают, но не рекомендуют (говорят, потребителя нет) и не платят за неё ни гроша. А как же та, на соседней полке? «Так это же бутафория!» — догадываетесь вы. Вот теперь аналогия с образованием стала более полной. На разработку образовательных стандартов тратятся огромные деньги. Говорят (вынужден пользоваться слухами ввиду недоступности для меня официальной информации), что создан специальный ВНИК по разработке образовательных стандартов.

Напомню. ВНИК (Временный научно-исследовательский коллектив) — изобретение времён советской власти. Создаётся этот самый коллектив якобы для решения некой проблемы. На самом деле его цель — «срубить бабки» (извините за жаргон) и разбежаться. Поначалу все эти ВНИКи были достаточно безобидны. Просто небольшой приработок для не очень богатых учёных. До предела идея ВНИКа было доведена в системе образования.

В самом начале новейшей российской истории (в районе 1990 года) был создан ВНИК под руководством Э.Д.Днепрова. Сейчас никто уже и не упомнит толком, для решения каких таких важных проблем этот коллектив собрался. Важны результаты. Израсходованы (разворованы) огромные средства. К власти в образовании (и в стране), в министерство и в РАО, пришла новая команда из бывших «завлабов» и научных сотрудников, старших и младших. Сам Днепров стал и министром, и академиком. Началось обвальное разрушение образования.

И вот, по прошествии немногим более 10 лет, мы наблюдаем новое пришествие ВНИКа во главе с Э.Днепровым. Правда, на сей раз он делит бремя руководства с В.Д.Шадриковым. Воистину, два сапога пара. Если объявить конкурс на человека, принесшего наибольший вред российскому образованию, то указанный тандем с большим отрывом занял бы первые два места. Для разработки новых стандартов ВНИК Днепрова—Шадрикова (или Шадрикова—Днепрова) должен получить не то полтора миллиона, не то два миллиона долларов. Безусловно, деньги будут получены, ведь это не бедствующие учителя, и употреблены. Будет и добавка. Это очевидно. Очевидно также (для меня), что стандарты не будут созданы по трём достаточным причинам.

Во-первых, не позволят первопроходцы из системы РАО, отодвинутые от разработки стандартов, а заодно и от финансового потока. Во-вторых, в этом не заинтересованы сами разработчики. Здесь важен процесс, с окончанием которого заканчивается и финансирование. И наконец, в-третьих, образовательные стандарты, основанные на идее минимальности, невозможны в принципе. Я, правда, не знаю, возможны ли образовательные стандарты вообще, но некоторые разумные подходы всё же можно предложить. И главная и очевидная идея — надо разрабатывать именно образовательную норму (условно говоря, четвёрку). А минимальный уровень должен быть не сам по себе, а состоять из деталей, из которых можно собрать более сложные механизмы на более высоких уровнях. Школа, выпускающая исключительно троечников, представляет огромную общественную опасность.

Но, как говаривал последний генсек, а также первый и последний Президент Союза, «процесс пошёл». Ещё не разработанные, но уже внедряемые в школу образовательные стандарты обойдутся налогоплательщику в копеечку. Мы получаем самый настоящий «золотой стандарт».

В общем, с образованием на уровне образовательных стандартов всё ясно. Ну а что там с элитарным или просто хорошим образованием? Можно ли в сегодняшней России получить хорошее образование за хорошие деньги? Убеждён, что нельзя. В тех школах, где официально, полуофициально или же совсем неофициально надо много платить за образование, хорошее образование получить нельзя. Это бутафория, а не образование. Платить приходится в лучшем случае за условия обучения, помещения, питание, оборудование и прочее, а в худшем — за свидетельство об образовании, за товарный знак. Но не за само образование. И работают там не лучшие учителя. Учительство и холуйство — две вещи несовместные. И всё же хорошее образование в России ещё можно получить. Есть ещё такие школы, обычные и специализированные, где работают хорошие учителя и где не берут денег за обучение. Но об этом не здесь. Вернёмся к стандартам.

Получается, что образовательный стандарт, навязываемый школе, это тяжёлая гиря на её шею, с которой уже невозможно будет выплыть.

Сам термин «образовательный стандарт» — чистой воды лицемерие. Его цель — ввести в заблуждение общество. Слово «стандарт» носит явно положительный оттенок. У мужчин может даже возникнуть ассоциация с таким продуктом, как водка «Русский Стандарт». А на самом деле правильной является аналогия с понятием «минимальная зарплата». На минимальную зарплату жить нельзя. Человек, соответствующий образовательному стандарту, необразован.

И ещё раз представьте себе. Представьте себе ученика, который в конце некоторого класса оказывается на уровне образовательного стандарта. После летних каникул он возвращается в школу отдохнувшим, но уже немного ниже этого стандартного минимального уровня. И так далее. И на выпуске мы имеем... Имеем то, что имеем.

В начале июня этого года, когда телевидение ведёт непременные передачи, посвящённые выпускникам средней школы, один выпускник откровенно сказал перед телекамерой, что мечтает написать сочинение по «Мёртвым душам» Горького. Это не ускользнуло от бдительного ока обозревателя «Новой газеты». А чего, собственно, насмехаться? Всё в полном соответствии с образовательным стандартом. Мы приближаемся к вожделенному уровню мировых стандартов, ведь в Америке ни «Мёртвых душ», ни Горького в школе и вовсе нет.

Но вот в той же газете в номере от 17 июня можно прочитать следующее: «...никогда ещё рейтинг Рахимова в самой республике не был так низок — его фактически не поддерживают до 70% населения (40% русских и 30% татар)». (И татары, и проценты впечатляют.) Эта штука уже посильнее, чем «Фауст» Гоголя, будет.

О реформе образования, коррупции и геометрии

Однажды Феде понадобилось построить 10 равных углов, да побыстрее. Что вы ему посоветуете?

Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Геометрия 7. *М.: Просвещение*, 1999. *С.*88. *Задача* 8

Параллельные линии не пересекаются. Доказано Евклидом.

Из телевизионной рекламы техники «Занусси»

Утверждение, что система российского образования, как и всё прочее, оставшееся от советской власти, нуждается в серьёзном реформировании, объявляется сегодня аксиомой, а аксиомы, как известно, не доказываются. Вот наши руководители и их советники и не утруждают себя доказательствами. «Вы, конечно, понимаете, что наше среднее и иное образование необходимо реформировать», — говорят нам. И мы смущённо бормочем: «Да, конечно, понимаем, но...»

А вот я не понимаю, зачем в России надо реформировать школьное образование и, в частности, его математическую часть. Более того, процессы, происходящие сегодня в школьном образовании, — это вовсе не реформы, а разрушение. Что же касается конкретно школьного математического образования России, то здесь можно сказать, что происходит разрушение одного из значимых научно-культурных достижений человечества XX столетия, и оно может иметь самые печальные последствия для земной цивилизации. Кстати, я не согласен и с тем, что советское гуманитарное образование было таким уж плохим. За уродливой идеологической обёрткой пряталось хорошо образованное, культурное общество. Сейчас как раз наоборот. Яркая привлекательная обёртка скрывает нечто абсолютно отвратительное. И если что и нужно сегодня образованию, так это несколько лет стабильности — стабильности учебных программ, планов и учебников. Стабильного, а попросту соответствующего закону финансирования и достойного вознаграждения за труд учителя. И никаких радикальных реформ. Но реформы уже запущены.

Какова же истинная цель реформ нашего образования? Нам говорят, надо сделать наше образование таким, как в других, при этом часто самоуничижительно добавляют, цивилизованных, странах. Во-первых, непонятно, какую из указанных стран следует взять за образец. Системы образования, скажем, во Франции и Германии отличаются значительно. О Японии и говорить нечего. Что же касается «самой цивилизованной» (так считают наши руководители) страны, США, то у неё, по мнению многих экспертов, едва ли не худшая в мире система среднего образования. (Это, впрочем, не мешает системе американского образования в целом быть лучшей в мире, поскольку в неё интегрирован весь мир, в том числе и Россия.) И во-вторых, целью реформ не может быть подражание любым, даже самым лучшим, образцам. И уж тем более целью реформ не могут быть ни переход на двенадцатилетнее обучение, ни введение единого экзамена, ни всеобщее тестирование школьников. Это всё средства, в лучшем случае — стратегия. И для того чтобы обосновать, что эти средства, эта стратегия хороши, а тем более оптимальны, необходимо чётко сформулировать цели образования, обосновать, что нынешняя школа этим целям не соответствует и, значит, её необходимо реформировать. После этого сформулировать цели этого реформирования и только затем определить стратегию и тактику реформ. Это азбука такой полезной дисциплины, как системный анализ, с которой, похоже, плохо знакомы и руководители нашего образования, и консультирующие их специалисты.

К прописным правилам, которыми надо руководствоваться при проведении реформ, относится и необходимость просчёта всех возможных последствий предлагаемых преобразований, как положительных, так и, особенно, отрицательных. Наши реформаторы так и не научились этого делать и всякий раз удивляются: «Ах! Мы этого не предусмотрели» (что ваучеры будут продавать за бутылку). И всякий раз после очередных преобразований ухудшается как раз тот показатель, ради которого эти преобразования делались: растёт чиновный аппарат, коррупция, ухудшается здоровье людей и жизненный уровень населения. И всякий раз выигрывают сами реформаторы.

Итак, необходимость реформ, а тем более кардинальных, системы образования в России нигде и никем не обоснована. Забавно также то, что проводить эти реформы поручено двум ведомствам — Министерству образования и Академии образования, которые сами нуждаются в глубоком реформировании, поскольку никак не изменились, включая персональный состав, с самых давних времён. Реформирована должна быть сама система управления образованием, система финансирования.

В цепочке от министерства к школе слишком много паразитических элементов, пожирающих и так скудные средства, выделенные на образование, да и направление движения этих средств следовало бы изменить. Те аргументы в поддержку трёх основных линий реформирования (двенадцатилетка, единый экзамен, тестирование), которые звучат открыто в печати, с трибун и с экранов телевидения, не только не имеют никакого отношения к сути дела, но и не выдерживают никакой критики как аргументы, а иногда даже содержат просто неверные утверждения. В лучшем случае можно предположить, что руководство страны пытается с помощью реформ образования решить имеющиеся и грядущие острые социальные проблемы. Это очень опасный путь: борьба ведётся не с болезнью, а с симптомами.

Возможно, есть и иные тайные причины, о которых открыто не говорят, и нам приходится пользоваться слухами или строить предположения. Так, говорят в кулуарах, переход на двенадцатилетнее обучение поддерживается военным ведомством. Наше высшее военное руководство обеспокоено уменьшением числа призывников. Утверждают также, что в ближайшем будущем нас ждёт демографическая яма (я лично никаких расчётов относительно глубины этой ямы нигде не встречал), в результате армия может практически лишиться нового призыва. Поэтому следует продержать юношу лишний год в школе и прямо со школьной скамьи забрать в армию. (Кстати, кто сказал, что вследствие перехода на двенадцатилетнее обучение возрастёт возраст выпускников?)

Если такие планы и имеют место, то можно сказать, что их реализация даст прямо противоположный эффект. Наиболее талантливые дети начнут в массовом порядке уезжать за рубеж. Погибнет и армия, и наука. Возможно, осознавая это, руководители министерства образования предлагают значительное сокращение программ по математике, физике и литературе. Это в самом деле может уменьшить волну юношеской эмиграции — недоучек на Западе хватает и своих. Но армия и наука, а точнее, наука и потом армия погибнут всё равно: необразованный солдат сегодня не может быть полноценным солдатом, без хорошо развитой науки невозможна современная армия. Воистину, лучшим средством от насморка является гильотина.

Существует также версия, разделяемая многими компетентными людьми, что определённые круги на Западе, победившие в холодной войне, чтобы сделать эту победу окончательной, ставят сегодня в качестве основной стратегической задачи разрушение системы образования России.

Не следует забывать и об известной теории «золотого миллиарда». Согласно этой теории, ресурсы земного шара не могут обеспечить высокий жизненный уровень для всех жителей земли. Поэтому некоторые страны должны выполнять обслуживающую роль по отношению к странам, жители которых образуют золотой миллиард. Обеспечить нужный порядок должны помочь местные элиты, которые за небольшие деньги но с большим энтузиазмом будут выполнять грязную работу.

Что касается конкретно России, то полезно лишить её такого важнейшего стратегического ресурса, как образование. Российское образование до сих пор востребовано на внешнем рынке. образованная Россия с её неисчерпаемыми природными ресурсами — соперник не просто опасный, но непобедимый.

Именно в этом ракурсе нужно рассматривать кредит, выделенный Всемирным банком и энергично расходуемый неким фондом, название которого «Национальный фонд по подготовке кадров» плохо ассоциируется с проблемами образования. Все известные мне акции этого фонда достаточно хорошо подтверждают эту версию. Кстати, первая цитата в эпиграфе взята из учебного пособия для 7 класса, о котором на обложке написано: «Победитель конкурса по созданию учебников нового поколения для средней школы, проводимого Национальным фондом подготовки кадров и Министерством образования России». (Непонятно, конкурса учебных пособий или учебников или конкурса по созданию оных; конкурс проведён или всё ещё проводится? Кто там во Всемирном банке или Национальном фонде решил, что нам позарез нужны учебники нового поколения? Вообще этот конкурс — сплошная загадка.) Говорят также, что разработчики проектов реформ нашего образования получают солидные гонорары от упомянутого Национального фонда вернее от Всемирного банка через этот фонд.

Учёные, как правило, в качестве наиболее достоверной гипотезы выбирают ту, которая даёт разумное объяснение рассматриваемым явлениям, даже если эта гипотеза на первый взгляд выглядит безумной. И если предположить, что истинной целью предлагаемых в системе образования реформ является её разрушение, то многие действия наших руководителей будут выглядеть вполне логичными. Впрочем, виноват, разрушение — это также средство или стратегия. Почему это выгодно определённым кругам на Западе, понятно. Ну а нашим реформаторам зачем это нужно? Чтобы не упустить кредит, выделенный на конкретные мероприятия? Так невелик кусок, на всех не хватит.

Сделаю ещё два предположения, носящиеся в воздухе. Идейные сторонники реформ в образовании главной своей целью ставят изменение менталитета русского народа. Такие заявления я сам читал в газетах. Это геноцид в чистом виде. Здесь следует заметить, что у любой системы есть характеристики, которые в принципе не подлежат изменению, и любая попытка их изменить может привести к уничтожению самой системы.

При этом сами эти характеристики могут быть не так уж и значимы. Простейший пример: нельзя России перейти на левостороннее движение, не уничтожив наш автопарк и не потеряв много жизней.

Второе предположение. Рыночники и прагматики видят в образовании огромный лакомый кусок, тут и движимость и недвижимость, земля и недра, люди и интеллект, неограниченные возможности для «пиара» любого цвета. И этот кусок остаётся неприватизированным или почти неприватизированным. Чем, рискуя жизнью, заниматься переделом собственности, лучше осваивать новые плодородные земли. А для начала заявить, что эти земли истощены, обесценены и их надо перепахать. Старая схема — сначала обанкротить, а затем приватизировать — может сработать ещё раз.

В числе других предложений в проекте реформ есть одно, на первый взгляд, не очень существенное: учебные заведения (учреждения) переименовать в учебные организации. На деле же это означает смену формы собственности. В системе образования начнут плодиться многочисленные акционерные общества с очень ограниченной ответственностью, а само Министерство образования превратится в очередного монстра-монополиста. Что-то вроде РАО ЕС (Российское акционированное образование, Единая система), а руководящие работники министерства в одночасье станут крупными собственниками. Всё это предположения, и я не буду огорчён, если они не сбудутся. Правда, практика показывает, что действительность часто оказывается хуже любых предсказаний.

В течение последних 30 лет наше среднее образование, особенно его математическая часть, находится в состоянии постоянного реформирования. Первые реформы в 70-е годы были инициированы выдающимся советским математиком А. Н. Колмогоровым. По моему глубокому убеждению, никаких серьёзных причин для этих реформ не было. Система советского образования действовала неплохо, а математическое — и вовсе считалось лучшим в мире. Лёгкие признаки недомогания для специалистов были заметны, но они совсем не требовали серьёзного хирургического вмешательства, каким стали реформы Колмогорова. Да и сама операция была проведена без должной анестезии, и возникли осложнения. Следует всё же признать, что проводили колмогоровские реформы почти бескорыстные энтузиасты, удовлетворившиеся, в основном, научными званиями.

В начале 1990-х годов начался новый этап реформ средней школы. Реформаторы днепровской волны, или, если угодно, розлива, оказались более прагматичными. Был создан специальный ВНИК (Временный научно-исследовательский коллектив). Сколько было израсходовано средств на его содержание, является тайной и по сей день. Все руководители ВНИКа получили академические звания и различные должности.

Забавно, что, начав с обвинений в адрес загнивающей АПН (Академии педагогических наук), руководители ВНИКа с удовольствием стали членами РАО (Российской академии образования), повторив подвиг интеллигентов прошлых лет, вступавших в Коммунистическую партию, чтобы разрушать её изнутри или ради чего-то ещё более благородного. Кое-чего они всё же добились: сохранив структуру и идеологию, АПН переименовали в РАО. (Аббревиатура выглядит вполне современно.) Это только кажется, что переименовать очень просто. Одна вполне антикоммунистическая газета до сих пор не может избавиться от коммунистического названия. Боятся потерять прибыль?

Сейчас раскручивается новый этап реформ в образовании, и, боюсь, он станет самым жёстким. К пирогу рвутся силы, совсем не связанные с образованием. Кстати, стихийная приватизация в системе образования, школьного и вузовского, причём не всегда законная и на уровне директоров школ и ректоров вузов, уже вовсю идёт.

Но не буду строить дальше предположения, а обращусь к часто высказываемым утверждениям, которым отводят статус аргументов. Говорят, что чуть ли не во всём мире имеет место двенадцатилетнее обучение в школе. Но это утверждение и неверно и бессмысленно. Понятно, что обучение с пяти до семнадцати лет — это не то же самое, что с шести и до восемнадцати, а тем более с семи до девятнадцати. А двенадцатилетнее обучение имеет место вовсе не во всём мире. Во многих странах существует некоторый промежуточный этап, который с равной обоснованностью можно отнести как к средней, так и к высшей школе.

Очень любят сторонники реформ доводы типа: ни в одной стране мира нет такого, как в России, вступительного экзамена или чего-то ещё. Утверждение это абсолютно верно ввиду своей банальности. Оно останется верным, если вместо России мы подставим любую другую страну мира. Кстати, ни в одной стране мира нет такого, как в России, балета. Может, и его надо реформировать? Да и по-русски в школе говорят (пока) только в России.

Предлагается ввести в России единый экзамен для поступления в высшие учебные заведения и, более того, проводить его в форме теста. Ссылки на мировой опыт тут уже совсем не проходят. Говорят, что в Латвии (и, кажется, в Болгарии) есть такой экзамен. Возможно, он есть где-то ещё, я не знаю. Но нелепо нам ссылаться на пример Латвии, в которой общее число студентов не превышает числа учащихся в Московском университете. И кроме того, в России, раскинувшейся на десяти часовых поясах, при современных информационных технологиях единый экзамен невозможен в принципе. Да и вообще, единый экзамен невозможен в принципе нигде (даже в Латвии).

Единый экзамен — это не только общий вариант, но это и единые условия его написания и проверки. Даже экзамены, проходящие в соседних аудиториях, могут сильно отличаться. Само по себе понятие «единый экзамен» бессмысленно — нужны чёткие определения. В некоторых странах единый экзамен (по математике) проводится по пяти направлениям и на пяти уровнях, да ещё в течение нескольких дней, да ещё специальными комиссиями. И по сравнению с таким единым экзаменом два экзамена в течение одного лета (что вызывает явно поддельное возмущение реформаторского лобби) — лёгкая прогулка. За единый экзамен выдвигаются порой просто смехотворные доводы: ведь мы же выбираем единого президента путём единого голосования, почему бы нам не ввести и единый экзамен. Бред, да и только.

Но ведь именно против бредовых аргументов труднее всего возражать. Некоторые политики это хорошо усвоили. Кстати, а вообще, зачем экзамен, пусть даже единый? Ведь мы учили ребёнка десять, простите, одиннадцать, т. е. двенадцать лет. И великолепно знаем, что он знает. Надо вообще отменить экзамены, и тогда ученики-спортсмены не станут падать в обмороки от умственного переутомления. (Точно не помню, сколько было школьных выпускных экзаменов в 1953 году (от пяти до семи), но точно помню, что при поступлении в МГУ мы сдавали семь экзаменов. Особым здоровьем наше поколение не отличалось — детские годы пришлись на войну, но жалоб на перегрузки не было.)

Причины встречающихся в школе перегрузок — не от избыточного объёма содержания по основным образовательным предметам, а из-за неверных методик, разработанных всё той же РАО. Кроме того, в сегодняшней школе появилось много паразитических предметов, отнимающих учебное время и не вносящих никакого вклада в образование.

Единый экзамен, да ещё проводимый в форме теста с выбором ответа, может стать вполне эффективным средством уничтожения российского образования и науки, которые, несмотря ни на что, проявляют чудеса живучести. О недостатках тестового экзамена много писали и говорили. Не буду повторять очевидности и прописи. В настоящее время в США, в стране, являющейся, по сути, родиной тестовых технологий, где создана настоящая тестовая индустрия, которая по объёму вложенных средств не уступает автомобилестроению, а по доходности, пожалуй, и превосходит, в самых популярных изданиях можно увидеть статьи, весьма резко критикующие тестовые компании. Многие авторитетные специалисты в качестве одной из важнейших причин низкого уровня американского среднего образования называют именно массовое использование тестов.

Хочу остановиться на одном аргументе, который регулярно приводят сторонники единого экзамена и тестов. Они утверждают, что с помощью этих инструментов можно бороться с коррупцией в нашем образовании, причём на очень небольшом и вполне конкретном участке — при поступлении в высшие учебные заведения. Какое лицемерие! Кому-то не дают покоя доходы, получаемые репетиторами. Газеты пишут про гонорары аж в 100 долларов за час. (Олигархи, идите в репетиторы!) Журналисты, безо всяких демократических процедур объявившие себя властью, не говорят о размерах гонораров за заказные статьи и репортажи, которые без особых усилий можно обнаружить в любой газете или на любом телеканале, но намекают на какие-то фантастические взятки, которые вымогают приёмные комиссии с абитуриентов и их родителей. При этом они проявляют небывалую деликатность в отношении некоторых парламентских лидеров, получающих за свои заокеанские лекции гонорары, многократно превышающие гонорары, положенные нобелевским лауреатам. Это не взятки? Это не коррупция?

Было бы, конечно, нелепо говорить, что в системе высших учебных заведений, причём на таком важнейшем этапе, как поступление в вуз, у нас всё абсолютно честно и коррупция отсутствует. Везде есть, а тут вдруг нет. Но забавно, что под прицел журналистов большею частью попадают далеко не самые коррумпированные вузы. Например, МГУ. К слову хочу заметить, несколько противореча предыдущему, что благодаря МГУ мы имеем некоторый опыт по проведению единого экзамена. Несколько лет назад многие вузы охотно принимали абитуриентов, сдававших экзамены в МГУ, но не прошедших по конкурсу. Столь велик был авторитет МГУ и качество вступительного экзамена в университет. Я думаю, что и сегодня иным вузам следовало бы поступить так же. Качество приёма только улучшится.

Говоря о коррупции при поступлении в вузы, журналисты почему-то не замечают другие явные признаки коррупции в системе образования. Вот, например, интересная, но опасная тема: школьные учебники. Деньги здесь столь огромные, что известны случаи заказных убийств людей, связанных с изданием учебников. Полезно заглянуть и в закоулки, да и в кабинеты Министерства образования и иных учреждений, не прячется ли там коррупция, а может даже и не прячется.

Или всё тот же Национальный фонд подготовки кадров. Позволю себе процитировать слова Г. Сатарова из интервью «Новой газете» (№ 61, 2–8 ноября 2000 г.): «Как только в законе предлагается создать какой-то специализированный внебюджетный фонд — всё, можете поднимать знамя, на котором крупными буквами написано: здесь будет коррупция». Да и сама возможность разрабатывать и проводить реформы образования, на что выделены и уже расходуются значительные средства, создаёт дополнительные условия для коррупции.

Очень любят чиновники от образования также различные частные структуры, точнее, некоторые из них. Так, например, некое ЗАО «Образование для всех», состоящее из двух мало кому известных человек, пользуется давним и открытым покровительством со стороны сразу двух крупных ведомств — Московского департамента образования и Министерства образования — и регулярно получает от них весьма ответственные и выгодные заказы. В настоящий момент это ЗАО по поручению высшего руководства Министерства образования занимается разработкой нового содержания школьного образования. Надо отдать должное мастерству разработчиков этого нового содержания. Если судить по проекту, они смогли придумать такое содержание, при котором в проигрыше оказываются абсолютно все предметы.

Милый и наивный Остап Ибрагимович! Создав свою контору «Рога и копыта», он зачем-то стал собирать досье на честнейшего Корейко. Какие возможности он упустил! Он мог бы, например, заняться таким гораздо более прибыльным и спокойным бизнесом, виноват, делом (бизнеса в то время ещё не было), как снабжение продовольствием детских садов и школ...

Предлагая для борьбы с коррупцией при поступлении в вузы единый экзамен в виде теста, руководители нашего образования как раз доказывают, что они вовсе не собираются с этой коррупцией бороться. «Надо делиться», — говорят они работникам вузов. Ведь когда потенциальные преступники локализованы на узком участке во времени и пространстве и разделены по виду деятельности (приёмные комиссии, экзаменаторы, репетиторы), их очень легко выявить и разоблачить. Труднее всего бороться с мелкой уличной преступностью и с крупной организованной.

Введение единого вступительного экзамена в тестовой форме неизбежно приведёт к значительному усилению коррупции при поступлении в высшие учебные заведения. Новые возможности появятся, с одной стороны, у школ (уличная преступность), а с другой — у руководящих организаций, вплоть до министерства (организованная преступность). И можно не беспокоиться, эти возможности будут полностью использованы. Число поборов на пути от школы в вуз значительно вырастет. Внутривузовские же коррупционеры, если таковые были, никуда не денутся и смогут начать работать уже с первой сессии, а то и с первого учебного дня, громогласно и справедливо возмущаясь подготовкой вновь принятых студентов.

После обычного письменного экзамена остаётся документ, который может быть подвергнут графической и иной экспертизе. После тестового экзамена остаётся бланк с крестиками, который мог быть заполнен кем угодно, когда угодно и где угодно. Общеизвестно, что выпускные экзамены в российской школе — это массовая фальсификация, на которую министерство и школы идут абсолютно сознательно. К этому следует ещё добавить неискоренимую страсть к списыванию, являющуюся характерной чертой русской национальной школы с незапамятных времён. При тестовой форме экзамена возможности и для фальсификации, и для списывания просто неограниченные.

Возникает естественный вопрос: а как же в Америке? Оказывается в Америке, стране, которую вряд ли можно принять за образец нравственности, тем не менее в школах практически полностью отсутствует списывание, учитель никак не вмешивается в процесс выполнения теста своими учениками. Это явление хорошо соответствует основной национальной черте американцев — индивидуализму.

Можно вполне определённо утверждать, что после проведения единого по стране вступительного экзамена в тестовой форме в самые престижные вузы страны хлынет поток абитуриентов, которые предоставят в приёмные комиссии документы с самыми высокими баллами. Для приёмной комиссии, склонной к коррупции, лучшей ситуации и выдумать нельзя. Можно принять кого угодно и никакой ответственности.

Введение тестовой системы оценки знания создаст ещё один вид бизнеса, а с ним и ещё одну разновидность коррупции, с которой сегодня столкнулись США. В последнее время, по свидетельству таких газет, как «Нью-Йорк таймс», «Лос-Анжелес таймс» и других, в США произошла целая серия скандалов, связанная с ошибками при итоговом тестировании школьников. По мнению экспертов, тестовые компании из-за неверных методик занизили оценки одних школьников, отправив их в летние школы для дополнительной подготовки, и завысили оценки других, незаслуженно переведя их в следующий класс. Но благодаря финансовым возможностям тестовых компаний (например, компания, создавшая школьные тесты для Нью-Йорка, получила в 1999 году 3,3 миллиона долларов) далеко не все подобные случаи стали достоянием гласности. То, что здесь видны признаки коррупции, очевидно, а то, что такая коррупция сразу же разовьётся в России, очевидно вдвойне. Можно представить себе, какая борьба развернётся у нас за монопольное право (единый экзамен по определению предполагает монополию) проводить единый экзамен, за право проводить общероссийское тестирование.

Кстати, забавно, что некоторые ректоры выступают против единого экзамена, но за тестирование. Причина очевидна, они хотят сохранить в своих руках такой полезный во всех смыслах инструмент, как вступительные экзамены, но избавиться при этом с помощью тестов от профессионалов-предметников, математиков или специалистов по русскому языку, которые могут поставить неверную оценку нужному абитуриенту.

Короче говоря, единый экзамен и всеобщее тестирование поднимут коррупцию в системе образования на такую высоту, что с ней просто нельзя будет бороться.

И в заключение я опять хочу вернуться к эпиграфу. Две цитаты — две стороны одной медали. В новых учебных планах, предлагаемых министерством, отсутствует геометрия. Противники геометрии могут найти ещё немало цитат из указанного в эпиграфе пособия (а вскоре выйдут пособия для 8 и 9 классов) для оправдания свой позиции. Следующим очевидным шагом должно быть исключение из программ всей математики и физики. Так что производителям техники «Занусси» придётся отказаться от своей рекламы, но не потому, что обыватель-рекламоглотатель вдруг поймёт, что параллельные не пересекаются не из-за происков Евклида, а, как говорят математики, по определению. Просто слова «параллельные», «доказано», «Евклид» потеряют для обывателя, а следовательно и для рекламодателя, какой-либо смысл... А Федю жалко!

Рассуждения о концепции школьной геометрии

Не в том суть жизни, что в ней есть,
но в вере в то, что в ней должно быть.

Иосиф Бродский

Концепция любого учебного предмета должна отвечать на три вопроса: Зачем (нужна геометрия)? Какая (нужна геометрия)? Как (нужно преподавать геометрию)? Соответственно этим трём вопросам мы имеем три части.

1. Цели обучения

В последнее время в различных газетах и журналах, в радио- и телевизионных передачах часто встречаются материалы, касающиеся положения дел в средней школе. Однако если судить по этим публикациям и передачам, то может создаться впечатление, что в современной средней школе почти отсутствует математика. Нынче школьник изучает массу разных предметов, тут история и сексуальное воспитание, информатика и Закон Божий, эстетика и основы маркетинга, и многое, многое другое. Но математики нет, а если она ещё где-то и существует, то входит в число второстепенных предметов. Похоже, именно так думают сегодня многие руководители нашего государства, а за ними и руководящие образованием чиновники. И в этом — большая стратегическая ошибка. *Родной язык и литература*, *физкультура*, *математика* — вот три стержня среднего образования. Среди всех предметов математика охватывает самый широкий спектр учебных, образовательных, развивающих и других самых разных целей. Понятно, что основные цели математического образования в той или иной степени относятся и к его геометрической составляющей, хотя некоторые специфичны именно для неё. Но прежде

Публикуется с сокращениями. Полный вариант см.: *Шарыгин И. Ф.* Рассуждения о концепции школьной геометрии. М.: МЦНМО, 2000.

чем мы[1] перейдём к описанию этих целей, зададим и попробуем ответить ещё на один вопрос.

Кто определяет цели образования? На этот вопрос даётся стандартный ответ: общество, которое формирует так называемый *социальный заказ*. Но тогда возникают другие вопросы: а кто конкретно выступает в качестве доверенного лица общества и доводит до его же сведения им же сформированный социальный заказ? Как можно быть уверенным, что цели образования, сформулированные какими-то крупными учёными или высокопоставленными чиновниками, в самом деле выражают этот социальный заказ? Как меняются цели образования в пространстве и времени?

В западных социологических исследованиях существует теория, согласно которой развитие общества и его компонент происходит по следующей схеме: накапливающиеся изменения и противоречия формируют *социальный вызов* (social challenge), на который должен последовать соответствующий ответ (response), и если этот ответ в самом деле соответствует вызову, то общество (общественные институты) развиваются. Если же данный ответ не соответствует вызову, то продолжающие накапливаться внутренние противоречия могут стать мощной разрушающей силой. (Очевидная аналогия — внутренние болезни человека.) Нетрудно увидеть сходство понятий *социальный заказ* и *социальный вызов*.

Подобная схема справедлива и для системы образования, при этом для школы важен ответ не в виде формулировок общих целей, а их реализация в комплекте учебников и учебных пособий. Но в любом случае очень важно, насколько имеющийся ответ соответствует социальному заказу. Похоже, что в первой половине XX столетия российское (советское) общество получило от школьного математического (и не только математического) образования адекватный ответ на социальный заказ (социальный вызов). Накопившиеся затем внутренние противоречия не нашли своего адекватного ответа (конец семидесятых), и математическое (опять же не только) образование начало деградировать. Известные общественно-политические события конца восьмидесятых резко обострили ситуацию и в системе образования. Ответ на социальный вызов попыталась дать небольшая группа учёных от образования, расположившихся в далёких от стола президиума рядах. К сожалению, попытка оказалась с негодными (если не учитывать деньги) средствами, хотя основной своей цели реформаторы всё же достигли, они пересели в кресла первого ряда

[1] Работа написана от первого лица множественного числа. Это больше соответствует традициям жанра, чем единственное число. Этим автор также демонстрирует уверенность, что его мнение разделяет, по крайней мере, ещё один человек.

и отчасти в президиум (в смутное время повсеместно всплывают мутные люди), слегка потеснив старожилов, но процесс деградации образования не только продолжился, но и ускорился.

Практическое значение (общематематический аспект). Говоря о практическом значении математики, надо иметь в виду, что *практическое значение математики как науки, и математики как образовательного предмета — это далеко не одно и то же*, хотя сходство безусловно есть.

Академик В. И. Арнольд, начиная свою лекцию «Зачем нужна математика?», привёл слова Роджера Бэкона, сказанные более семисот лет тому назад: «Человек, не знающий математики, неспособен ни к каким другим наукам. Более того, он даже неспособен оценить уровень своего невежества, а потому не ищет от него лекарства». По мнению В. И. Арнольда, в современном обществе роль математики если и изменилась, то в сторону увеличения её значимости.

Стоит напомнить здесь также высказывание Наполеона: «Процветание и совершенствование математики тесно связано с благосостоянием государства». Сегодня в западных, или, как у нас любят самоуничижительно говорить, цивилизованных, государствах резко выросло значение математического образования и математического знания в сфере бизнеса. Возникли такие разделы математики, как финансовая математика, актуарная математика (если сфера интересов первой понятна из названия, то по поводу второй поясним: здесь исследуется теория страхового бизнеса); некоторые достижения математиков, например, полученная ими формула справедливой цены, произвели настоящий переворот в технике биржевых и вообще коммерческих сделок (именно за это была присуждена Нобелевская премия по экономике в 1997 г.), организуются семинары и конференции, в которых участвуют математики и бизнесмены, на высокооплачиваемые должности в банки и другие коммерческие структуры приглашаются профессиональные математики. Нам кажется, что уже этих доводов достаточно. *Образование вообще и математическое в особенности имеет огромное экономическое значение.* Но в нашей стране трудно убедить общественно-обывательское сознание в полезности математического знания для достижения жизненного успеха, в то время как со всех сторон— с экранов телевизоров, со страниц газет, из соседних подъездов — видны совершенно противоположные примеры. И пока наше общество и его руководители не осознают важность образования, математического образования, пока это осознание не будет переведено в конкретную практическую плоскость, мы не выберемся с задворок цивилизации, на которых находимся сегодня.

Сегодняшний уровень развития техники и технологий предъявляет особые требования к математической подготовке обслуживающего персонала. В Японии, например, одним из критериев отбора на некоторые рабочие должности является знание высшей математики. Во все времена и во всех странах (кроме России сегодня) большое внимание к математическому образованию проявляли военные ведомства и близкие к нему структуры, они же во многом содействовали его развитию. (Хотя математики от этого и не всегда в восторге.) Сегодня особенно справедлив тезис, что от качества математического образования зависит обороноспособность страны. Математически неподготовленному солдату нельзя доверить сверхточную, сверхмощную и сверхдорогую современную военную технику. Практика последних военных конфликтов показала, что современные войны, а тем более будущие, выигрываются в школьных аудиториях и научных лабораториях.

Как видно из сказанного, роль математического знания сегодня в обществе столь велика, что справедливо утверждение: *Плохое математическое образование ограничивает свободу личности, ущемляет права человека, в частности, право на свободный выбор профессии. Плохое математическое образование — прямая угроза национальной безопасности, причём почти всем её аспектам: военному, экономическому, технологическому и прочим.*

Знание. Одним из результатов любого обучения является знание. Знание основных геометрических законов, формул и теорем необходимо человеку для нормального функционирования в обыденной жизни. Но следует всё же признать, что объём этих знаний весьма невелик и может быть вмещён в очень небольшой курс. Поэтому, как бы мы ни подчёркивали, что геометрия возникла из практических потребностей человека и её практическая значимость сегодня по-прежнему велика, убедить общество в необходимости выделения большого количества часов в школе для изучения геометрии лишь на этом основании нам вряд ли удастся. Не следует также преувеличивать значение знания школьной геометрии для продолжения образования. Многие понятия школьной геометрии заканчивают своё существование в школе и никак не используются в высшей математике.

Здесь стоит заметить, что очень часто со стороны многочисленных обывателей, в том числе и высокопоставленных обывателей, влияющих на принятие важных решений, раздаются обвинения в адрес математики, упрёки в том, что те или иные математические знания не применяются в практической жизни. «А зачем надо уметь решать квадратные уравнения, извлекать корни? Где в практической жизни встречаются логарифмы? Для чего нужно знать свойства описанного четырёхугольника?» — строго спрашивают они. И как только математики начинают всерьёз отвечать на подобные вопросы, опровергать выдвинутые обвинения, они тотчас попадают в глупое положение, их позиции становятся очень уязвимыми. Ответ здесь один: подобные вопросы свидетельствуют о глубоком непонимании целей математического образования, его роли и места в современном обществе. Нельзя говорить отдельно о практическом значении того или иного конкретного математического утверждения, но можно и нужно говорить о большом практическом значении математического знания в целом. Отдельные теоремы — это звено в цепи, убери его — разрушится вся цепь.

Особая роль элементарной геометрии по отношению к серьёзной науке, причём не только математической, состоит также в том, что она (элементарная геометрия) является неисчерпаемым источником интересных и оригинальных идей, облегчает поиск решения самых различных научных и технических проблем.

Культурное развитие. *Геометрия — это феномен общечеловеческой культуры. Человек, не знающий геометрии, не может считаться культурным.* Можно сказать, что геометрия является самым гуманитарным из негуманитарных предметов, посредством геометрии реализуются многие цели, специфичные именно для предметов гуманитарного цикла. При этом геометрический критерий культурного развития человека, в отличие от, скажем, литературного, является общечеловеческим. Например, некий человек, живущий в Новой Зеландии, вполне может быть культурным, даже если он не знаком с творчеством Пушкина. Но если он не знает теоремы Пифагора, то его право называться культурным очень и очень сомнительно. Многие теоремы геометрии представляют собой одни из самых древних памятников мировой культуры. Здесь очень важно понимать, что *история геометрии по сути является отражением истории развития человеческой мысли*, что она является одной из (двух, трёх? а может, вообще единственной?) первонаук, и её возраст совпадает с возрастом вида homo sapiens. Знание истории развития человеческого общества, необходимое для любого культурного человека, включает в себя и определённые элементы геометрии.

Не следует, однако, упускать из виду, что геометрическая культура при всей своей общечеловечности, обладает и национальным колоритом, отражает национальный менталитет. Курс геометрии, например, во французской школе достаточно сильно отличается от российского курса.

Духовное развитие. *Геометрия возникла не только из практических потребностей человека, но, и это очень важно, и из его* *духовных потребностей.* И здесь её можно поставить в один ряд с поэзией, музыкой и живописью. Геометрия занимает важное место в ряду культовых наук. В качестве примера можно взять Японию. Синтоизм — основная религия Японии — всячески поощряет занятия геометрией. В средние века в этой стране была сильно развита так называемая храмовая геометрия. Достижения японских геометров, которые они оформляли в виде ярко раскрашенных досок и вывешивали при синтоистских храмах, во многом опережали достижения европейских геометров.

Конечно, отделить духовное развитие от культурного не так просто. В некотором смысле культура есть форма проявления духовности. Но не только. Возможно, что духовное развитие — один из наиболее непонятных и труднопроверяемых видов развития. Но его нельзя отрицать, как нельзя отрицать и то, что геометрия способствует духовному развитию личности.

Интеллектуальное развитие. То, что математика является одним из самых важных средств интеллектуального развития человека, которыми располагает человечество, общеизвестно и общепризнано. Математика является также важнейшим средством оценивания уровня интеллектуального развития человека. При этом геометрические критерии особо значимы для высоких уровней.

Геометрия, впрочем, как и алгебра, является носителем собственного метода познания мира. Овладение этим методом — важнейшая цель образования. Но вклад геометрии в интеллектуальное развитие человека этим не исчерпывается. Отдельно следует выделить роль геометрии на начальных ступенях школьного образования. Надо помнить, что не только *исторически* (для всего человечества), но и *генетически* (для отдельного человека) *геометрическая деятельность является первичным видом интеллектуальной деятельности*, и заниматься этой деятельностью человеку приходится буквально с момента рождения.

Выявленная и доказанная психологами и физиологами функциональная асимметрия головного мозга заставляет нас также несколько иначе взглянуть на значение геометрии в развитии человека. Оказывается, наши полушария по-разному функционируют. Левое ведает логическим, алгоритмическим мышлением. Работает левое полушарие лишь во время бодрствования. Когда человек спит, оно выключается. Правое отвечает за чувственную, образную сферы нашего сознания. Правое полушарие функционирует постоянно. Наши сновидения — продукт деятельности правого полушария. Некоторые из известных методик обучения математике чрезмерно перегружают левое полушарие. Это очень опасно именно на ранних ступенях школьного обучения и особенно в отношении детей с доминирующим правополушарным типом мышления, а таких детей довольно много, возможно даже подавляющее большинство. В результате мы имеем учебные перегрузки, стрессы и даже неоправданную дебилизацию некоторых учеников, которые начинают отставать в своём интеллектуальном развитии. Широко известно, что переучивание левши может привести к ослаблению его умственных возможностей. Переучивание же «интеллектуального левши» может привести и вовсе к трагическим последствиям.

Отсюда можно сделать вывод, и этот вывод уже подтверждён практикой, что при широкой геометризации школьной математики на её начальных ступенях значительно сокращается число отстающих, лучше усваиваются и негеометрические разделы. *Сам процесс занятий геометрией уже имеет большое развивающее значение.*

Творческое развитие. Если декларирование необходимости интеллектуального развития в качестве одной из целей среднего образования представляется вполне оправданным, то этого нельзя утверждать относительно развития творческого. С точки зрения правящих слоёв стабильного общества главной целью образования, определяющей все другие цели, является воспроизводство социальной системы. Перепроизводство творческих личностей — угроза стабильности общества. Это в равной мере верно в отношении режимов и тоталитарных, и демократических. Но если в стране стабильность режима сопровождается высоким жизненным уровнем всего населения, то указанная основная цель образования соответствует интересам общества. Впрочем, наверное, ни в одном государстве, будь то КНДР или Франция, в официальных концепциях не говорится, что творческое развитие не является важной целью образования, но на полуофициальном уровне с подобными утверждениями приходится сталкиваться.

Развитие творческих способностей традиционно является одной из важнейших целей российского образования. Возможно, это как раз потому, что в России никогда не было настоящей стабильности. Именно сегодня эта цель особо актуальна. Несколько упрощая проблему, можно сказать, что в основе любого творческого процесса лежит воображение. Вольтер как-то сказал: «В голове у Архимеда было больше воображения, чем в голове у Гомера». В литературе по методике преподавания геометрии достаточно часто встречается термин «геометрическое воображение». Подобные словосочетания в методиках по другим предметам, в том числе и математическим, не встречаются. Уже на этом основании можно сделать вывод о больших возможностях геометрии для развития творческих способностей.

Общая цель — развитие творческих способностей — содержит более конкретную и специальную цель — выявление и обучение одарённых детей, в частности, математически одарённых, и даже ещё у́же— геометрически одарённых детей.

Эстетическое развитие. Вся математика, а геометрия в особенности, обладает своеобразной эстетикой. Впрочем, говоря о геометрии, оборот «своеобразный» можно убрать, поскольку геометрическая эстетика видна и понятна любому образованному человеку. *Нельзя проникнуть в суть геометрии, если не видеть красоты геометрических форм, формул и формулировок.* Говоря о решении геометрических задач, мы часто используем характеристики: красивое решение и некрасивое решение. К красивым мы обычно относим короткие, чисто геометрические решения, а некрасивыми считаем длинные и счётные. Не как-нибудь решить задачу, а решить её красиво — вот цель, которую должен ставить перед собой любой хорошо геометрически воспитанный человек: и школьник, и профессиональный математик (здесь мы вынуждены сделать определённый упрёк в адрес некоторых победителей олимпиад и их воспитателей). Причём не ради каких-то конкретных выгод, а ради самой красоты.

Нравственное воспитание. В романе «Война и мир», характеризуя старшего князя Болконского, Николая, Л. Н. Толстой пишет: «Он говорил, что есть только два источника людских пороков: праздность и суеверие, и что есть только две добродетели: деятельность и ум. Он сам занимался воспитанием своей дочери и, чтобы развить в ней обе главные добродетели, давал ей уроки алгебры и геометрии и распределил всю её жизнь в беспрерывных занятиях». Зная отношение великого писателя к математике, можно предположить, что здесь Толстой высказывает своё мнение о воспитательном значении математики.

Занятия математикой развивают добродетели, обостряют чувства справедливости и собственного достоинства, воспитывают внутреннюю честность и принципиальность. Замечено, что при тоталитарных режимах нередко возрастает интерес к математике в самых широких слоях общества. Математика даёт людям отдушину в атмосфере страха и унижения, возможность выжить, не вступая в конфликт с совестью. Впрочем, при любом режиме математика привлекательна полной независимостью от каких-то конъюнктур; тем, что математическое знание абсолютно истинно, но всегда неполно и потенциально бесконечно развивается; и тем, что математическое сообщество являет собой пример идеального демократического сообщества.

Несколько лет тому назад российского обывателя вдруг со всех сторон начали пугать образом бездушного технократа, который может прийти к власти. При этом на математиков также смотрели, как на потенциальных технократов. Прошло некоторое время, у власти по-прежнему бездушные люди, среди которых много всяких «кратов», старых и новых, но технократов не видно. Хотим посоветовать всем тем, кто мечтает о власти: как можно меньше занимайтесь математикой и особенно остерегайтесь геометрии. Сама идея доказательства чужда всякой власти. Трудно найти другой такой предмет, чья нравственная основа столь далека от идеи власти, как геометрия.

Нам могут возразить: а Наполеон? Есть даже задача Наполеона, и именно геометрическая. Скорее всего, это миф, созданный льстивыми царедворцами. Властители во все времена, начиная с Нерона и до Ельцина, хотели прославиться на поприще искусства или науки. Но даже если Наполеон и вправду разбирался в геометрии, то это как раз тот случай, когда исключение подтверждает правило. И кроме того, сегодняшних наполеонов можно найти только в психбольницах.

Дополнительные локальные цели начального периода. Одной из важных особенностей настоящего периода человеческой истории является быстрое изменение среды обитания. Настолько быстрое, что человек как биологический вид просто не успевает к ним приспособиться. При этом уже с самого рождения ребёнок попадает в жёсткую и враждебную техногенную среду. Возникает необходимость в средствах, амортизирующих столкновение ребёнка с враждебным миром, компенсирующих недостаток привычных и необходимых для нормального развития видов деятельности. Подобные функции, хотя бы частично, может взять на себя геометрия.

Чтобы нормально развиваться, ребёнку необходимо полноценное питание. Для нормального интеллектуального развития ему необходима полноценная интеллектуальная пища. *Сегодня геометрия является одним из немногих экологически чистых продуктов, потребляемых в образовании.* А по «потребительским» качествам с геометрией не может сравниться никакой другой школьный предмет. Более того, возможно именно геометрия должна сыграть важную роль в сохранении в природе вида homo sapiens, если, конечно, мы желаем этот вид сохранить.

Передоверяя компьютеру многочисленные интеллектуальные функции — память, вычисления, построение изображений, анализ текстов и многое другое, фетишизируя выдаваемые компьютером результаты, человек рискует исчезнуть с лица земли как биологический вид и продолжать своё существование уже в качестве homo computeric. Но именно геометрическое мышление пока сопротивляется «всеобщей компьютеризации», именно в области геометрии человек ещё не проиграл интеллектуального соревнования компьютеру. И значит, *развитие геометрического мышления* является одной из важнейших задач школы, причём с первых классов.

Геометрия обладает также уникальными возможностями для полноценного *эмоционального развития* ребёнка. (Здесь очень важны правильный отбор содержания и выбор методики.) А как показывают последние исследования, именно эмоциональное развитие образует фундамент для полноценного интеллектуального, творческого и иных видов развития и даже может скорректировать отставание ребёнка в умственном развитии.

2. Характеристика курса геометрии. Основные идейные и содержательные линии

Главный вопрос математического образования. Опасность американизации. Много опасностей угрожает сегодня российскому математическому образованию, но главной из них, по мнению В. И. Арнольда, является начавшаяся американизация. Казалось бы, об этом ли нам сейчас думать, когда американский дух и образ мыслей проник во все поры нашей жизни. Здесь стоит напомнить, что советское математическое образование являлось одним из достижений советской власти и его высокий уровень признан во всём мире. Сегодня мы наблюдаем относительное падение этого уровня. Однако это падение несравнимо с деградацией, которая имеет место в других сферах общественной и культурной жизни. Несмотря на усилия отдельных руководителей нашего образования по внедрению американского стиля, математическая общественность более или менее успешно этому сопротивляется. И беда от американизации даже не в том, что американское математическое образование, по мнению многих экспертов, является одним из худших в мире. (Это не мешает, однако, процветанию и совершенствованию математики в американском обществе. По известному мнению Наполеона математика напрямую связана с благосостоянием государства.) Оно — иное.

Главным вопросом математического образования в России всегда был вопрос *почему*?, в то время как для американского главным является вопрос *как*? И здесь мы чётко видим соответствие особенностям национального характера. Вместо американского «ноу-хау» (know how — знаю как) имеем российское «знаю почему» (ноу вай — know why). Понятно, что соответственно этим парадигмам мы получаем совершенно разные системы математического образования, требующие разных типов учебников и учебных пособий, подразумевающие совершенно различные методические системы. Понятно также, что проникновение американского стиля в наше математическое образование создаст в нём серьёзное внутреннее противоречие и в результате может его просто разрушить. При этом особенно тяжёлые последствия будут именно в области геометрического образования. Американская наука «питается мозгами» всего мира, мы же — только своими. *Снижение уровня математического образования может окончательно добить российскую науку.*

Люди могут сильно заболеть в результате простой смены пищи. Если у всего народа резко меняется состав пищи духовной, меняются местами нравственные ориентиры, то всё общество заболевает тяжёлым психическим недугом вроде раздвоения личности. Оно теряет способность ориентироваться, а следовательно, развиваться. Вряд ли мы сумеем увидеть в обозримом будущем наше общество здоровым. Так постараемся сохранить относительно здоровыми ещё не очень поражённые органы, например математическое образование.

Одной из важнейших задач образования в целом является сохранение национального генетического кода, введение этого кода в личностные генетические программы новых поколений. Именно с этой точки зрения необходимо оценивать все значимые изменения, так называемые новации, а тем паче «инновации» (что бы это могло значить?) в педагогике, которые так любит чиновник от педагогики. *Умеренный национализм и консерватизм входят в число условий, определяющих эффективную систему образования.*

Хотелось бы здесь сделать ещё одно замечание. Сохранение национальных традиций в образовании, и не только в нём, полезно человечеству в целом, оно создаёт в человеческом сообществе некую разность потенциалов и тем самым способствует развитию земной цивилизации. А посему создание всемирного единого образовательного пространства — это вовсе не благо. И пусть одни генерируют идеи, а другие доводят их до ума, возвращая авторам в виде «ноу хау». Suum quique[1)].

Геометризация науки и образования как всеобщая тенденция. Из предыдущего раздела видно, что ареал геометрии далеко выходит за границы собственно математических дисциплин и распространяется на территории, традиционно приписываемые другим предметам, в том числе таким далёким от математики, как физкультура или рисование. В последнее время значительно выросло значение геометрической компоненты на всех этажах математического здания: и в образовании, и в науке. Причём это является общемировой тенденцией. Сегодня мы наблюдаем своеобразный геометрический бум. Во многих странах (Япония, Франция и др.) дети вовлечены в содержательную геометрическую деятельность уже с детсадовского возраста, увеличились по объёму и возросли по

[1)] Каждому своё (лат.).

сложности школьные курсы геометрии, варианты вступительных экзаменов в институты содержат много трудных задач по геометрии. В математической науке значительная часть исследований, конференций и публикаций относятся к геометрии. Геометрические идеи глубоко проникли в современные исследования по физике, биологии и другим наукам.

Что касается математического образования, то и здесь уместно говорить о его широкой геометризации как о характерной особенности. Общеизвестен алгебраический метод, применяемый в самых различных науках и разделах математики, в том числе и в геометрии. То, что алгебра помогает геометрии, даёт ей свой инструмент для исследований, — явление обычное. Но важно и то, что геометрия может оказать большую помощь при обучении алгебре и другим математическим наукам. Всевозможные геометрические интерпретации и методы доказательств могут помочь в изучении алгебры, помочь понять смысл формул, вывести их и прочно запомнить. И эти возможности геометрии необходимо максимально использовать.

Взгляд в прошлое. Уникальность геометрии, её отличие от всех других предметов, в том числе и предметов математического цикла, состоит также и в том, что её содержание существенно не изменилось за многовековую и даже тысячелетнюю историю. (Говорят, что в Англии в качестве учебника до сих пор используются «Начала» Евклида. Скорее всего, это не так, но интересно, что в принципе это возможно.)

Но, говоря об истоках геометрии, нельзя всё сводить к эллинской культуре. Безусловно, греческая цивилизация оказала огромное влияние на европейскую науку и культуру, а евклидовы «Начала» стали, по существу, первым учебником, по которому училась вся Европа. Именно «Начала» сформировали взгляд на геометрию как на основное средство развития логического мышления, и именно этот взгляд являлся, да и сегодня является, господствующим во многих странах, в том числе и в России.

Совсем иной взгляд на геометрию имели древние восточные учёные. В Китае, например, в геометрии запрещались словесные формулировки, рассуждения, объяснения. Китайские учёные полагали, что слова являются причиной противоречий, софизмов, ими нельзя выразить сущность геометрических явлений. И наоборот, рисунок, чертёж считался источником геометрических фактов, одновременно показывая и доказывая их.

Длительное время в Европе геометрия оставалась предметом для избранных. Она служила своеобразным полигоном для оттачивания логического мастерства, умения вести научный диспут, входила в число светских наук. (Во времена Пушкина вышла даже «Геометрия для светских людей».) Получается, что геометрия, в отличие от арифметики и алгебры, пришла в школу в некотором смысле сверху. Отсюда и серьёзные педагогические проблемы, которые начались уже с того момента, как геометрия стала общеобразовательным предметом в массовой школе. Прежняя геометрическая концепция перестала соответствовать новым образовательным целям. Возможно, что возникшее несоответствие проявилось с особой силой именно в России. Ведь российское образование формировалось по западным образцам, в то время как национальные корни значительной частью располагались на Востоке.

Идея *евразийства*, или, точнее, востокозападничества, в которой восток более отдалён, чем он трактуется обычно (геометрически-географически Россия представляет собой своеобразный магнит с двумя естественно обозначенными полюсами: восточным и западным), *является важнейшей составляющей — сознательной или подсознательной — российской духовной и культурной жизни. Геометрия является именно тем предметом, в котором эта идея может быть и должна быть адекватно отражена.*

В конце XIX столетия в России появилась «Геометрия» А. П. Киселёва, которая через некоторое время, благодаря поддержке военного ведомства (!), стала основным учебником в царских гимназиях. Именно этот учебник, подвергшийся нескольким переработкам, просуществовал в России в качестве единственного школьного учебника почти весь советский период, в течение полувека. Случай беспрецедентный в мировой практике. Вывод очевиден: автор правильно выполнил социальный заказ. Мы не будем анализировать содержание учебника Киселёва и рассказывать о жизненном пути автора, но на одно обстоятельство хотим обратить внимание. Киселёв имел в нашем понимании высшее педагогическое, но не математическое образование, преподавал в провинциальных гимназиях, в кадетском училище, репетировал купеческих дочек.

В начале 70-х годов началась реформа российского и советского математического образования, возглавил которую выдающийся математик А. Н. Колмогоров. Ревизии подверглись все школьные программы и учебники. Конечно же, это не было проявлением простой прихоти великого человека. Сходные процессы, причём гораздо раньше, начали происходить повсеместно. Дело в том, что на фоне бурных изменений в науке, начавшихся в конце XIX столетия, система образования выглядела застывшей и отсталой, не соответствующей новым научным реалиям. Возникло желание пересмотреть эту систему и привести в соответствие с достижениями современной науки, причём это желание возникло у очень крупных и уважаемых учёных.

В области математического образования самым ярким примером может служить Франция. Там в середине XX века произошли значительные изменения, и сделаны они были под влиянием идей группы крупных учёных, объединившихся под псевдонимом Бурбаки. Главным итогом этих изменений стала всеобъемлющая формализация содержания школьного математического образования. В результате, например, ученики начальных классов на вопрос «Чему равно $2 + 3$?» отвечали: «Поскольку сложение является коммутативной операцией, то $2 + 3$ равно $3 + 2$». (Этот пример взят из лекции В. И. Арнольда.) Печальные последствия бурбакизации французского математического образования уже стали явно заметны, когда у нас начались реформы математического образования. Сейчас-то мы понимаем, что *образовательные процессы подчиняются строгим биологическим законам и ускорить их нельзя, подобно тому как нельзя ускорить время вынашивания плода.*

Что касается непосредственно геометрии, то справедливости ради надо заметить, что в нашем обществе к тому моменту (начало 1970-х) накопилась неудовлетворённость состоянием преподавания геометрии. Главной причиной снижения уровня геометрической подготовки, вероятно, стало решение о всеобщем среднем образовании. Ситуация вековой давности повторилась, систематический курс геометрии пришлось изучать всем школьникам Страны Советов и выяснилось, что многие из них к этому интеллектуально не готовы. Программу по геометрии начали упрощать, затем возникли некоторые учебники переходного периода, а потом в школе начал действовать учебник, созданный под руководством А. Н. Колмогорова.

Здесь следует также признать, что учебник Киселёва, уже в течение длительного времени функционировавший в школе, ко времени начала реформ значительно морально устарел. Его существенным недостатком, например, была чрезмерная статичность, отсутствие идеи движения. Именно идея движения была взята в качестве концептуальной основы учебника Колмогорова. Однако эта идея в учебнике была реализована с формально-математической точки зрения через теорию преобразований плоскости. А это очень глубокая и труднодоступная для массового школьного сознания теория. Недовольство снизу, жёсткая критика со стороны математиков сверху вытеснили учебник Колмогорова из школы. На смену ему пришёл учебник А. В. Погорелова.

Учебник А. В. Погорелова действует в российской школе и по сей день и является одним из двух основных учебников. (Второй — учебник авторского коллектива, возглавляемого Л. С. Атанасяном.) Не будем анализировать и оценивать эти учебники. По общему мнению ситуация с геометрией в сегодняшней школе обстоит неблагополучно, настолько неблагополучно, что взоры многих с надеждой обратились к Киселёву. Но к Киселёву возврата нет и быть не может, он не соответствует современным требованиям. Выход надо искать в другом направлении, надо идти (вы правильно догадались) вперёд.

Типы геометрических курсов. Возможны различные типы геометрических курсов при формально одном и том же содержании. Начать с того, что геометрия может быть частью единого предмета на всех этапах школьного образования. То, что в начальной школе математика представляет собой единый предмет, выглядит естественным и даже единственно возможным. Это мы видим во многих школах мира. Выделение с некоторого момента геометрии в отдельный предмет — явление достаточно распространённое, но не повсеместное. Именно так традиционно устроен курс математики в российской школе. И мы выступаем за сохранение этой традиции: многие важнейшие общеобразовательные цели реализуются именно через геометрию и их достижение окажется затруднено при включении геометрии в общий курс математики.

Далее, систематический курс геометрии может основываться на разных принципах. В нашей стране длительное время мы наблюдаем курс аксиоматический, а вернее, частично аксиоматический. И сегодня мы в основном встречаемся с курсами геометрии на аксиоматической основе, но именно эта основа у разных курсов разная: одни тяготеют к аксиоматике классической, евклидово-гильбертовой, другие предпочитают системы аксиом вейлевского типа, третьи буквально с самого начала включают в курс аксиомы движения. Мы не будем обсуждать здесь сравнительные достоинства и недостатки различных систем, а сразу выскажем утверждение, обоснованность которого исходит из нашей практики, но не только из неё: *логически строгий аксиоматический курс школьной геометрии невозможен.* (В скобках заметим, что сомнение автора по поводу возможности построения строгого аксиоматического курса геометрии выходят за рамки школы и переходит в неверие — какое кощунство! — в существование аксиоматического курса геометрии вообще.) В качестве одного из доводов приведём следующий: как только у нас в рассуждениях появляется рисунок, мы теряем логическую строгость. А курс геометрии в школе без рисунков — такая же нелепость, как и нестрогий аксиоматический курс. Предлагаемый нами курс геометрии мы характеризуем как *наглядно-эмпирический*, при этом в русле этой единой концепции рассматриваются все этапы школьной геометрии, а не только систематический курс, начинающийся в 7 классе. Уже само название достаточно точно указывает на основные особенности этого курса, которые более подробно будут разъяснены позднее.

Следует также заметить, что одним из качеств, которым должен обладать в той или иной мере школьный курс геометрии (и не только геометрии) — это *эклектичность*. И этим, в частности, школьный учебник должен отличаться от учебника вузовского, а тем более от научной монографии. Безусловно, наличие основополагающей концепции — необходимое условие полноценного курса. И всё же следует познакомить ученика с различными точками зрения, предъявить различные идеи и идеологии, чтобы он имел возможность, пусть даже полуфиктивно, реализовать своё право на выбор.

Важнейшей методологической и методической проблемой школьной геометрии является также взаимоотношение и последовательность изложения теорий плоской (двумерной) и пространственной (трёхмерной) геометрий. Эту проблему мы также обсудим несколько позднее.

Геометрия в начальной школе. Специфику геометрического материала на этом этапе определяют общие и локальные цели, о которых было сказано в предыдущем разделе. При этом уже наличие локальных целей выделяет этот этап, подчёркивает его значимость. *Геометрия в начальных классах является инструментом развития в самом широком понимании, вплоть до физиологического развития.*

Содержание геометрического материала в начальной школе распределяется по следующим направлениям: знакомство со свойствами простейших геометрических фигур, выработка навыков по изображению этих фигур, геометрический эксперимент, развитие геометрической интуиции. Несмотря на огромную важность геометрии в начальной школе, она всё же формально выполняет вспомогательную роль по отношению к арифметике и некоторым другим разделам, арифметический и геометрический материал в учебнике и на уроке очень тесно переплетаются, неотделимы друг от друга. Необходимо выработать прочные ассоциативные связи в парах «фигура — число» и «фигура — слово».

В связи с математикой в начальной школе считаем необходимым сказать несколько слов по поводу получившей в последнее время широкое распространение концепции «развивающего обучения». Собственно говоря, сама концепция, как и большинство общих концепций, представляется вполне разумной. Определённое отторжение вызывает разве название, отдающее саморекламой. Но уже беглое знакомство с программами по математике вызывает чувство недоумения, которое переходит в более сильные чувства, когда видишь многочисленные учебники, реализующие эту концепцию. Эти учебники формируют неверное представление о важнейших математических понятиях и даже о самой математике. И дело даже не в многочисленных конкретных недочётах и ошибках, от них исходит острый антиматематический дух, они вырабатывают антиматематический менталитет. С другой стороны, эти учебники плохо способствуют формированию базовых умений, необходимых на последующих этапах математического образования. К сожалению, апологеты развивающего обучения пользуются серьёзной поддержкой как руководящих структур (некоторые из них сами являются руководителями), так и общественного мнения, реагирующего больше на название и учёные звания, чем на содержание.

Начальный этап средней школы. Несмотря на то, что математика всё ещё остаётся единым предметом, алгебраические, геометрические и прочие разделы всё более и более обособляются и приобретают самостоятельность. Геометрия выступает в виде естественнонаучного предмета. Основные методы получения геометрического знания — наблюдение и эксперимент, возможно, умозрительный. В каком-то смысле на этом этапе мы имеем аналог доевклидового этапа развития геометрии, но с некоторыми включениями достижений современной науки. На примере геометрии учащиеся знакомятся с важнейшими общенаучными идеями, понятиями и методами исследования: свойство и признак, классификация объектов (отдельно и во взаимодействии), непрерывность и дискретность, перебор вариантов и т. д. Особенно важной на этом этапе является учебная геометрическая деятельность, связанная с пространственными объектами. Это последняя возможность развить пространственное воображение, поставить пространственное мышление. Ведь в течение трёх следующих лет мы в лучшем случае можем лишь поддерживать эти качества на некотором уровне, но не развивать, а потом это уже поздно делать.

Основной курс геометрии. Устойчивость содержания. Уже было упомянуто, что сегодня в нашей школе действуют различные в своей концептуальной основе курсы геометрии. Но тем не менее эти курсы едины по своему содержанию, по номенклатуре сообщаемых сведений (вернее, почти едины) и, как говорят, соответствуют программе. Каждый автор, работая над учебником, решает своеобразную краевую задачу, условия которой задаются действующей программой. И здесь возникает один вопрос: насколько вольны авторы учебников или комиссии по выработке программ при отборе содержания? (Вспомните первый пункт в разделе «Цели обучения».) Многое определяется одной важной характеристикой учебного предмета, его внутренней устойчивостью.

Дело в том, что геометрия — учебный предмет со многовековой историей не только вообще, но и внутри школы, её содержание — продукт длительного естественного отбора. Она обладает очень высокой внутренней устойчивостью. Многочисленные доказательства этому мы наблюдаем в нашей школе: ряд геометрических теорем и фактов, необдуманно выброшенных из учебных программ, сегодня практически и стихийно восстановлены в реальной школе. Несмотря на внешнюю незначительность некоторых из этих фактов, без них геометрическое знание было неполным, а геометрические умения недостаточными. Оказалось, что геометрия — это некий единый организм, способный к регенерации, если, конечно, основная часть сохранилась. Так что возможности к волеизъявлению и вкусовым решениям у программных комиссий (а также у авторов учебников, руководителей образования и пр.) не столь уж велики. Об этом следует знать и помнить.

Необходимо вернуть в школьную геометрию многие разделы, выброшенные из неё в последние десятилетия. Следует также ввести в школу некоторые малоизвестные факты из классических разделов геометрии треугольника и окружности, замечательные, незаслуженно забытые достижения *старых мастеров*. Некоторые из этих фактов, несмотря на малоизвестность, настолько близко прилегают к курсу, что ввести их можно без труда и почти без затрат учебного времени. А с другой стороны, их введение может резко повысить развивающий потенциал школьной геометрии и даже странным образом приблизить её к современной геометрической науке. (Многие современные достижения математики берут своё начало в работах классиков геометрии.) Таким образом, можно говорить о своего рода курсе в стиле *ретроавангарда*.

Два раздела геометрии: планиметрия и стереометрия. Одной из самых важных и трудноразрешимых проблем школьной геометрии является проблема взаиморасположения во времени планиметрии и стереометрии. С одной стороны, с точки зрения процесса познания, первичной является трёхмерная геометрия, твёрдое тело — вот основа и основной объект исследования геометрии. Это — реальный объект, во всяком случае, не менее реальный, чем объекты, изучаемые в физике, в то время как плоские фигуры являются математическими абстракциями и полноценно изучаться они могут при хорошем уровне развития абстрактного мышления. С другой стороны, с точки зрения развития математической теории более удобным выглядит путь от плоской геометрии к пространственной. Кроме того, большинство методов стереометрии основаны на различных способах сведения пространственной задачи к одной или нескольким плоским задачам. А это требует и соответствующей последовательности при изучении.

Поиски решения проблемы на пути полного фузионизма — одновременного изучения плоской и пространственной геометрий — не представляются нам перспективными. Дело в том, что эти разделы играют всё же различную роль в образовательном процессе, посредством их преследуются и достигаются различные цели обучения. Планиметрия представляет собой замкнутую в себе модель науки, внутри которой можно бесконечно совершенствоваться. Она даёт нам большие возможности для развития творческого, интеллектуального. Стереометрия же является предметом инженерного типа, в ней широко используются соответствующие методы, она развивает такое специфическое качество, как пространственное воображение, профессионально значимое для многих специальностей, далёких и от математики, и от науки вообще. Одновременное изучение этих разделов может привести к тому, что достижение важнейших целей обучения окажется сильно затруднено или станет вообще невозможным.

В общем, налицо противоречие, точнее, целый комплекс противоречий, разрешить их все невозможно, поскольку имеет место нечто вроде соотношения неопределённости: улучшая одну характеристику, мы ухудшаем другую. Можно указать и на другую аналогию: в биологии при скрещивании близких видов большею частью появляется нежизнеспособное потомство (похоже, есть соответствующий закон). Не поэтому ли все (известные нам) попытки создания фузионистских курсов геометрии оказались безуспешными— в них удивительным образом произошло взаимоуничтожение (аннигиляция) планиметрии и стереометрии.

Предлагаемый нами курс — это *курс с элементами фузионизма.* В нём вначале изучается теория плоской геометрии, а трёхмерное пространство выступает в качестве своеобразного интерьера. Некоторые простейшие тела используются в качестве объектов для применения теории планиметрии.

Две части геометрии: основания геометрии и собственно геометрия. Обсуждение первой части. Необходимо признать, что по сути мы изучаем (а лучше сказать по-школьному — проходим) две различные геометрии: основания геометрии и собственно геометрию. Они отличаются друг от друга как предметом, так и методом исследования. В начале курса предметом исследования являются простейшие геометрические формы: прямые, лучи, отрезки, углы и пр. (Здесь мы говорим о планиметрии. Сказанное почти автоматически распространяется и на стереометрию, хотя, конечно, с определёнными изменениями.) В некотором смысле, мы изучаем свойства плоскости в целом. Во второй части мы изучаем свойства геометрических фигур, рассматривая понятие фигуры в обыденном смысле, т. е. включая в него плоско-протяжённые объекты: треугольники, специальные четырёхугольники, окружности (круги) и т. п.

Основным методом исследования при изучении начал геометрии является аксиоматический метод. Суть его в том, что мы имеем дело не с геометрическим объектом, а со списком свойств этого объекта. Список этот расширяется по законам логики, а его начальная часть постулируется. Во второй же части используются два метода: внутренний, геометрический, и внешний, алгебраический. Коротко смысл геометрического метода состоит в том, что в процессе решения мы каким-то способом перестраиваем изучаемую конфигурацию: проводим дополнительные линии, вычленяем отдельные элементы, преобразуем и др.

Различен и уровень доказательности, принятый в выделенных частях геометрии: уровень, достигнутый в первой части, является как бы исходным во второй. Иными словами, факты, которые мы доказывали в самом курсе и при решении задач в первой части, во второй считаем очевидными. *Добраться до содержательных геометрических теорем, передвигаясь мелким шагом в соответствии с аксиоматическим методом, за разумное время невозможно.*

Весьма распространённый тезис – целью обучения геометрии является развитие логического мышления — индуцирован именно первой частью, основаниями геометрии. Этот тезис представляется нам ошибочным и мы заявляем: не логического мышления, но *логической интуиции*, которая, объединившись с интуицией геометрической, является мощнейшим инструментом исследования.

Интересно, что многочисленные и достаточно острые дискуссии по поводу школьного курса геометрии, происходившие в нашей стране однодва десятилетия тому назад, не выходили за рамки начал геометрии, и в то же время оценка качества геометрической подготовки учащихся всегда проводится по программе второй части. Безусловно, не следует недооценивать роли основ геометрии для интеллектуального развития школьника. И здесь очень важно не противопоставлять различные точки зрения на происхождение геометрических форм, а показать их во взаимодополняющем единстве. Так, любой объект, скажем, прямая, может выступать как бы в двух ипостасях: как готовый образ и как траектория движения. И поэтому возмущение по поводу употребления в связи с понятием «прямая линия» оборота «сколько бы её ни продолжали» отражает одну точку зрения (хотя оборот в самом деле неудачен), а утверждение, что в природе не бывает прямых, а лишь отрезки, которые мы можем продолжать, — другую.

Увлечение основами математических наук характерно для конца прошлого и первой половины нынешнего столетия. Уже из этого следует, что начинать школьные курсы с этих разделов — значит нарушать важнейший принцип историзма. Здесь можно возразить и напомнить, что подобный подход к построению геометрического курса восходит к Евклиду, именно его «Начала» и послужили образцом для многих современных учебников. Эту тему мы уже затрагивали и высказали мнение, что не всё так однозначно, а библеизация евклидовых «Начал» принесла образованию скорее вред, нежели пользу.

Большое впечатление на математиков и научно-педагогическое сообщество произвела многовековая борьба с пятым постулатом, а особенно неожиданный исход этой борьбы. Возникла иллюзия, что математики докопались до первооснов своей науки и всё это можно изложить на школьном уровне. На наш взгляд, как раз наоборот, история пятого постулата должна была доказать невозможность полноценного введения основ геометрии в школьный курс. Похоже, что сегодня математики отказались от иллюзии возможности создания абсолютно прочного логического фундамента для своей науки и пришли к заключению, что основа надёжности математического знания та же, что и у большинства других естественных наук, — здравый смысл и эмпиризм. Математика становится математикой начиная с некоторого этажа, а бесконечное копание котлована лишь разрушает её основы, создаёт трещины в здании.

Тем не менее и сегодня мы наблюдаем в школе курсы геометрии, заявленные их авторами как курсы «на аксиоматической основе». Но для нормального усвоения «аксиоматических основ» нужен очень высокий уровень логической подготовки, которой не имеют ни ученики, ни учителя (продолжим: ни методисты, ни некоторые авторы). В результате мы имеем полную профанацию. Можно провести аналогию с абстрактным искусством: мало кто в нём разбирается, но все дружно делают умный вид и восторгаются каким-нибудь мотком ржавой проволоки, выставленным наглым жуликом. Бедных учителей, а за ними и учеников заставляют произносить бессмысленные сочетания слов, выдавая их за умозаключения, заучивать формулировки определений, делающих определяемое понятие абсолютно неузнаваемым. В результате учащиеся получают искажённое представление о том, что такое геометрическое доказательство, дискредитируется сама идея доказательства. К счастью, здравый смысл учителей и учеников не позволяют всем этим извращениям проникнуть в сознание, а уж тем более там закрепиться. Однако при этом отбивается интерес к предмету.

Причиной снижения интереса к геометрии является также и то, что в течение длительного времени учащиеся, по существу, не получают никаких новых знаний, а то, чем они занимаются на первых уроках геометрии, просто навевает скуку и вызывает усталость. И к тому же, как мы уже отмечали, основы геометрии плохо связаны с основной (нечаянный каламбур) частью школьного курса геометрии. Нелепо, обучая какому-то ремеслу, сначала долго изучать свойства используемых инструментов, но ещё нелепее начинать с изучения свойств инструментов, которыми в дальнейшем не придётся пользоваться. Но именно так строятся многие курсы геометрии.

Научность и доступность. Одна из важнейших и трудноразрешимых задач, возникающих перед авторами, пишущими для средней школы, — это задача разумного и, в некотором смысле, оптимального сочетания научности и доступности курса. Но, наверное, ни в каком другом предмете эти проблемы не встают с такой остротой, как в геометрии. Уже сам термин «научность» понимается разными авторами по-разному. Но и уяснив для себя, что такое научность, автор сталкивается с огромной массой проблем: от чисто литературных до специфически методических. Как найти ту тропинку, по которой надо провести школьника, не потеряв его в колючих зарослях математических тонкостей и не утопив в болоте невежества? Ведь упомянутые заросли находятся прямо на берегу упомянутого болота.

Плохо математически образованный автор, конечно же, не способен создать качественный учебник даже для начальной школы, но бóльшую опасность представляют и математики-профессионалы, рассматривающие школьную математику как часть математической науки, смотрящие на неё сверху вниз. (Школьная математика и математическая наука относятся друг другу примерно как физкультура и спорт.) В качестве руководства к действию разумно, наверное, взять формулу, которой должен следовать свидетель в суде, правда, несколько её урезав: «Говорить правду, только правду и ничего, кроме правды». Как видите, здесь отсутствует обязательство говорить всю правду.

В этой связи упомянем одну очень важную научно-методическую проблему, связанную с выстраиванием систематического курса геометрии — проблему *легализации знаний*. Эта проблема относится и к содержанию обучения (какая?) и к методике (как?). Не секрет, что к началу систематического курса учащиеся располагают достаточно большим запасом геометрических знаний, полученных как самостоятельно из личного опыта, так и в процессе обучения в предыдущих классах.

Логика же систематического курса вынуждает нас в начале смотреть на ученика как на некую tabula rasa, которая должна постепенно и в определённом порядке заполняться. Один разумный школьник, объясняя, что такое геометрия, заметил, что «в геометрии есть квадрат, но это ещё нужно доказать». В результате, с одной стороны, ученик длительное время, по существу, не получает никаких новых реальных знаний, а с другой — многие имеющиеся у него знания остаются невостребованными. А отсюда почти неизбежна потеря интереса к предмету. Необходимы особые совместные усилия ученых и методистов, чтобы этого не допустить.

Две основные фигуры геометрии: треугольник и окружность. Выделяя этот пункт в концепции, мы тем самым подчёркиваем, что предлагаемая нами геометрия — это, в первую очередь, геометрия фигуры. Такой подход может показаться малосовременным и даже архаичным. Куда как современнее выглядят курсы, основанные на идее преобразования плоскости на координатной или векторной основе.

Но, как ни странно, подобные современные подходы значительно сужают творческое поле геометрии, ряд геометрических фактов плохо укладывается в эти теории, за кадром остаётся большинство рукодельных приёмов, благодаря которым геометрия и превращается в своего рода искусство, которые образуют основной развивающий потенциал геометрии. И с этой точки зрения выделяется роль двух фигур: треугольника и окружности (правильнее было бы сказать «круга», поскольку окружность — не фигура, а линия).

С одной стороны, треугольник и окружность как бы ограничивают учебное пространство. Треугольник — простейший многоугольник и даже простейшая фигура. Окружность — единственный изучаемый в школе представитель класса гладких фигур, она представляет собой иллюстрацию идеи предельного перехода. Между треугольником и окружностью расположены всевозможные многоугольники, исчерпывая тем самым все изучаемые в школе фигуры.

С другой стороны, окружность в некотором смысле фигура более первичная, чем треугольник. Исторически элементарная геометрия — это геометрия циркуля и линейки, а здесь важнее циркуль. Ведь прямую можно рассматривать как окружность бесконечного радиуса (опять предельный переход, но уже в другом направлении). Также подчёркивает роль окружности известный факт, что все построения на плоскости, выполняемые циркулем и линейкой, могут быть выполнены одним циркулем. С алгебраической точки зрения треугольник является достаточно сложным объектом, он описывается уравнением третьего порядка.

Кроме того, треугольник и окружность задают два важнейших метода геометрии. С треугольником связан метод, который можно назвать «методом ключевого треугольника». В изучаемом объекте выделяется один или несколько треугольников, к исследованию которых сводится данная задача. Можно утверждать, что таким образом решается подавляющее большинство геометрических задач. С окружностью связан ряд технических приёмов и методов, в частности, так называемый метод вспомогательной окружности. Большинство трудных задач — это задачи про окружности. Уже поверхностное знакомство с олимпиадными задачами показывает, что во многих задачах в условии упоминается окружность; и очень часто отсутствовавшая в условии окружность появляется в решении.

На наш взгляд, одной из причин снижения уровня геометрической подготовки в сегодняшней школе является недостаточное внимание программ и учебников к геометрии окружности. *Треугольник — это клетка геометрии, окружность — её душа.*

Методы геометрии. Существует традиция, в соответствии с которой в содержание геометрических курсов не включаются методы геометрии. Исключение делается для двух: векторного и координатного. Однако и они изучаются больше как самостоятельные разделы, чем как геометрические методы, которые могут быть использованы в задачах, в условии которых нет ни векторов, ни координат. Справедливости ради следует заметить, что иногда также школьникам внушают, что эти два метода являются универсальными, любая задача может быть с их помощью решена. Так, кстати, думают многие победители математических олимпиад. И бывает жалко талантливых ребят, когда видишь метры бумаги, исписанной ими для решения пустяковой геометрической задачи.

Методы геометрии можно разбить на пары двумя способами: методы внутренние и внешние, общие и частные. С точки зрения такой классификации векторный и координатный методы являются внешними и общими. Наибольший же интерес, на наш взгляд, представляют как раз методы внутренние и частные. Именно они дают нам красивые геометрические решения. И эти методы должны быть включены в содержание курса геометрии.

Система задач. За многовековую историю в геометрии образовалась большая коллекция всевозможных задач. Некоторые из них вошли в золотой фонд геометрии. Без знакомства с этими задачами геометрическое знание не может быть полным. Кроме того, геометрические навыки и геометрическое развитие оценивается в первую очередь через умение решать задачи. Полноценный геометрический курс — это объединение теории и соответствующей системы задач.

Большим недостатком некоторых современных курсов геометрии является отрыв от системы задач, они не только не знакомят с жемчужинами из геометрической коллекции, но и, что уж совсем странно, оказываются далёкими от современной геометрической практики, например практики конкурсных экзаменов. Эти курсы обслуживают сами себя, из теоретической части выкинуты многие важные факты и теоремы, на первый взгляд не очень значительные для развития геометрической теории. Но вместе с ними оказалась зачёркнутой больша́я и даже бо́льшая часть классических задач.

Три этапа систематического курса геометрии. По сложившейся в нашей школе традиции систематический курс планиметрии изучается в течение трёх учебных лет. И это выглядит настолько привычным и разумным, что никому не приходит в голову эту традицию ломать. (Последнее утверждение уже устаревает, и появились «горячие» головы, желающие эту традицию пересмотреть.) Похоже, что и по объёму, и по времени параметры курса определены оптимально. Получающееся геометрическое трёхлетие также естественным образом распадается на три этапа.

Первый этап. Основная методическая задача — заинтересовать — вступает в противоречие со скудным и, прямо скажем, скучным теоретическим материалом. По сути дела, ученики не узнают никаких новых фактов, происходит упорядочение и систематизация уже накопленного и не очень богатого геометрического знания. Учёные и методисты, а за ними и учителя попадают в почти патовую ситуацию. Установка на «научность» курса (под этим понимался аксиоматический подход, который мы уже обсуждали) провалилась. Возможно, одна из причин провала состояла в том, что за дело взялись профессиональные математики, плохо знающие школу и психологию ученика, зато слишком хорошо понимающие, что такое настоящий уровень строгости. В результате мы получили не интерес к геометрии, а аллергию на неё. Но не менее опасен и вульгарно-упрощённый подход к началам геометрии. Не получив нужного научного воспитания или, ещё хуже, получив неправильное научное воспитание, не смогут стать учёными некоторые одарённые дети, зато в избытке расплодятся журналисты, убеждённые в том, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются и с восторгом повествующие читателю о том, как очередной народный умелец нашёл квадратуру круга.

Нам кажется, что предлагаемая нами наглядно-эмпирическая концепция позволяет найти выход из этой ситуации. Теоретическая схема курса на первом этапе такова: трёхмерное пространство, поверхности и линии в нём; плоскость, линии и фигуры на плоскости; прямая, геометрия прямой линии, осевая симметрия, углы и многоугольники, окружность; треугольники, равнобедренный треугольник, признаки равенства треугольников, некоторые свойства окружности; основные задачи на построение, геометрические места точек, неравенство треугольника, касание окружностей и некоторые другие факты; повторение.

Всё это сопровождается системой задач, которые можно разбить на следующие (пересекающиеся) группы: чисто занимательные задачи; учебные задачи, развивающие некоторые важные в будущем технические элементы; задачи по топологии, не требующие никаких предварительных знаний; задачи на движение, непрерывное и дискретное; задачи, в которых описываемая ситуация может реализовываться различными способами, и др. Что касается собственно планиметрической части, то она имеет достаточно серьёзную научную подоплёку: предлагаемый курс — это курс абсолютной геометрии. Особо выделять это обстоятельство не следует, но понимать (имеется в виду учитель) необходимо.

Второй этап. Здесь сосредоточен основной теоретический материал. Девиз — научить. Начало достаточно очевидно: теория параллельных и сумма углов треугольника. И тут же учащиеся получают один из самых важных инструментов решения геометрических задач, использующих свойства окружности, — теорию вписанных углов. Именно на этой теории основан метод вспомогательной окружности.

Следующий шаг в развитии теории не столь очевиден. Возникает альтернатива: теория подобия или же теория площадей. Исторические аналогии помогают мало, в реальной истории геометрии многие разделы развивались одновременно, мы же должны эти разделы упорядочить во времени. Мы всё же считаем, что следующим шагом должна быть теория подобия, она в некотором роде первичнее. Предваряет же эту теорию раздел, посвящённый параллелограммам, трапециям и другим специализированным четырёхугольникам, естественным образом связывающий теорию параллельных прямых с теорией подобия. Затем теория подобия переходит в метрическую теорию, возглавляет которую теорема Пифагора. Как известно, именно метрические теоремы геометрии создают основу для применения алгебраических методов, а эти методы являются основным инструментом решения задач конкурсного типа. Таковы основные вехи развития теории на втором этапе.

Содержание дополняется различными геометрическими фактами по таким классическим темам, как замечательные точки в треугольнике, вписанные и описанные четырёхугольники. Безусловно, по идейной нагрузке ко второму этапу относится и теория площадей, но возникающая при этом перегрузка вынуждает нас отнести эту тему к третьему этапу. Именно на втором этапе мы имеем возможность начать полноценную работу с основным массивом геометрических задач.

Третий этап носит, главным образом, повторительный характер. Исключение составляют первые разделы: это уже упомянутая теория площадей, которую мы относим к ядру нашего курса, и главы, посвящённые правильным многоугольникам и выводу формул длины окружности и площади круга, имеющие чисто теоретическое значение. Инструментом повторения являются векторный и координатный методы, теоретическая основа которых развивается в следующих главах. Эти внешние по отношению к геометрии и весьма общие методы дают возможность просмотреть предыдущее содержание с иной точки зрения, записать известные факты и теоремы на другом языке. Следует обратить внимание на то, что векторы и координаты концептуально не очень хорошо соответствуют предлагаемому курсу геометрии, они являются представителями иной математики.

Завершает курс теория преобразований плоскости. Без знакомства с этой теорией геометрическое знание является недостаточным. Кроме того, завершая курс именно теорией преобразований, мы в некотором роде следуем известному в драматургии закону рамки: осевая симметрия была в начале, ею мы и заканчиваем, показывая при этом, что законы осевой симметрии являются важнейшими законами планиметрии.

Некоторые особенности стереометрии. В предыдущих разделах было сказано несколько слов о стереометрии, был произведён небольшой сравнительный анализ планиметрии и стереометрии. В результате мы пришли к следующим рекомендациям: в первой половине школьного периода (начальная школа и первая ступень средней) стереометрия и планиметрия выступают равноправными партнёрами, причём в конце этого периода роль стереометрии несколько возрастает; во второй половине идёт систематический курс планиметрии с небольшими выходами в пространство, и завершает геометрическое образование в средней школе систематический курс стереометрии.

Каковы же особенности этого систематического курса? Для начала заметим, что, как и в планиметрии, здесь можно выделить две части: начала (основы) стереометрии и геометрию тел. В первой части постулируются основные свойства пространства, изучаются свойства прямых и плоскостей в пространстве, параллельность и перпендикулярность. Здесь особо следует выделить теоремы о перпендикулярности, именно они определяют основные отличия трёхмерного пространства от двумерного и в будущем станут главными рабочими теоремами стереометрии.

Но основное содержание курса стереометрии составляет геометрия тел, в первую очередь многогранников. Как сказал Пуанкаре: «Не будь в природе твёрдых тел, не было бы геометрии». При этом простейшие многогранники появляются в курсе с самого начала, выполняя функции своеобразных опор для «подвешивания» прямых. Тем самым мы с самого начала реализуем одну из важнейших практических и теоретических установок: надо научиться привязывать рассматриваемую ситуацию к тому или иному простейшему, удобному для изображения многограннику. Помимо этого мы с самого начала можем решать простейшие задачи на построение сечений на изображении многогранника и тем самым сделать наш курс более интересным и содержательным. Подчеркнём, именно *построение на изображении*, а не просто построение в пространстве, поскольку построения в пространстве опираются на ряд условностей, вроде возможности проведения плоскостей, кажущихся нам противоестественными. Нам кажется также, что во многих известных учебниках объём первой части неоправданно велик, его можно сделать существенно меньшим безо всякого ущерба для полноты и строгости изложения.

Что касается специфики методов стереометрии, то здесь следует выделить две крайние особенности. С одной стороны, многие доказательства опираются на хорошо развитое пространственное воображение. Главное — увидеть, увидел — понял, а затем и доказал. Важную роль играет умение делать чертёж. Чертёж становится элементом решения и составной частью доказательства, среди изучаемых методов есть и специальные методы построения чертежа. А с другой стороны, в стереометрии возрастает роль общих и внешних методов, таких как векторный метод и метод координат. Смысл этих методов также и в том, что с их помощью мы можем компенсировать плохое развитие пространственного воображения.

Вопросы уровневой дифференциации в содержании. Программа обучения, учебники и учебные пособия должны давать возможность каждому ученику в полной мере реализовать свой интеллектуальный потенциал. Вопрос, для какого контингента учеников создаётся программа и пишется учебник, является очень важным, концептуальным. В нашей школе мы встречаем математические учебники попроще и посложнее, одни пишутся для сильных школьников, другие для середняков и даже слабых, причём последних (учебников, но не учеников) значительно больше. Наверное, в полной мере отвечать интересам детей с разным уровнем подготовки и интеллектуального развития учебник по математике в принципе не может. И геометрия здесь не является исключением, хотя её специфика даёт возможность сделать «интеллектуальную толщину» учебника достаточно большой. При этом основное содержание должно быть таковым, чтобы обеспечивать достаточно высокий уровень подготовки.

Что касается конкретной реализации идей дифференциации в учебнике, то она идёт по двум линиям: теория и задачи. Вначале теоретический курс является единым для всех. Затем в нём появляются разделы как углубляющие теорию, так и расширяющие её. Но наиболее полно и ярко принцип дифференциации виден в системе задач. Ведь именно задача является основным инструментом оценки уровня геометрической подготовки. (Более детально вопросы дифференциации будут обсуждены в третьей части.)

Содержание геометрии в классах с углублённым обучением математики. Одной из реалий сегодня является появление классов, занимающихся по разным программам, причём это может иметь место даже в пределах одной школы. (Используется явно неудачный термин «профильные классы».) Это имеет место на последних этапах среднего образования. Что касается математики, то, по мнению большинства экспертов, она должна развиваться по трём направлениям: общий курс, углублённый курс и курс для гуманитариев. Реальностью сегодня стали классы с углублённым изучением математики.

Совершенно очевидно, что программа по математическим дисциплинам в этих классах должна отличаться от программ в обычных классах, но вовсе не очевидно, что для этих классов надо создавать полностью автономные учебники. Представляется вполне разумным и возможным вести преподавание геометрии в этих классах по обычным учебникам, вернее по таким учебникам, в которых реализованы идеи дифференциации. Конечно, без некоторого дополнения к этим учебникам нам не обойтись. В первую очередь это касается задач. Но не только. Следует несколько увеличить в объёме и теоретическую часть, создав для этого специальные учебные пособия. Не будем перечислять темы, которые следовало бы включить в эти пособия. Набор этих тем должен учитывать, что выпускники этих классов в подавляющем большинстве продолжат своё образование в вузах, в которых математика является одним из основных или просто основным предметом.

Многие студенты уже после нескольких месяцев занятий математикой в институте начинают думать, что геометрия закончилась в школе, умерла в школе. Надо обладать достаточно хорошим математическим образованием и культурой, чтобы понимать, что это не так, что идеи элементарной геометрии буквально пронизывают всю математику, обогащают её. Молодые люди осознать это в полной мере ещё не в состоянии. И было бы очень неплохо в классах с углублённым изучением математики ввести в программу темы, показывающие связи школьной геометрии с современной наукой. Именно в геометрии такие темы есть, и этим она также отличается от алгебры.

Геометрия в гуманитарных классах. Содержание математики в гуманитарных классах вызывает сегодня особенно яростные споры. С одного края располагаются те, кто убеждён, что никакой специальной математики для гуманитариев нет и быть не может и обучаться гуманитарии должны по общей программе. Другие считают, что гуманитарии — это люди, абсолютно неспособные к математике и даже умственно отсталые в математическом смысле, и им, соответственно, и нужна такая «умственно-отсталая» математика. С этими последними, безусловно, никак нельзя согласиться.

Однако сегодня мы наблюдаем в качестве массового явления возникновение классов, в которых вовсе не изучается математика (один час в неделю нельзя принимать в расчёт), в эти классы широкой толпой пошли все неуспевающие по математике, объявив себя гуманитариями. Забавно, что это явление оправдывается с высоких трибун громкими словами о свободе личности и о свободе выбора. Утверждают даже, что ученики старших классов имеют право совсем отказаться от математики. Но на самом деле при этом как раз наоборот ограничивается свобода личности, например свобода выбора профессии. Мало кто может на школьной скамье полностью осознать свои возможности, интересы, а тем более предвидеть возможные жизненные коллизии. Не получив же нужного математического образования, выпускник средней школы окажется профессионально непригодным для многих современных специальностей. А если вспомнить, что истинные гуманитарии в большинстве своём больше «работают» правым полушарием, то отлучение от геометрии может ухудшить и их гуманитарные возможности.

И всё-таки, если предположить, что специальная математика для гуманитариев нужна, то какой она должна быть? Своё мнение, некоторые рекомендации по этому вопросу у нас есть. Но высказывать их здесь, даже коротко, мы не будем: нет смысла, непонятно, кто будет их реализовывать в учебниках и учебных пособиях. Здесь нужно сочетание особых и даже противоположных качеств. Но если авторы, обладающие нужным спектром качеств, появятся и пожелают заняться созданием учебников для гуманитариев, то они наверняка предпочтут реализовывать свои собственные идеи, а не следовать чужой концепции.

Внеклассная работа. Роль геометрии в обучении одарённых детей. Одной из целей математического образования является выявление и обучение одарённых детей. (Мы не будем устраивать здесь дискуссию на тему, что такое одарённость вообще и математическая в частности. Она завела бы нас слишком далеко. Но все же заявляем: определённый ответ на этот вопрос у нас есть и он не очень совпадает с общепринятым ответом, даваемым психологами.) Надо иметь в виду, что математика может помочь в развитии и обучении не только математически одарённых детей. И здесь мы вновь можем добавить: особенно велики при этом возможности геометрии. Работа с одарёнными детьми, начавшись в классе, в значительной мере выходит за его границы и имеет большею частью внеклассный характер. Её основные виды: кружки, олимпиады, специальные школы, изучение дополнительной литературы. К сожалению, единой федеральной программы по обучению одарённых детей у нас нет. Этим занимаются отдельные энтузиасты, ничем структурно не связанные с друг другом, кроме личных знакомств.

Обычно более или менее регулярная работа со способными к математике детьми начинается в 5-м или 6-м классе. Основные формы учебной деятельности: класс, кружок, математическое соревнование. Цель — заинтересовать, привлечь внимание к математике всех потенциально способных детей. Если угодно, на этом этапе учителя-предметники вступают в своеобразную конкурентную борьбу за умы и души детей, ведь одарённые дети почти всегда разносторонне одарены, надо предъявить им широкий спектр будущих возможностей, чтобы они смогли сделать свой выбор. (Не хочется говорить «правильный».) Геометрия является как раз тем предметом, который может показать математику с самой привлекательной стороны, выполнить роль «зазывалы». Что касается нужного геометрического материала для этого возраста, то он хорошо известен и доступен, более того, некоторые новые учебники содержат специальный геометрический материал занимательно-привлекающего характера.

Следующие два этапа учебной деятельности с одарёнными учениками определяются целями: выявить и научить. Здесь необходимо отметить, что задача выявить ни в коем случае не должна сводиться к одноразовой акции, это — процесс, который, вообще говоря, может продолжаться до конца обучения. Характерной особенностью развития одарённых детей является наличие резкого скачка, который может произойти и очень поздно.

В старших классах формы работы с одарёнными становятся более разнообразными, вплоть до самостоятельной научной деятельности. И опять лидер — геометрия. В геометрии можно обнаружить новые факты и теоремы, имеющие научный интерес, формально не выходя за круг знаний, очерченный школьной программой. В других разделах математики это почти исключено. (Разве что в теории чисел?) Можно сказать, что *именно в области геометрии достигает своего наименьшего значения расстояние между школьной математикой и математической наукой.*

Одним из самых главных принципов, на которых должна строиться работа с одарёнными детьми, — это принцип демократизма, а точнее, — пара дополняющих друг друга принципов: демократизм и элитарность. Задачи многочисленных математических олимпиад для старших школьников если и похожи на обычные школьные, то лишь в части геометрии. При этом нередко оказывается, что единственной задачей, с которой не справился отлично подготовленный олимпиадный профессионал, — это геометрическая задача, и именно эту задачу почти в единственном числе решил впервые пришедший на олимпиаду школьник. Получается, что геометрия, с одной стороны, — наиболее демократическая часть школьной математики, а с другой, — наиболее элитарная.

Теоретический материал школьного учебника по геометрии может служить хорошей базой для работы с одарёнными учениками. Его можно немного расширить, включив такие разделы, как инверсия, элементы проективной геометрии, теоремы Чевы, Менелая, Карно и т. д. и т. п.

Взгляд в будущее. Чтобы не опоздать завтра, уже сегодня надо начать обдумывать изменения в содержании математического образования, возможные в будущем. Что касается негеометрических дисциплин, то здесь можно сделать некоторый обоснованный прогноз. Например, становится совершенно нетерпимым отсутствие в школьной математике вероятностных идей, без элементарного знания теории вероятностей в конце XX столетия нельзя считаться образованным человеком. Кстати, введение в школу теории вероятностей совсем не противоречит принципу историзма. А какой будет школьная геометрия? Этим вопросом мы и закончим вторую часть.

3. Некоторые вопросы методики

Методику можно коротко определить как сумму образовательных технологий. В последнее время появилось великое множество новых образовательных технологий, большинство из которых носит сомнительный характер. В геометрии с особенно большой осторожностью надо подходить к многочисленным новациям в обучении. Все эти искусственные методики могут разрушить экологическую чистоту геометрии, оказаться вредными в отдалённой или даже не очень отдалённой перспективе. Нам известен целый ряд примеров, на основании которых можно сделать вывод, что даже не очень длительное общение школьников с компьютером угнетает некоторые мыслительные процессы, подавляет геометрическое мышление, и им требуется значительное время для восстановления. Здесь можно привести аналогию с технологиями в пищевом и сельскохозяйственном производстве: продукты, изготовленные по старинным рецептам, овощи, выращенные дедовским способом, оказываются питательнее и полезнее.

Мы, конечно же, не выступаем против всех новейших технологий в образовании, в частности, компьютерных. Мы против непосредственного общения детей с компьютером, особенно в больших объёмах и в младших классах. Другое дело — компьютерная поддержка образования, использование компьютера в качестве помощника учителя. Вообще вопрос о роли и месте компьютеров в математическом образовании, о пользе и вреде компьютера, о взаимоотношениях между математикой и информатикой, — вопрос особый и требующий специальных исследований. Здесь очень много неизвестного, недоказанного и спорного. Во всяком случае, *именно сторонники компьютеризации должны доказывать безопасность предлагаемых ими образовательных технологий для* *здоровья новых поколений.* Но, похоже, большие деньги, сопровождающие внедрение компьютеров, мешают трезво посмотреть на суть дела.

Большинство современных методик преподавания математики и особенно компьютерно-ориентированные методики нацелены на школьников с доминирующим левым полушарием. Порой они просто подавляют геометрическое мышление. Многие из них основаны на теории поэтапного формирования умственных умений. (Сама по себе теория эта вполне банальна и стара, и вряд ли стоит наклеивать на неё этикетку с именем.) *Но интеллектуальные умения могут формироваться не только поэтапно, но и скачкообразно.* Возможно, именно последний тип характерен для школьников с доминирующим правым полушарием. При этом интересно то, что могут возникать умения, которые специально не отрабатывались в упражнениях. Так, занятия геометрией могут способствовать улучшению арифметических умений учеников начальной и средней школы.

Обычная жалоба ученика, сталкивающегося с незнакомой задачей: «Нас этому не учили», — очень часто вызывает сочувствие. Но ведь *научить делать то, чему не учили* (не выходя за рамки формального содержания учебной программы) и есть важнейшая задача образования, во всяком случае образования, ставящего интеллектуальное и творческое развитие своей целью. А отсюда возникает и частная задача сегодняшней методики — *разработка специальных методик для «интеллектуальных левшей».* И в этой связи один важный вопрос, на первый взгляд совершенно второстепенный.

Каким должен быть учебник по геометрии? Задавая этот вопрос, мы имеем в виду вовсе не содержание (это обсуждалось во второй части). Речь идёт об оформлении. Правильно художественно оформленный учебник может повысить качество обучения, плохое оформление может погубить самый лучший текст. (Плохое оформление — это не только учебник на газетной бумаге, нельзя превращать его в рекламный проспект.) Учебник должен и читаться (книга для чтения), и смотреться (книжка с картинками). В идеале можно мечтать об учебнике, состоящем из двух параллельных текстов — словесного и изобразительного, когда картинки — не только иллюстрации, но и, выстраиваясь в последовательность, образуют своего рода изотекст, изоконспект учебника.

Упомянем также и проблему языка учебника. Математические тексты часто страдают языковым однообразием, тяжеловесностью и даже косноязычием, они плохо соответствуют лучшим образцам русского литературного языка. (В качестве отрицательного примера можно взять почти любой учебник математики.) Да и математический язык представляет собой набор штампов. При этом необходимость точно выразить мысль, не забыв все нюансы, приводит к многословию, составленному из тех же штампов. В результате даже простые утверждения часто становятся малопонятными. С другой стороны, хорошо литературно оформленные пояснения к математическим текстам обычно неточны математически. И возникает малоприятная альтернатива: либо математически точно, но не очень литературно, либо вполне литературно, но не очень точно. А надо бы и то, и другое.

Отступление от темы: Геометрическая задача как главное средство решения основных задач геометрического образования и, в частности, её роль при реализации идеи уровневой дифференциации

Математика отличается от большинства других школьных предметов также и тем, что на её уроках очень много внимания уделяется решению задач. Геометрия, в свою очередь, выделяется среди других математических дисциплин также и особой ролью геометрической задачи. Как заметил один остроумный учитель математики, *задачи бывают стандартные, нестандартные и по геометрии.*

Задача как цель и средство обучения. Принцип активизации учебной деятельности. Главная функция методики заключается в определении средств и методов, с помощью которых на базе имеющегося содержания реализуются основные цели обучения. А для начала надо этим общим, развивающим целям обучения поставить в соответствие конкретные учебные цели. Первый шаг состоит в том, что мы объявляем своей целью математическое и, конкретнее, геометрическое развитие, заменяя им одним все перечисленные в целях виды развития, и считаем такую замену вполне адекватной.

Теперь возникает вопрос о способах измерения уровня геометрического развития и методах повышения этого уровня. И тут естественным образом мы вспоминаем о таком явлении, как геометрическая задача. Постулируется следующее утверждение: уровень геометрического развития школьника эквивалентен уровню сложности решаемых им задач. Задача становится одновременно и целью, и средством обучения. Все наши проблемы переводятся в плоскость задач: мы должны разработать методы оценки уровня сложности задачи и методики, развивающие умение решать достаточно сложные задачи.

На роль задачи в математическом образовании можно посмотреть и с другой позиции. Виды учебной деятельности можно упорядочить по степени активности ученика. С одного края располагаются пассивные виды учебной деятельности, а с другого — активные. Можно принять за аксиому, что более активные виды учебной деятельности дают лучший результат. Отсюда следует принцип активизации учебной деятельности как один из ведущих методических принципов. Что касается математики, то в ней явно пассивные виды отсутствуют. К наиболее пассивным следует отнести следующие виды учебной деятельности: работа с учебником и слушание лекций. Хотя о какой пассивности здесь может идти речь, когда перед учеником в процессе чтения математического учебника, слушания лекции возникает проблема понимания, а процесс понимания требует активной умственной работы. И всё же процесс работы с учебником гораздо менее активен, чем процесс работы над задачей. Работа над задачей является самым активным видом учебной математической деятельности. Таким образом, принцип активизации учебной деятельности также выводит на первые роли в учебном процессе задачу.

Если считать, что учебник и задачник — это представители крайних по степени активности видов учебной математической деятельности, то между ними располагается так называемая рабочая тетрадь — методическое изобретение последнего времени. Рабочая тетрадь — нечто промежуточное между учебником и задачником.

Такова схема, причём сильно упрощённая. Однако она вполне удобна теоретически и практически. Теоретические удобства вполне очевидны. Можно также надеяться, что подобный акцент на задачу не приведёт к упрощённому взгляду на учебный процесс. На практике же необходимость научить школьников решать геометрические задачи вынудит нас заниматься самыми различными видами учебной деятельности, на первый взгляд далёкими от решения задач. Так, шахматисты в свою подготовку включают игру в футбол, а футболисты — игру в шахматы. Поэтому опасения, что при таком сужении целевого множества обучение станет однобоким, можно отбросить. Впрочем, любой учитель математики скажет, что никакого упрощения предлагаемая схема не даёт. С тем, что наша главная цель — научить решать задачи, согласны многие (хотя и не все), и если бы учителя умели бы это делать (и решать, и учить решать), то... (Здесь автору не хватило воображения, вместо многоточия поставить можно что угодно, поскольку в соответствии с законами логики из ложной посылки что угодно и следует.) И кроме того, в процессе обучения нельзя ограничиваться лишь задачами определённого уровня сложности, соответствующего реальным и даже потенциальным возможностям ученика. *Задача — это не только умения, задача — это также и элемент знания.* Есть целый ряд очень красивых и трудных задач, входящих в золотой фонд геометрии. Эти задачи должны быть включены в курс наравне с важнейшими теоремами. Знание этих задач, умение их (именно их) решать относится к важнейшим знаниям и умениям, какими должен овладеть ученик в процессе обучения.

Вопросы классификации задач. (Содержание этого и нескольких следующих пунктов относится главным образом к систематическому курсу планиметрии.) Мы не будем здесь обсуждать, что такое задача, математическая вообще и геометрическая в частности, и вовсе не потому, что на него в методической литературе уже дан ответ, тем более, что ответ этот представляется абсолютно бессмысленным и противоречащим здравому смыслу. (Не хотелось бы этот полунамёк расшифровывать, указывая конкретные названия и имена.) Будем считать, что каждый нормально развитой человек имеет представление о математической задаче и способен её отличить от всего иного. Конечно, существуют пограничные случаи, но они большого интереса не представляют. Прежде всего нас будут интересовать вопросы классификации именно геометрических задач.

Геометрические задачи образуют необычайно пёстрое множество, в котором почти отсутствуют большие однородные участки. Существует много критериев, по которым можно классифицировать эти задачи. Для наших целей мы вполне можем обойтись несколькими, достаточно грубыми и даже немного наивными, классифицирующими признаками.

Рассмотрим следующие способы классификации задач: по заданию, по объекту, по теме, по методу и по сложности. Особенно нас интересует последний способ классификации, но сначала о первых четырёх.

По заданию задачи можно разделить на типы: задачи на вычисление, на доказательство, на геометрические места точек, на построение, на геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. Вот, пожалуй, и все типы заданий. Наиболее распространённым типом выглядят здесь задачи на вычисление, в их условии фигурирует задание «найти» (или «найдите»). Конечно, провести точную границу между задачами разных типов не очень просто, за счёт простой переформулировки можно почти всегда перевести задачу с заданием «доказать» в задачу с заданием «найти». Обратное удаётся сделать гораздо реже. С точки зрения учебного процесса, возможностей для его интенсификации и контроля, наиболее удобными являются задачи на вычисление, в них присутствует такая важная деталь, как ответ. Они также наиболее привычны для школьников, кажутся менее страшными.

Значительная часть задач на вычисление — это задачи с числовыми данными. Обучающую и развивающую роль этих задач трудно переоценить, через них в первую очередь происходит взаимодействие геометрии с арифметикой и алгеброй. Серьёзным недостатком задач на вычисление является вырабатываемая почти поголовно привычка фетишизировать ответ, особенно ответ, данный в учебнике. Попадая в ситуацию экзамена, иные школьники начинают страдать из-за невозможности сверить ответ. И тем не менее задачи на вычисление имеют достаточно высокий творческий потенциал, как правило, перед исследователем ставится задание «найти», в том числе и «найти, что надо доказывать».

Для нас важна ещё одна особенность задач на вычисление: для них можно предложить некую весьма общую схему решения, схему поиска решения (что важнее), методику обучения этому поиску и некоторые формальные признаки, по которым можно оценивать уровень сложности этих задач. Короче говоря, задачи на вычисление лучше поддаются методической обработке, и именно их мы выбираем в качестве основного типа учебных задач. Это, конечно, не означает, что задачи других типов мы из учебного процесса исключаем.

Нормальное геометрическое развитие немыслимо без усвоения некоторого базового объёма задач на построение, на геометрические места точек и других. Просто задачи этих типов вначале остаются на базовом уровне, и геометрическое развитие школьников идёт, в основном, за счёт задач на вычисление. Полноценное включение в учебный процесс задач на доказательство и иных происходит на достаточно высоком уровне геометрического развития. Кроме того, на первом этапе систематического курса геометрии объём решаемых задач на вычисление относительно невелик из-за отсутствия необходимой теоретической базы и технического арсенала.

По рассматриваемому объекту задачи могут быть на треугольник, на трапецию, на окружность или иные фигуры, в зависимости от того, какая из них фигурирует в условии. Это и есть классификация по объекту. Понятно, что такой подход весьма условен, очень часто одну и ту же задачу безо всяких изменений можно вполне обоснованно отнести к разным типам. Можно, конечно, предложить более детальную классификацию: два треугольника, три окружности, окружность в параллелограмме, но это не очень естественно и не соответствует содержанию курса. Более разумным и удобным для учебных целей будет следующий подход: в задачах на треугольник выделяется подмножество задач на медиану и т. п. Но мы не будем вдаваться в эти детали, а, оставаясь на нижнем этаже классификационного дерева, объявим, что основными у нас будут задачи про треугольник и окружность. Это соответствует нашей концепции.

Классификация задач по теме носит чисто учебный характер. Она частично пересекается с классификацией по объекту. Например, описанный четырёхугольник — это и учебная тема, но это, безусловно, и объект. Но вполне могут быть задачи на теорему косинусов, а это уже учебная тема в чистом виде. Здесь следует иметь в виду, что классификация по теме должна быть привязана к учебной программе, и если тема подобия изучается раньше темы площади, то в задачах на подобие мы не имеем права предполагать знания формул для вычисления площади.

Классификация по методу также имеет учебный характер. Особенность здесь состоит в том, что задача классифицируется вместе с методом её решения. Такой подход правомерен для задач чисто учебного уровня, в которых предлагаемый метод или очевидно единствен, или явно предпочтительнее других. На наш взгляд, педагогически неверно давать задачу с требованием решить её именно таким способом, если возможен иной, более короткий и красивый и не очень замаскированный способ её решения.

Мы уже упоминали, что методы бывают внутренние и внешние, общие и частные, алгебраические и геометрические. Это самая общая классификация методов решения. Взаимоотношения различных методов решения геометрических задач, их описание, рекомендации по применению — тема для отдельного и большого исследования. Мы же ограничимся тем, что заявим некоторые приоритетные методы и коротко объясним наш выбор. Прежде всего, это метод ключевого треугольника как общий и внутренний метод. Этот выбор можно не объяснять. Следующее наше предложение выглядит с точки зрения концепции не очень логичным. Несмотря на то что нашей главной целью является научить геометрическому методу, учить мы начинаем методу алгебраическому. Причина в том, что он более технологичен и более привычен. Он удобен уже тем, что в нём ясно выделяются две модификации: прямое вычисление и составление уравнений. Эти модификации имеют очевидные аналогии в виде текстовых арифметических задач и текстовых алгебраических задач. Как следствие этих особенностей, алгебраический метод легче усваивается учениками, технология обучения этому методу проще. Алгебраическому методу присуще такое качество, как прагматизм. Нельзя сказать, хорошо это или плохо. По отношению к слабому ученику это хорошо, поскольку укрепляет его веру в себя, развивает, а по отношению к сильному, наоборот, плохо, поскольку обедняются его возможности и тем самым тормозится геометрическое развитие. Среди большого количества внутренних и частных методов и приёмов мы выделяем несколько видов дополнительных построений: соединить две точки отрезком, продолжить отрезок прямой, через данную точку провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной. Смысл этих приёмов необычайно прост: увеличивается число треугольников (метод ключевого треугольника), появляются новые возможности для применения алгебраических методов, поскольку большинство метрических теорем относятся к геометрии треугольника. Получается достаточно стройная методическая картина.

Теперь мы переходим к проблеме классификации задач по сложности. Для начала необходимо разумно поставить проблему. Даже чисто теоретически множество геометрических задач, пусть даже ограниченное сделанным нами выбором, не может быть упорядочено по степени сложности, ведь задача может быть решена разными способами, кроме того, уровень сложности может меняться во времени в процессе обучения, то, что сложно сегодня, может оказаться простым завтра. Но нет никакой необходимости пытаться искать способы упорядочения больших массивов задач. Самым правильным выглядит подход, принятый многими авторами различных задачников. Задачи разбиваются по степени сложности на несколько групп. Отсюда и первый вопрос: сколько таких групп сложности следует выделить? Ответив на этот вопрос, мы можем начать разработку технологии, посредством которой задачу надо отнести к той или иной группе по сложности. При этом мы, чтобы не усложнять проблему, будем интересоваться не текущей оценкой задачи, а только итоговой. И тут мы плавно перетекаем в русло другой методической проблемы.

Уровневая дифференциация и её реализация в системе задач. Итак, вопрос об оценке уровня геометрической подготовки ученика мы свели к оценке уровня сложности задач, которые он умеет решать, при этом мы рассматриваем не всё множество задач, а указанным выше способом отобранное его подмножество, и желаем для рассматриваемой задачи из этого подмножества указать группу сложности, класс сложности, к которому эта задача принадлежит. Первый шаг состоит в определении числа этих групп или классов сложности. Наша школа уже давно функционирует по трёхуровневому принципу: 3, 4, 5 (удовлетворительно, хорошо, отлично). Таковы уровни знания, поскольку 2 (неудовлетворительно) — это незнание. Мы будем называть наши три уровня: уровни А, Б и В. По этому принципу мы можем построить дерево уровней. А, Б и В — это первый слой уровней. Второй слой содержит уже 5 уровней: АА, АБ, ББ, БВ и ВВ. В принципе этот процесс может быть продолжен и дальше, но это кажется уже бессмысленным.

А теперь мы сформулируем два принципа, а вернее один парный принцип, определяющий идеологию уровневой дифференциации: *реализм и динамика*. Первая часть нашего принципа требует от нас при определении характеристик каждого уровня учитывать реальную ситуацию в школе, а второй утверждает необходимость качественного и как можно более значительного возрастания сложности задач при переходе от одного уровня к следующему. Будем считать, что возрастание сложности происходит в направлении от А к В. Первая часть принципа тянет нас вниз, к земле, а вторая — вверх. Возрастание сложности от низшего уровня к высшему определяет некий уровневый зазор, создаёт своего рода разность потенциалов. Этот зазор не может быть слишком маленьким, тогда развивающие возможности геометрии будут невелики. Но именно практическое отсутствие такого зазора мы часто наблюдали и наблюдаем в реальной школе. Этот зазор не должен быть и слишком велик. Тогда произойдёт разрыв между уровнями и для многих школьников исчезнут стимулы для развития.

Следующим шагом будет определение главного, ведущего уровня. Существуют два крайних подхода. Первый: главным является верхний, а от него идут две ступени вниз. Второй, соответственно, — снизу вверх. Подобно тому как, определяя школьную оценку, мы исходим из нашего представления либо о пятёрке, либо о тройке. Каждый подход имеет свои недостатки. Первый ориентирован на элиту и слабые ученики могут оказаться за бортом математики. Второй же ориентирован именно на слабого, здесь возникает опасность опускания верхнего уровня, его слипания с нижними. В результате потенциал сильных учеников реализуется недостаточно. С точки зрения социального заказа оба крайних подхода кажутся неверными. Общество не вправе требовать от школы массового производства отличников, прекрасно владеющих математикой. Обществу не нужны и троечники, именно они являются виновниками всех сегодняшних катастроф (за исключением природных). Наиболее разумно, по нашему мнению, выбрать в качестве основного средний уровень, соответствующий оценке «хорошо». От него одна ступенька идёт вверх, а одна вниз.

Указанный выбор уровня теоретически облегчает нам решение вопроса об определении параметров, задающих уровень. Если мы определим границы уровня Б, то тем самым автоматически определим границы и двух других уровней. Что же касается критериев (условий), по которым можно определить, какому уровню соответствует тот или иной ученик, то тут мы можем говорить о двух типах критериев: о критериях вне рассматриваемого уровня и о критериях внутри него. В первом случае речь идёт просто о необходимом и достаточном условии соответствия данному уровню. Если ученик не умеет решать хотя бы одну задачу, соответствующую основной части уровня А, то он не соответствует уровню Б (не выполнено необходимое условие соответствия уровню Б). Если же ученик умеет решать хотя бы одну задачу основной части уровня В (решает сам, а не знает решение), то он соответствует уровню Б (выполнено достаточное условие). Внутри же самого уровня критерии статистические. Необходимо уметь решать, скажем, 80 % случайной выборки из 10–20 % задач уровня Б.

Следующий шаг состоит в заполнении самих уровней. Надо предложить способ или способы, с помощью которых можно указать для каждой задачи соответствующий ей уровень. (Напоминаем, что речь идёт об итоговом уровне сложности.) Способы могут быть формальными и неформальными. Формальными мы считаем способы определения уровня сложности по некоторым внешним признакам задачи и её решения, причём эти признаки можно более или менее формализовать.

Неформальные методы сводятся к экспертным оценкам. Но поскольку подвергнуть экспертизе даже большинство существующих задач не представляется возможным, то сначала с помощью экспертных оценок следует составить некий задачник-каталог типичных представителей изучаемого уровня (прежде всего, уровня Б). В него входят лишь задачи, не поддающиеся формальной оценке. Этот каталог, как подсказывает практика, может быть вовсе не таким уж большим, задач 200–300 вполне достаточно.

Отбор в этот задачник происходит последовательно, сначала наиболее очевидно соответствующие рассматриваемому уровню, затем — другие, менее очевидные, в конце экспертами внимательно изучаются два пограничных слоя. Разработав такой каталог хотя бы для уровня Б, мы значительно упростим процедуру оценки уровня сложности произвольной задачи. Для произвольной задачи возможны четыре случая: она имеет аналог в нашем каталоге, она явно сложнее любой задачи из каталога, она легче этих задач, и последний случай — ни то, ни другое и не третье. В первых трёх случаях всё понятно, а четвёртый требует дополнительной экспертизы. После чего задача попадает на свою полку и может в дальнейшем исполнять роль прецедента.

Получившаяся трёхуровневая система задач должна представлять не просто три группы задач, а быть именно единой системой. А для этого она должна реализовывать соответствующие методические принципы. Задачи разных уровней должны находиться во взаимодействии, при этом функцией нижних уровней является обслуживание верхних, на нижнем уровне должны быть задачи-детали, из которых на более верхних конструируются более трудные задачи.

И наоборот, задачи верхнего уровня за счёт каких-то приёмов — переформулировок, выделения отдельных частей — адаптируются к нижним уровням, растворяются в нём. Это взаимодействие должно происходить как по линии задач, так и по линии идей: на нижнем уровне — одноидейные задачи, на верхнем — многоидейные. Такая система задач может выполнять не только оценочные, но и обучающие функции. Её можно интегрировать в содержание. Таким образом, взаимодействие между содержанием и методикой приобретает новое качество, не только содержание определяет методику, но и методика влияет на содержание.

Такова схема, и эта схема представляется вполне реализуемой на практике.

Элементарные и опорные задачи. На множестве геометрических задач можно выделить два подмножества по другим признакам.

Элементарными мы будем считать задачи, которые могут быть решены при помощи некоторой формулы в одно действие. То есть этот вид задач определяется относительно некоторой формулы, при этом одной формуле всегда соответствуют несколько элементарных задач. Например, теорема косинусов определяет три элементарные задачи. Элементарная задача — не обязательно простая. Всё зависит от того, известна требуемая формула или нет. Иными словами, сложность элементарной задачи есть категория субъективная. Понятие элементарной задачи в некоторых случаях можно использовать для формального определения уровня сложности данной задачи, пытаясь разложить её на цепочку элементарных задач, и, в случае такой возможности, в зависимости от длины этой цепочки определить уровень сложности этой задачи.

Другое полезное в методическом плане множество задач — это множество так называемых опорных задач. Дело в том, что умение решать геометрические задачи в большой степени зависит от знания достаточного количества геометрических фактов, в большинстве своём не содержащихся в учебнике, от знакомства с некоторыми частными приёмами, до которых трудно догадаться самостоятельно. Вот эти факты и приёмы могут быть введены через систему опорных задач. Соответственно, у нас будут опорные задачи-факты и опорные задачи-методы. Задачи второго типа иллюстрируют определённый приём решения, причём эта иллюстрация должна быть очень ясной и не содержать посторонних примесей. Задачу-метод надо запомнить вместе с решением. Как показывает практика, количество опорных задач, нужных хорошему ученику, вовсе не так велико, как это может показаться. Всего за время обучения ему вполне достаточно накопить 20–30 опорных задач. Повышение уровня геометрической подготовки школьника требует и увеличения числа опорных задач, входящих в его арсенал.

Основная схема решения геометрических задач на вычисление. Для многих вычислительных задач можно предложить некую схему решения, опираясь на которую можно отчасти формализовать процесс решения и даже процесс поиска решения. Схема эта состоит из четырёх этапов:

1. Построение чертежа.
2. Поиск метода решения.
3. Вычисления.
4. Исследование (или анализ).

Имеем схему: рисуем, думаем, считаем, снова думаем. Схема эта очень упрощает в простейших случаях оценку сложности задачи. (Анализировать эту схему мы будем главным образом для планиметрических задач, хотя работает она и в пространстве.) Так, для уровня А характерны двухшаговые задачи: рисуем, считаем. Реальное появление других этапов свидетельствует о повышении уровня сложности. На уровне В возможны случаи, когда эта схема «прокручивается» несколько раз. Основным в нашей схеме является второй пункт. Его мы обсудим отдельно, а сейчас — коротко об остальных пунктах.

Умение строить правильный чертёж — одно из важнейших базовых геометрических умений. Необходимо выработать у учеников привычку, граничащую с инстинктом: начинать решение абсолютно любой геометрической задачи с построения чертежа. При этом чертёж должен быть «большим и красивым». Подчёркиваем, речь идёт о построении чертежа в начале работы над задачей, на черновике, для себя, а не для учителя. Как показывает сегодняшняя практика, культура чертежа у современных школьников находится на очень низком уровне.

И ещё на один вопрос в связи с чертежом считаем необходимым ответить. Как лучше строить чертёж, с использованием чертёжных инструментов или без них? Наш ответ: лучше научиться обходиться без них. Установка на непременное использование чертёжных инструментов закрепощает ученика, сужает оперативное пространство. Очень часто для построения нужного чертежа требуется несколько попыток, но ученик продолжает работать на заведомо неудачном чертеже, поскольку ему жаль потраченных на него усилий. Иногда полезно смотреть на геометрическое изображение как на рисунок, а не чертёж. Проблемы, связанные с построением чертежа, многократно возрастают в стереометрии. Решение некоторых трудных задач группы В целиком сводится к построению чертежа.

Отдельно стоит вопрос о методах обучения методам построения чертежа. Учебники и учебные пособия очень часто просто дезориентируют учеников. Они в начале решения задачи, в начале доказательства теоремы предлагают чертёж, который может появиться лишь в самом конце, они не показывают процесс возникновения этого итогового чертежа, тот своеобразный «мультфильм», который сопровождает этапы решения. Кроме того, многие имеющиеся в учебных пособиях геометрические чертежи сильно усложнены, их не может выполнить простой человек.

На этом мы закончим разговор о роли чертежа в геометрии, тема эта очень большая и более или менее полно рассказать о ней можно лишь в специальной монографии.

Третий пункт — вычислительный. При его выполнении ученик оперирует большею частью негеометрическими знаниями и умениями. Но всё же не следует упускать из виду геометрическое содержание проделываемых выкладок, учёт геометрического смысла может оказать значительную помощь в решении. Кроме того, этот этап, связывая алгебру и геометрию, требует согласования соответствующих уровней.

Последний, четвёртый пункт далеко не всегда возникает в реальных задачах по существу, но его всегда надо делать хотя бы символически. Необходимо выработать привычку, закончив решение любой задачи, выдержать паузу, внимательно просмотреть все решение, проверить его, подумать, нельзя ли геометрическую ситуацию реализовать иным образом, и т. п.

Поиск решения — второй этап нашей схемы. Когда мы говорим, что наша главная цель — научить решать задачи, то мы включаем сюда более общую цель: научить думать. Здесь мы исходим из положения: если человек умеет решать достаточно трудные задачи, значит он умеет думать. А для того, чтобы научиться думать, надо именно думать, хотя бы иногда. Многие школьники, даже неплохо успевающие по математике, на самом деле не умеют думать, они лишь думают, что думают, а на самом деле процесс думанья при решении задачи у них заменяется процессом оформления решения. Путь решения они или находят сразу или не находят вовсе. А если к тому же у них слабые вычислительные умения и в процессе вычислений была сделана ошибка, в результате которой они так и не добрались до конца решения, то они могут отказаться и от верной идеи. Умение думать при решении задачи проявляется в умении найти решение со второй, третьей и т. д. попытки, в умении контролировать процесс решения, думать в процессе решения, а не только в начале, заниматься трудной задачей в течение достаточно продолжительного времени.

Нерешённую задачу можно сравнить с запертым замком. Его легко открыть, если мы имеем один ключ и ключ этот от данного замка, хотя иногда могут быть проблемы и в этой ситуации. (Сравните с элементарной задачей.) Открыть замок несколько труднее, если ключей несколько. Когда же ключей становится очень много, открыть замок может оказаться совсем непростым делом. Именно это имеет место в замках с шифром. Первый шаг поиска решения задачи можно сравнить с подбором ключа из небольшой связки. Но для этого ученик должен эту связку иметь.

Поиск решения вычислительной задачи следует начинать с выбора одной из двух разновидностей вычислительного метода: прямое вычисление или составление уравнений. Прямое вычисление в геометрической задаче аналогично арифметическому решению текстовой задачи. Мы должны построить цепочку, соединяющую то, что дано, с тем, что нужно найти. Создавать нужную цепочку можно, не делая сначала никаких вычислений, а построив дерево возможностей, растущее от начальных данных. Смотрим, что можно найти на первом шагу, затем — на втором, и так, пока не захватим искомую величину. Затем убираем лишнее и приступаем к численной реализации. Можно идти и с конца: что нужно знать, чтобы вычислить искомую величину, и т. д.

Решение геометрической задачи при помощи составления уравнений абсолютно аналогично такому же методу решения текстовых алгебраических задач. Геометрическая специфика сказывается и на процедуре выбора неизвестных, и на процессе составления уравнений. В отличие от текстовых задач многие условия, задающие уравнения, в тексте задачи не указаны, а следуют из геометрических теорем.

Если сразу путь решения не виден, то мы должны попытаться подготовить почву для алгебраических методов при помощи известных нам дополнительных построений. За счёт этих построений возрастает число треугольников и тем самым возрастают возможности для использования метрических теорем.

Если путь решения всё ещё не виден, то мы переходим на следующий, более высокий уровень эвристики. Начинаем анализировать особенности заданной геометрической конфигурации. Возможно, что какие-то прямые перпендикулярны, три точки лежат на одной прямой, а три прямые пересекаются в одной точке и т. д. Каждая из подобных особенностей может оказаться полезной для решения задачи. (Найдя такую особенность, сделайте новый чертёж.)

4. Последние штрихи к концепции

Одна проблема календарного планирования. Серьёзным затруднением для овладения геометрией является то обстоятельство, что окончание изучения последней геометрической темы совпадает и с окончанием изучения всей геометрии. В результате ученик не имеет возможности увидеть всю геометрию в целом, она остаётся для него набором пройденных тем. А чтобы по-настоящему овладеть геометрией, необходимо иметь возможность позаниматься всей геометрией в целом. Улучшить ситуацию можно за счёт нужной последовательности изучения тем, поставив в конец курса темы, которые могут быть использованы как инструмент для повторения. В планиметрии можно более радикально решить проблему, либо выделив достаточный объём времени для повторения в конце курса, либо заняв какое-то время у стереометрии, но уже в следующем классе. Второй способ не улучшит знания школьников, уже покинувших школу, но большинству из них это и не нужно. Нам известно, что немалое число учителей средней школы избирает второй путь. При этом можно так организовать учебный процесс, что стереометрия от подобного ужимания никак не пострадает.

Некоторые методические частности. В сегодняшней реальной методике можно встретить ряд положений, выполнение которых, по всеобщему убеждению, необходимо при обучении математике. Некоторые из этих положений в большей степени относятся именно к геометрии. Например, считается необходимым иметь в курсе изрядное число заданий на отработку основных понятий и технических деталей, встречающихся в решениях задач, и посвятить этой отработке достаточно много времени. О таких упражнениях в нашей работе пока не сказано ни слова. Нам представляется, что их роль сильно преувеличена, а выполнение большого числа однообразных заданий в соответствии с законами физиологии может вызвать торможение. Собрать достаточно сложную конструкцию из слишком мелких деталей за небольшой срок невозможно, равно как нельзя научить езде на велосипеде, если сначала отрабатывать движение правой ноги, потом — левой и т. д. При чрезмерном дроблении задачи на этапы может проявиться эффект сороконожки, которая остановилась, как только задумалась, какая нога должна двигаться первой, какая — второй и т. д. Можно указать и на аналогию с зеноновским парадоксом: двигаясь слишком маленькими шагами, мы никогда не доберёмся до содержательных задач.

А с другой стороны, закон перехода количества в качество всё же справедлив, хотя и ассоциируется с марксизмом-ленинизмом. Важно, чтобы перерабатываемое количество содержало необходимое качество. Нельзя в процессе обучения ограничиваться уровнем задач, которые учащиеся способны решить самостоятельно. Разобраться в решении трудной задачи иногда гораздо полезнее, чем самостоятельно решить пустяковую задачу. У нас почему-то нет разработок о методической и обучающей роли подсказки. А жаль, деликатная и грамотная (математически и педагогически) подсказка — очень сильное оружие обучения. (Иногда даже простое присутствие доброжелательного учителя, кивок головы могут помочь школьнику справиться с задачей, подобно тому как слабый пловец может переплыть широкую реку, если рядом с ним просто плывёт лодка.)

И ещё одно замечание о частностях методики. Большое распространение получили у нас уроки некоторых специальных типов, например, урок под девизом «Одна задача — много решений». И это совсем неплохо. Только не надо чрезмерно увлекаться. Не стремиться к рекордам, а демонстрировать действительно разные методы решений. Кроме того, не следует забывать и о другом более традиционном подходе: «Один метод — много задач». Что лучше, знать поверхностно много методов или хорошо владеть небольшим числом? Ответ нам кажется очевидным.

О реализуемости концепции. От учёного — к учителю. Главным вопросом любой концепции является в итоге вопрос о её реализуемости и реализации. Концепции пишут одни, учебники — другие, у доски стоят третьи. Между первыми и третьими целых две пропасти. Одна пропасть в данном случае преодолена, поскольку автор этой концепции является также и автором ряда учебников, в которых, по его мнению, данная концепция реализована, хотя и не всё обозначенное в концепции в полной мере отражено в его учебниках. (Концепция — это всегда идеализация, в полной мере нельзя реализовать даже собственную концепцию. Что тогда говорить о чужой.)

В системе образования действуют с той или иной степенью эффективности сообщества учёных и учителей. Друг с другом эти сообщества связаны очень слабо, и коэффициент корреляции между ними скорее отрицателен. Иные новации, вводимые в школу по инициативе учёных, приносят школе объективный вред, а многочисленные исследования являют собой образцы схоластики и пустословия. Чего стоят, например, непомерно длинные и утомительные рассуждения на тему «Что такое математическая задача?» Редкие визиты диссертантов-экспериментаторов в школу просто бессмысленны. Какой объективный вывод можно сделать о результатах эксперимента, если экспериментатор кровно заинтересован в этих результатах и никем не контролируется?

Но ещё удивительнее выглядит эксперимент, состоящий в следующем. В одном классе, экспериментальном, в течение некоторого времени проводят занятия в соответствии с предложенной методикой по обучению детей искусству шевелить ушами. В другом, контрольном, этих занятий нет. Через некоторое время сравнивают результаты этих классов в умении шевелить ушами, после чего делается вывод о достоинствах предложенной методики. И смех и грех. Все подобные эксперименты лучше проводить в кабинетной тиши, но, похоже, там они и проводятся. Одним словом, школа только мешает педагогической науке успешно развиваться, не будь школы, успехи этой науки были бы более значительными.

Сообщество учителей представляет очень мощную социальную силу. Именно учитель является главным звеном в системе образования. Мы ни в коей мере не склонны идеализировать учительское сословие. Как во всякой массовой профессии, среди учителей встречаются самые разные люди. Но всё-таки именно они определяют качество образования, его настоящее и будущее, а в конечном итоге и будущее всей страны. Сегодня особенно. И тут возникает ряд вопросов. Нужно ли учителю знать и понимать научные концепции? Должен ли он, отбирая упражнения к завтрашнему занятию, думать о том, какой общеобразовательной цели соответствует та или иная задача? Не разовьётся ли в нём при этом упомянутый нами комплекс сороконожки или, того хуже, комплекс неполноценности из-за непонимания научных концепций? Но мы всё же считаем, что учителю необходимо время от времени отрываться от будней, от земной поверхности, чтобы увидеть перспективу, понять, ради чего он работает, понять глубинные цели образования.

Одним из самых злободневных вопросов сегодня является вопрос о подготовке учителя, профессиональной и методической. Какая из этих двух составляющих является наиболее значимой? Говоря о математическом образовании, мы с уверенностью заявляем: самой важной сегодня является профессионально-математическая подготовка учителя. Под этим мы в первую очередь понимаем знание именно школьной математики, а не современной математической науки. И главное здесь не в том, что эта современная математика в педвузе обычно вырождается в некий суррогат. Даже крупные учёные-математики далеко не всегда хорошо владеют школьной элементарной математикой, а геометрией особенно. А в наших педвузах очень плохо обучают элементарной геометрии, геометрии же, концепцию которой мы здесь изложили, в педвузах нет совсем. И это, возможно, — главное возражение против неё.

Методическая подготовка учителя также очень важна, и всё же она вторична. ***Учитель, плохо знающий математику, но владеющий методикой, представляет большую общественную опасность.*** Свои неверные знания, неправильное представление о математике, о геометрии он может передать ученику, внушить ему, и тот усвоит их прочно и надолго. А переучивать всегда труднее!

Заключение первое

Концепция — это система взглядов. Исходя из такого понимания концепции писал автор эту работу. Может броситься в глаза то, что работа плохо структурирована, содержит многочисленные повторы. Но ведь взгляды на образование, образующие концепцию, существуют одновременно и охватывают пересекающиеся участки образовательного пейзажа. Их трудно выстраивать в шеренгу и отделять один от другого. Обилие точек зрения, с которых надо было посмотреть на предмет, вынудило автора в некоторых случаях ограничиться маловнятной скороговоркой, а в других и вовсе заявлением о существовании своей точки зрения. Работа непомерно раздувалась и автор уже подумывал о том, что надо ограничиться концепцией концепции, но и то, что получилось, лишь часть концепции.

В этом раздувании «виновата» также компьютерная технология, косвенно обруганная в тексте, но всё же использовавшаяся автором в процессе работы. Каждая пришедшая в голову и понравившаяся мысль без особого труда, без помарок и подтирок вставлялась в текст. Теперь понятно, почему трактаты древних так хорошо выстроены. Прежде чем приступить к непосредственному написанию, древний автор должен был представить в голове весь трактат, и достаточно детально.

К данной работе также трудно приложимо прилагательное «научная». Но это же можно сказать по поводу любого методико-педагогического творения.

Автор безо всякой гордости, но и без сожаления, признаётся в плохом знании методической литературы, а потому все совпадения с общепринятыми в этой литературе тезисами или, наоборот, противоречия им носят чисто случайный характер. Однако автору посчастливилось в своей жизни общаться со многими умными людьми и выслушивать их рассуждения об образовании, о математическом образовании, о геометрии. С некоторыми мыслями автор настолько сжился, что теперь уже не может отделить, где мысли его личные, а какие он впервые услышал от В. М. Тихомирова, В. И. Арнольда, Ю. П. Соловьёва или от других умных людей. Но это не означает, что автор хочет прикрыться этими именами и протащить свои далеко не бесспорные мысли.

Автор сознательно использует устаревший термин «школа» вместо современных (?) «лицей», «гимназия», «колледж», поскольку он никак не может уяснить разницу между этими понятиями, взятыми из разных опер. По его мнению здесь мы имеем очередную иллюстрацию русской пословицы «Тех же щей, да пожиже влей».

Кому-то может не понравится чрезмерная политизированность этого труда, постоянный поиск врагов и борьба с ними. Но, создавая концепцию, претендующую на относительную новизну, следует озаботиться привлечением единомышленников, при этом у автора может возникнуть (и возникло) желание не ограничивать зону единомыслия узкопредметными рамками. А как когда-то говорил кто-то из ныне оплёванных классиков, жить в обществе и быть свободным от общества нельзя. Сегодня наше общество старательно мимикрирует, желая показаться своим в цивилизованном сообществе. Но в цивилизованных странах очень важно знать мнение чемпиона по боксу о классической музыке, а рассуждения бывалого гангстера о воспитании молодёжи являются чуть ли не руководством к действию. Автор не является ни тем, ни даже другим. Но высказаться ему также хочется, тем более, что все имеющиеся в этой работе утверждения пришли ему в голову в процессе размышлений над концепцией, а значит, каким-то образом связаны с темой. Так почему бы ему не воспользоваться возможностью, даже если это произведение «ни один театр не будет ставить и ни один зритель не будет смотреть». Как говорится, dixi et animam levavi[1]. (Внимательный читатель без труда заметит логическое противоречие между началом и концом в этом абзаце.)

Кто-то наверняка заявит, что автор — человек «самыхкрайнихвзглядов», а истина, как известно, находится посередине. Но истина потому и посередине, что кто-то — на краю, и любая попытка крайнего переместиться в сторону (в какую?) предполагаемого местонахождения истины может привести к перемещению этой самой середины.

Автор признаёт, что в этом сочинении очень много банальных, тривиальных утверждений. Но это как раз, по его мнению, не так уж и плохо. Следует остерегаться изящных парадоксов. Они, как правило, ложны. Банальные высказывания почти всегда истинны, а истинные — банальны. Именно это и подтверждает ввиду своей банальности последнее высказывание. А может, это как раз парадокс?

Заключение второе (смотри эпиграф)

Всякая концепция — это всего лишь декларация о намерениях. А намерения — они всегда благие. Сколь бы точно наши концепции ни отвечали на социальный вызов, никакого толка от них не будет, пока правители озабочены лишь личными интересами, борьбой за сохранение личной власти. Хорошо, если они хотя бы любят своих детей и внуков и понимают, что от образования зависит судьба этих детей и внуков. Если же они озабочены и судьбами...

Но это уже из области фантастики!

Москва, сентябрь 1996 — *ноябрь* 1998

---

[1] Я сказал и тем облегчил свою душу (лат.).

Воспоминания об И.Ф.Шарыгине

Л. Н. Ерганжиева

Геометр

Мне посчастливилось в конце восьмидесятых годов быть одной из первых аспиранток И. Ф. Шарыгина, и знакомство с этим выдающимся учёным коренным образом изменило моё отношение и к геометрии, и к преподаванию этого учебного предмета в школе.

В то время Игоря Фёдоровича заинтересовало сообщение об исследовании американскими неврологами функциональной асимметрии головного мозга. Считая, что вся система образования строится с опорой на работу левого полушария и апеллирует к словесно-логической составляющей мышления, тогда как геометрическая интуиция наиболее развита у так называемых правополушарных людей, он предложил мне подумать над введением в школьную программу особого курса образной, наглядной геометрии. Этот курс должен был основываться на предметной деятельности учащихся, опираться на их жизненный опыт и пространственные представления, полученные из ближайшей природной и социальной среды, вовлекать в работу преимущественно наглядно-образное мышление, развивая и обогащая его.

Работа оказалась настолько увлекательной, что полностью меня захватила, и «ощущение потока» не покидало меня все три аспирантских года. Вникая в проблему, мне пришлось изучать не только и не столько педагогическую литературу, сколько работы по психологии и физиологии, и я благодарна своему научному руководителю за то, что он не ограничивал мои поиски рамками методики. Будучи человеком широкой эрудиции, полным всевозможных идей, он с интересом относился к моим наработкам, а выслушав, продолжал: «Я вот тут интересную задачку придумал...» И эти моменты общения с Геометром находятся в копилке драгоценностей моей жизни.

«Наглядная геометрия» — появившееся в результате нашей работы учебное пособие для учащихся 5–6 классов — получила широкое одобрение учителей математики. После экспериментального преподавания какие-то регионы ввели изучение наглядной геометрии в региональный учебный компонент, а в других на основе этой книги строится кружковая работа. Но в какой бы форме ни происходило это изучение, учителя отмечают улучшение восприятия не только систематического курса геометрии, но и курса алгебры, особенно теми детьми, которые, будучи так называемыми правополушарными детьми, испытывали трудности в обучении. По отзывам многих учителей, работа по этой книге позволяет сформировать, а затем поддерживать и развивать интерес к математике. Любопытно отметить, что и многие учителя стали иначе относиться к преподаванию геометрии: теперь для них она живой и увлекательный предмет, а интересные геометрические задачи передаются из уст в уста как интеллектуальный фольклор.

Игорь Фёдорович мне часто говорил, что не знает, что такое педагогика и методика преподавания математики, что ничего в этом не смыслит. Он был неправ. Его статьи, книги, сборники задач, учебники говорят обратное: он был не только Геометром первой величины, но и гениальным Методистом.

В. Ю. Протасов

Несколько слов об Игоре Фёдоровиче Шарыгине

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и вселенная. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите свою душу». Этими словами Игорь Фёдорович Шарыгин начал свой курс элементарной геометрии для школы, последний завершённый крупный проект в своей жизни. Потом по секрету говорил, смеясь: «Долго искал эпиграф и не нашёл ничего подходящего. Пришлось записывать себя в мудрецы». Самоирония, за которой на самом деле скрывалось понимание своей роли и своего истинного масштаба. Через несколько лет жизнь всё расставила по местам. Теперь слова «один мудрец сказал» можно писать без кавычек. Увы...

Иногда казалось, что он пришёл в нашу жизнь даже не из XIX века, а из времён европейского Ренессанса, из итальянского Кватроченто, из прекрасного времени энциклопедистов и учёных-универсалов. Казалось, что вот сейчас он разговаривает с тобой, а минуту назад так же запросто обсуждал какую-нибудь проблему со Спинозой или с Дезаргом. Геометрию он воспринимал не иначе, как составную часть мировой культуры, как главный стержень и фундамент древней и современной науки. «Дима Арнольд говорит, что математика — это часть физики. А я дополняю: физика — часть геометрии!» Это его идеям о связи геометрии и человеческой культуры аплодировал недавно копенгагенский конгресс по математическому образованию: «Геометрия — неотъемлемая часть мировой сокровищницы человеческой мысли. Некоторые теоремы геометрии старше, чем Библия. Если человек не слышал о Моне Лизе или не знает,

Впервые опубликовано в журнале «Математическое просвещение» № 9, 2005.

где находится Парфенон, может ли он считаться культурным человеком? А если он не знает теоремы Пифагора или проблемы квадратуры круга?»

Свои книжки и статьи о таком «сухом» и академичном школьном предмете как геометрия Игорь Фёдорович неизменно наполнял мыслями великих философов прошлого, цитатами из высокой поэзии, репродукциями картин итальянских и голландских живописцев. И это, поверьте, не было ни саморекламой, ни выпячиванием своей эрудиции, в чём его многие обвиняли, за глаза, естественно. (Рабочая тетрадь по геометрии для 6 класса. При чём тут стихи Северянина, Бродского и картины Карамболя?!) Он просто был убеждён, что именно так нужно писать о геометрии и по-другому нельзя. Потому что она — те же стихи и картины, только выраженные средствами чертежей и логических рассуждений.

Свой текст я честно переписывал трижды. И всё равно получается сумбур, набор отрывочных воспоминаний. Наверное, это неизбежно. Если бы вас попросили на одной странице изложить свои воспоминания о большой и самобытной стране, где вы провели многие годы, то, видимо, тоже получился бы «сумбур вместо музыки». Поэтому я заранее прошу прощения у читателя и начну вспоминать.

1997 год. Дискуссия среди учителей и методистов об учебниках геометрии. Вопрос — как определять геометрическую фигуру. Шарыгин: «Есть вещи, которые лучше не определять вообще. Потому что, как ни определишь, — всё равно получится не то. Если фигура — это часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой, то что такое кривая, и почему она ограничивает только одну часть плоскости, а не две? Всё это уведёт слишком далеко в науку о жордановых кривых. А если фигура — это множество точек, то получается, что канторово множество — это тоже фигура? И ковёр Серпиньского? Предлагаю лучше такое определение: фигура — это то, что имеет фигуру!»

1996 год, конец мая. Мы стоим на балконе его квартиры, обсуждаем какую-то геометрическую задачку. Пятнадцатый этаж, под нами бушует раннее лето. Игорь Фёдорович просит меня съездить в издательство, посмотреть гранки книги. Работа займёт целый день. Пытаюсь отказаться, сославшись на то, что «неожиданно» началась сессия и у меня послезавтра экзамен. «Да, — сказал Игорь Фёдорович печально, — всё в нашей жизни приходит неожиданно. Сессия... Лето... Старость, пенсия, болезни...» От этих слов у меня мороз по коже.

1996 год. Подготовка вариантов Соросовской олимпиады. Шарыгин — главный координатор и ответственный за составление варианта. Нужны задачи. Отбор у Игоря Фёдоровича был жесточайший. Предлагаешь 10 задач, он берёт из них в лучшем случае две–три. Требования:

задача должна быть интересна математически, литературно оформлена, а самое главное — должна быть на новую свежую идею, которая до этого ни в каких олимпиадах не встречалась.

Задачи, решаемые стандартными олимпиадными приёмами, отметались сразу. «Ты же учёный! Поройся в своей науке! Лучшие задачи всегда приходят из науки, а не придумываются искусственно». Порылся, нашёл. Несу. «По кругу растут 199 деревьев, все разного возраста. Можно ли выяснить возраст 12 деревьев так, чтобы наверняка найти дерево, которое старше обоих своих соседей (слева и справа)». Шарыгин долго изучал задачу и решение. Идея оказалась новой и свежей. «Замечательно! Но литературная подача никуда не годится! Надо бы придумать текст поинтереснее».

После целого дня мучений у нас родилась версия про короля, живущего в одном слаборазвитом царстве-государстве, который начал борьбу с коррупцией и для этого вздумал наказать одного из своих 199 министров. Главного коррупционера решили искать так: усадить всех министров за круглый стол и выяснить, у кого сколько денег на счетах в банке. Того, кто богаче обоих своих соседей по столу, объявляют главным взяточником-«оборотнем». Намёки на известных политиков были настолько прозрачны, что Игорь Фёдорович шутил, дескать, посадят — не посадят. Но это, кажется, только его раззадоривало. Потом он рассказывал, как в день олимпиады ему звонили из провинции, кто с восхищением (Молодцы! Смелые люди, так держать!), кто с негодованием (Вы что там в Москве с ума посходили? Других тем для задач не было? Если губернатор узнает, нам олимпиаду ликвидируют на фиг!).

Надо сказать, это было не первое «хулиганство» Шарыгина на олимпиадах. За год до того я принёс ему задачу о мальчике, поступающем в институт. Игорь Фёдорович предложил: «Давай сделаем поинтереснее. Назовём мальчика Игорь, дадим фамилию, скажем, Иванов. И пусть он поступает в Дипломатическую академию». Задача так и начиналась «Выпускник школы Игорь Иванов мечтал стать дипломатом...» Дети от души смеялись, причины этого были мне не вполне ясны. Только потом до меня дошло, что Игорь Иванов — министр иностранных дел России. В следующем туре Игорь Фёдорович придумывает задачу о выборах в дворовый парламент, где было четыре фракции: «Наш дом», «Наша улица», «Наш двор» и «Наш подъезд».

Всегда восхищала способность Шарыгина сделать задачу из любой жизненной ситуации. Как тут не вспомнить его задачи про радиоактивные шары, про три шкатулки в программе «Поле чудес» или про миллионера Тараса Артёмова, который при обмене денег принёс в сберкассу 1991 купюру. По его задачам можно изучать новейшую историю России.

2000 год. Частная беседа. «Знаешь, в чём главное отличие планиметрии от стереометрии? Не в методах и не в объектах исследования. А в духе! Дух планиметрии — эстетический. Главное в ней — искусство и красота. А дух стереометрии — инженерный. В ней главное — конструкция!»

2001 год. Частная беседа. «Хороший учитель — это не тот, кто всё знает, а тот, кто не стесняется своего незнания. Поэтому у хороших учителей ученики их перерастают».

2001 год. Частная беседа. «Я понимаю, что ты хочешь заниматься серьёзной наукой, и эта школьная ерунда тебе неинтересна. Но ведь наука — вещь опасная и жестокая, можно всю жизнь прожить зря. Поэтому надо заниматься ещё чем-то, про запас. Чтобы после тебя что-то осталось, если не великие теоремы, то хоть книжки для школьников».

В. М. Тихомиров

Об И. Ф. Шарыгине (осколки воспоминаний)

...Мы познакомились примерно полвека тому назад, в конце пятидесятых годов, но сам момент первого знакомства не сохранился в моей памяти.

Наши контакты начальной поры были посвящены общим научным интересам. В ту пору работал на мехмате знаменитый семинар «трёх Коль» — Николая Сергеевича Бахвалова, Николая Михайловича Коробова и Николая Николаевича Ченцова. Темы семинара были связаны с математическими основаниями вычислительной математики. Николай Михайлович пришёл в эту проблематику из теории чисел, Николай Николаевич — отправляясь от производственных задач Отделения прикладной математики (ныне Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша), где он работал, Николай Сергеевич оказался в ту пору под воздействием идей Андрея Николаевича Колмогорова об ε-энтропии и поперечниках. Я тогда также размышлял над этим. На почве осмысления колмогоровских подходов к вычислительной математике и проходили тогда наши с Игорем научные беседы.

Закончив университет, Шарыгин поступил в аспирантуру к Н. С. Бахвалову на кафедру вычислительной математики.

В связи с этим периодом вспоминается забавный эпизод. В ту пору, в начале шестидесятых, разрасталась кампания по борьбе с тунеядством. Естественно, это привело в возбуждение многих доносчиков-любителей, и как-то раз в милицию поступил донос на некоего молодого человека, который целый день напролёт во дворе дома гоняет с мальчишками в футбол. Милиция провела расследование и выяснила, что этот молодой человек по фамилии Шарыгин является аспирантом механико-математического факультета МГУ. На факультет была послана «телега» с просьбой разобраться с этим молодым человеком. Но Игоря в обиду не дали: в милицию был отослан ответ факультета, в котором объяснялось, что успешная научная деятельность совместима с каждодневной игрой в футбол с дворовыми мальчишками.

Игорь успешно завершил своё пребывание в аспирантуре, защитив диссертацию, в которой содержались яркие математические результаты по теории приближений и вычислительной математике. Мне особенно запомнился обнаруженный им (геометрический по сути дела) факт, где очень остроумно обобщалась одна моя теорема.

После аспирантуры Шарыгин был оставлен в качестве ассистента на факультете. У него появились первые ученики, которых Игорь направлял на развитие тематики, интересовавшей нас обоих, и потому наши научные контакты в ту пору были постоянными и плодотворными.

Но вспоминается не только это. Летом 1967 года большая советская научно-туристическая группа оказалась на берегу Чёрного моря в Варне, где проходил Болгарский математический конгресс. В этой группе было много моих добрых знакомых. Среди них и Игорь Шарыгин. Эту первую свою поездку за рубеж я вспоминаю с особым удовольствием. Чуть ли не каждый вечер разными группами мы бродили вдоль берега моря и посещали приморские ресторанчики, где проводили время очень шумно и весело. Там зародилось наше с Игорем дружеское расположение друг к другу. Игорь открылся мне как человек широких гуманитарных интересов, остроумный, с особенной сатирической наблюдательностью, глубоко мыслящий, доискивающийся до сути вещей. Тогда мы начали спорить друг с другом. Мы не были единомышленниками, но уважали в спорах позиции и убеждения друг друга. Об этом придётся ещё сказать.

Тогда же, в Болгарии, когда после опустошения нескольких бокалов (чаще кроваво-красного, чем «золотого терпкого») болгарского вина языкам свойственно раскрепощаться, я почувствовал, что Игорь находится на перепутье и не может ещё выбрать свою жизненную тропу. Мне показалось, что это был для него период тяжёлых переживаний.

Тот период закончился драматически, отношения с руководством кафедры у него не сложились, и Игорь шагнул в пустоту. Он вынужден был оставить университет и оказался перед необходимостью искать себе работу. Когда мы встречались, речь о математике уже не заходила.

Интересы Игоря менялись, и не раз я оказывался свидетелем его новых увлечений. Одним из них было увлечение книгами. Библиофильство — одна из самых благородных страстей человеческих. Игорь был всецело охвачен этой страстью. Ни до ни после мне не доводилось находить равного Игорю собеседника по разнообразным сюжетам, связанным с книгами (мои контакты с одним из величайших библиофилов своего времени — Алексеем Ивановичем Маркушевичем — были слишком краткими). Игорь владел не только полной информацией о коммерческой проблематике книжного дела и возможностях книжного рынка (попросту говоря, знал, что можно «достать», а что нет), но он сам (что не всегда случается с библиофилами) был преисполнен любви к чтению, к родному языку, к осмыслению прочитанного. Его интересовали поэзия, проза, философская мысль, естествознание, изобразительное искусство — словом, всё. Я очень много черпал из общения с Игорем в ту пору.

А потом наступил новый период в его жизни: Игорь стал заниматься репетиторством.

Где-то в шестидесятые годы дали первые всходы уродливые ростки, засорившие пространство российского образования. Вдруг стала осознаваться неизбежность и необходимость репетиторства как средства поступления в отдельные элитарные высшие учебные заведения.

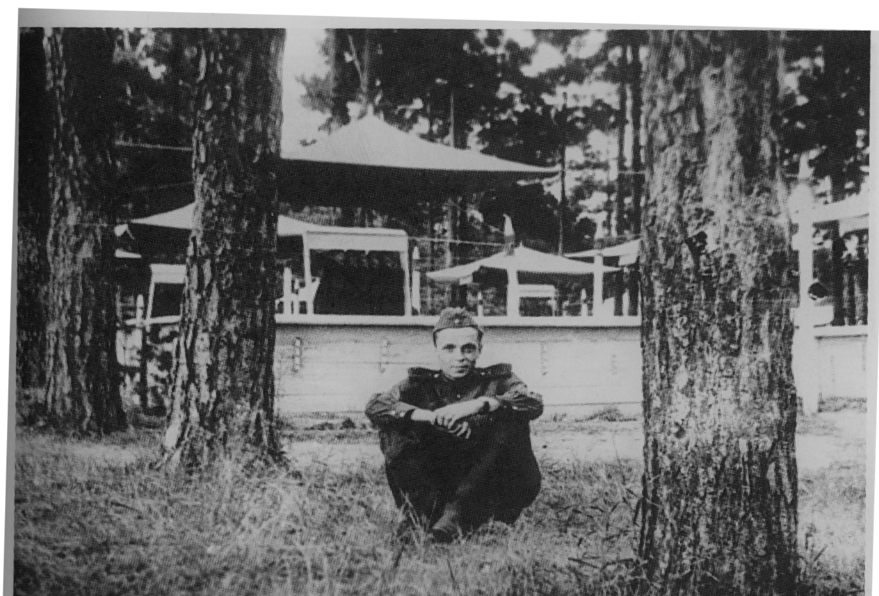
Моё поколение не знало этого явления. Среди моих сокурсников и друзей, поступавших в университет и различные институты в сороковые и пятидесятые годы, мне не известен ни один человек, кто перед поступлением в вуз занимался бы с репетиторами. А в шестидесятые годы занятия с репетиторами стали всеобщим явлением. Историография этого явления и раскрытие социологических его причин необходимы, если вдруг всерьёз встанет вопрос о ликвидации этого монстра.

Игорь Фёдорович Шарыгин стоял у истоков феномена репетиторства. Очень быстро выделилась небольшая группа репетиторов экстра-класса. Игорь Фёдорович сразу стал принадлежать к этой группе, он был, так сказать, «равный среди первых» репетиторов по математике своего времени, и когда речь заходила о том, кому бы направить ребёнка, среди немногих всегда называлась фамилия Шарыгина.

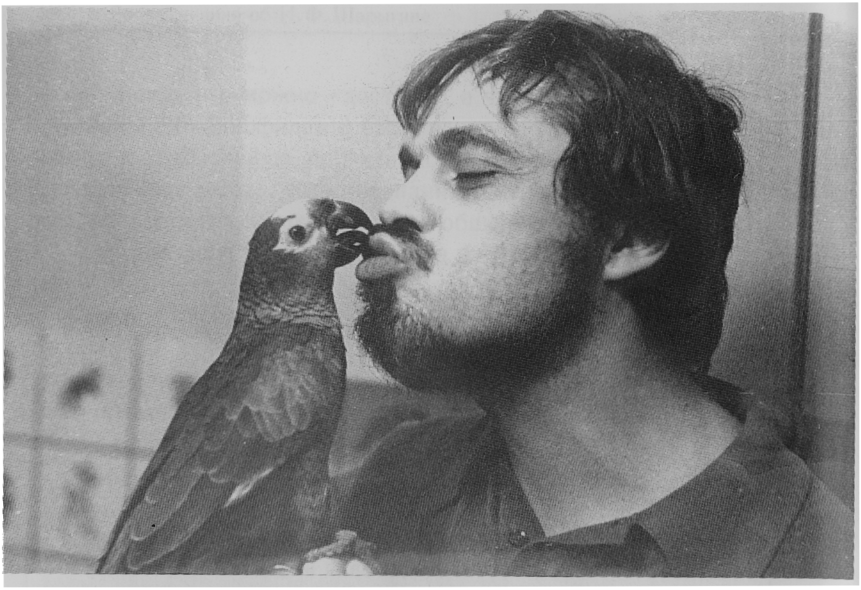
Он подошёл к этому своему (как мы теперь скажем) бизнесу как исследователь, тщательно изучая и классифицируя все «извращения», которые стали культивироваться на вступительных экзаменах. Я часто обращался к Шарыгину по инициативе своих приятелей с просьбой взять в свою группу подготовки их детей, нацеливавшихся на преодоление математического барьера на пути поступления в вуз. По этим поводам мы нередко общались, и Игорь иногда делился со мной своими исполненными сатиры и сарказма наблюдениями о том, что происходило на экзаменах по математике в различных учебных заведениях. Он мог бы многое поведать о том, что тогда происходило, но, увы, он ушёл из жизни слишком рано. По-видимому, именно в ту пору Игорь Фёдорович осознал свой несравненный дар геометрического композиторства (шарыгинским геометрическим шедеврам посвящена наша с В. Ю. Протасовым статья, помещаемая в этом сборнике).

Репетиторством Шарыгин занимался до той поры, пока окончательно не осознал истинное назначение своей жизни — быть борцом за развитие математического образования не только в нашей стране, но и во всём

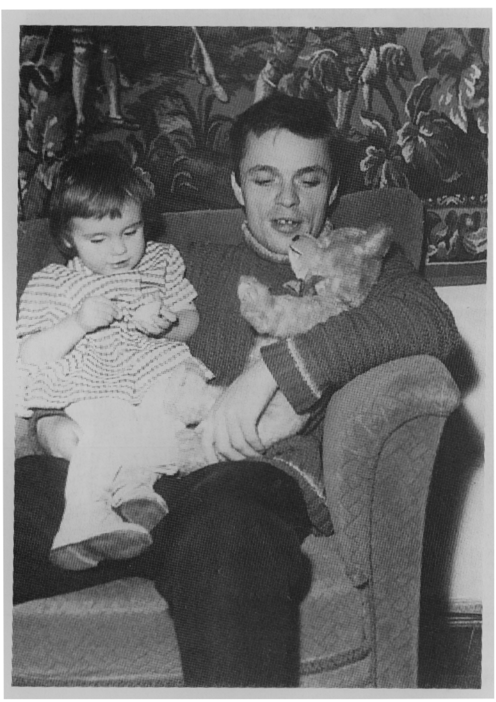
Студент мехмата МГУ. 1953 г.



На военных сборах. 1950-е годы

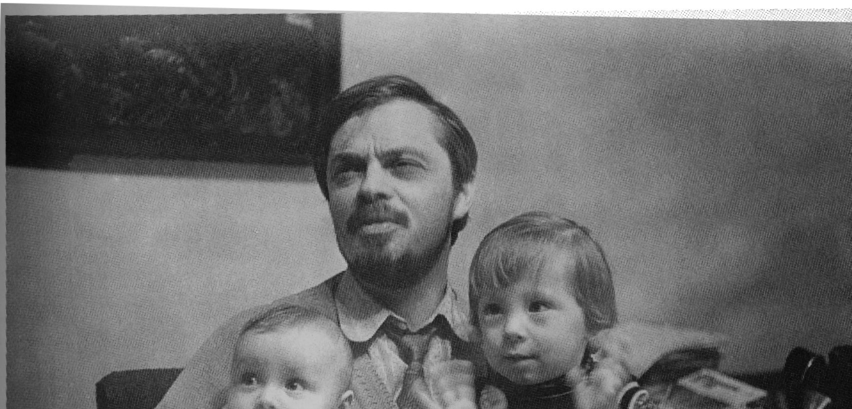


С любимой птицей



С дочкой Надей. 1966 г.

Перловка. Кооперативный институт. 1977 г.



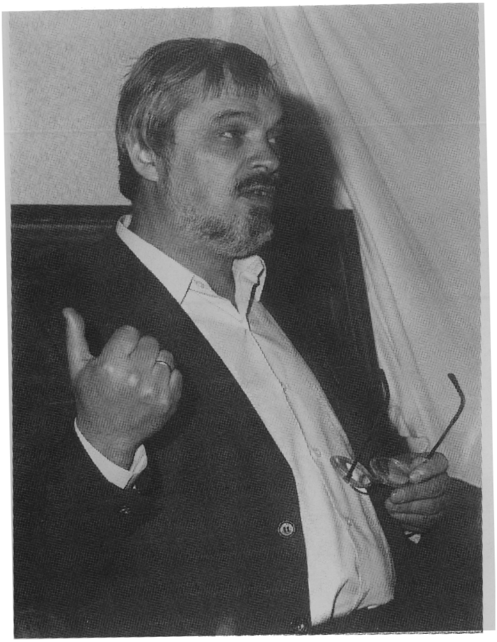
Игорь Фёдорович с сыновьями Георгием и Дмитрием. 1977 г.

На учительской конференции. После заседаний

На встрече курса. 1978 г.

Встреча выпускников мехмата МГУ

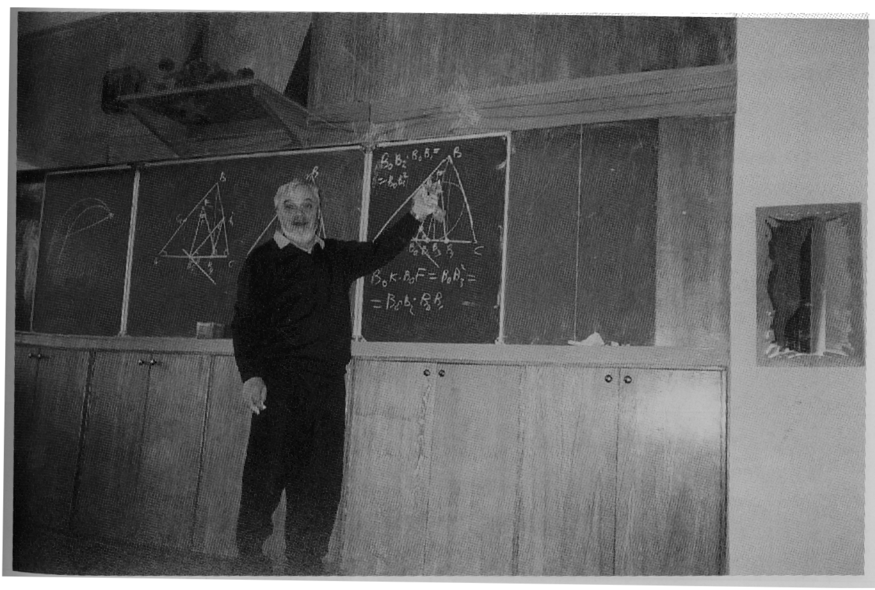
На шестидесятилетии



Конец 1990-х годов

Игорь Фёдорович с аспирантками Светой Кийко и Ларисой Ерганжиевой

г. Пермь. Математическая школа № 6. 2002 г.



На уроке математики в одной из московских школ

Математический конгресс в Пекине. 2002 г.

Пекинская школа. 2002 г.

мире. И где-то в конце восьмидесятых начался фантастический по затраченным усилиям и плодотворности период его жизни.

Этот период сложным образом оказался в его сознании связан с «перестройкой». Перестройка открыла перед И. Ф. Шарыгиным небывалые дотоле возможности: вещать и быть услышанным, писать и публиковаться, бороздить необъятные просторы нашей страны и всюду ощущать поддержку своего труда и своих усилий. Весь мир раскрыл перед ним свои двери. В моей библиотеке десятки книг, учебников, статей Шарыгина, созданных за эти годы; он разбрасывал семена просвещения на своих семинарах в десятках городов; он занимал ответственные международные посты, организовывал плодотворнейшие семинары и школы.

Но мне никогда не доводилось слышать от Шарыгина слова одобрения новым переменам, переменам, которые сделали возможной реализацию его замыслов. Чувство удовлетворения от происшедших перемен гасилось трагическим ощущением того, что власть не заинтересована в том, чтобы «сеять разумное, доброе и вечное», не заинтересована в том, чтобы люди в их странах были способны думать и адекватно оценивать происходящее. (Он убеждался в том, что это происходит не только у нас, но и во многих других странах мира, например в США, и Игорь Фёдорович очень огорчался, узнавая, какие безумные средства тратятся на постановку нашей системы образования на американские рельсы.)

Игорь Фёдорович убедил себя в том, что всякая власть враждебна просвещению (впрочем, он считал, что некоторым исключением является Япония, и возлагал определённые надежды на Китай). Он всеми силами стремился противостоять политике по образованию, проводимой в нашей стране, — губительной, по его мнению, для математического образования.

У меня хранятся копии его страстных обращений к коллегам, парламентариям, президентам о необходимости сберечь наше национальное достояние — математическое образование, созданное на протяжении полутораста лет усилиями русской интеллигенции.

И. Ф. Шарыгин втягивал меня в круг своих интересов по борьбе за усовершенствование математического образования. Я выступал на его семинаре в Независимом московском университете и по материалам этого выступления опубликовал статью «Геометрия в школе» (Школьная энциклопедия. Математика. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996. С. 474–479), вообще немало писал о математическом просвещении. Многое в этих писаниях было навеяно моими контактами с Шарыгиным.

Игорю Фёдоровичу принадлежала идея организации широкой Всероссийской конференции, посвящённой математическому образованию. Он был истинным мотором этой конференции, разработчиком планов, добытчиком средств, собирателем заинтересованных и влиятельных участников. Я старался по мере сил помогать ему.

Конференция состоялась в сентябре 2000 года в Дубне. Мне не довелось по состоянию здоровья принять участие в этой конференции, но я слышал множество восторженных отзывов о ней. О том, какие радостные эмоции испытывал Игорь Фёдорович, когда реализовалась его идея о проведении дубнинской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», можно судить по принадлежащей ему первой фразе обращения, принятого на конференции: «Мы, участники Всероссийской конференции по математическому образованию, с удовлетворением отмечаем в качестве одного из важнейших достижений нашей конференции сам факт её проведения».

Игорь Фёдорович предпринял большие усилия, чтобы нашей стране дали возможность на Международном конгрессе по образованию в Копенгагене в 2004 году организовать выставку о математическом образовании с серией сопровождающих её многочисленных докладов. На этом конгрессе предполагался его доклад о значении геометрии в математическом образовании. Смерть не дала ему возможность принять участие в конференции, и доклад был прочитан его учеником и соавтором В. Ю. Протасовым.

Общаясь друг с другом, мы много спорили, ибо не спорить с ним было невозможно. Геометрия была для Игоря Фёдоровича предметом его безграничной и ревнивой любви, что нередко приводило к выражению этой страсти в самых крайних формах.

Приведу в качестве примера цитату из статьи И. Ф. Шарыгина и В. Ю. Протасова «Нужно ли изучать геометрию в XXI веке?» (она опубликована в сборнике «Очерки по математическому образованию в России» (М.: МЦНМО, 2004); этот сборник готовился к Международному конгрессу по математическому образованию в Копенгагене). Вот что в этой статье написано о Декарте: «Созданный им метод координат позволяет, как писал его создатель, среднему или даже посредственному человеку достичь высот, доступных ранее лишь особо одарённым. Кто-то из последующих классиков сказал, что Декарт „покрыл Геометрию паршой алгебраических формул“». Услышав или прочитав подобные яркие и горячие высказывания друга, я старался (обычно в лёгкой и шутливой форме) несколько ослабить их огонь. Отголоски наших споров можно найти и во многих моих публикациях. Например, в упоминавшейся выше моей энциклопедической статье о геометрии в школе есть такой пассаж: «В наше время большинство крупных учёных считают математику единой и рассматривают геометрию как её часть. Но при этом необходимо сказать, что единство математики проявляется, в частности, и в том, что самая что ни на есть „вообразительная“ геометрия допускает „поверку алгеброй“, иначе говоря, обычно существуют два решения содержательной геометрической задачи — геометрическое, базирующееся на воображении, чертеже и тому подобном, и чисто выкладочное, алгебраическое».

И нередко, когда мне хотелось представить читателю шедевры геометрического композиторского творчества Игоря Фёдоровича, его блистательные чисто геометрические доказательства я поверял «паршой алгебраических формул». И выходило тоже красиво. «А где же истина?» — спросите вы. Пусть она останется «между нами».

Я долго уговаривал Игоря Фёдоровича написать статью для альманаха «Математическое просвещение», а он всё отказывался, ссылаясь на неимоверную занятость. И всё же он написал её (для восьмого номера альманаха, вышедшего в 2004 году). Со многими слишком крайними воззрениями этой статьи трудно было безоговорочно согласиться, но, выпуская номер, мы решили ничего в тексте не менять. Я думал: после поспорим! И как-то в марте 2004 года, оказавшись на даче под Москвой и держа перед собой номер «Математического просвещения» со статьей Шарыгина, я стал писать ему письмо в защиту Декарта, на которого Игорь, по обычаю, горячо нападал. Мне хотелось при этом как-то развеселить Игоря, который в последнее время был мрачен и угрюм. Я писал, что мир перенасыщен *двойственностью* — воззрений, подходов и реалий. Скажем, люди делятся на мужчин и женщин или: в его любимой геометрии задачи можно решать и алгебраически. И как ни относиться к женщинам, писал я, их приходится терпеть, так уж и ты терпи Декарта с его алгебраическими формулами.

Дописать письмо я не успел и возвратился в Москву. Прошло несколько дней, и вдруг поздно вечером раздался звонок. Звонил Игорь. Голос его был беспокойный. Он сказал мне, что был у врачей и они порекомендовали ему операцию на сердце. А он раздумывает: операция недёшева, и полной уверенности в успехе нет. Я посоветовал Игорю решиться на операцию. Я привёл ему пример человека, который был приговорён к скорой смерти, если не решится сделать операцию на сердце. Операция была сделана, и человек вернулся к активной жизни. Потом разговор перешёл на математическое образование. Обсудив некоторые текущие дела, мы пожелали друг другу спокойной ночи.

На следующий день, 12 марта, мне нужно было ненадолго куда-то выйти. Когда я вернулся, жена сказала мне: кто-то позвонил и сообщил, что Игорь скончался.

...Игорь как-то процитировал мне Бродского: «Религия — послание без обратного адреса». Когда я вновь оказался на своей даче, на столе лежало недописанное письмо Игорю. Оно оказалось посланием «без обратного адреса».

В своей последней статье Игорь Фёдорович Шарыгин обращается к каждому человеку, и всё человечество выступает в ней как действующее лицо. Он пишет: «История человечества пишется в трёх книгах. Это История вражды — история войн, революций, мятежей и бунтов... Это История любви. Её пишет Искусство. И это История мысли человеческой. История геометрии не только отражает историю развития человеческой мысли. Геометрия сама является одним из моторов, двигающих эту мысль».

Если заменить «Историю вражды» на «Историю борьбы», присоединив к войнам, революциям, мятежам и бунтам борьбу правды с неправдой и добра со злом, то станет возможным назвать Игоря Фёдоровича тем человеком, который вписал страницы в каждую из книг, в которых прослеживается «История человечества».

Он был страстным Борцом на стороне Правды, Рыцарем, стоявшим на страже Просвещения. В «Историю любви» вписаны его поразительные книги, где главной героиней, предметом восхищения и восторга является Геометрия. В «Историю мысли человеческой» надо включить его композиторское и педагогическое творчество.

Он любил цитировать слова Бродского: «Не в том суть жизни, что в ней есть, но в вере в то, что в ней должно быть». Этой верой была наполнена жизнь Игоря Фёдоровича Шарыгина.

И. Б. Чернышёва

Воспоминания об И. Ф. Шарыгине

С Игорем Шарыгиным мы учились в одной группе. Практические занятия по математическому анализу у нас вёл Леонид Иванович Камынин. Он начинал занятия с традиционного вопроса: «Есть задача, которую не удалось решить?» После дружного ответа большинства студентов, что такая задача среди заданных на дом есть, Леонид Иванович произносил: «Шарыгин — к доске». И Шарыгин учил группу решать «нерешабельную» задачу. На третьем курсе общая подготовка закончилась. Студенты выбрали себе будущую специальность (кафедру), и состав групп поменяли. Мы с Игорем оказались в разных группах, и наши пути разошлись. После окончания университета я, как многие выпускники мехмата, начала работать программистом. И моей профессией стало системное программирование. Игорь работал в МГУ, до меня доходили слухи, что он собирает книги и что он очень хороший репетитор.

В последнее время я работаю в Институте системного анализа (ИСА РАН). Круг проблем, решением которых озабочены сотрудники этого института, очень широк. Предметом исследования может быть любая «большая система». Так в стенах этого института я оказалась вместе с моим дядей, известным генетиком А. А. Малиновским. Профессор В. Н. Садовский (философ) привлёк его в свою лабораторию как специалиста по проблемам тектологии и системных исследований (тектология философа А. А. Богданова — первая попытка построения теории систем). Уже после смерти Малиновского я начала активно сотрудничать с В. Н. Садовским. Меня он привлек к работе по составлению электронного тематического каталога журнала «Вопросы философии». То, что Малиновский был моим дядей, в истории моего сотрудничества с лабораторией Садовского — только чудесное совпадение. Хотя, может быть, и не такое уж чудесное — дядя оказал на формирование моих интересов огромное влияние.

А вот ещё одно чудесное совпадение. У дверей института я столкнулась с Игорем Шарыгиным. В Институте системного анализа пересеклись пути системного программиста И. Б. Чернышёвой и преподавателя-методиста И. Ф. Шарыгина. Правда, системный программист И. Б. Чернышёва стала по совместительству преподавателем (о зарплатах старших научных сотрудников в Академии наук после перестройки говорить не буду).

Не являясь профессиональным преподавателем высшей школы, последние пять лет я преподаю математику будущим бакалаврам в частном (или коммерческом) Институте реставрации. Плана курса математики (утверждённого каким-нибудь министерством) к моему не только удивлению, но и радости, не существовало, мне было предложено самой определиться с тем, что я буду преподавать. То, что план моего курса должна была определить я сама, — стиль работы ректора Института О. И. Пруцына. Это был (к сожалению, он недавно скончался), как говорили хорошо знавшие его люди, «человек-глыба» — огромная эрудиция, широта взглядов, глубина. Он собрал коллектив специалистов, которым предоставил возможность самим выбирать, чему и как они будут учить студентов. Именно благодаря этому стилю в институте преподают энтузиасты своего дела, заражающие своим энтузиазмом студентов (вся русская школа реставрации держится в основном на энтузиазме).

Абитуриенты приносят свои рисунки, как во всех коммерческих вузах, проходят собеседование и приступают к учёбе. Половина студентов отсеивается, остаются только те, кто действительно хочет учиться — таков стиль Института реставрации, введённый ректором. Студенты института умеют рисовать и не умеют думать (у них, наверно, правое полушарие мозга хорошо развито за счёт левого). За 50 часов научить их думать невозможно. И я остановилась на том, что сосредоточусь на изучении задач, решения которых используются в архитектуре.

Проценты даются в объёме, необходимом для того, чтобы оценивать точность. Например, разность длин сторон основания пирамиды Хеопса (длина стороны 230 м) и длин диагоналей подкупольного квадрата Киевской Софии (длина 11 м) — 20–25 см. Я предлагаю студентам сравнить древнеегипетскую и древнерусскую строительную точность (выраженную в процентах). Арифметическую и геометрическую прогрессию студенты не только вычисляют, но и «рисуют» в виде системы концентрических окружностей. Это, вместе с алгоритмами деления окружности на части, используется при построении в круге узоров из дуг спиралей (архимедовой и логарифмической).

Для освоения принципов симметрии и квантования плоскости рассматриваются алгоритмы построения пчелиных сот, наиболее плотной укладки окружностей (и соответствующей оконной решётки), решётки из крестов, даётся правило искривления сторон клеток паркета. В разделе «пропорции» даются «метод квадрата и диагонали» и, конечно, золотое сечение. Не буду перечислять дальше. Готовя курс, я была удивлена тем, что для любого раздела математики так легко подобрать прекрасные иллюстрации из книг по архитектуре. Кстати, для тех, кто занимается изучением истории развития строительной практики и математики, это выливается в очень большую проблему, аналогичную проблеме курицы и яйца — трудно понять «что раньше?».

Удивившись слабой математической подготовке студентов, я решила уточнить для себя, что входит в современный школьный курс. В магазине учебников я обнаружила, что учителю, в отличие от наших дней, теперь предоставляют на выбор несколько учебников. В разделе «Геометрия» для 6–9 классов я нашла учебники, которые выбрала потому, что освоить их необходимо и полезно моим студентам, и потому, что они мне понравились. Это были: «Наглядная геометрия» И. Ф. Шарыгина и Л. Н. Ерганжиевой (учебник для 5–6 класса), «Курс наглядной геометрии» Е. С. Смирновой (методическая разработка для учителей) и «Геометрия» И. Ф. Шарыгина (учебник для 7–9 классов). Я приношу их на занятия, чтобы показать студентам иллюстрации (и чтобы напомнить, что такие-то сведения они изучали ещё в школе в таком-то классе). Студенты рассматривают их с большим интересом.

Когда я представила мой план курса математики ректору, он его одобрил и прибавил: «А вы не читали книгу К. Н. Афанасьева „Построение архитектурной формы древнерусскими зодчими“? Почитайте её». Я понятия не имела, кто такой К. Н. Афанасьев, но книгу купила и прочитала. Оказалось, что Афанасьев — известный специалист по древней архитектуре и 40 лет назад он составил описание храмов (или их фундаментов, если ничего более не сохранилось), построенных на Руси в домонгольский период. Так О. И. Пруцын помог рождению ещё одного энтузиаста реставрации. Три года назад изучение древней архитектуры и реконструкция вычислительных методов древних строителей стали моим любимым делом. Я пополнила ряды тех, кто пытается понять, как древние архитекторы проектировали сооружения, пропорции которых (среди них видное место занимает золотое сечение) в наши дни описывают, привлекая отнюдь не древний вычислительный аппарат.

Я очень обрадовалась встрече с Шарыгиным и высказала ему похвалу в адрес приобретённых мною учебников. Мы стали встречаться в институте. Я ему рассказала, как строю своё преподавание на наглядности, что обнаружила очень много прекрасных иллюстраций для задач по элементарной математике. Естественно, мы обсуждали, что для преподавания гуманитариям нужны такие учебники, которые они способны усвоить, что в этом должны быть заинтересованы органы образования и т. д. Шарыгин мне рассказал, что автор «Курса наглядной геометрии» Е. С. Смирнова — его бывшая аспирантка, что уже очень давно он занимается разработкой и внедрением метода наглядного преподавания математики и что в Институт системного анализа он пришёл, чтобы руководить процессом создания программного комплекса для обучения геометрии по разработанной им методике с помощью компьютера. Когда я рассказывала Игорю о том, чем занимаюсь, он сказал фразу, в которой были слова «чудесные свойства $\sqrt{5}$». Игорь очень точно определил то главное, на чём стоит теория и практика золотых пропорций. Конечно, мы договорились о сотрудничестве. Имея большой опыт в издании книг и учебников, он взялся быть редактором моих лекций (я давно имею компьютерный вариант своего курса). Мне казалось, что такая книжка может не только оказаться полезной всем, кто причастен к искусству, но и поможет изменить их отношение к математике. Но этим планам уже не суждено было сбыться. Игорь умер.

В.В. Яблонская

Яблоки пахнут жизнью

Игоря Шарыгина я всегда воспринимала как незаурядную личность, как философа. И началось это ещё на первом курсе. Он часто заходил к моим соседкам по блоку 1533, и однажды, когда Лида Шкитина и Света Ефременко были в читалке, Игорь зашёл ко мне — узнать «куда все?». А я в тот момент пыталась открыть посылку от мамы из Винниц. Я попросила Игоря помочь мне. Он быстро справился с крышкой, и в комнате ароматно запахло украинскими яблоками. Игорь сел, как-то загадочно заулыбался и протянул напевая «Эх, яблочко... Вот твоё настоящее имя». Я возразила, что я Вита, а он продолжал: «Яблоки и жизнь — очень совместные две вещи». Мы съели с ним несколько яблок, и он ушёл. А потом во все наши очень редкие и случайные встречи то на лекции, то в читалке говорил мне, что рядом со мной он всегда чувствует вкус и аромат украинских яблок.

После окончания мы виделись всё реже. И совершенно неожиданно 12 марта 2004 года он позвонил мне впервые за 50 лет и, очень волнуясь, сбивчиво говорил о Диме Ботине, который скоропостижно умер четыре дня назад 8 марта 2004 года. Я старалась его успокоить, хотя и сама была в шоке и все эти дни не отходила от Диминой мамы — моей сокурсницы Мальвины, за которую мы все боялись, не представляя себе, как перенести такое горе. Игорь явно был в шоке от смерти Димы, говорил, что все мы виноваты, что не уберегли, допустили, не сумели уберечь... Я соглашалась и чувствовала, что мы оба плачем. Я тихо сказала Игорю: «Вспомни, как пахнут яблоки». Он вдруг сказал напевно: «Да-а... Яблоки пахнут жизнью». Попросил передать Мальвине... и не договорил. «Сама знаешь, что». Я ответила, что всё передам и спросила, как его сердце. Игорь сказал, что собирается делать операцию на сердце... Мы простились.

Оказалось — навсегда.

В. Ю. Протасов, В. М. Тихомиров

Геометрические шедевры И. Ф. Шарыгина

Творческая жизнь Игоря Фёдоровича Шарыгина складывалась не вполне обычным образом. Он проявил себя очень одарённым студентом. Закончив университет в 1959 году, он поступил в аспирантуру и успешно завершил её, защитив диссертацию, где им были получены яркие математические результаты по теории функций и теории приближений. Но вскоре после аспирантуры он оставил «высокую науку» и целиком посвятил себя школьной математике — исследованиям по элементарной геометрии и развитию математического просвещения. Он оставил множество замечательных книг и статей, но, пожалуй, в наибольшей мере его талант отразился в его геометрическом композиторстве, т. е. в создании геометрических шедевров. Этой стороне его творчества посвящена наша статья. Она написана двумя авторами. Первый из них причисляет себя к ученикам И. Ф. Шарыгина, второй был связан с Игорем Фёдоровичем почти пятьюдесятью годами дружбы и творческого взаимодействия.

Как отобрать из огромного геометрического наследия Игоря Фёдоровича несколько задач для небольшой журнальной статьи? Признаться, для авторов это было большой проблемой, во многом так и не разрешённой. Мы решили поступить просто: написать про те задачи и теоремы Шарыгина, которые в наибольшей мере понравились и запомнились нам. Это будет, конечно, весьма субъективный взгляд. Хотя, как сказал один замечательный писатель: «Все мнения всегда субъективны, а объективного мнения не существует вовсе!»

Начнём с красивой шарыгинской миниатюры.

Задача 1. *В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120°$ проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Чему равен $\angle A'B'C'$?*

Впервые опубликовано в журнале «Квант» № 1, 2006.

Задача уникальна тем, что рассчитана на учеников 7 класса средней школы[1)], однако вызывает трудности у всех, кто видит её впервые, включая абитуриентов математических факультетов, победителей олимпиад и профессиональных математиков. Причина проста: эта задача чрезвычайно трудно «считается». Желающие могут попробовать решить её с помощью теорем синусов, косинусов и формул тригонометрии. Это возможно, но совсем не просто. Подобные «крепкие орешки» сам Игорь Фёдорович очень ценил. Называя «киллером» геометрии тригонометрию, которая часто позволяет найти короткое счётное решение и, тем самым, лишить красивую задачу всякой геометрической идеи, он стремился создавать такие задачи, в которых тригонометрия была бы бессильна или слаба. Задача 1 является одним из таких «антикиллеров». Вот авторское решение задачи, которое мы разбиваем на отдельные пункты, выделяя «логические ходы».

1. Рассмотрим треугольник ABB' (!).

2. Угол B равен 120°, следовательно, $\angle B'BC$ равен 60°, ибо BB' — биссектриса.

3. Продолжим сторону AB и обозначим через BD луч, продолжающий AB. Тогда $\angle CBD$ тоже равен 60°, ибо он дополняет угол ABB' до развёрнутого.

4. Следовательно, BC — это биссектриса внешнего (по отношению к треугольнику ABB') угла $B'BD$.

5. Воспользуемся известной теоремой: ***биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника пересекаются в одной точке.*** Из этой теоремы следует, что

6. $B'A'$ — биссектриса (тоже внешнего по отношению к треугольнику ABB') угла $BB'C$ (!).

7. Совершенно аналогично доказывается, что $B'C'$ — биссектриса угла $BB'A$, и, значит,

8. Угол $A'B'C'$ равен половине развёрнутого угла $AB'C$, т. е. он равен 90°.

Задача 1 может быть сформулирована и в сферической геометрии.

Поясним, что это значит. Если вы возьмёте модель сферы — резиновый мячик, на котором можете рисовать, и нарисуете три больших круга, у вас получатся два центрально-симметричных сферических треугольника. Рассмотрим один из них. Обозначим его вершины A, B и C. В этом треугольнике величины углов определяются как величины углов между касательными

[1)] Она была включена в рабочие тетради для седьмого класса (см.: Протасов В. Ю., Шарыгин И. Ф. Геометрия. Рабочая тетрадь. 7 класс. М.: Дрофа, 1997). Дело в том, что при решении задачи не используется ничего, кроме свойства точек биссектрисы находиться на равном расстоянии от сторон угла.

к сфере, проведёнными в соответствующей вершине. Поэтому можно понять, что значит «угол B равен ста двадцати градусам». Определение биссектрисы такое же, как на плоскости, — это дуга большого круга, проходящая через вершину угла и делящая его пополам. Сохраняется и свойство точек биссектрисы быть равноудалёнными от сторон угла. А потому и формулировка задачи 1, и её решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на сфере!

А те, кто знают, что такое геометрия Лобачевского, сразу поймут, что и формулировка задачи 1, и её решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на плоскости Лобачевского. Все три утверждения вместе объединяет фраза: задача 1 является фактом абсолютной геометрии (т. е. не зависит от аксиомы о параллельных).

Обсудим вопрос: насколько трудна решённая нами задача 1?

Давайте на её примере пофилософствуем о том, как оценивать трудность математической проблемы и можно ли вообще это делать.

В принципе трудность конкретного *решения* задачи можно оценивать числом *логических ходов*, но можно эти логические ходы распределять по трём категориям и описывать сложность решения тремя натуральными числами (или нулями), характеризующими *высоту, ширину и глубину* этого решения.

Высота — это число «простых импликаций» в решении. Выше мы выделили восемь логических ходов. Некоторые из них — это *простые логические связки*. Таков, например, п. 2: $\angle B = 120°$, BB' — биссектриса $\Rightarrow \angle B'BC = 60°$.

Иные же логические ходы — это *отсылки на известные теоремы*. Таков пункт 5. (При этом, разумеется, список «известных теорем» необходимо как-то заранее фиксировать.) Число отсылок составляет «ширину» приводимого решения.

И наконец, два хода отмечены восклицательными знаками. Такова символика комментирования шахматной партии: восклицательными знаками выделяются наиболее замечательные ходы, не вытекающие из поверхностного взгляда на позицию, свидетельствующие об особой изощрённости игрока в данный момент. Так и здесь, ниоткуда не следует, что разумно рассматривать именно треугольник ABB', но оказывается, что именно в этом рассмотрении ключ к решению задачи. А второй восклицательный знак поставлен логическому ходу, где обнаруживается, что $B'A'$ — биссектриса внешнего угла. Тоже напрямую ниоткуда не следует, что именно в этом суть дела.

Подведём итог: в нашем решении высота равна четырём, ширина единице, а глубина двум. Отметим сразу, что подавляющее большинство геометрических задач Шарыгина обладает нетривиальной глубиной, в частности, и в только что определённом значении этого слова.

Но прервём пока наши философские обсуждения, чтобы потом к ним не раз ещё возвращаться.

Задача 2. *Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что он вписан в окружность и что существует окружность с центром на стороне AD, касающаяся трёх других сторон. Доказать, что AD (длина AD) равняется $AB + CD$.*

Эта задача была придумана Шарыгиным для «Задачника Кванта» и сразу стала популярной и известной. А через несколько лет она была включена в вариант Международной математической олимпиады, причём не от России (тогда СССР), а от другой страны, и, конечно же, без ссылки на автора. Один из близких друзей Игоря Фёдоровича заметил как-то, что Шарыгина постоянно обкрадывали.

Снова попробуем оценить сложность приводимого далее решения.

1. Проведём окружность через B, C и O, где $O \in AD$ — центр окружности, касающейся AB, BC и CD (!).

2. Пусть M — точка (может быть, совпадающая с O), в которой окружность из п. 1 пересекает прямую AD, $\angle AMB$ (!) обозначим через α.

3. Четырёхугольник $MBCO$ вписанный, и потому $\angle BCO = \alpha$.

4. Стороны CB и CD касаются (по условию задачи) окружности с центром O, и потому CO — биссектриса.

5. Из п. 4 и 3 следует, что $\angle BCD = 2\alpha$.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный (по условию), следовательно, из п. 5 вытекает, что $\angle BAD = 180° - 2\alpha$.

7. В треугольнике ABO известны два угла, $\angle A$ и $\angle O$, следовательно, $\angle ABO$ равен

$$180° - (180° - 2\alpha + \alpha) = \alpha.$$

8. Из п. 7 следует, что треугольник ABO равнобедренный, т. е. $AB = AO$.

9. Аналогично доказывается, что $CD = DM$, откуда и следует утверждение задачи.

Мы видим, что здесь 9 логических ходов, два восклицательных знака (то, что через три точки B, C и O надо проводить окружность, — это изобретение, это акт наития или творческой силы, потому и стоит первый восклицательный знак, но то, что важнейшую роль сыграет M, тоже очень нестандартно). И широта приведённого решения весьма значительная: п. 3 — теорема о равенстве углов, опирающихся на одну и ту же дугу; п. 4 — теорема о биссектрисе; п. 6 — теорема о сумме противоположных углов вписанного четырёхугольника; п. 7 — теорема о сумме углов треугольника; наконец, п. 9 — теорема о равенстве углов равнобедренного треугольника.

Итак, высота приведённого решения равна двум, ширина — пяти и глубина тоже равна двум.

В 1993 году старшему из авторов этой статьи было поручено возглавить жюри очередной (пятьдесят шестой) Московской математической олимпиады. Естественно было обратиться к И. Ф. Шарыгину с просьбой придумать задачи к ней. Вот его задача для 9 класса. Она шла под шестым номером как самая трудная.

Задача 3. *Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что*

$$\angle BAC = 30^\circ, \quad a \quad \angle D = 150^\circ$$

и, кроме того, $AB = BD$. Требуется доказать, что AC — биссектриса угла C.

Вот авторское решение.

1. Пусть B' — точка, симметричная B относительно AC.
2. В силу симметрии $AB = AB'$ и $\angle BAC = \angle B'AC$.
3. Из п. 2 и условия, что $\angle BAC = 30^\circ$, следует, что треугольник ABB' равносторонний.
4. Из п. 3 и условия $AB = BD$ вытекает, что точки A, B' и D лежат на окружности с центром в B (радиуса AB) (!).
5. Из п. 3 и 4 вытекает, что угол ADB' опирается на дугу в 60°.
6. Из п. 5 следует, что $\angle ADB' = 30^\circ$.
7. Из п. 6 получаем, что точка D лежит на одной прямой с B' и C.
8. Следовательно, прямая CD симметрична CB, т. е. AC — биссектриса угла BCD, что и требовалось.

Но продолжим наше философствование. А как же всё-таки оценивать сложность самой задачи, а не её решения? Можно поступить так, как часто математики поступают: в качестве оценки сложности задачи можно взять минимум сложности по всем имеющимся решениям. Попробуем приложить эту идеологию к задаче 3.

До сих пор мы рассказывали о геометрических решениях. А сейчас будет представлено аналитическое решение той же задачи.

Очень старый и глубокий вопрос многими математиками ставился так: что лучше — алгебра и анализ или геометрия? Как вы уже, наверняка, поняли, И. Ф. Шарыгин был сторонником именно геометрии, и первый автор этой статьи такое мнение всегда разделял. Второй автор посвятил обсуждению этого вопроса несколько статей (в частности в «Кванте»), стараясь защитить концепцию, что не следует упорядочивать несравнимое, не нужно отдавать предпочтение чему-то одному, неразумно явным образом становиться на одну из двух сторон. Мир наполнен двойственностью, вещами, которые неразрывно связаны друг с другом, но дают возможность посмотреть на мир с двух разных сторон. И вот такими двумя разными сторонами являются геометрия и алгебра.

Переходим теперь к описанию аналитического решения.

1. Обозначим $\angle BCA$ через φ, а $\angle DCA$ через ψ, сторону AB обозначим через a, а BC через b.

2. Из треугольника ABC по теореме синусов получаем

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b. \tag{1}$$

3. Обозначим $\angle CAD$ через χ; из условия ($\angle ADC = 150^\circ$), п. 1 и теоремы о сумме углов треугольника вытекает равенство

$$\chi = 180^\circ - 150^\circ - \psi = 30^\circ - \psi.$$

4. Из условий задачи ($\angle BAC = 30^\circ$ и $AB = BC$) и п. 3 следует, что $\angle A = 60^\circ - \psi = \angle BDA$.

5. Из п. 4 следует, что $\angle BDC = 90^\circ + \psi$.

6. По теореме синусов из треугольника CBD следует соотношение

$$\frac{a}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{b}{\sin(90^\circ+\psi)}. \tag{2}$$

7. Из (1) и (2) получаем

$$\sin(\varphi+\psi) = 2\sin\varphi\cos\psi.$$

8. Раскрывая синус суммы, приходим к равенству

$$\sin\varphi\cos\psi = \cos\varphi\sin\psi.$$

9. Из п. 8 следует, что $\varphi = \psi$. Задача решена.

Как сравнить приведённые решения? Импликаций в аналитическом решении чуть больше, но восклицательных знаков там совсем нет: задачу можно признать *стандартной*. Возможны различные предпочтения: опытные геометры проголосуют за первое, неопытные, но владеющие тригонометрией — за второе решение.

На олимпиаде эту задачу решило 5–6 человек, и был лишь один плюс-минус за аналитическое решение. Когда одному из сильных школьников было рассказано об аналитическом решении, он воскликнул: «Где это видано, чтобы на Олимпиаде применялась теорема синусов!»

И ещё один, в каком-то смысле драматический, момент в жизни второго автора связан с И. Ф. Шарыгиным. Это случилось летом 1984 года.

Шла подготовка к очередной Международной математической олимпиаде. Происходила эта подготовка под Москвой в доме отдыха. Туда привезли команду, и разные математики приезжали её тренировать. Второго из авторов этой статьи попросили принять в этом участие. А он как раз тогда писал свою книжку «Рассказы о максимумах и минимумах» и пропагандировал мысль, что большинство задач плоской геометрии на максимум и минимум можно решить так: надо их формализовать разумным образом, а потом применять либо теорему Ферма о том, что в точках максимума и минимума производная равняется нулю, либо правило множителей Лагранжа. И будущим олимпийцам крайне неосторожно было предложено давать лектору геометрические задачи на максимум и минимум, а он будет их немедленно решать по своей методе (которая в лекции была уже изложена). А потом олимпийцам предлагалось рассказывать свои решения и сравнивать, кто кого. Это предложение вызвало бурное веселье: олимпийцы были уверены в том, что победа будет за ними, тем более что незадолго до того их учил геометрии сам Игорь Фёдорович Шарыгин. Вот одна из тех задач, автором которой был, конечно, Игорь Фёдорович; она фигурировала на московской олимпиаде в 1980-м году.

Задача 4. *Дан круг с центром в O, AC — диаметр круга, и на OC дана точка F. Спрашивается, как провести хорду BD через точку F так, чтобы площадь четырёхугольника $ABCD$ была максимальной?*

Очень красивая задача. И Игорь Фёдорович именно эту задачу совсем недавно обсуждал с олимпийцами. Вот его решение.

1. Рассмотрим треугольники ABC и OBF.

2. У этих треугольников высота одинаковая, следовательно, площади относятся так же, как OF относится к AC.

3. Аналогично получаем

$$\frac{S_{OBF}}{S_{ABC}}=\frac{OF}{AC}=\frac{S_{ODF}}{S_{ADC}}.$$

4. Следовательно, суммируя, получаем, что

$$\frac{S_{OBD}}{S_{ABCD}}=\frac{OF}{AC}.$$

5. Значит, вместо того чтобы максимизировать площадь четырехугольника, возможно максимизировать площадь треугольника OBD.

6. Или, что то же самое, максимизировать $\sin\angle BOD$. В этом месте возникает красивая неожиданность — «смена режима».

7. Обозначим $\angle BOD$ через φ. Наилучший угол обозначим $\bar{\varphi}$. Очевидно, что $\varphi_0 \leqslant \pi$, где φ_0 соответствует случаю перпендикулярности AC

и BD, и потому если $\varphi_0 \leqslant \pi/2$, то максимальная площадь соответствует значению $\bar{\varphi} = \pi/2$; если же $\varphi_0 > \pi/2$, то $\bar{\varphi} = \varphi_0$. (Здесь мы просто переписали текст задачника И. Ф. Шарыгина, читателю предоставляется возможность найти число логических ходов в этом рассуждении.)

Так вот, школьники-олимпийцы предложили лектору решить эту задачу с помощью производных. Вот каким оказалось решение.

1. Сначала надо формализовать задачу. Пусть $AC = 1$, $OF = a$, а $\angle BFC$ обозначим φ.

2. Олимпийцы подсказали, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними.

3. Длина второй диагонали BD равна $2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}$.

4. Из п. 2 и 3 следует, что надо найти максимум функции

$$g(\varphi) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}\, \sin \varphi$$

при условии, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

5. Делаем замену $(a \sin \varphi)^2 = z$ и приходим к задаче о нахождении максимума функции $f(z) = (1 - z)z$ при условии, что $0 \leqslant z \leqslant a^2$.

Это — простая задача, и можно ограничиться лишь выписыванием ответа: если $a \leqslant 1/\sqrt{2}$, то $\bar{z} = a^2$, т. е. $\bar{\varphi} = \pi/2$, если же $1/\sqrt{2} < a \leqslant 1$, то $\bar{z} = 1/2$, т. е. $\sin \varphi = 1/(a\sqrt{2})$.

Теперь судите сами, какое решение проще — геометрическое или аналитическое.

С этой задачей лектор справился достаточно успешно, и тогда рассерженные олимпийцы дали ему ещё одну шарыгинскую задачу, про которую уже твёрдо были уверены, что лектору её не осилить. И действительно, с ходу у него ничего не получилось, и он вынужден был взять тайм-аут, сказав: «Пойдите-ка попейте чайку́». А за время тайм-аута кое-как всё же справился. Вот эта задача.

Дан угол A и в нём внутри две точки M и N. Как провести прямую BC (B и C — на сторонах угла) через точку M так, чтобы площадь четырёхугольника $ABNC$ была минимальной?

Читателю предлагается самостоятельно её решить, а о том, как она решается с помощью анализа, он может прочитать в книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (2-е изд. М.: МЦНМО, 2006). Возможность аналитического решения не может бросить тень на эти задачи: в обеих скрыто истинное изящество.

А вот ещё один шедевр И. Ф. Шарыгина. Правда, Игорю Фёдоровичу он принадлежит лишь отчасти, сама задача довольно старая. Но всё по порядку.

З а д а ч а 5 (обобщённая теорема о бабочке). *На окружности дана хорда AB, на ней — точки M и N, причём $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Доказать, что $AK = BL$.*

История этой задачи довольно запутанна. Дело в том, что ей предшествовала не обобщённая, а классическая теорема о бабочке. Классическая теорема о бабочке соответствует случаю $M = N$. То есть всё то же самое, но изначально берётся только одна точка M — середина хорды AB, через неё проводятся две произвольные хорды PQ и RS и утверждается, что $AK = BL$, где K и L — точки пересечения прямой AB с прямыми QS и RP соответственно. Классическая теорема о бабочке была очень известна и популярна. А появилась она довольно давно, в 1815 году, в английском журнале Gentleman's Diary (тогда не предполагалось, что женщины могут заниматься математикой, поэтому математические задачи были в мужских журналах). И на протяжении всех последующих лет «бабочка» доставляла истинное удовольствие каждому, кому доводилось с ней познакомиться. Интересно, что были постоянные публикации, посвящённые этой задаче, на протяжении всего этого времени, число этих публикаций перевалило за несколько сотен. Существует огромное количество разных решений этой задачи, например в известной книжке Шклярского, Ченцова и Яглома, в задачнике В. В. Прасолова, в знаменитой книге «Новые встречи с геометрией» Кокстера и Грейтцера и, естественно, в задачнике Шарыгина.

А как же родилась обобщённая теорема о бабочке? Будучи убеждён, что красивая геометрическая теорема должна иметь чисто геометрическое доказательство, Игорь Фёдорович придумал такое доказательство для классической теоремы о бабочке. А потом просто заметил, что ничего

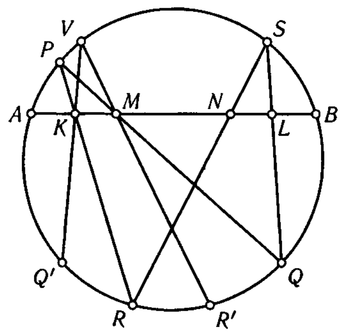


Рис. 15

не изменится в доказательстве, если «раздвоить» точку M на пару симметричных точек M и N. Так спустя более чем полтора столетия родилось естественное обобщение теоремы о бабочке! Это ещё раз подтверждает совершенно особое положение теорем элементарной геометрии. Геометрические теоремы всегда свежи и не устаревают!

Рассмотрим подробнее то самое геометрическое решение, единое для классической и для обобщённой теорем о бабочке.

Решение. Сделаем симметрию относительно серединного перпендикуляра к хорде AB. Окружность при этом перейдёт в себя, точки N, Q, R — в точки M, Q', R' соответственно. Докажем, что прямые $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на окружности, из этого будет следовать, что симметрия перевела точку L в точку K, что и требовалось. Для этого обозначим через V вторую точку пересечения исходной окружности с окружностью PMK. Так как четырёхугольники $PMKV$ и $PQQ'V$ вписанные, то

$$\angle QPV = 180° - \angle MKV = 180° - \angle QQ'V,$$

следовательно, $\angle MKV = \angle QQ'V$. С учётом того, что прямые QQ' и MK параллельны, это влечёт, что точки V, K, Q' лежат на одной прямой. Итак, прямая $Q'K$ проходит через точку V. Точно так же доказывается, что прямая $R'M$ проходит через V. Таким образом, $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на исходной окружности, что и требовалось доказать.

Следующая задача Шарыгина предлагалась на одной из Всесоюзных олимпиад по математике.

Задача 6. *В пространстве дана сфера и две такие точки A и B, что прямая AB не пересекает сферу. Рассматриваются всевозможные тетраэдры $ABMN$, для которых данная сфера является вписанной. Докажите, что сумма углов пространственного четырёхугольника $AMBN$ (т. е. сумма углов $\angle AMB$, $\angle MBN$, $\angle BNA$ и $\angle NAM$) не зависит от выбора точек M и N.*

Эта замечательная задача также являет собой пример «антикиллера». Она очень трудно считается, а геометрически решается наглядно и естественно, фактически — в один приём.

Решение. Обозначим через Q, S, P и R точки касания вписанной сферы с гранями AMB, ANB, BMN и AMN соответственно. Поскольку $BQ = BS$ как расстояния от точки B до точек касания прямых BQ и BS со сферой и, аналогично, $AQ = AS$, треугольники AQB и ASB равны по трём сторонам. Далее остаётся лишь аккуратный подсчёт углов. Во-первых, $\angle ABQ = \angle ABS$ и $\angle BAQ = \angle BAS$. Так же доказываем, что $\angle MBP = \angle MBQ$ и $\angle NBP = \angle NBS$. Сложив два последних равенства, получаем

$$\angle ABM + \angle ABN - \angle MBN = \angle ABQ + \angle ABS = 2\angle ABQ.$$

Аналогично

$$\angle BAM + \angle BAN - \angle NAM = 2\angle BAQ.$$

Таким образом,

$$\angle ABM + \angle BAM + \angle ABN + \angle BAN - \angle MBN - \angle NAM = \\ = 2\angle ABQ + 2\angle BAQ.$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых равна $180^\circ - \angle AMB$, сумма третьего и четвёртого равна $180^\circ - \angle BNA$, а правая часть равна $360^\circ - 2\angle AQB$. Следовательно, сумма $\angle AMB + \angle MBN + \angle BNA + \angle NAM$ равна $2\angle AQB$, а значит, не зависит от выбора точек M и N.

Задача эта была предложена на Всесоюзной олимпиаде последним номером, т. е. как сложная задача. Она и в самом деле сложная, если не знать решения заранее. А ведь в её решении используются только признаки равенства треугольников и теорема о равенстве касательных, проведённых из одной точки к сфере!

В заключение приведём ещё несколько задач и теорем И. Ф. Шарыгина без разбора их решений и доказательств.

Задача 7 (задача Лебега для треугольника). *Найти минимально возможную площадь треугольника, которым можно покрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими единицы.*

История этой задачи также занимательна. Автор её — великий французский математик Анри Леон Лебег (1875–1941). Свою первую работу он написал в 1899 году, это была первая публикация Лебега, а уже к 1902 году он стал классиком математики. Лебег внёс неоценимый вклад не только в ключевые направления математики XX века, но и в развитие российской математики. Так сложилось, что московская математическая школа начала развиваться, вдохновлённая в основном идеями Лебега, а затем разрослась в крупнейшую математическую школу не только в России, но и в мире. Классическая формулировка задачи Лебега такова: найти фигуру минимальной площади, покрывающей любую фигуру диаметра 1. Шарыгин переносит эту задачу на треугольник и находит совершенно элементарное решение (см.: Шарыгин И. Ф. Геометрия 9–11. М.: Дрофа, 1996. Задача 677). Мы не будем приводить это решение, приведём лишь совершенно удивительный, на наш взгляд, ответ. Оптимальным является треугольник ABC, у которого $AB = 1$, $\angle A = 60^\circ$, а высота, опущенная на сторону AB, равна $\cos 10^\circ$. Что здесь необычного, спросите вы? Дело в том, что мы никогда не встречали ни одной экстремальной задачи (а математическая специальность авторов этой статьи — теория экстремума), у которой в ответе фигурировал бы угол 10°. Бывают «табличные» углы (120°, 90°, 60° и т. д.), на худой конец 72°, 36°, ... Но чтобы угол в 10° возник в совершенно естественной задаче на минимум — это удивительно!

Игорю Фёдоровичу везло на подобные вещи — либо необычные, нестандартные задачи, либо совершенно удивительные ответы в естественных, казалось бы, задачах. Приведём здесь ещё один подобный пример. Каждый из вас на уроках геометрии имел дело с развёртками многогранников. Развёртка, наряду с сечением, помогает свести стереометрическую задачу к одной или нескольким планиметрическим. А задавали ли вы себе вопрос: почему развёртка вообще существует? Всегда ли многогранник можно развернуть на плоскость? Вдруг какие-то грани на развёртке пересекутся? Тогда фигуру, получающуюся в развёртке, нельзя будет вырезать из одного плоского листа бумаги. Проблема существования подобных аномальных развёрток долгое время занимала умы геометров. В результате были построены примеры многогранников, развёртки которых нельзя уложить на плоскость без самопересечений. Примеры были, конечно же, сложные. Но в 1997 году московский математик Алексей Тарасов (в то время он был студентом мехмата МГУ) придумал совершенно элементарный пример: он обнаружил, что существуют правильные треугольные усечённые пирамиды, развёртки которых имеют самопересечения. Узнав о примере Тарасова, Игорь Фёдорович тут же формулирует его в виде задачи и включает в вариант III Соросовской олимпиады. Вот эта задача.

Задача 8. *Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с основанием ABC и плоскими углами при вершине D, равными α. Плоскость, параллельная ABC, пересекает AD, BD и CD в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезана по пяти рёбрам: A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB. При каких значениях α получившаяся развёртка будет обязательно накрывать сама себя?*

Всё-таки удивительная вещь — геометрия! В какой ещё науке новейшие достижения (а пример Тарасова, несомненно, является таковым) могут быть на следующий день принесены в класс для разбора со школьниками или предложены в качестве задачи на олимпиаде? Интересно, что задачу эту Игорь Фёдорович поставил под номером 2 (из пяти, предлагавшихся в первый день олимпиады), т. е. как лёгкую! Но главным образом интересен и необычен ответ. Ответ такой: при $\alpha \geqslant 100^\circ$. Когда первый автор этой статьи проводил разбор задач после олимпиады, сразу несколько человек в зале воскликнули: «А разве может быть в геометрической задаче такой ответ? Сто градусов — это ведь относится скорее к физике!» (Имелась в виду, видимо, температура кипения воды в нормальных условиях.) И ведь они правы. Каждый, кто серьёзно занимался геометрией, знает, что в нормальной геометрической задаче такого ответа быть не может! И тем не менее...

Задача 9. *Обязательно ли является равнобедренным треугольник, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис — равнобедренный?*

Решение этой задачи (см.: Шарыгин И. Ф. Геометрия 9–11. М.: Дрофа, 1996. Задача 500) не столь простое, как может показаться на первый взгляд. Это один из немногих случаев, когда И. Ф. Шарыгин не нашёл геометрического решения задачи и прибег к вычислениям. Скорее всего, чисто геометрического решения здесь не существует, что ясно уже из ответа. А ответ весьма неожиданный: треугольник не обязательно равнобедренный, но только в том случае, когда один из его углов лежит в интервале $\left(\arccos\frac{\sqrt{17}-5}{4},\ \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, т. е. примерно от 102° до 104°. Если же треугольник не имеет тупых углов или имеет, но тупой угол не лежит в этом узком интервале, то треугольник обязательно равнобедренный.

Перед формулировкой следующей задачи Шарыгина напомним, что такое прямая Симсона. Даны треугольник ABC и точка M в плоскости этого треугольника. Три проекции точки M на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Эта прямая называется прямой Симсона точки M относительно треугольника ABC.

Задача 10 (прямая Симсона n-угольника). *Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. Точка M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно четырёх треугольников ABC, ABD, ACD, BCD. Тогда четыре получившиеся проекции лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно четырёхугольника $ABCD$).*

Далее по индукции определяется прямая Симсона n-угольника.

Пусть дан n-угольник, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно всех n $(n-1)$-угольников с вершинами в вершинах данного n-угольника. Тогда n получившихся проекций лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно n-угольника).

Решение. Смотри в книге Шарыгин И. Ф. «Геометрия 9–11» (М.: Дрофа, 1996), задача 613.

Задача 11. *В данном треугольнике провели медиану к наибольшей стороне, в каждом из получившихся двух треугольников проделали то же самое, получили четыре треугольника и т. д. Доказать, что все получающиеся таким образом треугольники можно разбить на конечное число классов подобных между собой треугольников.*

Решение. Смотри в книге Шарыгин И. Ф. «Геометрия 9–11» (М.: Дрофа, 1996), задача 676.

Задача 12. *Вокруг окружности радиуса 1 описан многоугольник площади S_1. Точки касания его сторон с окружностью соединили, получив многоугольник площади S_2. Каково наименьшее возможное значение суммы $S_1 + S_2$?*

Ответ в задаче: 6. Достигается на квадрате и только на нём. Ни авторского, ни какого-либо другого решения этой задачи мы, увы, не знаем. Сама задача была сообщена Игорем Фёдоровичем в частной беседе с первым автором этой статьи, было это около 20 лет назад. Шарыгин был немного разочарован «неинтересным» ответом. Говорил, что во время расчётов возлагал надежды на один пятиугольник, в котором число шесть почти достигалось, однако потом выяснилось, что он всё равно хуже квадрата. Насколько нам известно, результата этого он не публиковал, возможно из-за громоздкости решения. А может и потому, что, как всегда, надеялся найти красивое геометрическое решение. Может быть — это удастся вам, дорогой читатель? Тогда присылайте свои решения нам — авторам статьи — на адрес редакции журнала «Квант». Ждём ваших решений и хотим вас призвать, как всегда призывал Игорь Фёдорович своих читателей и слушателей: «Занимайтесь геометрией! Польза геометрии не в достижении результата, а в самих занятиях! Потому что геометрия — это витамин для мозга!»

Олимпиады им. И.Ф.Шарыгина

В память об Игоре Фёдоровиче Шарыгине ряд российских научных организаций и учебных заведений решили ежегодно начиная с 2005 года проводить геометрическую олимпиаду. В оргкомитет и жюри олимпиады вошли известные учёные, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов. Олимпиада состоит из двух туров — заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика» и в Интернете, могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

Ниже приводятся задачи двух первых олимпиад, финальные туры которых прошли в Москве в сентябре 2005 года и в г. Дубне Московской области в июле 2006 года, а также задания заочного тура III олимпиады.

Первая олимпиада (2005)

Заочный тур[1]

1. (*А. Заславский*) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD, восставленные в точках C и D соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны. (8 *класс*)

Решение. Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки рассматривается аналогично). Отметим точку R — вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью (рис. 1).

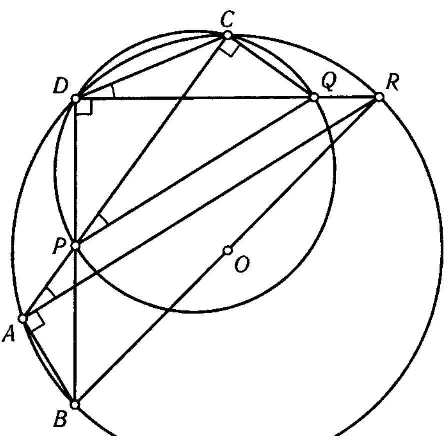


Рис. 1

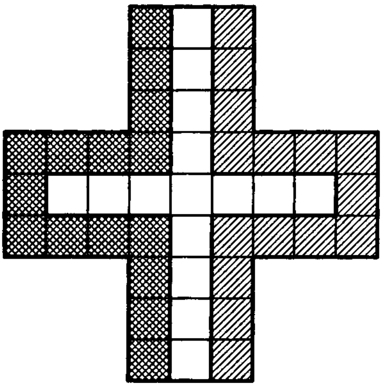
Четырёхугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому углы CDQ и CPQ равны как опирающиеся на одну дугу. По этой же

[1] Решения задач этого раздела написаны А. Г. Мякишевым.

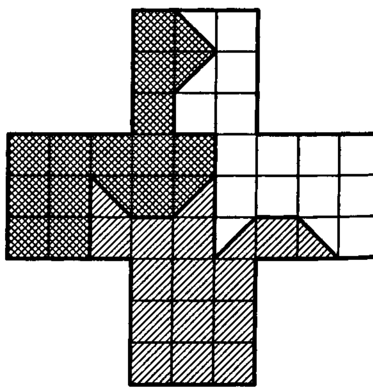
причине $\angle CDQ = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны (соответственные углы равны). Но BR является диаметром, как следует из перепендикулярности BD и DQ, поэтому $\angle BAR = 90°$.

2. (*Л. Емельянов*) Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру. (8–9 *класс*)

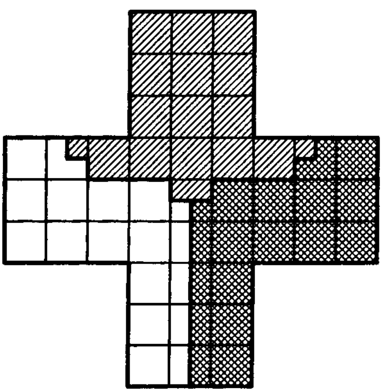
Решение. Приведём некоторые из возможных разрезаний.



(Дарбинян Артур,
г. Ереван, ФМШ г. Еревана)



(Бородулин Игорь,
г. Екатеринбург, гимназия № 9)



(Макарец Александр,
г. Харьков, ФМШ № 27)

3. (*В. Протасов*) Дана окружность и точка K внутри неё. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку K, имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд (ГМТ). (8–9 *класс*)

Решение. Искомым геометрическим местом будет окружность с центром в середине OK (где O — центр исходной окружности) и радиусом $R/2$ (где R — радиус данной окружности).

Первый способ. Действительно, пусть PQ — общая хорда, M — её середина, а O_1 — центр выбранной произвольно окружности. Поскольку из условия следует, что OPO_1Q является ромбом, то M будет также серединой OO_1. Средняя линия MM_1 треугольника OKO_1 равна половине

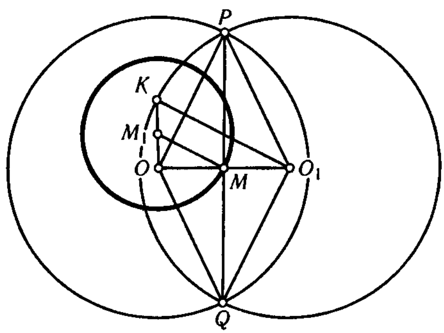


Рис. 2

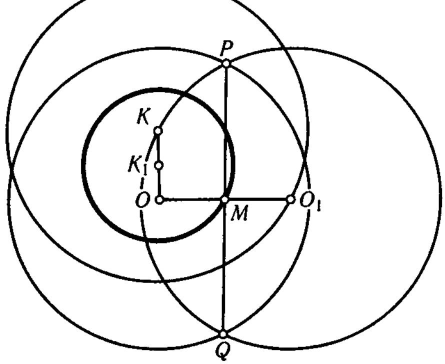


Рис. 3

KO_1, т. е. половине радиуса. Таким образом, все середины хорд лежат на окружности с центром в середине OK и радиусом $R/2$ (рис. 2).

Несложно также проверить, что любая точка этой окружности является серединой некоторой хорды.

Второй способ. Центры окружностей, равных данной и проходящих через точку K, лежат на окружности с центром в точке K радиуса R. Если O_1 — центр одной из таких окружностей, то, как уже было замечено, M — середина общей хорды — будет также серединой OO_1. Поэтому искомое ГМТ есть образ окружности, образованной центрами, при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $1/2$ (рис. 3).

4. (*Б. Френкин*) При каком наименьшем n существует выпуклый n-угольник, у которого синусы всех углов равны, а длины всех сторон различны? (9—11 *класс*)

Решение. Наименьшее значение равно пяти. Очевидно, что треугольников с таким свойством не существует. Покажем, что не существует и четырёхугольников. Сделать это можно по-разному. Так как синусы углов равны, то сами углы четырёхугольника равны либо φ, либо $180^\circ - \varphi$. Простым перебором легко убедиться в том, что в этом случае мы имеем дело либо с прямоугольником, либо с параллелограммом, либо с равнобокой трапецией. Или же можно для доказательства использовать «метод площадей». Рассмотрим выпуклый четырёхугольник, синусы всех углов которого равны, и обозначим длины его сторон буквами a, b, c, d. Вычислим его площадь как сумму площадей двух треугольников с общей диагональю по формуле «половина произведения сторон на синус угла между ними» двумя способами, затем в полученном равенстве сократим на половину синуса и придём к соотношению $ab + cd = ad + bc$, или $(a - c)(b - d) = 0$. Отсюда вытекает равенство, по крайней мере, одной пары сторон. Чтобы построить пятиугольник, обладающий искомыми свойствами, достаточно отрезать у равнобокой трапеции с углом 60° при большем основании «уголок» (рис. 4).

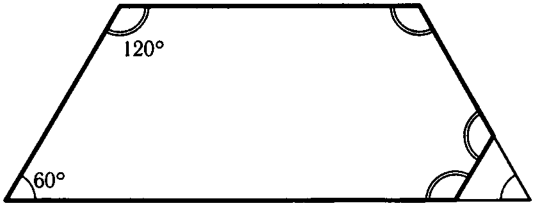


Рис. 4

Или иначе. Рассмотрим правильный пятиугольник с углами 108° и с его помощью построим пятиугольник, все стороны которого соответственно параллельны сторонам правильного пятиугольника, но не равны между собой (рис. 5).

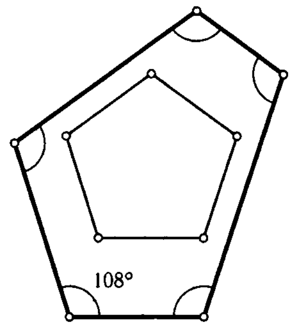


Рис. 5

5. (*А. Мякишев*) Имеются две параллельные прямые p_1 и p_2. Точки A и B лежат на p_1, а C — на p_2. Будем перемещать отрезок BC параллельно самому себе и рассмотрим все треугольники ABC, полученные таким образом. Найдите геометрическое место точек, являющихся в этих треугольниках: а) точками пересечения высот; б) точками пересечения медиан; в) центрами описанных окружностей. (8–10 *класс*)

Решение. Получится прямая с выколотой точкой, которая соответствует случаю, когда треугольник вырождается в отрезок (рис. 6).

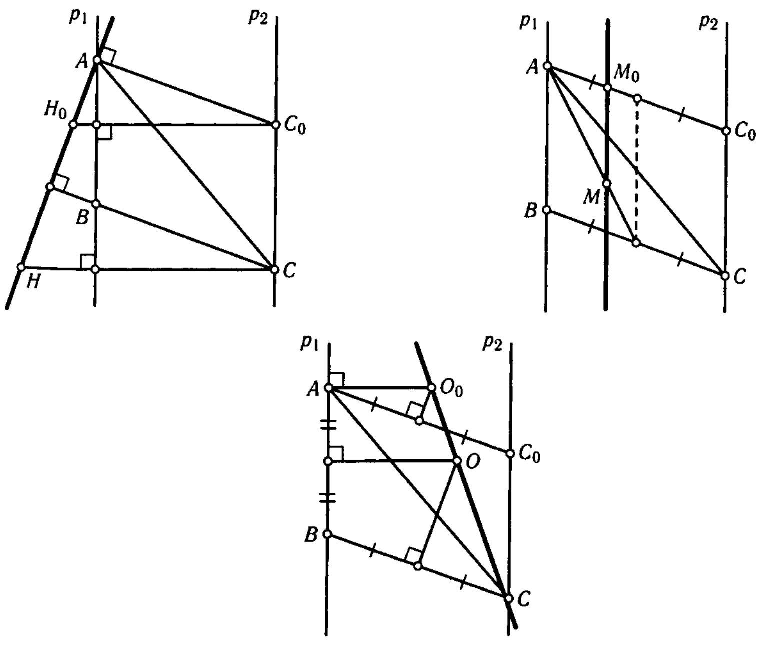


Рис. 6

В первом случае, очевидно, имеем прямую, перпендикулярную BC и проходящую через вершину A. Во втором случае ответом будет прямая, параллельная данным прямым и делящая отрезок с концами на этих прямых в отношении $1:2$, считая от первой прямой. В самом деле, если отрезок BC движется с постоянной скоростью, значит, и его середина движется с постоянной скоростью. Точка пересечения медиан делит отрезок, соединяющий вершину A с серединой BC, в постоянном отношении $2:1$, и, следовательно, эта точка также будет двигаться с постоянной скоростью по некоторой прямой. В предельном случае получаем точку M_0, которая делит отрезок AC_0 (равный и параллельный BC, но проходящий через вершину A) в отношении $1:2$, поскольку она должна делить в отношении $2:1$ отрезок, соединяющий точку A и середину AC_0.

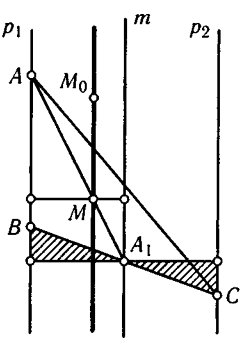


Рис. 7

Можно рассуждать иначе: проведём через точку A_1 (середину BC) перпендикуляр к данным прямым и с концами на этих прямых. Получим пару равных треугольников с общей вершиной в A_1. Отсюда следует, что середины будут лежать на прямой m_1, равноотстоящей от данных прямых. Затем проведём перпендикуляр через M с концами на p_1 и m. Получим пару подобных треугольников с общей вершиной M, причём коэффициент подобия равен 2. Значит, центры тяжести лежат на прямой, параллельной p_1 и m, эта прямая делит общий перпендикуляр в отношении $2:1$ (рис. 7).

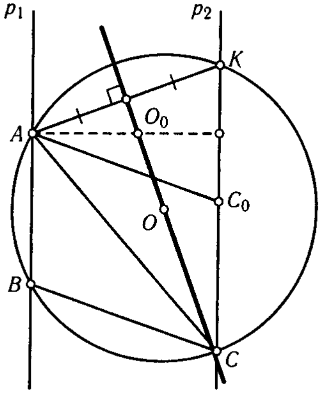


Рис. 8

Наконец, так как серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BC движутся также с постоянными скоростями, то и точка их пересечения (центр описанной окружности) будет перемещаться по прямой. Можно также заметить, что эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AK, симметричному отрезку AC_0 (в который вырождается треугольник при совпадении точек A и B) относительно перпендикуляра из точки A к p_2.

Как известно, если около трапеции можно описать окружность, то она равнобокая. Отсюда сразу следует, что все окружности, описанные около треугольников ABC, будут вторично пересекать прямую p_2 в одной и той же точке K, так что $AK = BC$. Поэтому центры этих окружностей должны быть равноудалены от точек A и K (рис. 8). Эти рассуждения дают нам также ещё один способ доказательства того, что искомое ГМТ есть прямая (с выколотой точкой).

6. (*А. Хачатурян*) Сторону AB треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0 = A$, B_1, $B_2, \ldots, B_n = B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $n+1$ равных частей (точки деления $C_0 = A$, C_1, $C_2, \ldots, C_{n+1} = C$). Закрасили треугольники $C_iB_iC_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена? (10—11 *класс*)

Решение. Покажем, что закрашенная часть составляет ровно половину площади всего треугольника. Для этого из точек $B_1, \ldots, B_n$ опу-

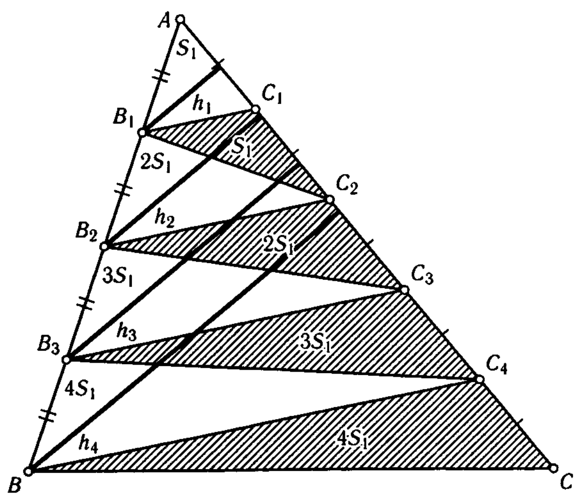


Рис. 9

стим перпендикуляры на сторону AC. Эти перпендикуляры являются высотами треугольников $C_iB_iC_{i+1}$ с одинаковыми основаниями, причём, как следует из соображений подобия, $h_i = ih_1$. Отсюда вытекает, что таким же соотношением будут связаны площади закрашенных треугольников: $S_i = iS_1$. (На рис. 9 изображён случай $n = 4$.)

Опустив затем перпендикуляры из точек $C_1, \ldots, C_n$ на сторону AC и рассуждая аналогично, получим такое же соотношение для площадей незакрашенных треугольников. Осталось заметить, что площадь первого закрашенного треугольника равна площади первого незакрашенного (их основания равны, а высота h_1 общая). Можно было завершить доказательство и по-другому, просто сложив площади заштрихованных треугольников.

Отметим, что равенство площадей соответствующих пар треугольников (закрашенного и незакрашенного) можно получить практически без вычислений, воспользовавшись тем, что прямые B_iC_i параллельны друг другу (по теореме, обратной теореме Фалеса). Тогда $S_{B_{i-1}B_iC_i} = S_{C_{i-1}B_iC_i}$ (у них общее основание B_iC_i, а вершины лежат на прямой, параллельной основанию) и $S_{C_{i-1}B_iC_i} = S_{B_iC_iC_{i+1}}$ (вершина B_i общая, а $C_{i-1}C_i = C_iC_{i+1}$ по условию).

7. (*В. Протасов*) Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC на меньшей. Чему может быть равен $\angle BOC$? (8–9 *класс*)

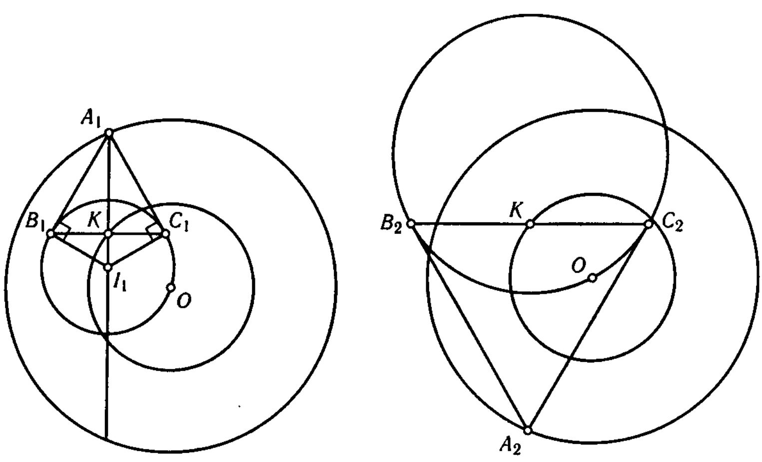


Рис. 10

Решение. Этот угол равен либо 60°, либо 120°.

Первый способ. В данной конструкции окружность, проходящая через вершины B и C правильного треугольника и касающаяся в этих точках его сторон, будет также проходить и через общий центр двух окружностей (рис. 10).

Из этого утверждения следует, что в случае «верхнего» (на рисунке) треугольника

$$\angle B_1OC_1 = \frac{1}{2}\angle B_1I_1C_1 = 60°,$$

так как вписанный угол равен половине центрального. По той же причине для «нижнего» треугольника получим $\angle B_2OC_2 = 120°$.

Для доказательства самого утверждения воспользуемся следующим легко проверяемым свойством правильного треугольника. Пусть I_1 — центр окружности, касающейся сторон AB и AC правильного треугольника ABC в точках B и C соответственно, а K — середина стороны BC. Тогда точка K делит отрезок AI_1 в отношении $3:1$, причём I_1K равен половине радиуса этой окружности (рис. 11).

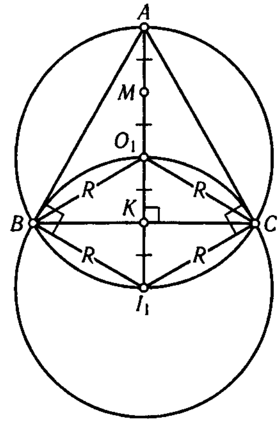


Рис. 11

Теперь докажем основное утверждение (рис. 12).

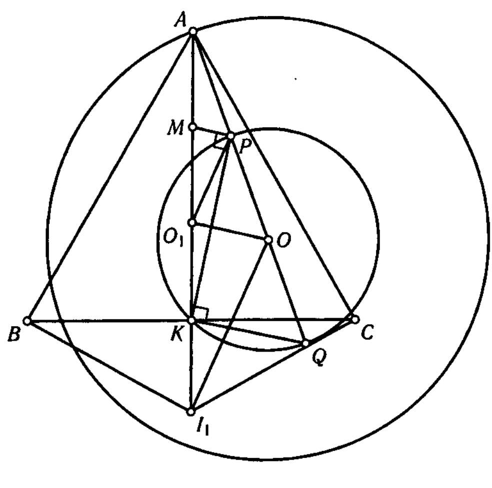


Рис. 12

Проведём прямую AO и отметим точки P и Q её пересечения с окружностью единичного радиуса. Точки M, O_1 и K делят отрезок AI_1 на четыре одинаковые части, каждая из которых равна $R/2$, где R — радиус окружности, касающейся сторон AB и AC в точках B и C. Мы хотим доказать, что $I_1O = R$. Из условия следует, что точки P и O делят отрезок AQ на три равные части, поэтому из теоремы, обратной теореме Фалеса, следует, что отрезки MP и KQ параллельны. Но угол PKQ — прямой как опирающийся на диаметр, поэтому прямым будет и угол MPK.

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому

$$O_1P = O_1M = O_1K = \frac{R}{2}.$$

Теперь осталось только заметить, что отрезок O_1P является средней линией треугольника AI_1O и, значит, равен половине I_1O.

Второй способ. (*Осечкина Мария, г. Пермь, ФМШ №9*) Рассмотрим, например, случай, когда точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC (рис. 13).

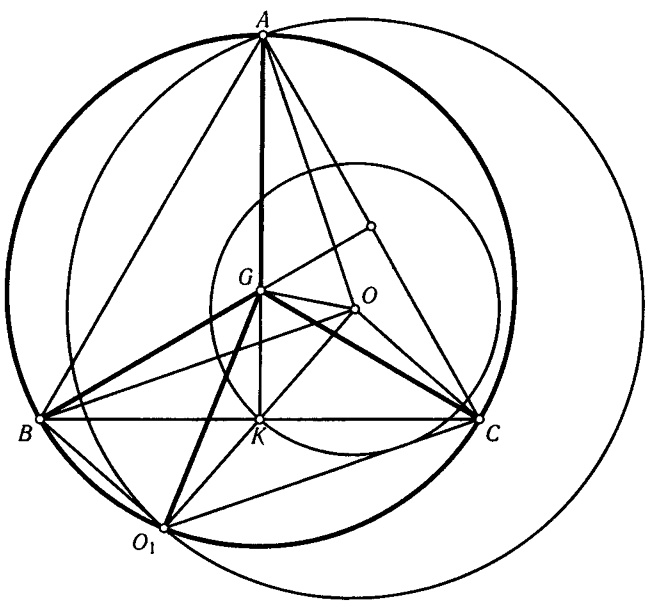


Рис. 13

Пусть K — середина BC, G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Продолжим отрезок OK до пересечения с большей окружностью в точке O_1. По условию $BK = KC$, $OK = KO_1$, поэтому четырёхугольник $BOCO_1$ является параллелограммом. Далее, заметим, что G будет также центроидом (точкой пересечения медиан) и треугольника AOO_1, поскольку AK — медиана этого треугольника и $AG : GK = 2 : 1$. И так как треугольник равнобедренный, то OG является биссектрисой, откуда следует равенство треугольников AGO и O_1GO. Следовательно, $GA = GO_1 = GB = GC$, т. е. точки A, B, C, O_1 лежат на одной окружности, а значит,

$$\angle BO_1C = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ.$$

Аналогично рассматривая и второй случай, получим 60°.

Третий способ. (*Лысов Михаил, г. Москва, Лицей «Вторая школа»*) Это наиболее, пожалуй, элегантное решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. *Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число λ. Тогда геометрическое место таких точек X, что $AX/BX = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q — точки, которые делят отрезок AB в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке PQ как на диаметре.* Она называется окружностью Аполлония (рис. 14).

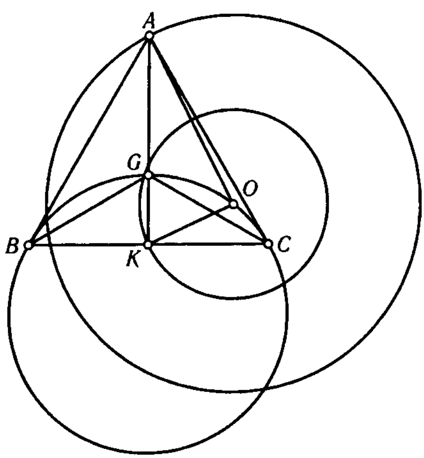


Рис. 14

Поскольку из условия нашей задачи сразу следует, что

$$\frac{AG}{KG} = \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC} = \frac{AO}{KO} = 2,$$

то отсюда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполлония для отрезка AK и $\lambda = 2$. Понятно также, что $\angle BGC = \angle BOC$ (или $180^\circ - \angle BOC$).

8. (*Д. Терешин*) Вокруг выпуклого четырёхугольника $ABCD$ описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом? (Прямоугольник описан около четырёхугольника $ABCD$, если на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырёхугольника.) (8–9 *класс*)

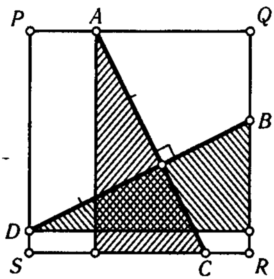


Рис. 15

Решение. Третий прямоугольник также будет квадратом. Доказательство основано на следующем свойстве квадрата. Пусть точки A и C лежат на одной паре противоположных сторон квадрата, а B и D — на другой. Тогда условия $AC \perp BD$ и $AC = BD$ являются равносильными (рис. 15).

Это сразу следует из равенства прямоугольных треугольников, показанных на рисунке. Проведём в нашем четырёхугольнике, вписанном в два квадрата, из точки A прямую, перпендикулярную BD, и отметим

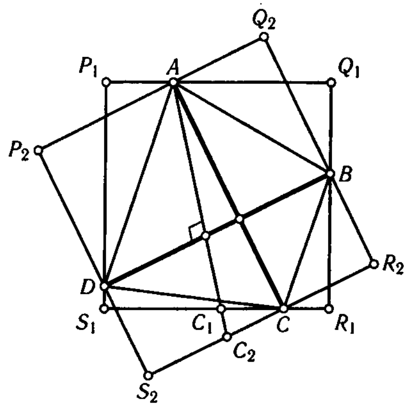


Рис. 16

точки её пересечения с соответствующими сторонами квадрата C_1 и C_2 (рис. 16).

Из указанного выше свойства квадрата вытекает, что $AC_1 = BD$ и $AC_2 = BD$, т. е. $AC_1 = AC_2$ и точки C_1, C_2 должны совпадать. Но у двух сторон квадратов, содержащих эти точки, имеется только одна общая точка — C. Значит, построенный нами перпендикуляр совпадает с AC, и, следовательно, диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны и перпендикулярны. Очевидно, что если четырёхугольник с таким свойством вписан в прямоугольник, то прямоугольник является квадратом.

9. (*А. Мякишев*) Пусть O — центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO. (9 *класс*)

Решение. Нам нужно доказать, что $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO}$. Как известно, если G — точка пересечения медиан некоторого треугольника ABC, то для произвольной точки P выполняется равенство

$$3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

С учётом этого свойства задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть имеется правильный треугольник ABC и произвольная точка P. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, а также три вектора $\overrightarrow{n_a}(P)$, $\overrightarrow{n_b}(P)$ и $\overrightarrow{n_c}(P)$, начало каждого из которых расположено в точке P, а ко-

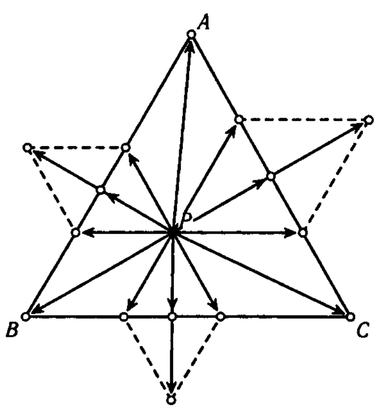


Рис. 17

нец — на основании перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону треугольника. Тогда

$$2(\overrightarrow{n_a}(P)+\overrightarrow{n_b}(P)+\overrightarrow{n_c}(P))=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}.$$

Для доказательства рассмотрим ещё шесть векторов, каждый из которых лежит на прямой, параллельной стороне треугольника и проходящей через точку P (рис. 17).

Начало каждого такого вектора расположено в точке P, а конец — на одной из сторон треугольника. (На рисунке изображён случай, когда точка P лежит внутри треугольника.) Через эти векторы легко выразить как векторы, соединяющие P с вершинами, так и векторы с концами в основаниях перпендикуляров, поскольку параллельные линии разбивают треугольник на правильные треугольники и параллелограммы. Как видим, наше утверждение доказано. Легко также убедиться в том, что эти же рассуждения проходят и в случае, когда точка P расположена вне треугольника ABC.

10. (*Т. Емельянова*) Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковы. (8–9 *класс*)

Решение. Пусть $AB \neq AC$. Проведём отрезок $B'C'$ так, чтобы $\angle AC'B' = \angle ACB$ (рис. 18).

Ясно, что треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, при этом $B'C'$ не параллелен BC. Отметим середину отрезка $B'C'$ — точку M — и достроим треугольник $AB'C'$ до параллелограмма $AB'A'C'$. Далее найдём точку A_1 пересечения AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Отрезки A_1C_1, B_1A_1 и B_1C_1 осуществляют искомое разрезание.

Замечание. В сущности, приведённое решение использует так называемую симедиану треугольника. Симедианой называется прямая, симметричная медиане

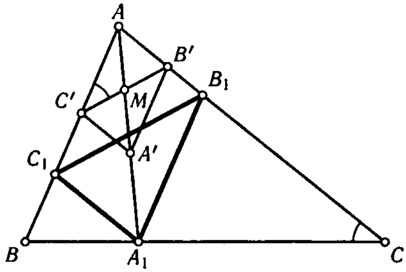


Рис. 18

относительно биссектрисы угла треугольника, через вершину которого проходит медиана. Назовём параллелью (к стороне BC треугольника) любой отрезок PQ с концами на прямых AB и AC, параллельный BC. Понятно, что $\angle APQ = \angle ABC$ и $\angle AQP = \angle ACB$ (рис. 19). Назовём антипараллелью (к стороне BC треугольника) любой такой отрезок RT с концами на прямых AB и AC, что $\angle ART = \angle ACB$ и $\angle ATR = \angle ABC$. (Как несложно проверить, антипараллелью, в частности, является отрезок, образованный основаниями соответствующих высот треугольника.) Очевидно, что отрезок является параллелью тогда и только тогда, когда соответствующая медиана делит его пополам. Поскольку симметрия относительно прямой сохраняет углы и длины отрезков, из этого утверждения вытекает следующая лемма.

Лемма. *Отрезок является антипараллелью тогда и только тогда, когда соответствующая симедиана делит его пополам* (*рис.* 19).

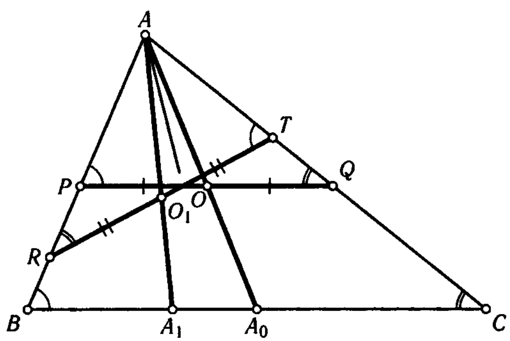


Рис. 19

Теперь осуществим искомое разрезание (рис. 20).

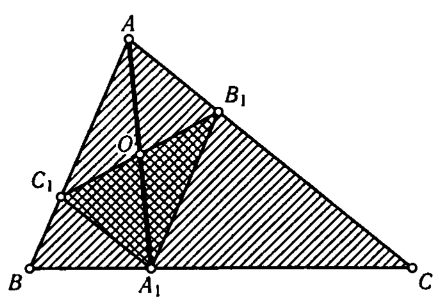


Рис. 20

Допустим, что $AB \neq AC$. Пусть AA_1 — симедиана треугольника, A_1C_1 и A_1B_1 — параллели к сторонам AC и AB соответственно. Поскольку $A_1C_1AB_1$ — параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, т. е. середина C_1B_1 лежит на симедиане, и потому, согласно лемме, отрезок C_1B_1 является антипараллелью. Легко проверить, что треугольники $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, C_1BA_1 и B_1A_1C подобны треугольнику ABC и не все одинаковы. (Для неравнобедренного треугольника основание симедианы A_1 не совпадает с серединой BC. Можно даже показать, что $BA_1/CA_1 = AB^2/AC^2$, — ещё одно интересное свойство симедианы.)

11. (*Л. Емельянов*) Квадрат разрезали на n прямоугольников $a_i \times b_i$, $i = 1, \ldots, n$. При каком наименьшем n в наборе $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ все числа могут оказаться различными? (8—10 *класс*)

Решение. Наименьшее значение $n = 5$. Покажем сначала, что никакой прямоугольник (в частности, квадрат) нельзя разрезать ни на два, ни на три, ни на четыре прямоугольника с различными сторонами. Очевидно, что если прямоугольник разрезан на два прямоугольника, то у них есть общая сторона. Пусть, далее, прямоугольник разрезан на три прямоугольника. Тогда один из них содержит две вершины исходного треугольника (так как три прямоугольника должны накрыть все четыре вершины исходного), и мы свели задачу к предыдущему случаю (оставшаяся часть — прямоугольник, который необходимо разбить на два).

Наконец, допустим, что прямоугольник разрезан на четыре других. Имеем две возможности: либо один из прямоугольников разбиения содержит две вершины исходного (и мы сводим задачу к разрезанию прямоугольника на три части), либо каждый из прямоугольников разбиения содержит по одной вершине исходного. В последнем случае рассмотрим два прямоугольника, содержащие соседние вершины (рис. 21).

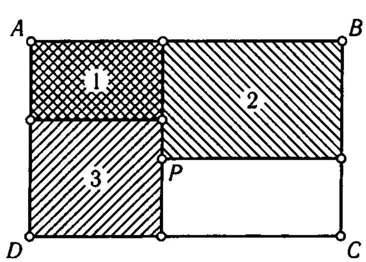


Рис. 21

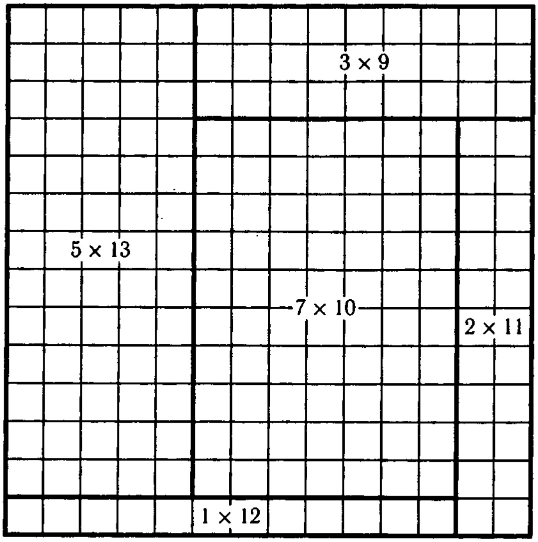


Рис. 22

Они должны соприкасаться (так как очевидно, что если бы был «зазор» между ними, то его нельзя было бы покрыть двумя прямоугольниками, содержащими остальные две вершины исходного). Рассмотрим тот прямоугольник из оставшихся, который содержит точку P. Он не может содержать вершину C, следовательно, он содержит вершину D и, значит, имеет общую сторону с первым прямоугольником.

Предъявим теперь одно из подходящих разрезаний квадрата на пять прямоугольников (рис. 22).

12. (*В. Смирнов*) Постройте четырёхугольник по заданным сторонам a, b, c и d и расстоянию l между серединами его диагоналей. (8—10 *класс*)

Решение. Пусть $ABCD$ — искомый четырёхугольник, P, Q, R, S, X, Y — середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC, BD соответственно. Так как QX, SY — средние линии треугольников ABC и ABD, то

$$QX = YS = \frac{a}{2}.$$

Аналогично

$$QY = XS = \frac{c}{2}.$$

Следовательно, зафиксировав точки X и Y и построив треугольники XYQ и XYS, мы найдём точки Q и S. Аналогично находятся точки P и R.

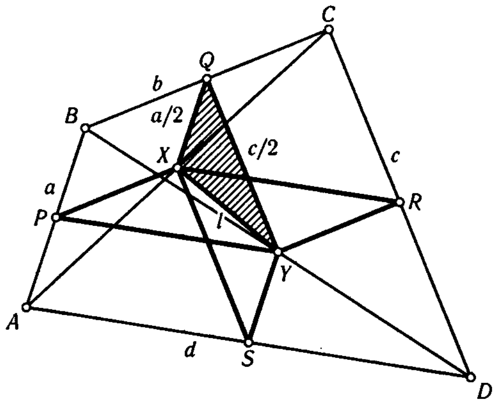


Рис. 23

Проведя теперь через P, Q, R, S прямые, параллельные QX, PX, QY, PY соответственно, получим искомый четырёхугольник (рис. 23).

13. (*А. Заславский*) Дан треугольник ABC и две прямые l_1, l_2. Через произвольную точку D на стороне AB проводится прямая, параллельная l_1, пересекающая AC в точке E, и прямая, параллельная l_2, пересекающая BC в точке F. Построить точку D, для которой отрезок EF имеет наименьшую длину. (9 *класс*)

Решение. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров, восставленных к AC в точке E и к BC в точке F. Когда D двигается по AB, стороны четырёхугольника $DEPF$ сохраняют направления и, так как три вершины четырёхугольника двигаются по прямым, четвёртая также движется по прямой. Следовательно, середина отрезка CP, являющаяся центром описанной окружности треугольника CEF, также двигается по прямой (рис. 24). Значит, все эти окружности имеют общую хорду, т. е. помимо C ещё одну общую точку Q. Поскольку хорда EF стягивает постоянный $\angle C$, то её длина будет минимальной при минимальном радиусе описанной около CEF окружности. Однако среди всех окружностей, содержащих общую хорду, минимальный радиус, очевидно, будет иметь та из них, для которой эта хорда CQ является диаметром.

Отсюда вытекает, например, следующий способ построения точки D. Проведём через A прямую, параллельную l_2, и найдём точку U её пересечения с BC. Через B проведём прямую, параллельную l_1, и найдём точку V её пересечения с AC. Пусть Q — вторая точка пересечения окружностей, описанных около ACU и BCV, E — вторая точка пересече-

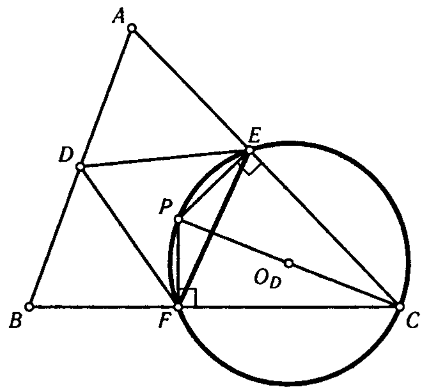


Рис. 24

ния прямой AC и окружности с диаметром CQ. Тогда прямая, проходящая через E и параллельная l_1, пересекает AB в искомой точке.

14. (*Л. Емельянов*) Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP со сторонами BC, CA и AB соответственно. Упорядочим площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, обозначив меньшую через S_1, среднюю — S_2, а большую — S_3. Докажите, что

$$\sqrt{S_1S_2} \leqslant S \leqslant \sqrt{S_2S_3},$$

где S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$. (10–11 *класс*)

Решение.

Первый способ. Назовём треугольник $A_1B_1C_1$ чевианным треугольником точки P. Оказывается, любой треугольник ABC можно подходящим аффинным преобразованием перевести в некоторый остроугольный треугольник $A'B'C'$ так, что точка P перейдёт в его ортоцентр, а чевианный треугольник P в ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями высот, рис. 25).

Действительно, возьмём произвольный отрезок $B'C'$ и отметим на нём такую точку A'_1, что

$$\frac{B'A'_1}{A'_1C'} = \frac{BA_1}{A_1C},$$

а затем восставим в этой точке перпендикуляр к $B'C'$. На этом перпендикуляре построим такую точку A_0, что

$$\angle B'A_0C' = \frac{\pi}{2}$$

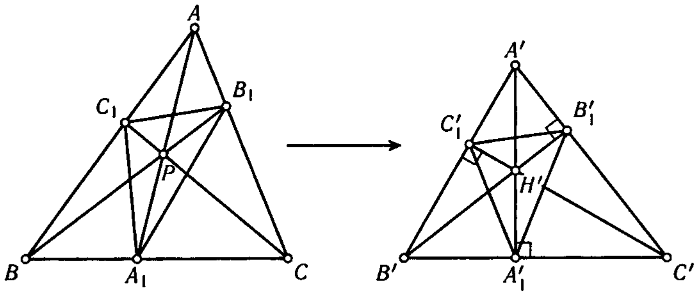


Рис. 25

(точка пересечения перпендикуляра с окружностью, построенной на $B'C'$ как на диаметре, рис. 26).

Далее, рассмотрим точку A'' на этом перпендикуляре и опустим высоту $B'B''_1$ на $A''C'$. Если A'' расположена близко к точке A_0, то отношение $C'B''_1/B''_1A''$ очень велико, а если A_0 удаляется по перпендикуляру на бесконечность, то это отношение стремится к нулю. Из соображений непрерывности следует, что найдётся такая точка A' на перпендикуляре, что

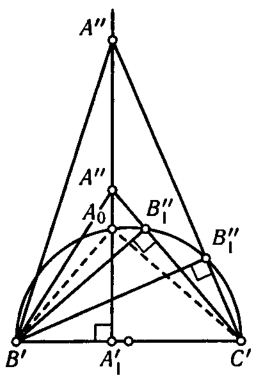


Рис. 26

$$\frac{C'B''_1}{B''_1A'} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Соответственное равенство третьей пары отношений гарантировано теоремой Чевы. Как известно, для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, отображающее первый треугольник на второй. Поскольку аффинное преобразование прямые переводит в прямые, а также сохраняет отношение длин отрезков, мы нашли аффинное преобразование, переводящее чевианный треугольник в некоторый ортотреугольник. Кроме того, аффинное преобразование сохраняет и отношение площадей. Сказанное означает, что нам достаточно доказать утверждение задачи для остроугольного треугольника и его ортоцентра. Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3. Эти треугольники подобны исходному с коэффициентами $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ соответственно, поэтому, поскольку все углы острые, косинусы положительны и убывают. Из последней цепочки неравенств следует, что

$$\angle C \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \angle A.$$

Докажем теперь, что $\sqrt{S_1S_2} \leqslant S$.

После возведения в квадрат и деления числителя и знаменателя на S^2 получим неравенство

$$\frac{\cos^2 A \cos^2 B}{(1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)^2} \leqslant 1.$$

Но, как нетрудно проверить, в любом треугольнике имеет место равенство

$$1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cos B \cos C,$$

поэтому наше неравенство равносильно тому, что $1/4 \leqslant \cos^2 C$, т. е. $\angle C \leqslant \pi/3$. Аналогично доказывается, что $\sqrt{S_2S_3} \geqslant S$.

Второй способ. Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3 (рис. 27).

Пусть точка P имеет (относительно треугольника ABC) нормированные барицентрические координаты (p, q, r), т. е. $p+q+r=1$. Поскольку P расположена внутри треугольника, то p, q, r — положительные величины. Выразим через них S_1/S. Обозначим через A_2 точку пересечения B_1C_1 и AA_1. Поскольку треугольники AB_1C_1 и $A_1B_1C_1$ имеют общее основание, то, очевидно,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AA_2}{A_1A_2}.$$

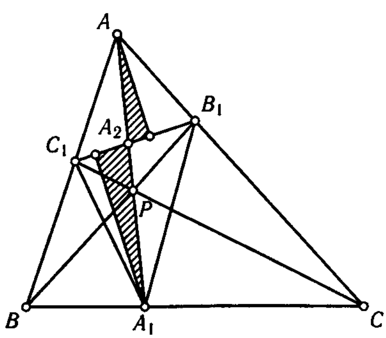


Рис. 27

Далее, понятно, что A_2 имеет координаты $(2p : q : r)$ (центр масс системы $2pA$ и $(q+r)A_1$ расположен на прямой AA_1, а системы $(p+q)C_1$ и $(p+r)B_1$ — на прямой B_1C_1), откуда по правилу рычага имеем

$$\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{q+r}{2p} = \frac{1-p}{2p}.$$

Совершенно аналогично

$$\frac{S_2}{S} = \frac{1-q}{2q} \quad \text{и} \quad \frac{S_3}{S} = \frac{1-r}{2r}.$$

Поскольку $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3$, отсюда следует, что $p \geqslant q \geqslant r$. С учётом равенства $p+q+r=1$ имеем также $p \geqslant 1/3 \geqslant r$. Докажем теперь, что $\sqrt{S_1S_2} \leqslant S$.

Подставляя полученные выше значения отношений, получаем

$$(1-p)(1-q) \leqslant 4pq,$$

т.е. $r \leqslant 3pq$. Но

$$\frac{pq}{r} \geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{q}{r} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Точно так же доказывается, что $\sqrt{S_2S_3} \geqslant S$ (с использованием неравенства $r \leqslant 1/3$).

Замечание. Идеи, на которых основывалось доказательство, можно реализовать, не используя геометрию масс. Например, ввести отношения

$$\alpha = \frac{BA_1}{CA_1}, \quad \beta = \frac{CB_1}{AB_1}, \quad \gamma = \frac{AC_1}{BC_1}$$

и с помощью теоремы Фалеса (проводя соответствующие параллели) выразить через них отношения площадей.

Третий способ. (*Авксентьев Евгений, г. Ростов-на-Дону, МОУ Гимназия* № 5) Следующее симпатичное решение основано на так называемой теореме Мёбиуса. Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA, AB, а площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C и $A_1B_1C_1$ — S_1, S_2, S_3 и S соответственно. Тогда

$$S^3 + (S_1+S_2+S_3)S^2 - 4S_1S_2S_3 = 0.$$

(Это несложно доказать, используя, например, найденные нами отношения площадей в предыдущих рассуждениях.) Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = x^3 + (S_1+S_2+S_3)x^2 - 4S_1S_2S_3.$$

По теореме Мёбиуса $\Phi(S)=0$. Кроме того, очевидно, что $\Phi(x)$ возрастает на $(0,\infty)$ (как сумма двух возрастающих функций). Поэтому нам достаточно показать, что

$$\Phi(\sqrt{S_1S_2})\leqslant 0\leqslant \Phi(\sqrt{S_2S_3}).$$

Но

$$\Phi(\sqrt{S_1S_2})=S_1S_2(\sqrt{S_1S_2}+S_1+S_2-3S_3),$$

а

$$\sqrt{S_1S_2}+S_1+S_2-3S_3\leqslant\frac{3}{2}(S_1+S_2)-3S_3\leqslant 0$$

(среднее геометрическое двух положительных величин не превосходит их среднего арифметического). Второе неравенство доказывается аналогично.

15. (*А. Заславский*) Дана окружность с центром в начале координат. Докажите, что найдётся окружность меньшего радиуса, на которой лежит не меньше точек с целыми координатами. (11 *класс*)

Решение. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в начале координат, коэффициентом $1/\sqrt{2}$ и углом поворота $\pi/4$. Если квадрат радиуса данной окружности — чётное число, то все её целые точки переходят в целые, и мы получаем искомую окружность. Если квадрат радиуса — нечётное число, то все целые точки переходят в центры единичных квадратов с вершинами в целых точках и искомая окружность получается после переноса на вектор $(1/2, 1/2)$. Это достаточно очевидно из наглядных соображений — на рис. 28 изображено действие на целочисленную решётку сначала сжатием, а потом поворотом.

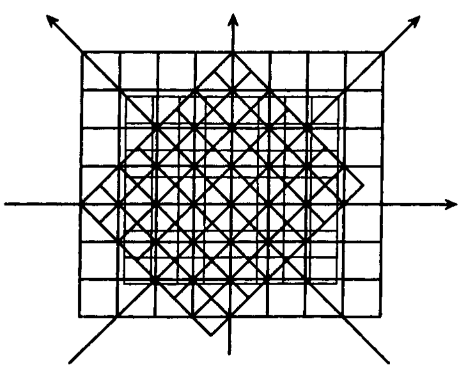


Рис. 28

Чисто формально, точка с координатами (x, y) под действием указанных поворота и растяжения переходит в точку с координатами

$$(x', y') = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right).$$

Если квадрат радиуса — чётное число, то x и y одной чётности, поэтому x', y' — целые и

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

Если же квадрат радиуса — число нечётное, то чётность x и y различна, поэтому после сдвига на вектор $(1/2, 1/2)$ получим целую точку (x'', y'') и

$$\left(x'' - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y'' - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2}.$$

16. (*А. Заславский, Б. Френкин*) В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стёрли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника. (8—9 *класс*)

Решение. Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, — равнобедренный, с углами при основании, равными $\arccos(1/4)$. Пусть ABC — исходный треугольник, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны (с коэффициентом $1/2$) относительно общего центра тяжести M, центр O описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$, точка M лежит на отрезке OH (H — ортоцентр треугольника ABC) и $HM = 2MO$ (прямая, содержащая эти три центра, называется прямой Эйлера треугольника ABC).

Поэтому если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на одной прямой с тремя остальными точками, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC. Отметим, что эта прямая проходит не более чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, что точки A и B не лежат на ней. Так как

$$\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C,$$

то BI является биссектрисой угла HBO. Значит, точка I лежит на отрезке OH, причём $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно).

По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, получим, что $AO = 2AH$. Таким образом,

$$AH = BH = \frac{R}{2},$$

где R — радиус описанной около ABC окружности. Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в начале решения, следует также, что $AH = 2OA_1$ (и эти отрезки параллельны). Понятно также, что $OA_1 = R\cos A$. Поэтому

$$AH = 2R\cos A \quad \text{и} \quad \cos A = \frac{1}{4}.$$

Точно так же доказывается, что $\cos B = 1/4$.

17. (*А. Мякишев*) В треугольник ABC вписана окружность и отмечены её центр I и точки касания P, Q, R со сторонами BC, CA и AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K, в которой окружность, проходящая через вершины B и C, касается (внутренним образом) вписанной окружности. (11 *класс*)

Решение. Согласно известной теореме Штейнера, если на плоскости фиксирована окружность с отмеченным центром, то одной линейкой можно построить всё то же самое, что и линейкой с циркулем. Но применение стандартных методов, не учитывающих особенностей заданной в условии конструкции, требует изрядного количества шагов. Естественно, требовалось при построении ограничиться минимальным количеством линий. Оказывается, можно обойтись всего лишь четырьмя! Сразу заметим, что если $AB = AC$, то построение очевидно (K совпадает с точкой, диаметрально противоположной точке P), и мы будем рассматривать случай, когда $AB \neq AC$.

Построение.

1. Проведём прямую BC.
2. Проведём прямую QR и отметим точку T пересечения этой прямой с прямой BC.
3. Построим точку P_d, диаметрально противоположную точке P.
4. Проведём прямую P_dT и отметим точку K — вторую точку пересечения этой прямой с вписанной окружностью. Точка K и есть искомая (рис. 29).

Доказательство. Понятно, что точка T будет делить отрезок BC в том же отношении, что и точка P (по теоремам Чевы и Менелая). Пусть интересующая нас окружность построена. Тогда KP — биссектриса угла BKC (по известной лемме Архимеда: пусть прямая пересекает данную

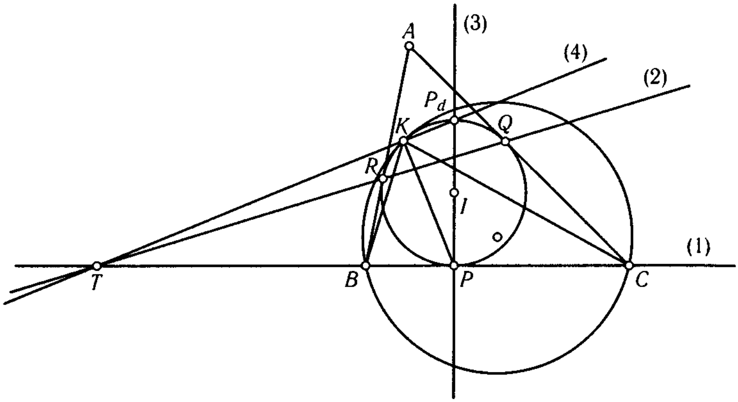


Рис. 29

окружность в точках B и C; рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке K, а прямой BC в точке P; тогда прямая KP проходит через середину одной из двух дуг BC)[1].

По свойству биссектрисы

$$\frac{BP}{CP} = \frac{KB}{KC} = \lambda \neq 1.$$

Поэтому точка K лежит на окружности Аполлония (см. решение задачи 7, третий способ) для отрезка BC с отношением λ, построенной на PT как на диаметре, т. е. $\angle TKP = 90°$, или, что то же, $\angle PKP_d = 90°$. Из этих рассуждений следует обоснование нашего построения.

18. (*В. Протасов*) На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O — центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки O плоскости обозначим через O_i точку, симметричную точке O относительно прямой l_i.

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2, O_2O_3 и M_2M_3, O_3O_1 и M_3M_1, пересекаются в одной точке. (10—11 *класс*)

б) Где может лежать эта точка пересечения? (10—11 *класс*)

Решение.

Первый способ. Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера. (Напомним, что окружностью Эйлера треугольника ABC называют окружность, описанную около его сере-

[1] См.: Вторая олимпиада, заочный тур, задача 6, лемма.

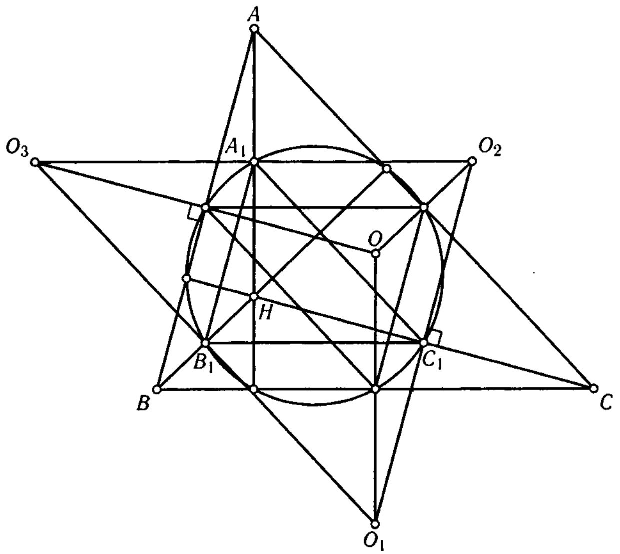


Рис. 30

динного треугольника, т. е. проходящую через середины его сторон. На этой окружности также лежат основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами.)

Пусть ABC — треугольник, образованный прямыми l_i, H — его ортоцентр. Тогда середины O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 совпадают с серединами отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC. Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально-симметричен треугольнику ABC. Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2, параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB, т. е. совпадает с высотой треугольника ABC, а H является центром гомотетии ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 30).

Пусть, далее, M — произвольная точка, D — середина M_1M_2. Тогда

$$\overrightarrow{DC_1} = \frac{\overrightarrow{DO_1} + \overrightarrow{DO_2}}{2}$$

и, так как $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на $2\angle C$, $\overrightarrow{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный $\angle C$.

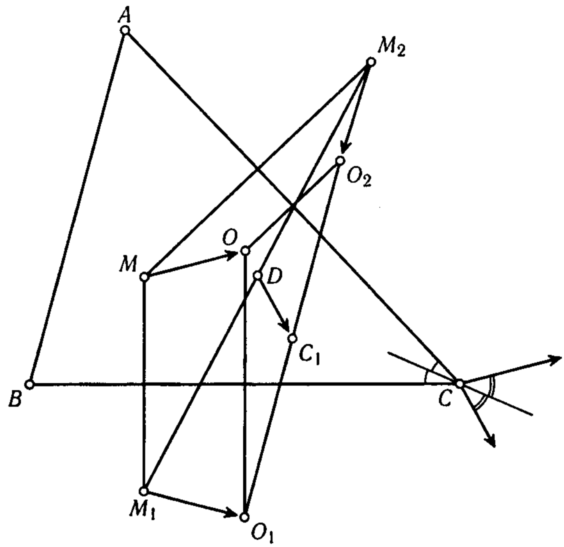


Рис. 31

Кроме того, $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ переходят в $\overrightarrow{MO}$ при симметрии относительно CB и CA соответственно, поэтому $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{MO}$ образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$, см. рис. 31).

Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM. В заключение воспользуемся следующей классической теоремой планиметрии.

Теорема. *Тройка прямых, проходящих через вершины треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны.* (Несложное доказательство использует простой подсчёт углов.).

Согласно этой теореме тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности, т. е. на окружности Эйлера исходного треугольника.

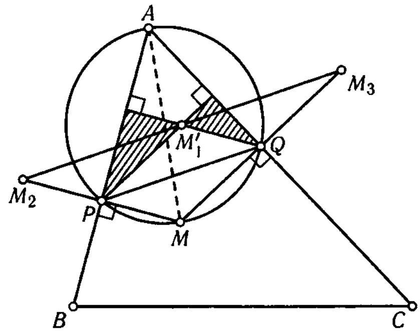


Рис. 32

Второй способ. (*Авксентьев Евгений, г. Ростов-на-Дону, МОУ гимназия* №5) Итак, ABC — треугольник, образованный прямыми l_i, H — его ортоцентр и A', B', C' — основания высот, опущенных на стороны BC, CA, AB соответственно. Дадим теперь следующее определение. Пусть имеются две подобные фигуры Ψ_1 и Ψ_2 и некоторое преобразование подобия $\mathcal{H}$, переводящее одну фигуру в другую. Скажем, что две фигуры Φ_1 и Φ_2 одинаково расположены относительно Ψ_1 и Ψ_2, если преобразование $\mathcal{H}$ также переводит Φ_1 в Φ_2. Теперь докажем, что точки M'_1 (середина M_3M_2) и M одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$ и ABC (как известно, эти треугольники подобны с коэффициентом $1/|\cos A|$, причём подобие это можно представить как композицию осевой симметрии относительно биссектрисы угла A и гомотетии с центром в A — см. замечание к решению задачи 10). Для этого достаточно показать, что

$$AM = \frac{AM'_1}{|\cos A|}$$

(отношение длин соответствующих отрезков равно коэффициенту подобия) и что отношение расстояний от точки M'_1 до AB и AC обратно пропорционально отношению расстояний от M до тех же сторон (т. е. прямая AM'_1 при симметрии относительно биссектрисы угла A переходит в прямую AM, рис. 32).

Пусть P, Q — проекции M на AB и AC. Так как M'_1Q — средняя линия треугольника M_2MM_3, то она перпендикулярна AB. Из тех же соображений M'_1P перпендикулярна AC, поэтому M'_1 — ортоцентр треугольника APQ, а значит,

$$AM'_1 = 2\rho\cos A,$$

где ρ — радиус окружности, описанной около APQ. Очевидно, что

$$\rho = \frac{AM'_1}{2}.$$

Равенство же обратных отношений вытекает из подобия заштрихованных на рисунке треугольников. Точно так же доказывается, что M'_2 и M одинаково расположены относительно $A'BC'$ и ABC, а M'_3 и M — относительно $A'B'C$ и ABC. Теперь, если в качестве M мы выберем точку O — центр описанной около ABC окружности, то, очевидно, точки O'_1, O'_2, O'_3 будут серединами отрезков, соединяющих ортоцентр H треугольника ABC с его вершинами. (Поскольку прямые, соединяющие вершину треугольника с H и O, симметричны относительно соответствующей биссектрисы — факт, с которым мы уже сталкивались при решении задачи 16, — и потому, например, точка O'_1 лежит на прямой AH. Кроме того, $AO = R$ и $AH = 2R\cos A$, значит, $AO'_1 = AH/2$ и т. д.) Из доказанной нами одинаковой расположенности точек следует, что прямые $O'_1M'_1$, $O'_2M'_2$ и $O'_3M'_3$ одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ (рис. 33).

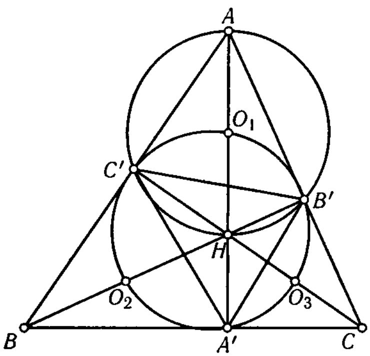


Рис. 33

Кроме того, понятно (ведь при подобии треугольников соответственные элементы переходят в соответственные и, значит, центры описанных окружностей переходят друг в друга), что и прямые O'_1A', O'_2B' и O'_3C' одинаково расположены относительно тех же треугольников, причём все эти точки находятся на одной окружности — окружности Эйлера треугольника ABC. Наконец, отсюда заключаем, что углы между парами $O'_1M'_1$ и O'_1A', $O'_2M'_2$ и O'_2B', $O'_3M'_3$ и O'_3C' одинаковы.

Таким образом, мы показали, что прямые $O'_1M'_1$, $O'_2M'_2$ и $O'_3M'_3$ пересекаются в одной точке, расположенной на окружности Эйлера исходного треугольника.

19. (*А. Тарасов*) Как известно, Луна вращается вокруг Земли. Будем считать, что Земля и Луна — это точки, а Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом один оборот в месяц. Летающая тарелка находится в плоскости лунной орбиты. Она может перемещаться прыжками через Луну и Землю — из старого места (точки A) она моментально

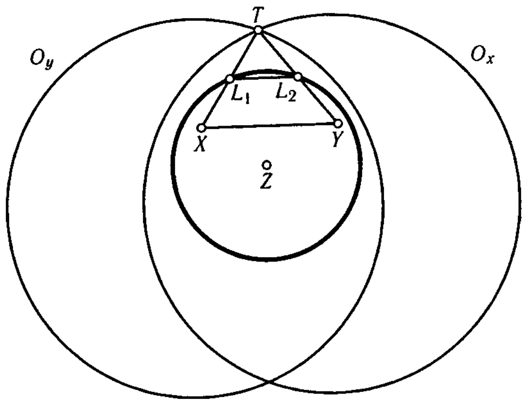


Рис. 34

появляется в новом (в точке A') так, что в середине отрезка AA' находится или Луна, или Земля. Между прыжками летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве.

а) Определите, какое минимальное количество прыжков потребуется летающей тарелке, чтобы допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты. (8–11 *класс*)

б) Докажите, что летающая тарелка, используя неограниченное количество прыжков, может допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты за любой промежуток времени, например за секунду. (8–11 *класс*)

Решение.

а) Из любой точки внутри лунной орбиты можно допрыгнуть до любой другой точки внутри лунной орбиты за два прыжка. Для этого оба раза надо прыгнуть относительно Луны: сначала в момент, когда Луна находится в точке L_1, а второй раз — когда Луна находится в точке L_2. После двух прыжков летающая тарелка переместится на вектор $2\overrightarrow{L_1L_2}$.

Для любых двух точек внутри орбиты X и Y можно найти такую хорду L_1L_2, что $\overrightarrow{XY} = 2\overrightarrow{L_1L_2}$. Эту хорду можно, например, построить, проведя диаметр, параллельный XY, и отложив на нём отрезок длиной $XY/2$, середина которого совпадает с центром окружности Z, а затем из концов этого отрезка провести перпендикуляры, которые и отсекут искомую хорду.

А можно рассмотреть гомотетии с центрами в точках X и Y и коэффициентом 2. Образы лунной орбиты при этом должны пересечься, поскольку если радиус лунной орбиты R и центры образов O_x, O_y, то (рис. 34)

$$O_xO_y < XY + 2(XZ + YZ) < 4R.$$

б) Пусть начальное положение Луны — L_0, конечное — L_1. Будем рассматривать пару прыжков сначала относительно Земли, а потом относительно Луны как двойной прыжок. При этом тарелка перемещается на вектор $2\overrightarrow{ZL}$, конец этого вектора — точка T — будет лежать на дуге t_0t_1 окружности с центром в Z и радиусом, вдвое большим, чем радиус орбиты Луны. Будем такие вектора в дальнейшем обозначать просто $\overrightarrow{T}$. Мы прыгаем мгновенно, значит, в любой момент времени мы можем прыгнуть на целое число прыжков $k\overrightarrow{T}$ (чтобы прыгнуть на вектор $-\overrightarrow{T}$, сначала надо прыгнуть относительно Луны, а потом относительно Земли). Теперь, чтобы из точки X попасть в точку Y, надо представить вектор $\overrightarrow{XY}$ как конечную сумму векторов, состоящих из слагаемых вида $k_i\overrightarrow{T_i}$, $k_i \in Z$, а T_i — некоторый набор точек на дуге t_0t_1, расположенных последовательно друг за другом (рис. 35).

Сначала представим $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ так, чтобы оба этих вектора были бы перпендикулярны некоторым радиусам нашего сектора. Это можно сделать, положив $\overrightarrow{v_1} = \lambda(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_0})$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{v_1}$. Поскольку $\overrightarrow{v_1}$ перпендикулярен «серединному» радиусу при всех значениях λ и при

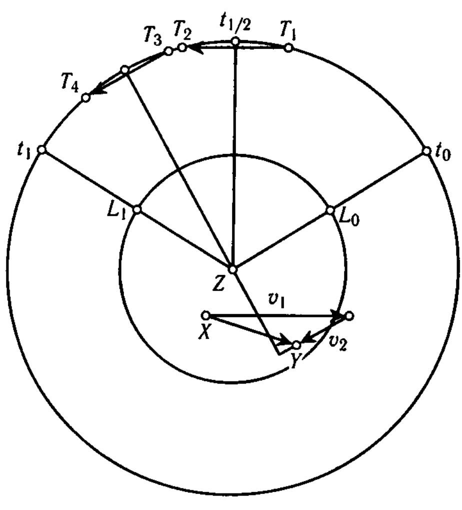


Рис. 35

увеличении λ по модулю $\overrightarrow{v_2}$ стремится к $-\overrightarrow{v_1}$, то $\overrightarrow{v_2}$ при достаточно большом λ также будет перпендикулярен некоторому радиусу. Очевидно, что найдутся достаточно большие по модулю целые m_1 и m_2 и некоторые точки на дуге T_1, T_2, T_3, T_4, расположенные последовательно и такие, что $\overrightarrow{v_1} = m_1(\overrightarrow{T_2} - \overrightarrow{T_1})$ и $\overrightarrow{v_2} = m_2(\overrightarrow{T_3} - \overrightarrow{T_4})$. Искомое представление получено.

20. (*А. Заславский*) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, A', B', C', D' — центры сфер, описанных около тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что сфера, описанная около $ABCD$, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$. (8–11 *класс*)

Решение. Пусть R, r — радиусы описанной и вписанной сфер $ABCD$, O — центр описанной сферы $ABCD$, L — центр описанной окружности треугольника ABC, H — проекция I на плоскость ABC. Из условия следует, что O и D' лежат на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через L, поэтому прямые OD' и IH параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около $IABC$), $OA = R$, $IH = r$.

Дважды применим теорему косинусов — к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O \cos\angle AD'O,$$
$$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O \cos\angle ID'O.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$R^2 - OI^2 = 2D'O \cdot (D'I \cos\angle ID'O - D'A \cos\angle AD'O).$$

Следовательно,

$$D'O = \frac{R^2 - OI^2}{2r}.$$

Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от O на такое же расстояние. Таким образом, сферы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ концентричны (т. е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ — радиусу сферы, описанной около $A'B'C'D'$. Докажем, что $\rho > R$. Для этого проведём плоскость DOI. Она пересекает описанную и вписанную сферы по окружностям с центрами O, I и радиусами R, r, а тетраэдр — по некоторому треугольнику. Вершина D этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности.

Поэтому если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающиеся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1. Будем теперь «раздувать» меньшую окружность, сохраняя центр и увеличивая радиус. Из соображений непрерывности следует, что наступит момент, когда «раздутая» окружность (некоторого радиуса r') будет вписана в треугольник $DX'Y'$, образованный парой касательных с вершиной в D. Этот же треугольник будет вписан в большую окружность, поэтому для него выполняется классическое соотношение, выражающее расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей через их радиусы (так называемая формула Эйлера):

$$OI' = R^2 - 2Rr'.$$

Следовательно,

$$r' = \frac{R^2 - OI^2}{2R}.$$

Понятно также, что $r' > r$. Задача решена.

21. (*Н. Долбилин*) Планета «Тетраинкогнито», покрытая «океаном», имеет форму правильного тетраэдра с ребром 900 км. Какую площадь океана накроет цунами через 2 часа после тетратрясения с эпицентром в а) центре грани, б) середине ребра, если скорость распространения цунами 300 км/час? (10–11 *класс*)

Решение.

а) Рассмотрим развёртку в виде правильного треугольника и докажем, что кратчайший путь из его центра в любую точку будет на этой

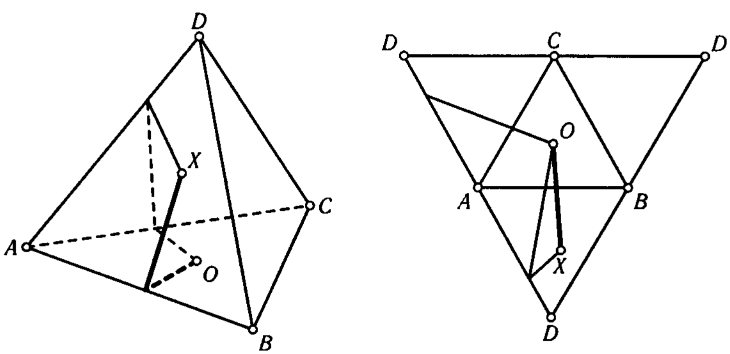


Рис. 36

развёртке отрезком. Пусть O — центр грани ABC, X — точка на грани ABD и некоторый путь из O в X пересекает сначала ребро AC. Если продолжить этот путь на развёртке, мы попадём в некоторую точку на ребре AD. Но в эту точку ведёт и симметричный путь через ребро AB, через которое в X можно попасть напрямую (рис. 36).

Поэтому площадь, которую накроет цунами, есть разность между площадью круга радиусом 600 км и утроенной площадью сегмента (рис. 37).

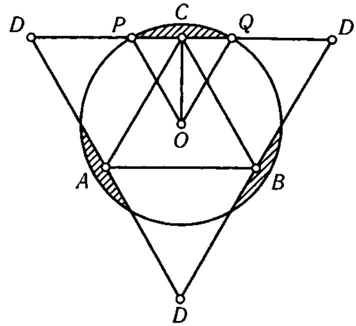


Рис. 37

$$\cos\angle POC = \frac{OC}{OP} = \frac{900}{600\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{значит,} \quad \angle POQ = \pi/3.$$

Площадь сегмента есть разность площадей сектора и треугольника:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 600^2 - S_{\triangle} = \frac{600^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Следовательно, площадь цунами

$$\pi\cdot 600^2 - \frac{3}{2}\cdot 600^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= 180\,000\pi + 270\,000\sqrt{3}.$$

б) Рассматривая «двойную» развёртку тетраэдра и рассуждая как в предыдущем случае, убеждаемся в том, что кратчайшие пути лежат внутри заштрихованного прямоугольника (рис. 38).

Площадь, которую накроет цунами, есть разность площади круга и удвоенной площади сегмента.

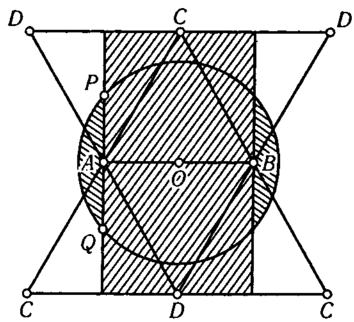


Рис. 38

$$\angle POA = \arccos\frac{OA}{OP} = \arccos\frac{3}{4}, \qquad PQ = 2PO\sin\angle POA = 300\sqrt{7},$$

$$S_{\text{сегм}} = 2\cdot 180\,000\arccos\frac{3}{4} - 67\,500\sqrt{7},$$

$$S = \pi\cdot 600^2 - 720\,000\arccos\frac{3}{4} + 135\,000\sqrt{7} = 720\,000\arcsin\frac{3}{4} + 135\,000\sqrt{7}.$$

22. (*В. Босс*) К граням тетраэдра восставлены перпендикуляры в их центрах тяжести (точках пересечения медиан). Докажите, что проекции трёх перпендикуляров на четвёртую грань пересекаются в одной точке. (10–11 *класс*)

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, A', B', C', D' — центры тяжести граней BCD, CDA, DAB, ABC. Оказывается, грани тетраэдра, образованного центроидами, параллельны соответственным граням исходного тетраэдра. Так, например, плоскость ABC параллельна плоскости $A'B'C'$, и т. д.

Действительно, пусть точки P и Q — середины AC и AB. Так как центроид делит медиану в отношении $2:1$, то по теореме, обратной теореме Фалеса, $B'C' \parallel PQ$. Но $PQ \parallel BC$ как средняя линия, следовательно, $B'C' \parallel BC$. Точно так же $A'C' \parallel AC$, и по признаку параллельности двух плоскостей грани параллельны. Поэтому перпендикуляры, восставленные из точек A', B', C', D' к соответствующим граням $ABCD$, являются высотами тетраэдра $A'B'C'D'$. По теореме о трёх перпендикулярах их проекции на плоскость грани $A'B'C'$ являются высотами этой грани и, значит, пересекаются в одной точке. Но тогда их проекции на параллельную плоскость ABC также пересекаются в одной точке.

23. (*Л. и Т. Емельяновы*) Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками. (10–11 *класс*)

Решение. Например, это можно сделать следующим образом, рассмотрев такую развёртку куба (рис. 39).

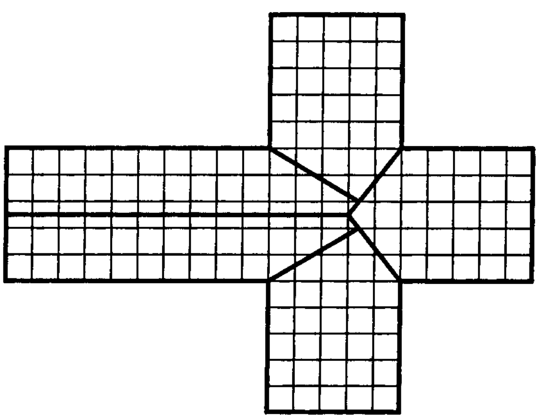


Рис. 39

24. (*В. Сендеров*) Дан треугольник, все углы которого меньше φ, где $\varphi < 2\pi/3$. Докажите, что в пространстве существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом φ. (10–11 *класс*)

Решение.

Первый способ. Пусть ABC — данный треугольник. Построим на каждой его стороне во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол φ. Покажем, что на дугах BC, CA, AB найдутся такие точки X, Y, Z соответственно, что $AZ = AY$, $BZ = BX$, $CX = CY$. Пусть AC — наибольшая сторона треугольника, AB — наименьшая. Возьмём произвольную точку Z на дуге AB, найдём на дуге BC такую точку X, что $BX = BZ$ (X определяется однозначно, так как $AB \leqslant BC$), и построим такую точку Y, лежащую по разные стороны с B от прямой AC, что $AY = AZ$, $CY = CX$. При $Z = B$ имеем $AY = AB$, $CY = CB$. Следовательно, $\angle AYC = \angle B < \varphi$ и Y лежит вне сегмента, построенного на AC (рис. 40).

При $Z = A$ точка Y не существует, так как $AC \geqslant BC$. Следовательно, при некотором промежуточном положении точки Z точка Y попадает на дугу AC (рис. 41).

Осталось доказать, что из треугольников ABC, ABZ, BCX, ACY можно склеить тетраэдр, т. е. что хотя бы в одной из вершин A,

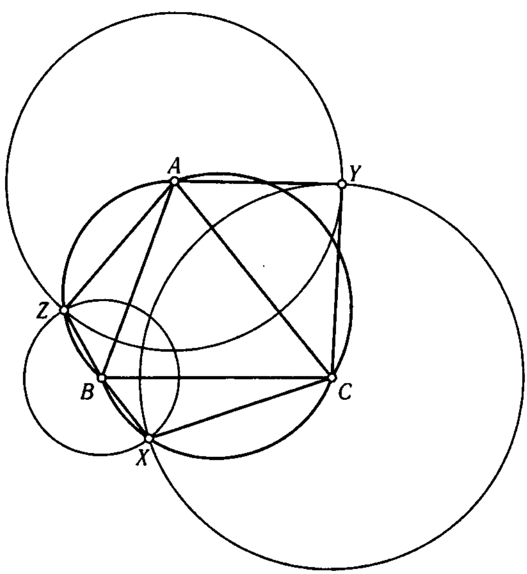


Рис. 40

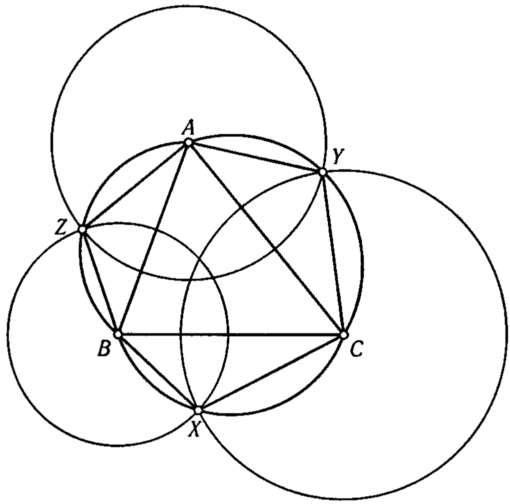


Рис. 41

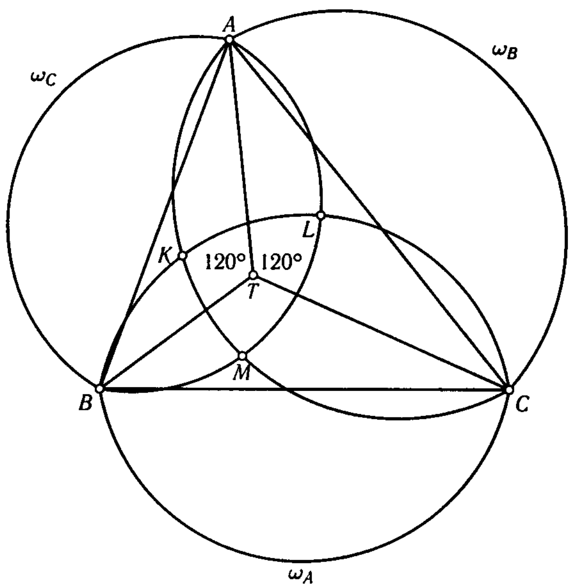


Рис. 42

B, C угол треугольника ABC меньше суммы примыкающих к той же вершине углов двух других треугольников. Если это не так, то $\angle A + \angle B + \angle C \geqslant 3\pi - 3\varphi > 3\pi - 2\pi = \pi$ — противоречие. (Мы воспользовались известной теоремой стереометрии: три плоских угла с общей вершиной образуют трёхгранный угол тогда и только тогда, когда любой из них меньше суммы двух других.)

Второй способ. (*Печёнкин Николай, г. Москва, школа № 192*) Для каждого из отрезков AB, BC и CA построим на плоскости множество точек, из которых эти отрезки видны под углом φ, — получим 6 дуг. Для BC пусть это множество ω_A, для AC — ω_B и для AB — ω_C. Пусть K, L, M — точки пересечения этих множеств (рис. 42). Очевидно, существует область, лежащая внутри всех трёх областей с границами из двух дуг (этой области, например, принадлежит точка Ферма—Торричелли, из которой все стороны треугольника видны под углом $2\pi/3$).

Понятно, что точки M, L, K лежат в областях, ограниченных ω_A, ω_B, ω_C соответственно. Далее, множество точек пространства, из которых отрезок BC виден под углом φ, — поверхность, получающаяся при вращении ω_A относительно BC. Обозначим её F_A. Аналогично получим ещё две поверхности — F_B, F_C. Пересечением F_A и F_B будет некоторая непрерывная кривая, проходящая через C и K, причём K лежит внутри тела, ограниченного F_C, а C — вне его. Значит, линия пересечения F_A и F_B будет также пересекать и F_C. Эта точка искомая.

Финальный тур

9 класс

1. (*А. А. Заславский*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Доказать, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

Решение. Так как

$$\angle ABO = \frac{\pi - \angle AOB}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle ADB, \quad \text{то}$$
$$\angle DAC + \angle ADB = \frac{\pi}{2},$$

что равносильно утверждению задачи (рис. 43).

2. (*Л. А. Емельянов*) Найти все равнобедренные треугольники, которые нельзя разрезать на три равнобедренных треугольника с одинаковыми боковыми сторонами.

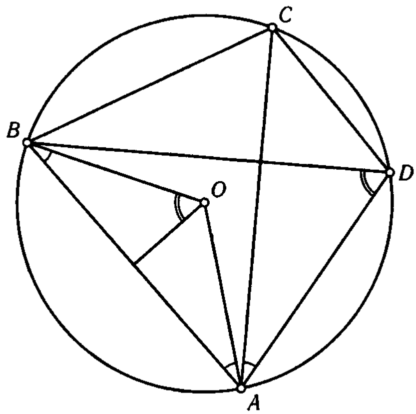


Рис. 43

Решение. Остроугольный треугольник можно разрезать радиусами описанной окружности на три равнобедренных с равными боковыми сторонами. Если треугольник ABC — тупоугольный (C — тупой угол), то возьмём на стороне AB такие точки A', B', что

$$AB' = B'C = CA' = A'B,$$

и разрежем треугольник на треугольники $AB'C$, $A'B'C$ и $A'BC$ (рис. 44).

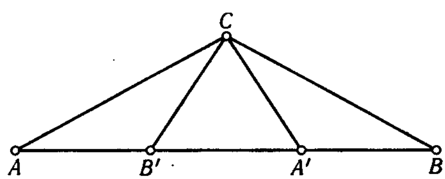


Рис. 44

Очевидно, что существует два существенно различных способа разрезания треугольника на три: соединить внутреннюю точку с вершинами или разрезать треугольник на два прямой, проходящей через вершину, а затем повторить эту операцию с одной из двух частей (рис. 45).

Докажем, что прямоугольный треугольник ABC ($AC = BC$) разрезать требуемым образом нельзя.

В первом случае треугольник AXB может быть равнобедренным только при $AX = BX$, но тогда два других треугольника равнобедренными не

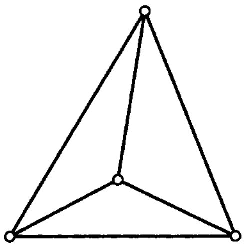


Рис. 45

будут. Во втором случае хотя бы один из получающихся при первом разрезе треугольников должен быть равнобедренным. Следовательно, первая прямая либо является биссектрисой прямого угла, либо соединяет точку C с точкой D на гипотенузе, для которой $AD = AC$. Ни в том, ни в другом случае провести вторую прямую так, чтобы получить нужное разрезание, невозможно.

3. (*И. Ф. Шарыгин*) Дана окружность с центром O и точки A, B на ней. Изобразить множество середин отрезков, один из концов которых лежит на одной из дуг AB, а другой — на второй.

Решение. Пусть K — произвольная точка внутри данной окружности. Хорда, серединой которой является K, перпендикулярна OK. Поэтому она пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда один из углов OKA, OKB не острый, а другой — не тупой. Следовательно, искомое множество состоит из точек, лежащих внутри или на границе одного из кругов с диаметрами OA, OB и вне или на границе другого (рис. 46).

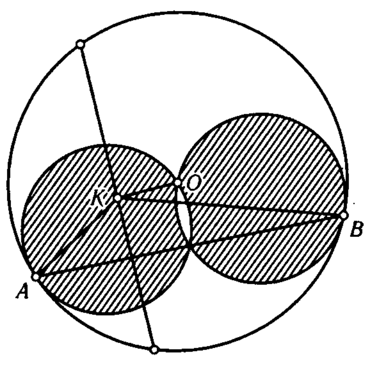


Рис. 46

4. (*А. Г. Мякишев*) Пусть P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон, O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BCP, APB и CPD. Доказать, что M — середина OH.

Решение. Пусть O_1 — середина AC, а O_2 — середина BD. Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A$, $1B$, $1C$, $1D$, т. е. четырёх единичных масс, помещённых в точки A, B, C, D. Рассмотрим подсистемы $1A$, $1C$ и $1B$, $1D$, которые эквивалентны подсистемам $2O_1$, $2O_2$).

Очевидно, что четырёхугольник $H_1H_3H_2H_4$, образованный ортоцентрами, есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведённых из вершин четырёхугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2, или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD. Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H, и покажем, что она проходит и через точку O_1. Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K. Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4, и потому K —

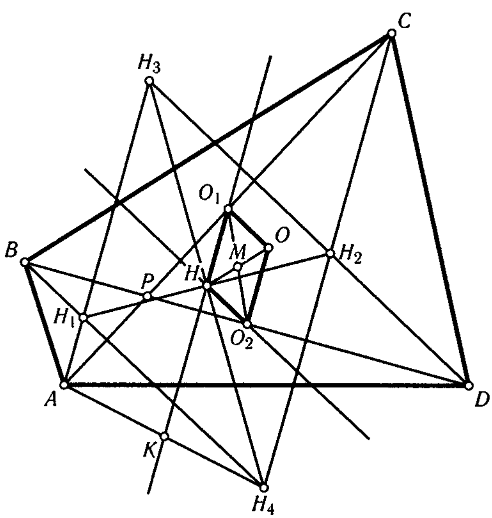


Рис. 47

середина AH_4. А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C и потому пройдёт через O_1.

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1, т. е. HO_1OO_2 — параллелограмм, причём M — точка пересечения его диагоналей (рис. 47).

Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой и $OM = MH$.

5. (*Б. Р. Френкин*) Дано, что ни для какой стороны треугольника из проведённых к ней высоты, биссектрисы и медианы нельзя составить треугольник. Доказать, что один из углов треугольника больше $135°$.

Решение. Из условия следует, что каждая медиана больше либо равна сумме биссектрисы и высоты из той же вершины. Если между какой-то медианой и соответствующей высотой угол не больше $60°$, то медиана не больше удвоенной высоты, а сумма биссектрисы и высоты — не меньше, причём равенство не достигается одновременно. Поэтому из условия следует, что между каждой медианой и соответствующей высотой угол больше $60°$. Так как в треугольнике наименьший угол не больше $60°$, то какая-то высота проходит вне треугольника, т. е. он тупоугольный.

Пусть A — вершина тупого угла, B и C — остальные две вершины, AM — медиана, AH — высота, причём точка M принадлежит отрезку BH. По доказанному $\angle AMH < 30°$. Он равен сумме углов ABM и BAM. Медиана из вершины тупого угла меньше половины противолежащей стороны. Отсюда $\angle ABM < 15°$.

Высота из вершины B образует угол больше $60°$ с соответствующей медианой, а тогда и со стороной BC. Поэтому $\angle ACB < 30°$. Значит,

$$\angle BAC > 180° - 15° - 30° = 135°.$$

10 класс

1. (*Л. А. Емельянов*) Дан выпуклый четырёхугольник без параллельных сторон. Для каждой тройки его вершин строится точка, дополняющая эту тройку до параллелограмма, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю четырёхугольника. Доказать, что из четырёх построенных точек ровно одна лежит внутри исходного четырёхугольника.

Первое решение. Пусть вершина D' параллелограмма $ABCD'$ лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. Тогда $\angle BCA < \angle CAD$ и $\angle BAC < \angle ACD$. Следовательно, точки пересечения противоположных сторон $ABCD$ лежат на продолжении отрезков AB и BC за точку B. Очевидно, что вершина с таким свойством в четырёхугольнике ровно одна (рис. 48).

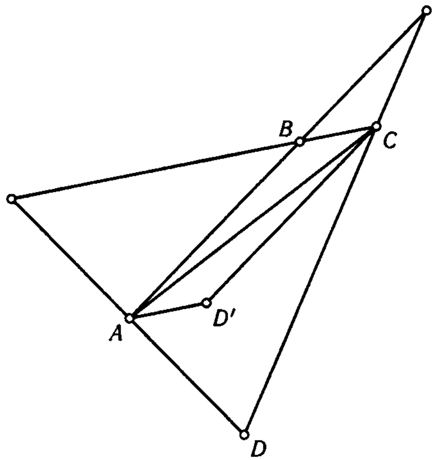


Рис. 48

Второе решение. Пусть $ABCD$ — исходный четырёхугольник, $ABCD'$ — параллелограмм, лежащий в нём. Пусть лучи CD' и AD' пересекают стороны в точках C_1 и A_1. Тогда

$$S_{ABC} = S_{ABD'} = S_{ABC_1} < S_{ABD};$$

аналогично $S_{ABC} < S_{ACD}$. Тогда

$$S_{ABC} < S_{ACD} + S_{ABC} - S_{ABD} = S_{BCD},$$

т. е. ABC — треугольник наименьшей площади, образованный тремя вершинами четырёхугольника. Наоборот, если он таковой, то на сторонах найдутся такие точки A_1 и C_1, что $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{A_1BC}$ и точка пересечения AA_1 и CC_1 будет искомой (рис. 49).

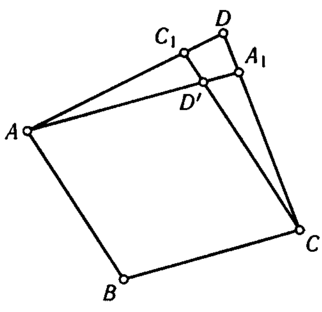


Рис. 49

2. (*А. В. Шаповалов*) Треугольник можно разрезать на три подобных друг другу треугольника. Доказать, что его можно разрезать на любое число подобных друг другу треугольников.

Решение. Пусть треугольник ABC с наибольшим углом C разрезан на три подобных отрезками AX, BX, CX. Так как $\angle AXB > \angle ACB$, углу AXB в других треугольниках могут равняться только углы AXC

и BXC. Значит,

$$\angle AXB = \angle AXC = \angle BXC = 120^\circ.$$

Но тогда $AX = BX = CX$ и треугольник ABC — правильный.

Пусть теперь треугольник разрезали сначала прямой, проходящей через вершину, на два, а затем один из этих двух — ещё на два. Так как два последних треугольника подобны, они прямоугольные, т. е. при первом разрезе от исходного треугольника отрезали прямоугольный, а затем оставшийся треугольник разделили на два высотой. Перебрав все возможные варианты, нетрудно убедиться, что исходный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. И в том, и в другом случае его можно разрезать на любое число подобных.

3. (*А. А. Заславский*) В окружности с центром O проведены две параллельные хорды AB и CD. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точке P. Доказать, что середина отрезка OP равноудалена от прямых AB и CD.

Решение. Пусть X, Y — середины AB и CD, Q — середина OP. Тогда

$$XQ^2 = \frac{2OX^2 + 2XP^2 - OP^2}{4} = \frac{2OX^2 + 2XA^2 - OP^2}{4} = \frac{2OA^2 - OP^2}{4} = YQ^2.$$

Таким образом, Q равноудалена от точек X и Y, а значит, и от прямых AB и CD (рис. 50).

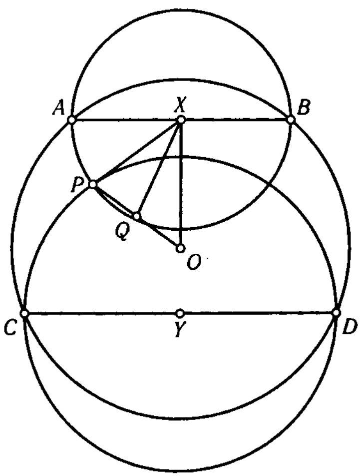


Рис. 50

4. (*Вим Пайлс, Нидерланды*) На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причём

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1.$$

На отрезке A_1A_2 взята точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 — точка A_4 так, что

$$\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k.$$

Аналогично на отрезке B_1B_2 берётся точка B_3, а на продолжении этого отрезка за точку B_2 — точка B_4 так, что

$$\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k.$$

Найти угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4.

Первое решение. Пусть O — центр не сохраняющего ориентацию подобия, переводящего A_1 в A_2 и B_1 в B_2. Так как треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны, то $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2$ и биссектрисы углов A_1OA_2 и B_1OB_2 совпадают. Так как

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1} = k,$$

эта общая биссектриса пересекает отрезки A_1A_2 и B_1B_2 в точках A_3 и B_3, а перпендикулярная ей прямая пересекает продолжения этих отрезков в точках A_4 и B_4 (рис. 51). Следовательно, искомый угол прямой.

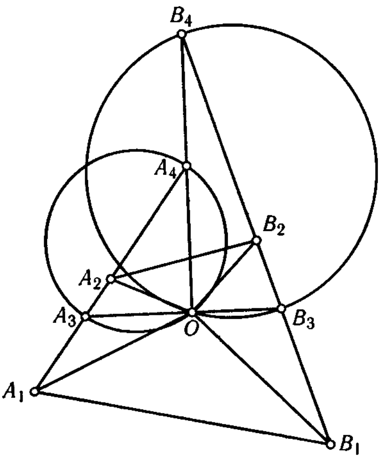


Рис. 51

Чтобы найти точку O, построим окружности с диаметрами A_3A_4 и B_3B_4 и найдём точки их пересечения. Так как окружность с диаметром A_3A_4 — геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до A_2 и A_1 равно k, то точки пересечения окружностей будут центрами двух подобий, переводящих A_1 в A_2 и B_1 в B_2. Одно из этих подобий сохраняет ориентацию, другое меняет.

Второе решение. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{u}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{v}$, из условия следует, что $\vec{v}^2 = k^2\vec{u}^2$. Тогда

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_3} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{A_2A_1} + \vec{u} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{B_1B_2}; \qquad (*)$$

с другой стороны,

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{A_1A_2} + \vec{v} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{B_2B_1}. \qquad (**)$$

Умножив $(*)$ на $\frac{k}{1+k}$, $(**)$ на $\frac{1}{1+k}$ и сложив полученные равенства, имеем

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \frac{k}{1+k}\vec{u} + \frac{1}{1+k}\vec{v}.$$

Аналогично получаем

$$A_4B_4 = \frac{1}{1-k}\vec{v} - \frac{k}{1-k}\vec{u}.$$

Тогда

$$\left(\overrightarrow{A_3B_3}, \overrightarrow{A_4B_4}\right) = \frac{(k\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}-k\vec{u})}{(1+k)(1-k)} = \frac{\vec{v}^2 - k^2\vec{u}^2}{1-k^2} = 0,$$

т. е. векторы ортогональны.

Третье решение. (*С. Сафин*) Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведём биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1. Так как

$$\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k,$$

то $B_3Y \parallel B_2X$ и

$$B_3Y = kB_2X = A_1A_3.$$

Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ — параллелограмм, т. е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$ (рис. 52).

Аналогично прямая A_4B_4 параллельна внешней биссектрисе угла XA_1B_1, и, значит, прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

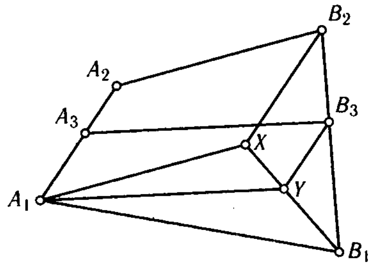


Рис. 52

5. (*А. А. Заславский*) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A'. Найти расстояние AA'.

Решение. Пусть O — центр окружности, на которой лежит точка C, O' — центр другой окружности. Так как $OO' = \sqrt{3}$, то прямая $A'B'$, где B' — вторая точка пересечения CA с окружностью, касается второй окружности в точке C'. Следовательно,

$$\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB =$$
$$= \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B',$$
$$\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$
$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'.$$

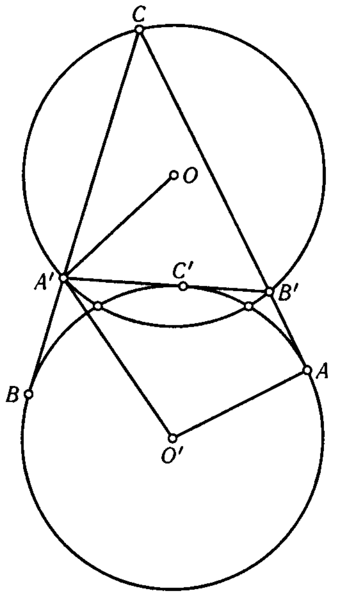


Рис. 53

Так как $O'A = OA'$, $AO'A'O$ — равнобедренная трапеция и $AA' = OO' = \sqrt{3}$ (рис. 53).

6. (*А. А. Заславский*) Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, X — произвольная точка. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX — в точках A_2, B_2, C_2. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим для определённости случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Пусть $XH = d$. Тогда

$$A_1B_2 = d \sin \angle A_1HB_2 = d \sin \angle XBC,$$

так как HA_1 перпендикулярно BC, а HB_2 перпендикулярно BX. Следовательно,

$$\frac{A_1B_2 \cdot C_1A_2 \cdot B_1C_2}{A_2B_1 \cdot C_2A_1 \cdot B_2C_1} = \frac{\sin \angle XBC \cdot \sin \angle XCA \cdot \sin \angle XAB}{\sin \angle XAC \cdot \sin \angle XCB \cdot \sin \angle XBA} = 1,$$

что равносильно утверждению задачи (рис. 54).

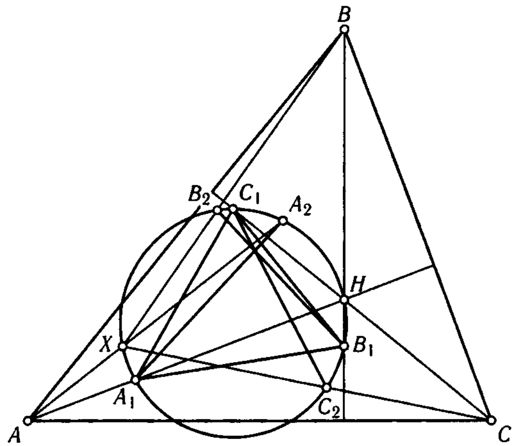


Рис. 54

Примечание. Нетрудно видеть, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC, а точка пересечения прямых соответствует точке, изогонально сопряжённой X.

11 класс

1. (*А. А. Заславский*) A_1, B_1, C_1 — середины сторон правильного треугольника ABC. Три параллельные прямые, проходящие через A_1, B_1, C_1, пересекают прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности.

Решение. Пусть Z — точка пересечения AA_2 и BB_2. Так как точки B и B_1 симметричны относительно прямой A_1C_1, то

$$\angle ABZ = \angle C_1BB_2 = \angle B_2B_1C_1.$$

Аналогично $\angle BAZ = \angle A_2A_1C_1$. Так как прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, $\angle A_2A_1C_1 = \angle B_1B_2C_1$, следовательно, $\angle AZB = \angle ACB$ и точки A, B, C, Z лежат на одной окружности, откуда и следует утверждение задачи (рис. 55).

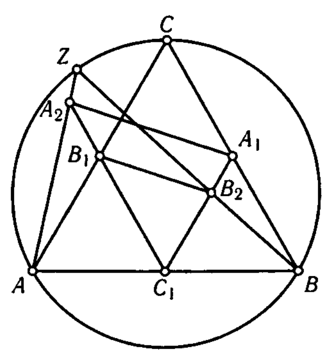


Рис. 55

2. (*А. Г. Мякишев*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке O, причём B лежит на отрезке OC, A — на отрезке OD. Пусть I — центр вписанной в треугольник OAB окружности, J — центр вневписанной в треугольник OCD окружности, касающейся стороны CD и продолжения двух других сторон. Перпендикуляры, опущенные из середины отрезка IJ на прямые BC и AD, пересекают соответствующие стороны четырёхугольника (не продолжения) в точках X и Y. Доказать, что отрезок XY делит периметр четырёхугольника $ABCD$ пополам, причём из всех отрезков с этим свойством и с концами на BC и AD XY имеет наименьшую длину.

Решение. Используя тот факт, что отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны, несложно показать, что отрезок $X'Y'$ с концами на сторонах AD и BC делит периметр пополам тогда и только тогда, когда $OX' + OY' = l$, где l — постоянная величина, равная удвоенному отрезку соответствующей касательной плюс полупериметр четырёхугольника.

Пусть M — середина IJ. Так же просто проверяется, что

$$OX + OY = l.$$

Тогда треугольники MXX' и MYY' равны, а следовательно, треугольники MXY и $MX'Y'$ подобны по двум углам. Значит, $X'Y'$ минимально, когда минимально MX', т. е. когда X' совпадает с X (рис. 56).

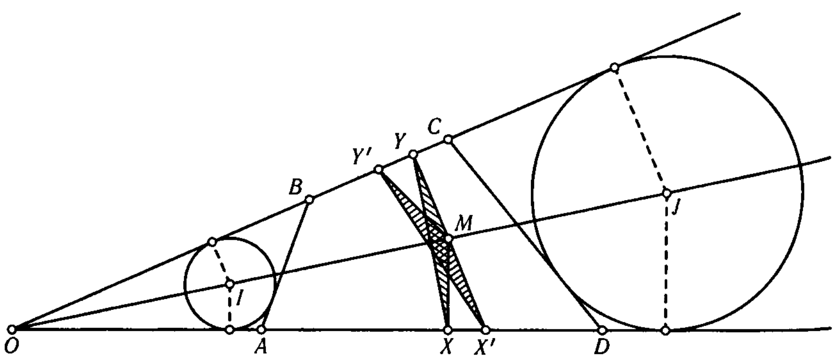


Рис. 56

3. (*А. А. Заславский*) Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ существует точка K, расстояния от которой до сторон $ABCD$ пропорциональны этим сторонам. Доказать, что K — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

Первое решение. Пусть U — точка пересечения касательных к окружности $ABCD$ в точках A и C, X, Y — проекции U на AB и BC. Тогда

$$\frac{UX}{UY} = \frac{\sin\angle UAX}{\sin\angle UCY} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{BC},$$

т. е. K лежит на прямой UB. Аналогично K лежит на прямой UD, и если эти прямые не совпадают, то $K = U$. Точно так же доказывается, что если не совпадают прямые AV и CV, где V — точка пересечения касательных в точках B и D, то $K = V$, что невозможно. Будем считать, что на одной прямой лежат точки B, D, U. Тогда $AB/AD = AU/UD = CU/UD = BC/CD$ и точки A, C, V также лежат на одной прямой. Следовательно, K — точка пересечения AC и BD.

Второе решение. Множество точек, расстояния от которых до прямых AB и CD пропорциональны соответствующим сторонам, — это прямая, проходящая через точку пересечения AB и CD. Так как $ABCD$ — вписанный, то треугольники LAB и LCD, где L — точка пересечения диагоналей, подобны, т. е. L лежит на указанной прямой. Аналогично L лежит на второй такой же прямой и, значит, совпадает с K.

4. (*И.Ф.Шарыгин*) В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Вписанная окружность касается прямых AB и AC в точках M и P. Найти длину хорды, высекаемой на прямой MP окружностью с диаметром BC.

Первое решение. Расстояние от центра окружности до хорды равно полусумме расстояний от точек B и C до прямой MP (рис. 57), т. е.

$$\frac{1}{2}(BM\sin\angle AMP + CP\sin\angle APM) = \frac{1}{2}(BM + CP)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Соответственно, длина хорды равна $a\sin\frac{\alpha}{2}$.

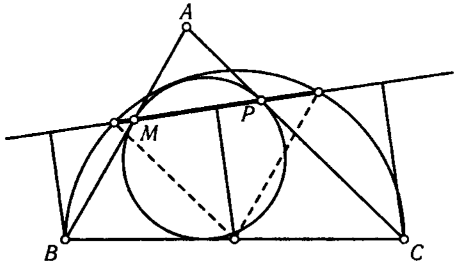


Рис. 57

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, X, Y — точки пересечения прямых BI, CI с прямой MP. Тогда

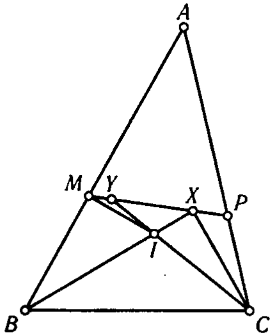


Рис. 58

$$\angle MXB = \angle AMP - \angle MBX = \frac{\angle C}{2}.$$

Следовательно, треугольники BXM и BCI подобны, т. е.

$$\frac{BX}{BC} = \frac{BM}{BI} = \cos\frac{\angle B}{2}.$$

Это значит, что угол BXC прямой (рис. 58). Аналогично угол BYC прямой. Следовательно, искомая хорда

$$XY = BC \sin\angle XCY = a \sin\frac{\alpha}{2}.$$

5. (*В. Ю. Протасов*) На плоскости дан угол и точка K внутри него. Доказать, что найдётся точка M, обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K, пересекает стороны угла в точках A и B, то MK является биссектрисой угла AMB.

Первое решение. На произвольной прямой, проходящей через K и пересекающей стороны угла в точках A и B, возьмём такую точку K', что $AK'/BK' = AK/BK$. Так как все точки K' лежат на прямой l, проходящей через вершину угла, то все окружности с диаметром KK' проходят через проекцию M точки K на l. При этом всегда выполнено равенство $AM/BM = AK/BK$, т. е. точка M — искомая (рис. 59).

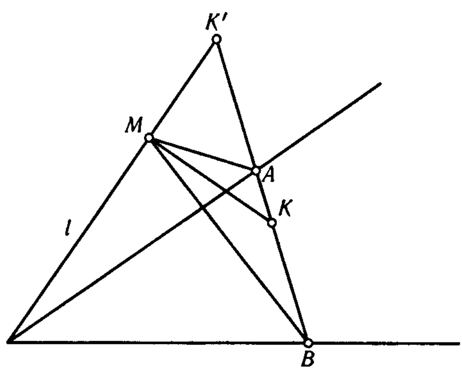


Рис. 59

Второе решение. (*Р. Девятов*) Пусть O — вершина угла. Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M — точка, симметричная K относительно XY. Докажем, что точка M — искомая.

Пусть прямая, проходящая через K, пересекает прямые OX и OY в точках A и B. Заметим, что

$$MX = KX, \quad MY = KY, \quad \triangle MXY = \triangle KXY = \triangle OYX,$$

поэтому $MOYX$ — равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит,

$$\angle MXA = 180^\circ - \angle MXO = 180^\circ - \angle MYO = \angle BYM.$$

Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Отсюда и из равенства углов MXA и BYM получаем, что треугольники MXA и BYM подобны (рис. 60).

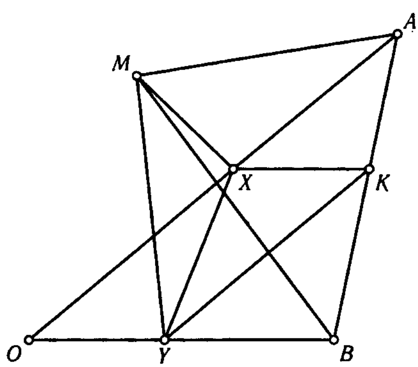


Рис. 60

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK — биссектриса треугольника AMB.

6. (*И. И. Богданов*) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D'. Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

Решение. Так как отрезки AA' и BB' пересекаются, то прямые AB и $A'B'$ тоже пересекаются или параллельны. Обозначим их точку пересечения (возможно бесконечно удалённую) через P. Так как P лежит вне двугранного угла при ребре CD, то плоскость CDP не пересекает вписанную сферу. Поэтому существует проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее эту плоскость в бесконечно удалённую. В результате этого преобразования отрезок $A'B'$ станет диаметром сферы, а AB будет ему параллелен. Так как точка пересечения AA' и BB' лежит на сфере, расстояние от её центра до AB равно удвоенному радиусу (на рис. 61 показана проекция на плоскость $ABA'B'$).

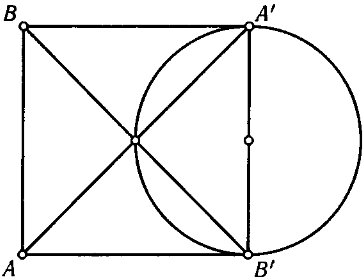


Рис. 61

Значит, угол между плоскостями ABC и ABD равен $60°$, дуга большого круга, соединяющая C' и D', равна $120°$, и прямые, проходящие через C', D' и параллельные ABC, ABD, пересекаются на сфере (на рис. 62 показана проекция на плоскость, перпендикулярную AB).

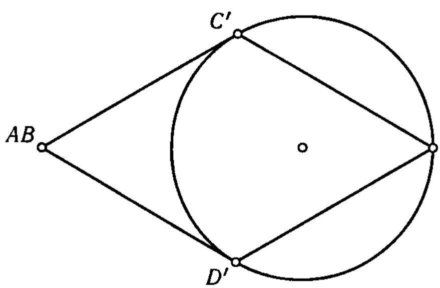


Рис. 62

Вторая олимпиада (2006)

Заочный тур

1. (*В. Смирнов*) Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом 46°, являются осями симметрии фигуры F. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура? (8 *класс*)

Ответ. 90.

Решение. Пусть l_1, l_2 — оси симметрии F. Применив последовательно симметрию относительно l_1, симметрию относительно l_2 и снова симметрию относительно l_1, получим симметрию относительно прямой, симметричной l_2 относительно l_1 (рис. 63). Следовательно, осями симметрии F будут все прямые, образующие с l_1 углы $46^\circ, 2\cdot 46^\circ, \ldots, n\cdot 46^\circ, \ldots$ Так как $46n$ при $n < 90$ не делится на 180, эти прямые для $n = 1, \ldots, 90$ различны, т. е. F имеет по крайней мере 90 осей симметрии. С другой

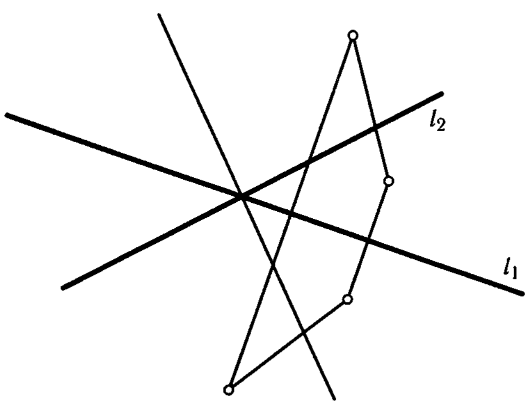


Рис. 63

стороны, правильный 90-угольник удовлетворяет условию задачи и имеет ровно 90 осей симметрии.

2. (*А. Акопян*) Точки A, B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку. (8–9 *класс*)

Решение. (*Н. Баканчев*) Пусть l — прямая, при симметрии относительно которой окружности переходят друг в друга, A' — точка, симметричная A относительно l. Тогда точки B и A' движутся по одной окружности с противоположными скоростями, и, значит, серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ не меняется. Точка его пересечения с l является центром описанной окружности треугольника $AA'B$, следовательно, серединный перпендикуляр к AB всё время проходит через эту точку.

3. (*Фольклор*) На карте указаны отрезки трёх прямолинейных дорог, соединяющих три деревни, но сами деревни расположены за пределами карты. Кроме того, на карте не указана пожарная часть, находящаяся на равном расстоянии от трёх деревень, хотя место её расположения находится в пределах карты. Можно ли найти это место с помощью циркуля и линейки, если проводить построения только в пределах карты? (8–9 *класс*)

Решение. Возьмём на карте произвольную точку P. При гомотетии с центром P и достаточно малым коэффициентом k точки пересечения дорог перейдут в некоторые точки A, B, C, лежащие в пределах карты, так что можно найти центр O описанной около треугольника ABC окружности. Гомотетия с центром P и коэффициентом $1/k$ переводит O в искомую точку.

4. (*А. Горская, И. Богданов*)

а) Даны два квадрата $ABCD$ и $DEFG$, причём точка E лежит на отрезке CD, а точки F, G — вне квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми AE и BF. (8 *класс*)

б) Даны два правильных пятиугольника $OKLMN$ и $OPRST$, причём точка P лежит на отрезке ON, а точки R, S, T вне пятиугольника $OKLMN$. Найдите угол между прямыми KP и MS. (9–11 *класс*)

Решение.

а) Пусть H — вторая точка пересечения описанных около квадратов окружностей (рис. 64). Так как

$$\angle AHD = 45^\circ, \quad \angle DHF = 90^\circ, \quad \angle EHF = 135^\circ,$$

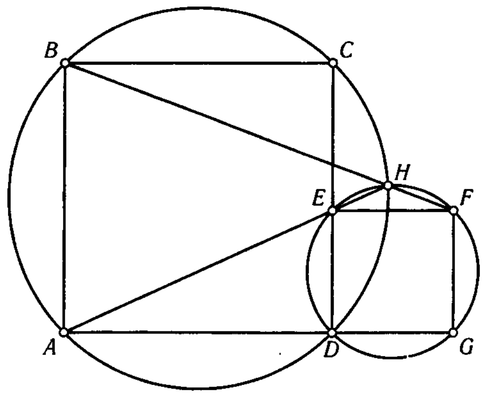


Рис. 64

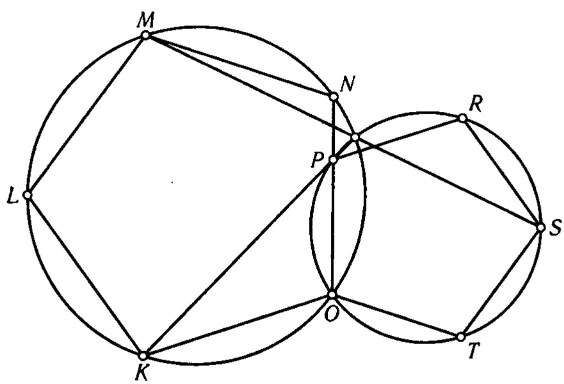


Рис. 65

то точки A, E, H лежат на одной прямой. Аналогично точки B, H, F лежат на одной прямой. Следовательно, искомый угол равен $\angle BHA = 45^\circ$.

б) Ответ. 72°. Решение аналогично п. а) (рис. 65).

5. (*А. Тарасов*)

а) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски 1×118. (8 *класс*)

б) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски $1 \times (100 + 9\sqrt{3})$ (примерно $1 \times 115{,}58$). (9–11 *класс*)

В обоих пунктах полоску можно сгибать, но нельзя разрывать.

Решение.

а) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D — на расстоянии 12. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис. 66, расположим её часть, лежащую правее CD, рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся прямоугольные треугольники, получим искомый квадрат.

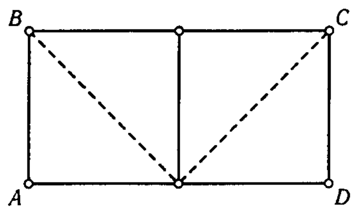


Рис. 66

б) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D — на расстоянии $10+\sqrt{3}$. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис. 67, расположим её часть, лежащую правее CD, рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся треугольники, получим искомый квадрат.

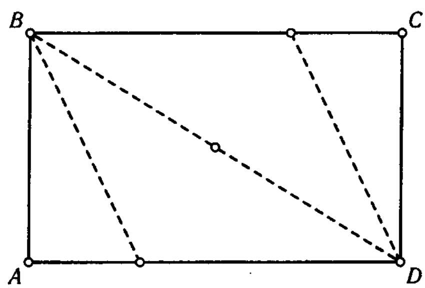


Рис. 67

6. (*А. Афанасьев*)

а) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющийся хордой окружности радиуса R. Впишите в образовавшийся сегмент окружность, которая проходит через точку C и касается исходной окружности. (8–9 *класс*) б) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющейся точкой касания окружности радиуса r. Проведите через A и B окружность, касающуюся исходной окружности. (9–10 *класс*)

Решение. Докажем сначала следующий факт.

Лемма. *Пусть окружность, вписанная в сегмент, ограниченный дугой и хордой AB, касается дуги в точке X, а хорды — в точке C. Тогда XC — биссектриса угла AXB.*

Доказательство. Пусть O — центр большой окружности, O' — центр малой, L — середина дуги AB, не содержащей точки X (рис. 68). Так как O' лежит на отрезке OX, а $O'C \parallel OL$, равнобедренные треугольники $O'CX$ и OLX подобны. Следовательно, C лежит на отрезке XL, и прямая XC делит угол AXB пополам.

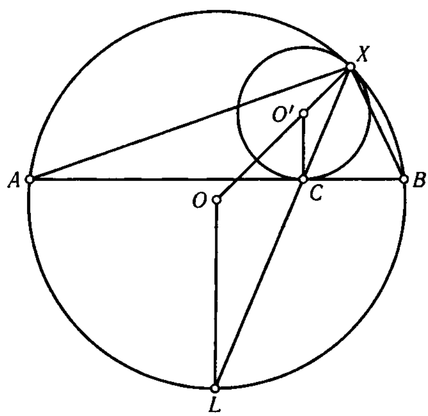


Рис. 68

Теперь приведём решение задачи.

а) Пусть искомая окружность касается данной в точке X. Из леммы следует, что $AX/XB = AC/CB$. Множество точек, удовлетворяющих этому условию, — это окружность с центром на прямой AB (она называется *окружностью Аполлония* точек A и B). Возьмём любую из точек пересечения окружности Аполлония с данной, соединим её с центром данной окружности и найдём точку пересечения этой прямой с перпендикуляром, восставленным из C к AB. Получим центр искомой окружности. Задача имеет два решения, так как окружность можно вписать в любой из двух сегментов, на которые хорда AB делит данный круг.

б) Аналогично п. а) построим окружность Аполлония и найдём точку её пересечения с данной окружностью. Искомая окружность проходит через эту точку и точки A, B. Задача имеет единственное решение.

7. (*Д. Калинин*) Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E, а вне — точка F так, что треугольники ABE и BCF равны. Найдите углы треугольника ABE, если известно, что отрезок EF равен стороне квадрата, а угол BFD — прямой. (8–10 *класс*)

Решение. Так как угол BFD прямой, точка F лежит на описанной около квадрата окружности, т. е. $\angle BFC = 135° = \angle AEB$ (так как два других угла треугольника AEB, очевидно, острые). Так как $\angle ABE = \angle CBF$[1],

$$\angle EBF = 90° \quad \text{и} \quad \frac{BE}{EF} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BE}{AB}.$$

Применяя к треугольнику ABE теорему синусов, получаем, что

$$\sin\angle EAB = \frac{BE\sin\angle AEB}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\angle EAB = 30°$, $\angle EBA = 15°$ (рис. 69).

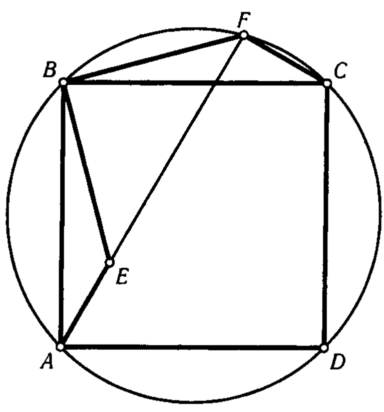


Рис. 69

8. (*А. Блинков*) Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2, причём $r_1 > r_2$. Найдите длину AB. (8–9 *класс*)

Решение. Если отрезок AB является диагональю квадрата, то он делит квадрат на два равных треугольника и $r_1 = r_2$, что противоречит

[1] Нетрудно убедиться, что случай $\angle ABE = \angle BCF$ невозможен.

условию задачи. Если же одна из частей является четырёхугольником, то сумма его стороны AB с противоположной больше суммы двух других сторон (рис. 70), и вписать в него окружность нельзя. Следовательно, AB делит квадрат на треугольник и пятиугольник (рис. 71).

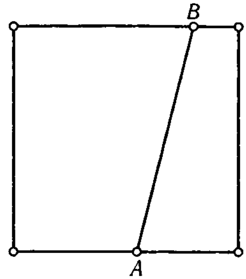


Рис. 70

Окружности с радиусами r_1 и r_2 являются вневписанной и вписанной окружностями прямоугольного треугольника ABC. Значит,

$$r_1 = \frac{AB+BC+CA}{2}, \quad r_2 = \frac{BC+CA-AB}{2}$$

и $AB = r_1 - r_2$.

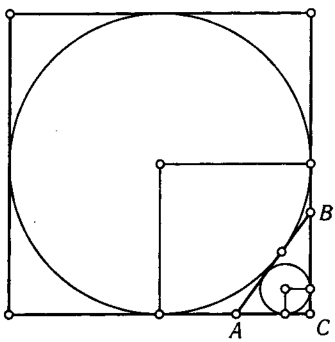


Рис. 71

9. (*А. Канель-Белов*) Пусть прямая $L(\alpha)$ соединяет точки единичной окружности, отвечающие углам α и $\pi - 2\alpha$. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, то прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке[1]. (8–10 *класс*)

Решение. Пусть A, B, C — точки окружности, соответствующие углам α, β, γ. Перпендикуляр из центра окружности к прямой AB пересекает окружность в точке, соответствующей углу $(\alpha+\beta)/2 = \pi-\gamma/2$, а перпендикуляр к прямой $L(\gamma)$ — в точке, соответствующей углу $(\gamma+\pi-2\gamma)/2 = \pi/2-\gamma/2$. Следовательно, $L(\gamma)$ — высота треугольника ABC. Аналогично $L(\alpha)$, $L(\beta)$ — высоты ABC, и, значит, все три прямые пересекаются в его ортоцентре.

[1] Условие задачи было опубликовано с опечаткой.

10. (*Б. Френкин*) При каких n правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на $n-2$ равнобедренных (и, возможно, равносторонних) треугольников? (8–11 *класс*)

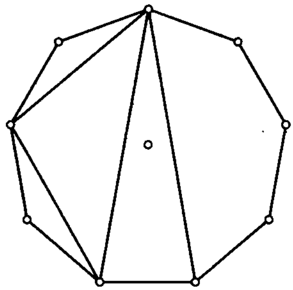


Рис. 72

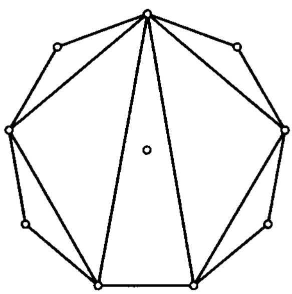


Рис. 73

Ответ. Число n должно быть суммой двух степеней двойки, может быть равных (в этом случае само n — степень двойки).

Решение. Рассмотрим треугольник разбиения ABC, содержащий центр (рис. 72). Если сторона AB не является стороной исходного многоугольника, то она отрезает от него многоугольник, в котором наибольшее расстояние между вершинами — длина AB. Следовательно, AB должна быть основанием треугольника разбиения, и число отрезаемых ею сторон чётно. Для боковых сторон указанного треугольника можно провести аналогичные рассуждения, следовательно, число сторон, которые отрезает AB, есть степень двойки. (Если AB — сторона исходного многоугольника, то она отрезает 2^0 сторон.) Это верно и для сторон BC и AC. Так как в треугольнике ABC хотя бы две стороны равны, то

$$n = 2^k + 2^k + 2^l = 2^{k+1} + 2^l.$$

Обратно, пусть $n = 2^k + 2^l$, причём $k > 0$. Пусть A — одна из вершин правильного n-угольника, а вершины B и C отстоят от неё на 2^{k-1} сторон в двух направлениях. Тогда $AB = AC$, и существует разрезание нужного вида, содержащее треугольник ABC (рис. 73).

11. (*А. Заславский*) В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности; A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно противоположных сторон; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых OA' и BC, OB' и AC, OC' и AB. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. (9–10 *класс*)

Решение. Пусть O_a, O_b, O_c — точки, симметричные O относительно BC, CA, AB. Очевидно, что прямые CO_c, OC' и AB пересекаются в одной точке, так что для решения задачи достаточно доказать, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

Так как треугольник $O_aO_bO_c$ гомотетичен серединному треугольнику ABC с центром O и коэффициентом 2, он центрально-симметричен треугольнику ABC, и прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, проходят через центр симметрии. Нетрудно также убедиться, что эта точка является для каждого из треугольников центром окружности 9 точек.

12. (*Б. Френкин*) В треугольнике ABC биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведённых из вершины A. Докажите, что если угол A тупой, то $AB = AC$. (9–10 *класс*)

Решение. Предположим, что утверждение задачи неверно. Пусть H, L, M — основания высоты, биссектрисы и медианы, P — середина дуги BC описанной окружности треугольника, не содержащей точки A (рис. 74).

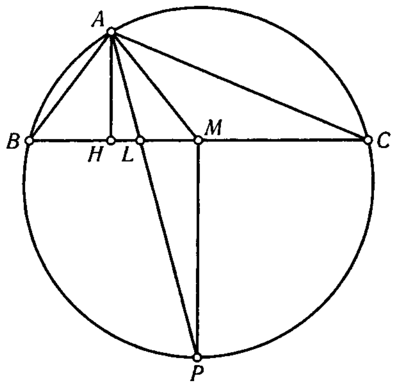


Рис. 74

Если угол A тупой, то $PM > AH$. Поскольку L лежит на отрезке AP, отсюда следует, что $HL < LM$, и, значит, отрезок AL меньше медианы треугольника AHM, которая, в свою очередь, меньше полусуммы сторон AH и AM — противоречие.

13. (*А. Акопян*) Даны две прямые a и b, а также точки A и B. Точка X скользит по прямой a, а точка Y по прямой b так, что $AX \parallel BY$. Найдите ГМТ пересечения AY с XB. (9–10 *класс*)

Решение. Проведём через A прямую, параллельную b и пересекающую a в точке U. Аналогично проведём через B прямую, параллельную a и пересекающую b в точке V. Для любых удовлетворяющих условию точек X, Y соответствующие стороны треугольников AUX и YVB параллельны. Следовательно, эти треугольники гомотетичны, т. е. прямые

AY, BX и UV пересекаются в центре гомотетии. Очевидно, что так можно получить любую точку прямой UV.

14. (*А. Заславский*) Дана окружность и не лежащая на ней фиксированная точка P. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников ABP, где AB — диаметр окружности. (9—11 *класс*)

Решение. Пусть O — центр окружности, C — ортоцентр, A', B', C' — основания высот ABP, проведённых из A, B, P; P' — проекция C на прямую OP (рис. 75). Так как

$$\angle CC'O = \angle CP'O = 90^\circ,$$

то точки O, C, C', P' лежат на окружности и $CP \cdot PC' = OP \cdot PP'$. Аналогично $CP \cdot PC' = BP \cdot PA'$. Но A' лежит на исходной окружности, следовательно,

$$BP \cdot A'P = |R^2 - OP^2|.$$

Таким образом, произведение $OP \cdot PP'$, а значит и точка P', не зависят от выбора диаметра AB, т. е. искомым геометрическим местом будет прямая, проходящая через P' и перпендикулярная OP.

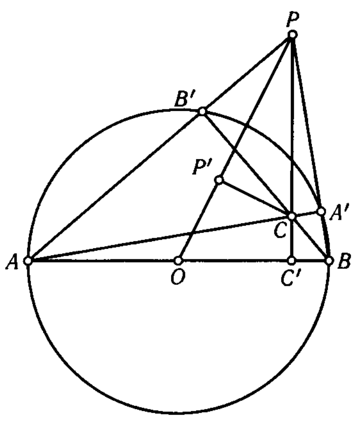


Рис. 75

15. (*В. Протасов*) Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P, точка M — середина отрезка PA_1. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из точки M к вписанной и описанной окружностям, равны. (9—11 *класс*)

Решение. Пусть $AB < AC$. Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, из теорем Чевы и Менелая получаем, что

$$\frac{PB}{PC} = \frac{A_1B}{AC}.$$

Кроме того,

$$MB = \frac{PB - A_1B}{2}, \quad MC = \frac{PC + A_1C}{2},$$
$$MA_1 = \frac{PB + A_1B}{2} = \frac{PC - A_1C}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{MB}{MA_1} = \frac{MA_1}{MC} = \frac{A_1B}{A_1C},$$

что равносильно утверждению задачи.

16. (*П. Пушкарь*) На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Оказалось, что их вершины образуют правильный треугольник. Верно ли, что исходный треугольник — правильный? (9–11 *класс*)

Ответ. Верно.

Решение. Предположим противное. Тогда один из углов треугольника ABC, например $\angle A$, больше $60°$. Тогда луч $B'C'$ лежит вне угла

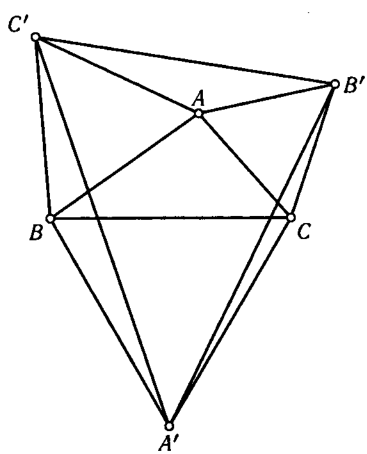


Рис. 76

$AB'C$, а так как $\angle A'B'C' = \angle AB'C = 60°$, луч $B'A'$ лежит внутри этого угла, и, значит, луч $A'B'$ лежит внутри угла $B'AC'$ (рис. 76). Аналогично луч $A'C'$ лежит внутри этого угла, что противоречит равенству $\angle B'A'C' = \angle BA'C = 60°$.

17. (*А. Заславский*) В двух окружностях, пересекающихся в точках A и B, проведены параллельные хорды A_1B_1 и A_2B_2. Прямые AA_1 и BB_2 пересекаются в точке X, а прямые AA_2 и BB_1 — в точке Y. Докажите, что $XY \parallel A_1B_1$. (9—11 *класс*)

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности, т. е. $\angle XAY = \angle XBY$. Но

$$\angle XAY = \angle BAA_2 - \angle BAX = \angle BAA_2 - \angle BB_1A_1,$$
$$\angle XBY = \angle B_2BA - \angle AA_1B_1.$$

При этом из параллельности A_1B_1 и A_2B_2 следует, что

$$\angle ABB_1 + \angle A_1B_1B = \angle BAA_2 + \angle B_2A_2A,$$

откуда, очевидно, и вытекает искомое утверждение (рис. 77).

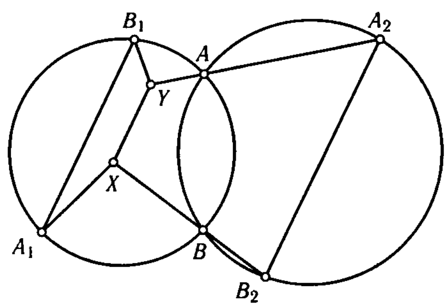


Рис. 77

18. (*А. Акопян*) Через ортоцентр H треугольника ABC проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точке X, а другая пересекает AC в точке Y. Прямые AZ, BZ параллельны соответственно прямым HX и HY. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой. (9—11 *класс*)

Решение. Рассмотрим для определённости случай, изображённый на рис. 78. Пусть U — точка пересечения HX и BZ, V — точка пересечения HY и AZ. Тогда утверждение задачи равносильно равенству

$$\frac{HU}{UX}=\frac{YV}{HV} \quad \text{или} \quad \frac{HU}{YV}=\frac{HV}{UX}.$$

В прямоугольных треугольниках AYV и BUH углы AYV и BUH равны, так как их стороны перпендикулярны. Следовательно, треугольники подобны и

$$\frac{HU}{YV}=\frac{BU}{AV}. \quad \text{Аналогично} \quad \frac{HV}{UX}=\frac{BU}{AV}.$$

Другие случаи рассматриваются аналогично.

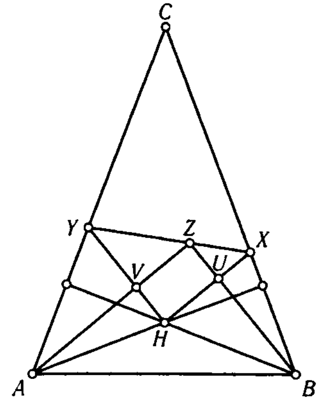


Рис. 78

19. (*Л. Емельянов*) Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1. Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T. (10–11 *класс*)

Решение. Стороны треугольника T_1 являются внешними биссектрисами углов треугольника T_0, образованного средними линиями T, и, значит, пересекаются в центрах его вневписанных окружностей. При этом биссектрисы внутренних углов T_0 являются высотами T_1, т. е. его центр вписанной окружности I_0 совпадает с ортоцентром T_1, а O_0 — центр описанной окружности — является центром окружности, проходящей через середины T_1, и, значит, серединой отрезка I_0O_1, где O_1 — центр описанной окружности T_1. Кроме того, O_0 — середина отрезка OH, где O, H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника T соответственно, а M — центр тяжести T — делит отрезок HO в отношении 2 : 1 (рис. 79). Гомотетия с центром I_0 и коэффициентом $1/3$ переводит центр I вписанной окружности T в M, а гомотетия с центром O_0 и коэффициентом -3 переводит M в H. Так как композиция этих гомотетий есть центральная симметрия с центром O_1, O_1 — середина IH.

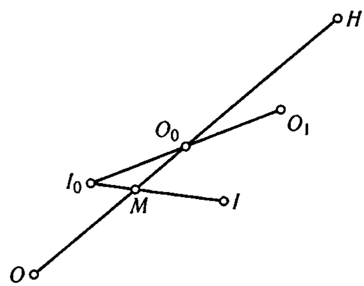


Рис. 79

20. (*А. Заславский*) Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 — ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ и т. д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке. (10—11 *класс*)

Решение. Докажем сначала, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, пересекаются в одной точке. Пусть X — точка пересечения окружностей 9 точек треугольников ACD и BCD, отличная от середины AB; Y, Z, U — середины AC, BC, CD. Тогда

$$\angle YXZ = \angle YXU + \angle XUZ = \angle DCA + \angle BDC = \angle BCD,$$

т. е. X лежит на окружности 9 точек треугольника ABC. Аналогично X лежит и на окружности 9 точек треугольника ABD. Далее, так как окружности 9 точек треугольников CDA и ACB_1 совпадают, точка X лежит также на окружностях 9 точек треугольников ABB_1 и CBB_1. Аналогично она лежит на окружностях 9 точек треугольников ABA_1 и BCC_1, а значит, и на окружностях 9 точек треугольников A_1B_1B, BB_1C_1 и $A_1B_1C_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Более короткое решение можно получить, используя следующий факт.

Пусть точки U, V, W лежат на равносторонней гиперболе. Тогда ортоцентр треугольника UVW также лежит на этой гиперболе, а его окружность 9 точек проходит через её центр.

Действительно, проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D, получим, что все окружности проходят через её центр.

21. (*А. Заславский*) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство

$$S_{ABC} \cdot S^2_{A'B'C'} \geqslant 4S_{AB'C'} \cdot S_{BC'A'} \cdot S_{CA'B'},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке. (10—11 *класс*)

Решение. Обозначим $P_1 = AB' \cdot BC' \cdot CA'$, $P_2 = BA' \cdot AC' \cdot CB'$. Нетрудно убедиться, что $S_{A'B'C'} = (P_1 + P_2)/4R$, где R — радиус описанной окружности ABC, и, следовательно,

$$\frac{S_{AB'C'} \cdot S_{BC'A'} \cdot S_{CA'B'}}{S_{ABC} \cdot (S_{A'B'C'})^2} = \frac{P_1P_2}{(P_1 + P_2)^2} \leqslant \frac{1}{4},$$

причём равенство возможно лишь при $P_1 = P_2$, что равносильно пересечению прямых AA', BB' и CC' в одной точке.

22. (*А. Заславский*) Дана окружность, точки A, B на ней и точка P. Пусть X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения прямых AX и BP. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников PXY. (10–11 *класс*)

Решение. Пусть Q — отличная от X точка пересечения окружностей ABX и PXY. Тогда

$$\angle ABQ = \angle AXQ = \angle YXQ = \angle YPQ = \angle BPQ.$$

Значит,

$$\angle BQP = \pi - (\angle BPQ + \angle QBP) = \pi - \angle ABP$$

и, следовательно, $\angle BQP$ не зависит от выбора точки X. Поэтому все окружности PXY проходят через Q и их центры лежат на серединном перпендикуляре к PQ.

23. (*А. Мякишев*) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, G — центр тяжести его как однородной пластины (т. е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Докажите, что точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$. (9–10 *класс*)

б) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырёхугольника назовём точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырёхугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырёхугольника пополам.) Докажите, что N, G, I лежат на одной прямой, причём $NG : GI = 2 : 1$. (10–11 *класс*)

Решение.

а) Пусть M_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD. Центроиды и ортоцентры остальных трёх треугольников обозначим аналогично. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырёхугольник $M_aM_bM_cM_d$ переходит в четырёхугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 3. Соответственно, точки пересечения диагоналей этих четырёхугольников переходят друг в друга.

б) Обозначим через M_1 центр тяжести периметра четырёхугольника. Точка G лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении $2 : 1$. Действительно, M_1 — это центр тяжести четырёх точек, помещённых в середины сторон четырёхугольника с массами, пропорциональными их длинам, а G — центр тяжести четырёх точек, помещённых в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA с массами, пропорциональными площадям этих треугольников. Очевидно, две этих системы точек гомотетичны с центром I и коэффициентом $2/3$.

Пусть a, b, c, d — длины касательных к вписанной окружности из вершин A, B, C, D. Очевидно, что если поместить в A, B, C, D массы a, b, c, d, то центром тяжести полученной системы будет точка N, а если поместить в вершины массы $2a+b+d$, $2b+a+c$, $2c+b+d$, $2d+c+a$, то точка M_1. Осталось показать, что I — центр тяжести масс $b+d$, $a+c$, $b+d$, $a+c$.

Точка I удовлетворяет соотношению $S_{IAB} - S_{IBC} + S_{ICD} - S_{IDA} = 0$. Этому же соотношению удовлетворяют середины U и V диагоналей четырёхугольника. Следовательно, эти три точки лежат на одной прямой (это утверждение называется *теоремой Монжа*). Пусть теперь X, Y — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AD. Тогда прямая XY образует равные углы с этими сторонами и по теореме Брианшона проходит через точку L пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам LXB и LYD, получим, что $BL/DL = b/d$. Аналогично $AL/CL = a/c$. Отсюда и из соотношений

$$\frac{S_{UBC}}{S_{UAD}} = \frac{BL}{DL}, \quad \frac{S_{VBC}}{S_{VAD}} = \frac{CL}{AL}, \quad \frac{S_{IBC}}{S_{IAD}} = \frac{b+c}{a+d}$$

вытекает, что I делит отрезок AC в отношении $(a+c)/(b+d)$, что и требуется.

24. (*Фольклор*)

а) Через фиксированную точку P внутри данной окружности проводятся два перпендикулярных луча, пересекающие окружность в точках A и B. Найдите геометрическое место проекций P на прямые AB. (9–10 *класс*)

б) Через фиксированную точку P внутри данной сферы проводятся три попарно перпендикулярных луча, пересекающие сферу в точках A, B, C. Найдите геометрическое место проекций точки P на плоскости ABC. (10–11 *класс*)

Решение.

а) Пусть P_1 — точка, симметричная P относительно прямой AB, P_2 — точка, симметричная P относительно середины отрезка AB. Тогда треугольники ABP_1 и ABP_2 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, следовательно, $OP_1 = OP_2$. Так как $APBP_2$ — прямоугольник, то $OA^2+OB^2=OP^2+OP_2^2$, т. е. расстояние OP_2 не зависит от выбора лучей PA, PB. Следовательно, точки P_1, P_2 лежат на окружности с центром O, а проекция P на AB — на окружности вдвое меньшего радиуса с центром в середине отрезка OP.

б) Достроим пирамиду $PABC$ до прямоугольного параллелепипеда $PAC'BCB'P'A'$. Аналогично п. а) получаем, что $OP'^2=3R^2-2OP^2$, т. е. точка P' лежит на сфере с центром O. Так как центр тяжести M треугольника ABC лежит на отрезке PP' и делит его в отношении $1:2$, M лежит на сфере, центром которой является точка, лежащая на отрезке OP и делящая его в отношении $2:1$. Далее, проекцией O на плоскость ABC является центр O' описанной около треугольника ABC окружности, а проекцией P — его ортоцентр H. Так как M лежит на отрезке $O'H$ и $MH=2MO'$, то $MK=KH$, т. е. искомым ГМТ будет сфера с центром K и радиусом, равным $\sqrt{3R^2-2OP^2}/3$.

25. (*А. Заславский*) В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах BC, CD и DA равны α, а при остальных рёбрах — β. Найдите отношение AB/CD. (11 *класс*)

Решение. Из условия следует равенство трёхгранных углов в вершинах A и B, C и D. Следовательно,

$$\angle CBD=\angle CBA=\angle DAC=\angle DAB,$$
$$\angle ADB=\angle CDB=\angle DCA=\angle BCA,$$

и все грани тетраэдра подобны. При этом

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}=\frac{BD}{CD}=\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BAD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Значит,

$$\frac{AB}{CD}=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^3.$$

26. (*Д. Терешин*) Даны четыре конуса с общей вершиной и образующей одинаковой длины (но, возможно, с разными радиусами оснований). Каждый из них касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности. (11 *класс*)

Решение. Окружности оснований конусов лежат на сфере с центром в вершине конусов и радиусом, равным их образующей. Инверсия с центром в любой точке этой сферы переводит её в плоскость, а окружности — в окружности на этой плоскости, каждая из которых касается двух других. Из теоремы об угле между касательной и хордой сразу следует, что четыре точки касания лежат на одной окружности, которой соответствует окружность на сфере.

Финальный тур

8 класс

1. (*И. Ященко*) Впишите в данный полукруг правильный треугольник наибольшего периметра.

Решение. Очевидно, что вписать треугольник в полукруг можно двумя способами: либо две вершины треугольника лежат на дуге, а третья на диаметре полукруга, либо, наоборот, две вершины на диаметре, а третья на дуге. Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B лежат на дуге. Тогда серединный перпендикуляр к AB проходит через центр полукруга. Следовательно, третья вершина совпадает с центром, и сторона треугольника равна радиусу полукруга (рис. 80).

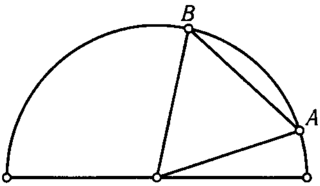


Рис. 80

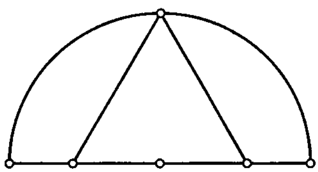


Рис. 81

Во втором случае высота треугольника не превосходит радиуса полукруга, причём в случае, изображённом на рис. 81, равенство достигается. Следовательно, именно этот треугольник и будет искомым.

2. (*Б. Френкин*) При каком наименьшем n существует n-угольник, который можно разрезать на треугольник, четырёхугольник, ..., 2006-угольник?

Ответ. $n = 3$.

Решение. Из рис. 82 видно, что при любом $n \geqslant 3$ треугольник можно разрезать на n-угольник и $(n+1)$-угольник. Следовательно, можно лучами, выходящими из одной вершины, разрезать треугольник на

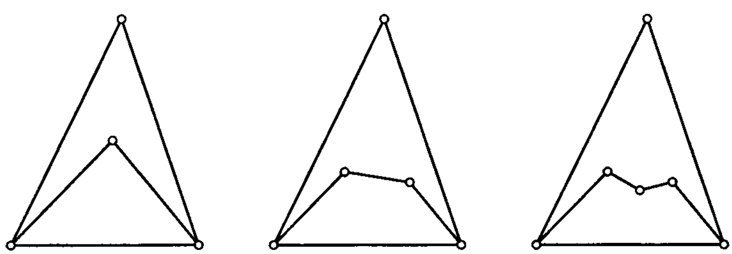


Рис. 82

1002 треугольника, а затем первый из них разрезать на треугольник и четырёхугольник, второй на пятиугольник и шестиугольник, ..., последний — на 2005-угольник и 2006-угольник.

3. (*В. Протасов*) Дан параллелограмм $ABCD$. Две окружности с центрами в вершинах A и C проходят через D. Прямая l проходит через D и вторично пересекает окружности в точках X, Y. Докажите, что $BX = BY$.

Решение. Рассмотрим, например, случай, изображённый на рис. 83. Имеем $AX = AD = BC$ и $CY = CD = AB$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \angle BCY &= \angle C - \angle DCY = \angle C - (\pi - 2\angle CDY) = \\ &= 2\angle CDY - \angle D = \angle CDY - \angle ADX, \\ \angle BAX &= \angle DAX - \angle A = \pi - 2\angle ADX - \angle A = \\ &= \angle D - 2\angle ADX = \angle CDY - \angle ADX. \end{aligned}$$

Значит, треугольники ABX и CYB равны, откуда и следует искомое равенство. Другие случаи расположения точек X, Y рассматриваются аналогично.

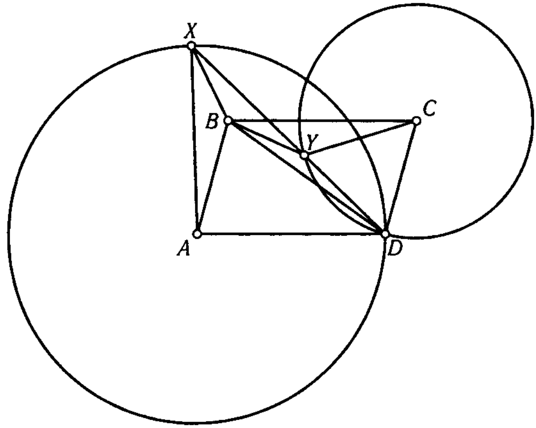


Рис. 83

4. (*А. Заславский*) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Пусть P — отличная от A и B точка одной из окружностей, X, Y — вторые точки пересечения прямых PA, PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

Решение. Рассмотрим случай, когда P лежит внутри второй окружности (рис. 84). Пусть Q — точка пересечения прямой, проходящей через P и перпендикулярной AB, лежащая вне первой окружности. Тогда

$$\angle QPX = \frac{\smile QX + \smile AP}{2}, \quad \angle QPY = \frac{\smile QY + \smile BP}{2}.$$

Но

$$\frac{\smile AP - \smile BP}{2} = \angle PBA - \angle PAB = \angle QPX - \angle QPY,$$

следовательно, дуги QX и QY равны. Другие случаи рассматриваются аналогично.

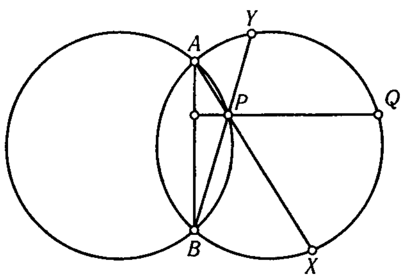


Рис. 84

5. (*В. Гуровиц, Б. Френкин*) Существует ли выпуклый многоугольник, у которого каждая сторона равна какой-нибудь диагонали, а каждая диагональ — какой-нибудь стороне?

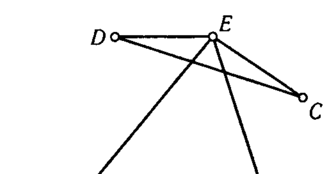


Рис. 85

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное, и пусть AB — наибольшая сторона многоугольника, CD — наименьшая диагональ (AB и CD могут иметь один общий конец), E — вершина, лежащая от CD по другую сторону, чем A и B (рис. 85). Тогда так как $AE \leqslant AB$ и $BE \leqslant AB$, то $\angle AEB \geqslant 60^\circ$. С другой стороны, так как $CE \geqslant CD$ и $DE \geqslant CD$, то $\angle CED \leqslant 60^\circ$. Но $\angle CED > \angle AEB$ — противоречие.

6. (*М. Волчкевич*) Дан треугольник ABC и точка P внутри него. A', B', C' — проекции P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что центр

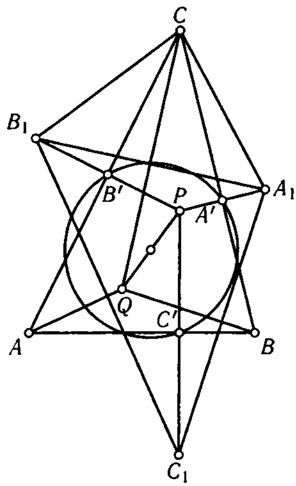


Рис. 86

окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Так как $CA_1 = CP = CB_1$, то серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1 совпадает с биссектрисой $\angle A_1CB_1$. Так как $\angle A_1CB_1 = 2\angle ACB$, эта биссектриса проходит внутри $\angle ACB$ (рис. 86). Аналогично серединные перпендикуляры к отрезкам A_1C_1 и B_1C_1 проходят внутри соответствующих углов треугольника ABC. Следовательно, центр Q окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, лежит внутри треугольника ABC. Так как треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом $1/2$, то центр окружности, описанной около $A'B'C'$, совпадает с серединой отрезка PQ и, значит, лежит внутри ABC.

9 класс

1. (*В. Протасов*) Дана окружность радиуса R. Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R, касаются её изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.

Решение. Пусть O — центр внешней окружности, O_1, O_2 — центры внутренних, A, B — точки касания. Проведём через O_1 прямую,

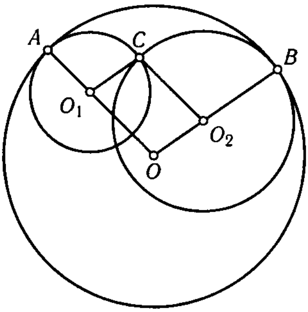


Рис. 87

параллельную OB, а через O_2 прямую, параллельную OA. По теореме Фалеса эти прямые пересекутся в точке C, лежащей на отрезке AB. При этом

$$O_1C = O_1A \quad \text{и} \quad O_2C = O_2B,$$

так что точка C принадлежит обеим внутренним окружностям (рис. 87).

2. (*В. Протасов*) Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри неё. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC, касаются некоторой фиксированной окружности.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, O' — центр окружности, проходящей через середины сторон ABC, P — центр тяжести ABC. Поскольку вершины треугольника ABC переходят в середины его сторон при гомотетии с центром P и коэффициентом $-1/2$, то P лежит на отрезке OO' и делит его в отношении $2:1$. Кроме того, так как множество середин хорд, проходящих через M, — это окружность с диаметром OM, множество центров тяжести треугольников ABC тоже окружность, получающаяся из неё гомотетией с центром A и коэффициентом $2/3$. Значит, множество точек O' также окружность (рис. 88).

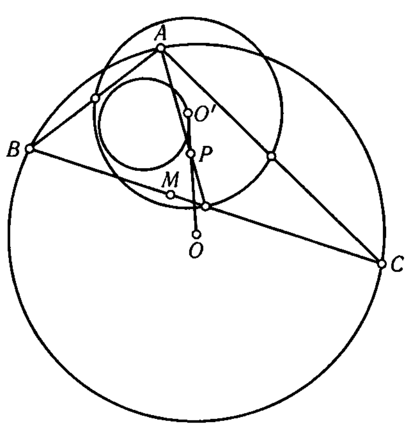


Рис. 88

Поскольку радиусы всех окружностей, проходящих через середины сторон ABC, равны половине радиуса данной окружности, все эти окружности касаются двух окружностей, концентричных с окружностью, на которой лежат точки O' (если точка M совпадает с O, одна из этих окружностей вырождается в точку).

3. (*А. Акопян*) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке AA_1 взята такая точка A', что

$$\frac{AA'}{A_1A'} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично строим B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.

Решение. Подобие, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, можно представить как композицию симметрии относительно прямой l и гомотетии с центром в некоторой точке, лежащей на l, и коэффициентом k, равным отношению соответствующих сторон треугольников. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 делятся l в отношении, равном k, т. е. точки A', B', C' лежат на l.

4. (*С. Маркелов*) В невыпуклом шестиугольнике каждый угол равен либо 90, либо 270 градусам. Верно ли, что при некоторых длинах сторон его можно разрезать на два подобных ему и неравных между собой шестиугольника?

Решение. Пусть t — корень уравнения $t^4 + t^2 = 1$. Возьмём шестиугольник $ABCDEF$, в котором

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AF} = \frac{AF}{FE} = \frac{FE}{ED} = \frac{1}{t},$$

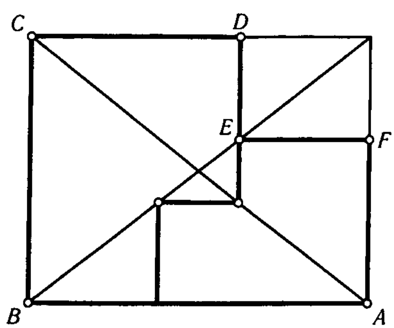


Рис. 89

и разрежем его, как на рис. 89. Тогда получившиеся шестиугольники подобны $ABCDEF$ с коэффициентами t и t^2.

5. (*А. Заславский*) Прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот неравностороннего треугольника ABC, делит его периметр и площадь в одном и том же отношении. Найдите это отношение.

Ответ. 1 : 1.

Решение. Прежде всего докажем, что прямая делит периметр и площадь треугольника в одном отношении тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности. Действительно, пусть прямая пересекает стороны AC, BC в точках X, Y, а биссектрису угла C в точке J; d_1 — расстояние от J до стороны AB, d_2 — расстояние от J до двух других сторон. Значит,

$$2S_{CXY} = (CX + CY)d_2,$$
$$2S_{AXYB} = (AX + BY)d_2 + AB \cdot d_1,$$

и отношения равны тогда и только тогда, когда $d_2 = d_1$, т. е. J — центр вписанной окружности.

Пусть теперь центр описанной окружности O, центр вписанной окружности I и ортоцентр H лежат на одной прямой. Эта прямая содержит не более одной вершины треугольника. Пусть она не проходит через вершины A и B. Так как AI, BI — биссектрисы углов HAO, HBO, получаем, что

$$\frac{AH}{AO} = \frac{HI}{IO} = \frac{BH}{BO}.$$

Так как $AO = BO$, то $AH = BH$, т. е. треугольник ABC равнобедренный и искомое отношение равно 1 : 1.

6. (*Я. Ганин, Ф. Ридо*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что в четырёхугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие диагонали делятся точками пересечения в одном и том же отношении.

Решение. Используем следующее утверждение.

Пусть $KLMN$ — выпуклый четырёхугольник; точки X, Y делят отрезки KL и NM в отношении α; точки U, V делят отрезки LM и KN в отношении β. Тогда точка пересечения отрезков XY и UV делит первый из них в отношении β, а второй — в отношении α (рис. 90).

Доказательство этого утверждения легко получить методом масс.

Пусть теперь A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести треугольников BCD, CDA, DAB, ABC; A_2, B_2, C_2, D_2 — центры описанных около них окружностей. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырёхугольнику $ABCD$ относительно его центра тяжести с коэффициентом $-1/3$. Следовательно, соответствующие диагонали этих четырёхугольников делятся точками пересечения в одинаковых отношениях. Докажем, что в тех же отношениях делят друг друга диагонали четырёхугольника $A_2B_2C_2D_2$.

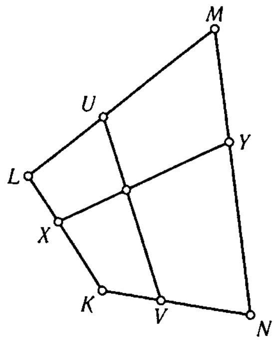


Рис. 90

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AP}{BP}\frac{BP}{CP} = \frac{\sin\angle ABD\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC\cdot\sin\angle CBD}.$$

Поскольку стороны и диагонали четырёхугольника $A_2B_2C_2D_2$ перпендикулярны сторонам и диагоналям четырёхугольника $ABCD$ (например, точки A_2, B_2 лежат на серединном перпендикуляре к CD), в таком же отношении делится и диагональ A_2C_2.

Пусть теперь P_1, P_2 — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$; P' — точка на отрезке $A'C'$, делящая его в отношении A_2P_2/P_2C_2. Так как точки A_1, C_1 лежат на отрезках $A'A_2$, $C'C_2$ и делят их в отношении $2:1$, из сформулированного утверждения вытекает, что точка P_1 также делит отрезок $P'P_2$ в отношении $2:1$. Рассмотрев аналогичную точку на отрезке $B'D'$, получим тот же результат. Отсюда следует, что P' — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $A'B'C'D'$, причём диагонали делятся этой точкой в том же отношении, что и в четырёхугольниках $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$.

10 класс

1. (*Гиацинты*) Пять прямых проходят через одну точку. Докажите, что существует замкнутая пятизвенная ломаная, вершины и середины звеньев которой лежат на этих прямых, причем на каждой прямой лежит ровно по одной вершине.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых. Возьмём на прямой l_1 точку A_1 и найдём на l_3 такую точку A_2, что середина B отрезка A_1A_2 лежит на прямой l_2 (рис. 91). Применяя теорему синусов к треугольникам OA_1B и OA_2B, получаем, что

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{\sin\angle A_1OB}{\sin\angle A_2OB}.$$

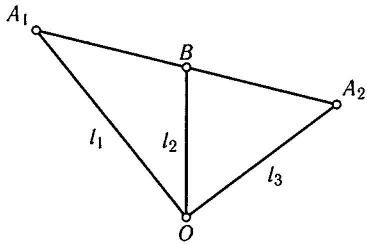


Рис. 91

Аналогично по точке A_2 построим на прямой l_5 такую точку A_3, что середина отрезка A_2A_3 лежит на l_4 и т. д. Перемножив полученные соотношения, получим, что A_6 совпадает с A_1.

2. (*А. Заславский*) Проекции точки X на стороны четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной окружности; Y — точка, симметричная X относительно центра этой окружности. Докажите, что проекции точки B на прямые AX, XC, CY, YA также лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим случай, когда X лежит внутри $ABCD$, остальные разбираются аналогично. Пусть K, L, M, N — проекции X на AB, BC, CD, DA; K', L', M', N' — точки, симметричные X относительно этих прямых. Так как K, L, M, N лежат на окружности, то K', L', M', N' также лежат на окружности. Так как $BK' = BX = BL'$, серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$ проходит через B и является биссектрисой угла $K'BL'$, т. е. симметричен BX относительно биссектрисы угла B. Следовательно, четыре прямые, симметричные прямым, соединяющим X с вершинами $ABCD$, относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке X', являющейся центром описанной окружности четырёхугольника $K'L'M'N'$. При этом центром окружности $KLMN$ будет середина отрезка XX', и, значит, X' совпадает с Y. Далее, так как четырёхугольники $XKBL$, $XLCM$, $XMDN$, $XNAK$ вписанные, то

$$\begin{aligned}\angle AXB + \angle CXD &= \angle KXA + \angle KXB + \angle CXM + \angle DXM = \\ &= \angle KNA + \angle BLK + \angle CLM + \angle MND = \\ &= (\pi - \angle KLM) + (\pi - \angle MNK) = \pi.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что прямые XB и DX симметричны относительно биссектрисы угла AXC. Аналогично прямые YB и DY симметричны относительно биссектрисы угла AYC. Кроме того, как уже было показано, совпадают биссектрисы углов BAD и XAY, BCD и XCY. Таким образом,

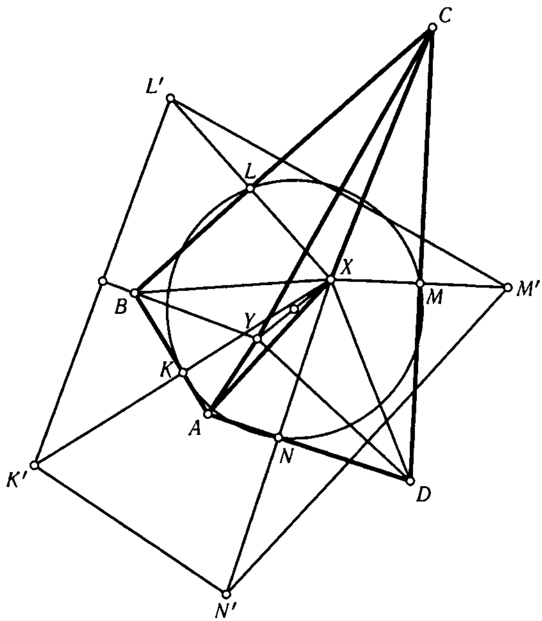


Рис. 92

прямые, симметричные BA, BX, BC, BY относительно биссектрис соответствующих углов $AXCY$, пересекаются в точке D. Отсюда, рассуждая аналогично началу решения, получаем утверждение задачи (рис. 92).

3. (*П. Кожевников*) Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Решение. Пусть X — точка пересечения касательных. Проведём окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно неё. При этой инверсии окружности, касающиеся в точке P, перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух прямых, переходящих в себя. Следовательно, исходная окружность перейдёт в себя. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т. е. касательная из X к исходной окружности равна XP, и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т. е. искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

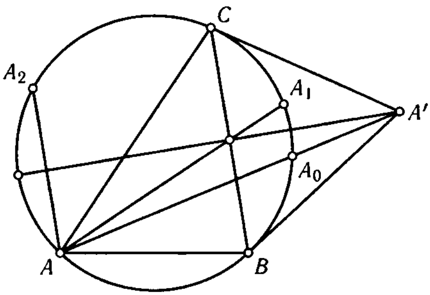


Рис. 93

4. (*А. Заславский*) Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают её же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. (*М. Илюхина*) Пусть A' — точка пересечения касательных к описанной окружности ω в точках B и C (аналогично построим точки B' и C'). Тогда, как известно, прямая AA' является симедианой треугольника ABC (т. е. прямой, симметричной AA_1 относительно биссектрисы угла A). Пусть прямая AA' вторично пересекает ω в точке A_0. Тогда $\angle A_1AB = \angle A_0AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны.

Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω — его вневписанная окружность, то дуги симметричны относительно биссектрисы l угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что l — серединный перпендикуляр к BC, поэтому A при этой симметрии переходит в A_2 (рис. 93), а следовательно, прямая A_1A_2 переходит в прямую AA'. Поэтому, так как прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC, то прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 также пересекаются в точке, изогонально сопряжённой L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A', B', C' не существует, аналогичен.

5. (*С. Маркелов*) Может ли развёртка тетраэдра оказаться треугольником со сторонами 3, 4 и 5 (тетраэдр можно резать только по рёбрам)?

Ответ. Да.

Решение. Например, можно склеить тетраэдр из развёртки, показанной на рис. 94 (меньший катет разделён на три равные части, а гипотенуза в отношении 4 : 1). Нетрудно убедиться, что каждый из трёх углов, на которые делится меньший угол треугольника, меньше суммы двух других; следовательно, из такой развёртки действительно можно склеить тетраэдр.

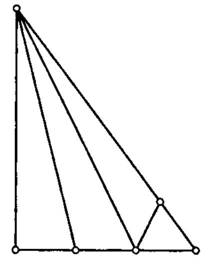


Рис. 94

6. (*А. Заславский*) На доске был нарисован четырёхугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность. В нём отметили центры этих окружностей и точку пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, после чего сам четырёхугольник стёрли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

Решение. Построение основано на двух леммах.

Лемма 1. *Диагонали всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность с центром O и описанных около данной окружности с центром I, пересекаются в одной и той же точке L, лежащей на продолжении отрезка OI за точку I.*

Лемма 2. *Центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей (теорема Монжа).*

Отметим также, что в любом четырёхугольнике точка M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, делит пополам отрезок между серединами диагоналей.

Из леммы 1 следует, что середины диагоналей искомого четырёхугольника лежат на окружности с диаметром OL. Отсюда и из леммы 2 получаем, что точка M лежит на окружности, диаметрально противоположными точками которой являются I и середина OL. Поэтому, проведя через M прямую, перпендикулярную IM, и найдя точку её пересечения с OI, мы получим середину OL, а значит, и саму точку L. Далее, построив окружность с диаметром OL и найдя её точки пересечения с прямой MI, получим середины диагоналей четырёхугольника. Кроме того, рассмотрев четырёхугольник, две вершины которого лежат на прямой OI, нетрудно убедиться, что XI — биссектриса $\angle OXL$ (рис. 95). Это даёт возможность восстановить описанную окружность четырёхугольника и найти его вершины как точки пересечения этой окружности с диагоналями.

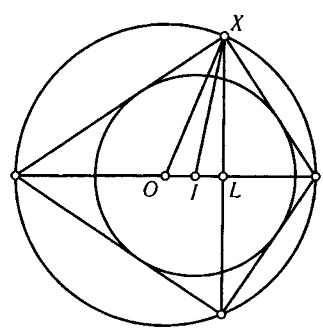


Рис. 95

Третья олимпиада (2007)

Заочный тур

1. Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные — равносторонние. Найдите углы исходного треугольника. (8 *класс*)

2. Каждая диагональ четырёхугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что четырёхугольник — ромб? (8 *класс*)

3. Отрезки, соединяющие внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n-угольника с его вершинами, делят n-угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно? (8–9 *класс*)

4. Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарных пересечений биссектрис его углов лежат вне параллелограмма? (8 *класс*)

5. Невыпуклый n-угольник разрезали прямолинейным разрезом на три части, после чего из двух частей сложили многоугольник, равный третьей части. Может ли n равняться

а) пяти? (8 *класс*)

б) четырём? (8–10 *класс*)

6. а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т. е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (укажите все возможные значения) (8–9 *класс*)

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т. е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями? (10–11 *класс*)

7. Выпуклый многоугольник описан около окружности. Точки касания его сторон с окружностью образуют многоугольник с таким же набором углов (порядок углов может быть другим). Верно ли, что многоугольник правильный? (8–9 *класс*)

8. Три окружности проходят через точку P, а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой; A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. Точки A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны. (8–9 *класс*)

9. Два выпуклых четырёхугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы. (8–9 *класс*)

10. Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т. е. на каждой стороне или её продолжении лежит ровно одна из заданных точек). (8–9 *класс*)

11. Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае? (Найдите ответ с точностью до 0,1, радиус Земли считайте равным 6000 км.) (8–10 *класс*)

12. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$. (9–10 *класс*)

13. На стороне AB треугольника ABC взяты такие точки X, Y, что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку. (9–10 *класс*)

14. В трапеции с основаниями AD и BC, точки P и Q — середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$. (9–11 *класс*)

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть $A'B' \cap CC' = P$ и $A'C' \cap BB' = Q$. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$. (9–11 *класс*)

16. На сторонах угла взяты точки A, B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, другая — в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что M — середина PQ. (9–11 *класс*)

17. Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей? (9–11 *класс*)

18. Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности. (9–11 *класс*)

19. В угол A, равный α, вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. При каком наименьшем α возможно неравенство $S_{PAQ} < S_{BMC}$? (10–11 *класс*)

20. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трёх углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объём пирамиды. (11 *класс*)

21. На плоскости лежат три трубы (круговые цилиндры одного размера в обхвате 4 м). Две из них лежат параллельно и, касаясь друг друга по общей образующей, образуют над плоскостью тоннель. Третья, перпендикулярная к первым двум, вырезает в тоннеле камеру. Найдите площадь границы этой камеры. (11 *класс*)