900 ЗАДАНИЙ С ОТВЕТАМИ

ЕГЭ 2024

В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

- Задания профильного уровня с ответами
- Краткие теоретические сведения
- Решение типовых заданий

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ! * ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ! *

ВСЕ ТЕМЫ ЕГЭ

900 ЗАДАНИЙ С ОТВЕТАМИ

ЕГЭ

2024

В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ! ВСЕ ТЕМЫ ЕГЭ

МОСКВА
2023

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
К75

Об авторах:

В. В. Кочагин — кандидат педагогических наук,
учитель математики ГБОУ
«Школа № 1568 им. Пабло Неруды» г. Москвы

М. Н. Кочагина — кандидат педагогических наук,
доцент департамента математики и физики
Института цифрового образования ГАОУ ВО МГПУ

Кочагин, Вадим Витальевич.

К75 ЕГЭ 2024. Математика. Сборник заданий: 900 заданий с ответами / В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина. — Москва : Эксмо, 2023. — 288 с.— (ЕГЭ. Сборник заданий).

ISBN 978-5-04-185050-0

Книга предназначена для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.
Издание содержит:

- задания профильного уровня;
- краткие теоретические сведения по всем темам;
- решение типовых заданий;
- ответы ко всем заданиям.

Пособие будет полезно учителям математики, так как даёт возможность эффективно организовать учебный процесс и подготовку к экзамену.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-185050-0

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга адресована *учащимся 10—11 классов* для подготовки к единому государственному экзамену. Материал данного пособия представлен в виде разделов, соответствующих основным темам школьного курса математики, присутствующим в ЕГЭ. Для каждой темы предложены задания части 1 и части 2 профильного уровня, а также обобщающие контрольные работы. Ко всем заданиям приведены ответы.

Тренировочные задания позволят учащимся систематически, при прохождении каждой темы, готовиться к этому экзамену. Достаточно будет в 10—11-х классах решать задания из этого пособия параллельно с темой по математике, изучаемой на школьных уроках, а в конце 11-го класса, в качестве повторения, — варианты ЕГЭ по математике.

Данное пособие может использоваться совместно с любым учебником алгебры и начал анализа и геометрии для 10—11-х классов.

Книга также будет полезна *учителям математики*, так как дает возможность эффективно организовать подготовку учащихся к единому государственному экзамену непосредственно на уроках, в процессе изучения всех тем. Можно предложить несколько вариантов работы:

— включение заданий тестового характера в систему заданий для 10—11-х классов вместе со стандартными упражнениями учебника;

— использование заданий и контрольных работ на этапе обобщающего повторения по каждой теме или на этапе итогового повторения и подготовки к ЕГЭ в конце 11-го класса;

— контроль и коррекция знаний учащихся.

В структуре экзаменационной работы выделены две части, которые различаются по содержанию, форме записи ответа, степени сложности и числу заданий.

В данном учебном пособии также представлены две группы заданий. Формы записи ответов для разных заданий соответствуют формулировкам заданий в ЕГЭ.

Для каждого из заданий **части 1** ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Единицы измерений не пишут. В этом разделе содержатся задания базового уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа», а также задания из различных разделов математики с 5-го по 11-й класс.

Задания **части 2** требуют развернутого ответа. При оформлении решений обращают внимание на правильную запись хода решения, наличие обоснований и верный ответ. В эту группу включаются самые сложные задания по геометрии и алгебре 7—11-х классов повышенного и высокого уровней сложности.

Надеемся, что данное пособие поможет учителям математики эффективно организовать подготовку к ЕГЭ на своих уроках, а старшеклассникам — систематизировать знания по математике, самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ (10—11 классы)

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Теоретические сведения

Формулы одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in \boldsymbol{Z} \qquad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (6)$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (7)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (8)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (9)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (10)$$

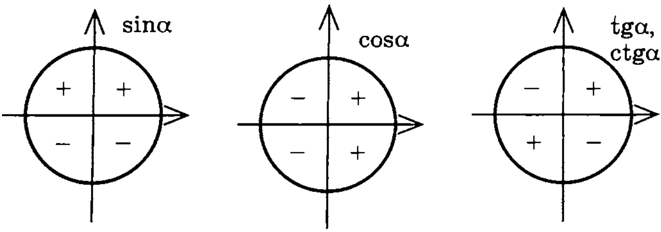
Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad (11)$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (13)$$

Знаки тригонометрических функций



Решение типовых заданий

Каждый год в ЕГЭ встречаются задания на применение формул приведения. Их применяют для преобразования выражений вида

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \sin(\pi+\alpha);\ \operatorname{tg}(270^\circ+\alpha);\ \operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)\ \text{и т.д.}$$

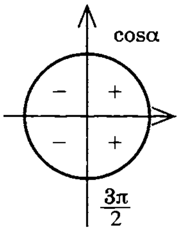
Преобразовывать подобные выражения помогает следующее правило: 1) находим четверть, в которой расположен угол, и определяем знак функции в этой четверти (угол α считаем углом I четверти); 2) меняем функцию на кофункцию, если аргументом служат углы $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$..., или не изменяем функцию, если аргументом служат углы $(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$...

Задание 1. Упростите выражение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Решение.

1) Угол $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ лежит в III четверти, где $\cos\alpha$ отрицателен.

2) Угол $\frac{3\pi}{2}$ находится на вертикальной оси, поэтому «киваем головой сверху вниз», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Да». Поэтому получаем $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.



Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 2. Упростите выражение $\sin(\pi - \alpha)$.

Решение.

1) Угол $\pi - \alpha$ лежит во II четверти, где $\sin\alpha$ положителен.

2) Угол π находится на горизонтальной оси $\pi = 180^\circ$, поэтому «киваем головой справа налево», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Нет». Поэтому получаем $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

Задание 3. Упростите выражение $\operatorname{tg}(90°+\alpha)$.

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Задание 4. Упростите выражение $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$.

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим более сложные случаи, когда сначала используется свойство четности тригонометрических функций ($\cos\alpha$ — четная функция, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — нечетные функции), а затем формулы приведения.

Задание 5. Упростите выражение $\sin(\alpha-\pi)$.

Решение. Сравним выражения из заданий 2 и 5. Чтобы применить формулы приведения, используем нечетность $\sin t$.

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 6. Упростите выражение $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 7. Упростите выражение $\operatorname{tg}(\alpha-270°)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}(\alpha-270°)=-\operatorname{tg}(270°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Задание 8. Упростите выражение $\operatorname{ctg}(\alpha - 360°)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 360°) = -\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = \operatorname{ctg}\ \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим следующую ситуацию, когда, прежде чем применить формулы приведения, необходимо уменьшить аргумент, используя свойство периодичнсти тригонометрических функций (наименьший положительный период $\sin\ \alpha$, $\cos\ \alpha$ равен 2π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные 2π; наименьший положительный период $\operatorname{ctg}\ \alpha$, $\operatorname{tg}\ \alpha$ равен π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные π).

Задание 9. Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1}.$$

Решение.

Когда надо преобразовывать выражения в числителе и знаменателе, удобно преобразовывать отдельно числитель, отдельно знаменатель.

В числителе:

$$\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) = \sin\left(4\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha.$$

В знаменателе: $\sin(\pi - \alpha) - 1 = \sin\alpha - 1$.

Разделим числитель на знаменатель, получим: $\frac{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 1}$. Выражения в числителе и знаменателе содержат один и тот же аргумент α, поэтому используем формулы одного аргумента (а именно: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$).

$$\frac{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(\sin\alpha - 1)} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Если сумма (разность) аргументов тригонометрических функций равна $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$ и т.д., то помогают формулы приведения.

Задание 10. Вычислите: $\cos^2 15° + \cos^2 75°$.

Решение.

Так как $15° + 75° = 90°$, то

$$\cos^2 15° + \cos^2 75° = \cos^2(90° - 75°) + \cos^2 75° = \\ = \sin^2 75° + \cos^2 75° = 1.$$

Ответ: 1.

Разобраться в обилии формул тригонометрии часто помогает сравнение аргументов тригонометрических функций, входящих в выражение.

Задание 11. Упростите выражение $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$.

Решение.

Аргументы числителя и знаменателя отличаются в 2 раза, значит, применим формулы двойного угла в числителе.

$$\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2\sin 2\beta \cos 2\beta}{\cos 2\beta} = 2\sin 2\beta.$$

Ответ: $2\sin 2\beta$.

В заданиях на преобразования выражений, содержащих степени с натуральными показателями, сначала применяют формулы сокращенного умножения.

Задание 12. Упростите выражение

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Решение.

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - (\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha)^2 = -1 - 1 = -2.$$

Ответ: -2.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите значение выражения $3\sin^2\beta + 10 + 3\cos^2\beta$.

2. Найдите значение выражения $16 - 6\sin^2\beta - 6\cos^2\beta$.

3. Вычислите: $\cos^2 15° + \cos^2 75°$.

4. Вычислите: $\cos^2 15° - \sin^2 75°$.

5. Упростите выражение $\dfrac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} - 2\sin 2\beta + 0,29$.

6. Вычислите:
$\left(\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{3}$ при $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

7. Дано: $\cos\beta = 0,8$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите: $\sin\beta$.

8. Дано: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{7}{24}$ и $180° < \beta < 270°$. Найдите: $\cos\beta$.

9. Дано: $\operatorname{ctg}\beta = -1\dfrac{1}{3}$. Найдите: $\cos 2\beta$.

10. Дано: $\cos\alpha = -0,6$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0,6$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\sin(\alpha - \beta)$.

11. Дано: $\cos\alpha = -0,6$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0,6$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\cos(\alpha + \beta)$.

12. Найдите значение выражения $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\sin\beta = 0,11$.

13. Найдите значение выражения $\sin(180° - \beta)$, если $\sin\beta = -0,24$.

14. Найдите значение выражения $\sin(270° - \beta)$, если $\cos\beta = -0{,}41$.

15. Найдите значение выражения $\cos(\beta - 270°)$, если $\sin\beta = 0{,}59$.

16. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$.

17. Найдите значение выражения $\cos^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}2$.

18. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)},$$

если $\operatorname{ctg}\alpha = 8$.

19. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1},$$

если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$.

1.2. Тригонометрические уравнения

Перед изучением данной темы полезно повторить теоретические сведения, изложенные в теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

Теоретические сведения

Общие формулы

$$\sin x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z \quad (1)$$

$$\cos x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z \quad (4)$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad (5)$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a \quad (6)$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad (7)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \quad (8)$$

Особые случаи

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad (9)$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z \quad (10)$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z \quad (11)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z \quad (12)$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \quad (13)$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \quad (14)$$

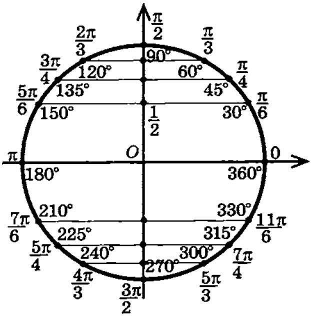
Находить значения арксинусов (арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов) некоторых углов помогает следующая таблица.

Угол / Значения	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
arcsin ↑	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccos ↑	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
arctg ↑	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
arcctg ↑	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Например: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

				$\frac{\pi}{3}=60°$	
arcsin ↑				$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Тригонометрический круг



Решение типовых заданий

Рассмотрим простейшие уравнения и на примере их решения покажем, как отвечать на дополнительные вопросы. Такие вопросы — еще одна особенность ЕГЭ по математике: обычно требуется не только решить тригонометрическое уравнение, но из полученного семейства решений выбрать те, которые удовлетворяют некоторым условиям.

Простейшие уравнения (дополнительные вопросы)

Задание 1. Решите уравнение $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е. По формуле (1) имеем:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\ k\in Z;\ x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k.$$

Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

При ответах на дополнительные вопросы удобнее представить решения в виде объединения двух семейств решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z\ (1), \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\ (2). \end{array}\right. \qquad (I)$$

Дополнительные вопросы к заданию 1.

А. *Найдите наименьший положительный корень.*

Выбираем наименьшее положительное решение из каждого семейства. Из (1) имеем $x = \dfrac{\pi}{3}$, из (2) $x = \dfrac{2\pi}{3}$. Наименьшим из них будет $\dfrac{\pi}{3}$.

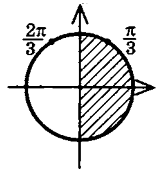
Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$ или $60°$.

Б. *Найдите наибольший отрицательный корень.*

При $k = -1$ из (1) имеем $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3}$. При $n = -1$ из (2) имеем $x = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{4\pi}{3}$. Наибольшим из них будет $-\dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{4\pi}{3}$ или $-240°$.

В. *Укажите те корни уравнения, для которых* $\cos x > 0$.



Отметим все решения уравнения (I) на тригонометрическом круге. Из этих решений надо выбрать те, для которых $\cos x > 0$. Известно, что $\cos x > 0$, если x лежит в I четверти или в IV четверти.

Получаем, что $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Г. *Укажите те корни, которые лежат в промежутке* $[-3\pi; -\pi]$.

Решим системы: $\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\pi, \\ k \in Z \end{cases}$ (1*)

и $\begin{cases} -3\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le -\pi, \\ n \in Z \end{cases}$ (2*).

Имеем (1*): $\begin{cases} -\frac{5}{3} \le k \le -\frac{2}{3}, \\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow k = -1$ и $x = -\frac{5\pi}{3}$.

(2*): $\begin{cases} -\frac{11}{6} \le n \le -\frac{5}{6}, \\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow n = -1$ и $x = -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$.

Д. *Сколько корней имеет уравнение на промежутке* $\left[-3\pi; \frac{\pi}{2}\right]$?

Решим системы: $\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{\pi}{2}, \\ k \in Z \end{cases}$ (1**)

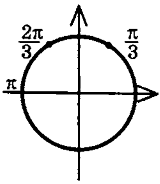
и

$\begin{cases} -3\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}, \\ n \in Z \end{cases}$ (2**).

Решением (1**) являются $k = -1$ и $k = 0$. Решением (2**) является $n = -1$. Таким образом, получаем $2 + 1 = 3$ корня.

Ответ: 3 корня.

Е. *Найти ближайший к π корень уравнения.*



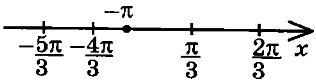
Отметим все корни уравнения (I) на тригонометрическом круге.

Искомым корнем является $\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Ж. *Между какими корнями заключено число* $-\pi$?

Отметим корни уравнения (I) на координатной прямой.



Ответ: $-\frac{4\pi}{3} < -\pi < \frac{\pi}{3}$.

Задание 2. Решите уравнение $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -1$.

Решение. При решении тригонометрических уравнений полезно упростить аргумент. В данном случае применить формулы приведения (см. «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в разделе 1.1). Имеем:

$\sin x + \sin x = -1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$.

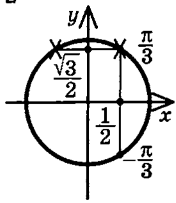
По формуле (1) для решения простейших уравнений

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Задание 3. Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.$

Решение. $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$



Отмечаем решения системы на тригонометрическом круге.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.$

Задание 4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0.$

Решение. $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi n,\ n \in Z, \\ \pi^2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n \quad (1), \\ x^2 < \pi^2 \quad (2). \end{cases}$

Решением неравенства (2) является промежуток $(-\pi\,;\,\pi)$. Отберем решения уравнения (1), принадлежащие промежутку $(-\pi\,;\,\pi)$. Это 0 и $\pm\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 0; $\pm\frac{\pi}{2}$.

При решении тригонометрических уравнений необходимо помнить, что функции tg t или ctg t существуют не при всех действительных значениях t.

Задание 5. Решите уравнение

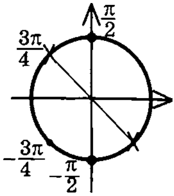
$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0.$$

Решение. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом существует.

$$\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1=0, \end{array}\right. \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z, \end{array}\right. \\ x\neq\dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z. \end{cases}$$

При решении системы используем тригонометрический круг.



Решение системы:

$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z.$

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z.$

Обратимся к более сложным уравнениям. Сначала рассмотрим общие методы решения уравнений, присущие как тригонометрическим, так и показательным и логарифмическим уравнениям, а затем обратимся к специальным методам, характерным только для тригонометрических уравнений.

Метод введения новой переменной

Задание 6. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos^2(\pi-x)-2\sin x+2=0$. Ответ запишите в градусах.

Решение. Упростим аргумент, применив формулы приведения: $\cos^2 x-2\sin x+2=0$. В левой части уравнения присутствуют две тригонометрические функции. Уменьшим количество функций.

Используем основное тригонометрическое тождество: $1-\sin^2 x-2\sin x+2=0$. Получим квадратное уравнение относительно $\sin x$.

Введем новую переменную. Пусть $a=\sin x$, $-1\le a\le 1$ (*), тогда уравнение примет вид $a^2+2a-3=0$.

Решая квадратное уравнение, получим $a=-3$ или $a=1$. $a=-3$ не удовлетворяет условию (*).

Если $a=1$, то $\sin x=1$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. Вспомните, что необходимо указать в ответе.

Наибольший отрицательный корень получим при $k=1$. Он равен $\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3}{2}\pi$. Переведем в градусную меру, получим $-270°$.

Ответ: $-270°$.

Задание 7. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\cos 2x=2 \text{ на отрезке } \left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]?$$

Решение. Сначала упростим аргумент, т.е. применим формулы приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\cos 2x=2,\ \sin x-3\cos 2x=2.$$

Далее сравним аргументы, так как аргументы $\sin x$ и $\cos 2x$ отличаются в два раза, применим формулы двойного угла (см. «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в разделе 1.1).

$$\sin x-3\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2.$$

Теперь в уравнении две функции. Уменьшим число функций.

$$\sin x-3\left(1-\sin^2 x-\sin^2 x\right)=2.$$

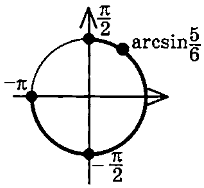
Пусть $a=\sin x$, $-1\le a\le 1$. Решим уравнение

$$6a^2+a-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=\dfrac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Получим: $\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ &x = (-1)^m \arcsin\frac{5}{6} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}\right.$

Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$. Так как длина отрезка $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ меньше 2π, то можно использовать не координатную прямую, а тригонометрический круг.

Этому отрезку принадлежат два корня: $-\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{5}{6}$.



Ответ: 2 корня.

Метод разложения на множители

Задание 8. Между какими корнями уравнения $\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1$ заключено число $\frac{5\pi}{12}$?

Решение. Сначала упростим аргумент, используя свойство четности (нечетности) функций ($\cos x$ — четная функция, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции).

$\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1,$

$\sin 2x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0.$

Сравним аргументы тригонометрических функций. Применим формулы двойного угла.

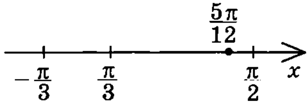
$$2\sin x\cos x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0,$$

$$\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0,$$

$$(2\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0.$$

Уравнение имеет следующие корни: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Отметим корни на координатной прямой.



Получим, что $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$.

Метод решения однородных уравнений

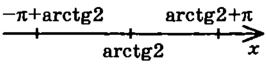
Задание 9. Найдите наименьшую длину отрезка, на котором есть два корня уравнения $\sin x - 2\cos x = 0$ (*).

Решение. Исходное уравнение является однородным уравнением 1-й степени, решается делением на $\cos x$ или на $\sin x$ ($\cos x \neq 0$, иначе $\cos x = 0$, и при подстановке в уравнение (*) получим, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Разделим обе части уравнения на $\cos x$ ($\cos x \neq 0$).

Получим: $\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$, $\mathrm{tg}\, x = 2$, $x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим корни уравнения на координатной прямой.



Наименьшая длина $\pi + \mathrm{arctg} 2 - \mathrm{arctg} 2 = \pi$.

Ответ: π.

Задание 10. Решите уравнение

$$1-\sin(-x)\cdot\cos x-3\cos^2(-x)=0.$$

Решение. Упростим аргумент, используя свойства четности $\cos x$ и нечетности $\sin x$. Получим:

$$1+\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0.$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0.$$
$$\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0.$$

Получим однородное уравнение 2-й степени, которое решается делением, например на $\cos^2 x$.

$$\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\, x-2=0.$$

Введем новую переменную $a=\mathrm{tg}\, x$. Получим, что

$$\mathrm{tg}\, x=1,\ \mathrm{tg}\, x=-2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in \boldsymbol{Z}; -\mathrm{arctg}\, 2+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}.$

Замечание. Уравнения $\cos x=-2$, $\sin x=-2$ не имеют решений, а уравнения $\mathrm{tg}\, x=-2$, $\mathrm{ctg}\, x=-2$ имеют бесконечное число решений.

Уравнения

$$\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0 \qquad (1)$$

и

$$\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x=0 \qquad (2)$$

являются однородными, но если уравнение (1) решается с помощью деления (на $\cos^2 x\neq 0$), то уравнение (2) решается с помощью разложения на множители (иначе можно потерять корни πm, $m\in \boldsymbol{Z}$), а только затем делением (например, на $\sin x\neq 0$).

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\sin x + 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.
2. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.
3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 6 = 0$. Ответ запишите в градусах.
4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos(2x) = 0{,}5$. Ответ запишите в градусах.
5. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ запишите в градусах.
6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = 1$. Ответ запишите в градусах.
7. Укажите число корней уравнения
$\sin 200x \cos 199x - \cos 200x \sin 199x = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 4\pi]$.
8. Укажите число корней уравнения
$\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x + \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.
9. Укажите ближайший к 0 корень уравнения
$2\sin x + 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.
10. Укажите ближайший к $\frac{\pi}{2}$ корень уравнения
$2\cos x + \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.
11. Укажите ближайший к π корень уравнения
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ запишите в градусах.
12. Укажите ближайший к π корень уравнения
$\sin x = \frac{-3}{2\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

13. Укажите число корней уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые лежат в промежутке $[0;\ 3\pi]$.

14. Укажите количество корней уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, которые лежат в промежутке $[-\pi;\ 2\pi]$.

15. Укажите число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

16. Укажите число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[\pi;\ 2\pi]$.

17. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Укажите ближайший к $\frac{\pi}{6}$ корень уравнения $\cos(4x) = 1$. Ответ запишите в градусах.

19. Найдите сумму корней уравнения $\cos(x + 2000\pi) = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

20. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(2x - 10°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

21. Решите уравнение $\cos(\pi x) = 1$. В ответе укажите произведение корней уравнения, принадлежащих промежутку $(1;\ 6)$.

22. Решите уравнение $\sin(\pi x) = 1$. В ответе укажите сумму корней уравнения, принадлежащих промежутку $(1;\ 6)$.

23. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$. Ответ запишите в градусах.

24. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$. Ответ запишите в градусах.

25. Определите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$ из промежутка $[0;\ 2\pi]$.

26. Определите число корней уравнения $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$ из промежутка $[0;\ 2\pi]$.

27. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2$ на промежутке $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

28. Сколько корней имеет уравнение

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos 2x = 2$ на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

29. Укажите наименьший положительный корень уравнения $(\cos x - 2)\sin \pi x = 0$.

30. Укажите корень уравнения $\left(\sin 2x + \sqrt{2}\right)\cos \pi x = 0$, принадлежащий промежутку $[2;\ 3]$.

31. Укажите корень уравнения $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащий промежутку $(0;\ \pi)$. Ответ запишите в градусах.

32. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos(2x) = 2$. Ответ запишите в градусах.

33. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\cos^2(\pi - x) + 5\sin x - 4 = 0$. Ответ запишите в градусах.

34. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(2x) + 5\cos(-x) + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.

35. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0,$$

принадлежащих промежутку $[-\pi;\ \pi]$. Ответ запишите в градусах.

36. Укажите число корней уравнения

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3},$$

принадлежащих промежутку $[-\pi;\ 2\pi]$.

37. Укажите наименьший положительный корень уравнения $3\cos x + \sin(-2x) = 0$. Ответ запишите в градусах.

38. С помощью графиков укажите число корней уравнения $\sin(2x) = x$.

39. С помощью графиков укажите число корней уравнения $\cos x = 10x$.

40. Укажите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,$

принадлежащих промежутку $[-2\pi;\ 0]$.

41. Укажите число корней уравнения
$6\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 2$, принадлежащих промежутку $[-\pi;\ 0]$.

42. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg} x$ из промежутка $\left[0;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

43. Решите уравнение $4\cos x = x^2 + 4$.

44. Решите уравнение $\sin\left(\frac{37\pi}{2}+x\right)=3x^2+1$.

45. Найти наибольший отрицательный корень уравнения: $(2\cos x-1)\cdot\sqrt{\sin x}=0$. Ответ запишите в градусах.

46. Найдите сумму различных корней уравнения
$\cos x \cos(5x) = \cos(6x)$, принадлежащих промежутку $[0;\ \pi]$. Ответ запишите в градусах.

47. Укажите число корней уравнения

$$\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0,$$

принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.

48. Найдите сумму корней уравнения $\sin(2x)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

49. Найдите сумму корней уравнения
$\sin(2\pi x) + 6\cos(\pi x) = 3 + \sin(\pi x)$, принадлежащих промежутку $[-20;\ 20]$.

50. Найдите сумму корней уравнения
$\cos(2\pi x) - 3\sin(\pi x) + 1 = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 20]$.

51. Решите уравнение $x^2 + y^2 + \cos^2 x = 2xy$.

52. Решите уравнение $\dfrac{42x^2 + \pi x - \pi^2}{\sqrt{\sin x + 1}} = 0$.

53. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{\sin x} - 1}{2\pi x - \pi^2} = 0$.

54. Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \sin x}{4x - \pi} = 0$.

55. Решите уравнение $\dfrac{3\cos x + \cos 2x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$.

56. Решите уравнение $\dfrac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{3\cos x + \cos 2x - 1} = 0$.

57. Решите уравнение $\dfrac{12\operatorname{ctg} x - 5}{13\sin x - 12} = 0$.

58. Решите уравнение $\dfrac{13\sin x - 12}{12\operatorname{ctg} x - 5} = 0$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Дано: $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\sin\alpha$.

2. Какое число из промежутка $(0;\ 1{,}4)$ не входит в область определения функции $y = \operatorname{tg}(\pi x)$?

3. Найдите наименьшее значение функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\cos 61°$.

5. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos(\pi - x) - \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$, если $\operatorname{ctg} x = 15$, $\operatorname{ctg} y = -13$.

7. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{15}{\sin x - 4}$.

8. Укажите число корней уравнения $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$.

9. Укажите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $(a - 2)\sin x = a^2 - 4$ имеет хотя бы одно решение.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Укажите корни уравнения
$0{,}5\sin 2x \operatorname{ctg} x - \cos x = \sin^2 x$, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

Вариант 2

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Дано: $\sin\beta = 0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найдите $\cos\beta$.

2. Какое число из промежутка (0,4; 1,8) не входит в область определения функции $y = \mathrm{ctg}(\pi x)$?

3. Найдите наименьшее значение функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\sin(-4°)$.

5. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\sin(\pi + x) - 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.

6. Найдите значение выражения $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$, если $\mathrm{tg}\, x = 19$, $\mathrm{tg}\, y = -17$.

7. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{15}{\sin x + 4}$.

8. Сколько корней имеет уравнение $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$?

9. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $(a + 4)\cos x = a^2 - 16$ имеет хотя бы одно решение.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Укажите число корней уравнения $0{,}5\sin(2x)\mathrm{tg}\, x - \sin x = \cos^2 x$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$.

2. АЛГЕБРА

2.1. Тождественные преобразования логарифмических выражений

Теоретические сведения

Определение. **Логарифмом числа b по основанию** a ($a > 0$; $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

$\lg b$ — обозначение десятичного логарифма, т.е. логарифма числа b по основанию 10, $\ln b$ — обозначение натурального логарифма, т.е. логарифма числа b по основанию e ($e \approx 2{,}7...$).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b \ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0).$$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$):

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

4) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

5) $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$

6) $\log_{a^q} b = \dfrac{1}{q} \cdot \log_a b,\ q \neq 0$

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1$

8) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $b \neq 1$

9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $c \neq 1$, $b \neq 1$

Решение типовых заданий

Задание 1. Найдите значение выражения $\log_{0,3}\dfrac{1}{0,09}$.

Решение.

Преобразуем выражение и используем определение логарифма:

$$\log_{0,3}(0,09)^{-1} = \log_{0,3}\left((0,3)^2\right)^{-1} = \log_{0,3}(0,3)^{-2} = -2.$$

Ответ: −2.

Задание 2. Найдите значение выражения $\log_2\log_2\sqrt[4]{2}$.

Решение.

Преобразуем выражение, начиная с внутреннего логарифма, и воспользуемся определением логарифма:

$$\log_2\log_2\sqrt[4]{2} = \log_2\log_2 2^{\frac{1}{4}} = \log_2\left(\frac{1}{4}\log_2 2\right) = \log_2\frac{1}{4} = -2.$$

Ответ: −2.

Для преобразования суммы (или разности) логарифмических выражений иногда достаточно использовать определение логарифма, а чаще свойства логарифма (3) и (4). Если основания логарифмов разные, то можно привести логарифмы к одному основанию и затем применить свойства (3) и (4).

Задание 3. Найдите значение выражения

$$\log_3 81 - \log_3 27.$$

Решение.

1-й способ. Используя определение логарифма, получим $\log_3 81 - \log_3 27 = 4 - 3 = 1$.

2-й способ. Используя свойство (4) логарифма, получим

$$\log_3 81 - \log_3 27 = \log_3 \frac{81}{27} = \log_3 3 = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Найдите значение выражения

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$

Решение.

Преобразуем выражение с помощью свойства (4) логарифма:

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81} = \log_3\left(15 : \frac{5}{9}\right) + \log_3 \frac{1}{81} =$$

$$= \log_3 27 + \log_3 \frac{1}{81} = 3 + (-4) = -1.$$

Ответ: −1.

Основное логарифмическое тождество используется при преобразовании выражений, содержащих логарифм в показателе степени. Идея таких преобразований заключается в получении равных основания степени и основания логарифма.

Задание 5. Найдите значение выражения $10^{1-\lg 5}$.

Решение.

Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$10^{1-\lg 5}=\frac{10^1}{10^{\lg 5}}=\frac{10}{5}=2.$$

Ответ: 2.

Задание 6. Вычислите: $\sqrt{5}^{\log_5 16}$.

Решение.

Преобразуем выражение, используя свойства степеней:

$$\sqrt{5}^{\log_5 16}=5^{\frac{1}{2}\log_5 16}=\left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя основное логарифмическое тождество, получим $\left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=4.$

Ответ: 4.

Задание 7. Найдите значение выражения $7^{\log_{\frac{1}{49}}\frac{1}{4}}$.

Решение.

Используя свойство (6) логарифма и основное логарифмическое тождество, получим

$$7^{\log_{\frac{1}{49}}\frac{1}{4}}=7^{\log_{(7)^{-2}}\frac{1}{4}}=\left(7^{\log_7\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2.$$

Ответ: 2.

Иногда можно легко перейти от одного основания логарифма к другому с помощью свойства логарифма (6), например от $\log_9 a$ к $0{,}5\log_3 a$, т. к. $(9=3^2)$. В других случаях следует использовать свойства (7) или (8).

Задание 8. Найдите значение выражения

$$\left(\log_5 36+\log_5 2-\log_5 8\right)\cdot\log_9\frac{1}{25}.$$

Решение.

Преобразовав выражение в скобках с помощью свойств (3) и (4), получим

$$\left(\log_5 36+\log_5 2-\log_5 8\right)=\log_5\frac{36\cdot 2}{8}=\log_5 9.$$

Используем формулу (7) перехода к новому основанию.

1-й способ.

$$\log_5 9\cdot\log_9\frac{1}{25}=\log_5 9\cdot\frac{\log_5\frac{1}{25}}{\log_5 9}=\log_5\frac{1}{25}=-2.$$

2-й способ.

$$\log_5 9\cdot\log_9\frac{1}{25}=\frac{\log_9 9}{\log_9 5}\cdot\log_9\frac{1}{25}=\frac{1\cdot\log_9\frac{1}{25}}{\log_9 5}=\log_5\frac{1}{25}=-2.$$

3-й способ. Используя свойство (5), получим

$$\log_5 9\cdot\log_9\frac{1}{25}=\log_5 9\cdot(-2)\log_9 5=-2.$$

Ответ: -2.

Задание 9. Найдите значение выражения

$$\log_3 12-\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4.$$

Решение.

Преобразуем вычитаемое с помощью применения дважды формулы перехода к новому основанию:

$$\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4=\log_3 7\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 7}\cdot\log_5 4=$$

$$=\log_3 5\cdot\log_5 4=\log_3 5\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}=\log_3 4.$$

Первоначальное выражение теперь имеет вид

$$\log_3 12 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

В заданиях, требующих выразить некоторое логарифмическое выражение через одно или два заданных значения логарифма, обычно надо использовать свойства логарифма произведения или частного (3) и свойство (8) перехода к новому основанию.

Задание 10. Чему равен $\lg 15$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение.

Выразим $\lg 15$ через $\lg 2$ и $\lg 3$, учитывая, что

$$15 = 3 \cdot 5 = 3\left(\frac{10}{2}\right).$$

$$\lg 15 = \lg(3 \cdot 5) = \lg 3 + \lg 5 = \lg 3 + \lg\left(\frac{10}{2}\right) =$$

$$= \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = b + 1 - a.$$

Ответ: $b + 1 - a$.

Наибольшую сложность представляют преобразования логарифмических выражений, находящихся под радикалом. В процессе преобразований приходится рассматривать модули логарифмических выражений, для раскрытия которых требуется сравнить иррациональные числа (например, $\log_2 3$ и $\log_3 2$) или рациональное и иррациональное числа (например, $\log_2 3$ и 1).

Задание 11. Представьте в виде разности логарифмов

$$\left(\left(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

Будем действовать последовательно. Рассмотрим выражение $\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2$. Перейдем к основанию 3:

$$\log_3^4 2+\log_2^4 3+2=\log_3^4 2+\frac{1}{\log_3^4 2}+2.$$

Приведем к общему знаменателю и применим формулу квадрата суммы двух выражений. Получим: $\left(\dfrac{\log_3^4 2+1}{\log_3^2 2}\right)^2$.

Имеем: $\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{0,5}=\dfrac{\log_3^4 2+1}{\log_3^2 2}$.

Тогда:

$$\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{0,5}-2=\frac{\log_3^4 2+1-2\log_3^2 2}{\log_3^2 2}=\left(\frac{\log_3^2 2-1}{\log_3 2}\right)^2.$$

Окончательно получаем:

$$\left(\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{0,5}-2\right)^{0,5}=\left|\frac{\log_3^2 2-1}{\log_3 2}\right|.$$

Раскрываем модули, учитывая, что $0<\log_3 2<1$ и $0<\log_3^2 2<1$,

$$A=\frac{1-\log_3^2 2}{\log_3 2}=\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=\log_2 3-\log_3 2.$$

Ответ: $\log_2 3-\log_3 2$.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите: $\log_{0,3}\dfrac{1}{0,09}$.

2. Вычислите: $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

3. Вычислите: $\log_{625} 25$.

4. Вычислите: $\log_5 125$.

5. Вычислите: $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9$.

6. Вычислите: $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$.

7. Найдите значение выражения $\log_3 81 - \log_3 27$.

8. Найдите значение выражения

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$

9. Вычислите: $\log_{35} 7 + \frac{1}{\log_5 35}$.

10. Укажите значение выражения $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_3 7}$.

11. Укажите значение выражения $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$.

12. Укажите значение выражения $\log_{36} 16 - \log_6 \frac{1}{9}$.

13. Вычислите: $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 16}$.

14. Вычислите: $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$.

15. Найдите значение выражения $10^{1-\lg 5}$.

16. Укажите значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}}$.

17. Найдите значение выражения

$$\left(\log_5 36+\log_5 2-\log_5 8\right)\cdot\log_9\frac{1}{25}.$$

18. Найдите значение выражения

$$\log_3 12-\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4.$$

19. Укажите значение выражения $\left(\frac{1}{3}\right)^{4\log_{\frac{1}{3}}2}$.

20. Укажите значение выражения $\log_8\log_4\log_2 16$.

21. Укажите значение выражения $\log_2\frac{2}{3}+\log_4\frac{9}{4}$.

22. Укажите значение выражения $\log_{0,5}32-\log_7\frac{\sqrt{7}}{49}$.

23. Укажите значение выражения $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

24. Укажите значение выражения

$$2^{\log_8 125}+\log_2\log_5\sqrt[8]{5}.$$

25. Укажите значение выражения $\frac{\lg 128}{\lg 4}$.

26. Укажите значение выражения $\log_6\frac{36}{a}$, если $\log_6 a=-6$.

27. Найдите значение выражения $\log_c(16c^2)$, если $\log_c 2 = -3$.

28. Найдите значение выражения $\log_a \frac{81}{a^4}$, если $\log_a 3 = 2$.

29. Найдите значение выражения

$$(0{,}1)^{\lg 0{,}1} - 10^{\log_{1000} 64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}.$$

30. Найдите значение выражения

$$3\log_2 49 \cdot \log_7 2 - 2^{\lg 2} \cdot 5^{\lg 2}.$$

31. Найдите значение выражения

$$4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{0{,}5 + \log_{15} \frac{4}{\sqrt{5}}}.$$

32. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$.

33. Найдите значение выражения

$$\log_9 15 + \log_9 18 - 2\log_9 \sqrt{10}.$$

34. Найдите значение выражения

$$6\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7.$$

35. Найдите значение выражения

$$\log_2 14 - \log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 7.$$

36. Найдите значение выражения

$$(\log_3 4 + \log_2 9)^2 - (\log_3 4 - \log_2 9)^2.$$

37. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

38. Найдите значение выражения

$$\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6.$$

39. Найдите значение выражения

$$\left(\log_7 22 - \log_7 12 + \log_7 6\right) \cdot \log_{11} 7.$$

40. Найдите значение выражения $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

41. Найдите значение выражения $9^{\log_3 (1+0,5+0,25+\ldots)}$.

42. Упростите: $6^{-0,5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5+\log_2 0,5}$.

43. Упростите: $\dfrac{1-\lg^2 5}{2\lg\sqrt{10}-\lg 5} - \lg 5$.

2.2. Логарифмические уравнения и неравенства

Теоретические сведения

$\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения (ООУ) этого уравнения $x = a^b > 0$.

$\log_a f(x) = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения этого уравнения $f(x) > 0$. На этой области уравнение может иметь любое количество корней, в зависимости от функции $f(x)$.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения этого уравнения задается системой $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ На этой области уравнение имеет корни, которые можно найти, решая уравнение $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмических уравнений используются тождественные преобразования логарифмических выражений (см. Раздел 1.1). Кроме тождеств, при решении уравнений надо помнить следующие формулы для любых x, y, таких, что $xy > 0$:

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|, \tag{1}$$

$$\log_a\frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|, \tag{2}$$

$$\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|,\ x \neq 0,\ n \in N. \tag{3}$$

Для решения логарифмических уравнений и неравенств используются свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

— Область определения: $D(y) = (0; +\infty)$.

— Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

— Монотонность: при $a > 1$ функция y возрастает на $D(y)$, при $0 < a < 1$ функция y убывает на $D(y)$.

При решении логарифмических уравнений и неравенств можно использовать любой из следующих способов рассуждений.

1-й способ. Решать уравнение, используя любые преобразования (кроме сужающих его область определения). Затем **обязательно выполнять проверку**, для того чтобы отбросить посторонние корни. Причем проверку проводить непосредственной подстановкой в уравнение. При этом находить область определения уравнения (ее еще называют областью допустимых значений x) необязательно. Это полезно только в том случае, когда надо отбросить часть корней, тем самым упростив непосредственную подстановку в уравнение.

К преобразованиям, сужающим область определения логарифмических уравнений, относятся логарифмирование обеих частей уравнения, деление на выражение с переменной, извлечение корня четной степени и формальное применение некоторых логарифмических формул (без модулей).

2-й способ. Для решения логарифмических уравнений (неравенств) использовать только **равносильные**

преобразования. Это можно сделать двумя способами: находить ОДЗ (область определения) уравнения (неравенства) и выполнять только равносильные преобразования на данной области определения или сразу использовать схемы равносильных преобразований.

Схемы равносильных преобразований при решении уравнений

$$\log_a f(x)=\log_a g(x),\ a>0,\ a\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Если неравенство $f\ (x) > 0$ решить сложно, а проще решить неравенство $g\ (x) > 0$, то используем следующую схему:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x),\ a>0,\ a\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Схемы равносильных преобразований при решении неравенств

Знаки в исходных неравенствах могут быть следующими: $\leqslant$ (меньше или равно), $\geqslant$ (больше или равно), $<$ (меньше) или $>$ (больше). Приведем пример схемы решения логарифмического неравенства для одного знака ($\leqslant$). Схемы для остальных типов неравенств строятся аналогично с учетом изменения знака неравенства.

Если $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x)\leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Если $a > 1$, то

$$\log_a f(x)\leq \log_a g(x)\ \begin{cases} f(x)\leq g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Если в основании логарифма находится функция $g(x)$, то используем следующую схему:

$$\log_{g(x)} f(x) \le b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) \ge g^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 1, \\ f(x) \le g^b(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) \ge g^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 1, \\ f(x) \le g^b(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение типовых заданий

Простейшие уравнения и неравенства

Задание 1. Решите уравнение $\log_{0,5}(x - 1) = 2$.

Решение. Используя определение логарифма, получаем $x - 1 = (0,5)^2$, $x = 1 + 0,25$, $x = 1,25$.

Ответ: 1,25.

Замечание. При решении логарифмических уравнений только с помощью определения логарифма (как в задании 1) не требуется проверка. В остальных случаях, если решение происходит без применения равносильных преобразований, проверка должна быть обязательным этапом решения уравнения. Например, при решении уравнения $\log_3(x + 1) = \log_3(-x - 1)$ без равносильных преобразований получаем $x = -1$. Проверка показывает, что $x = -1$ — посторонний корень.

Задание 2. Решите неравенство $\log_{0,5}(x - 1) < 2$.

Решение. *1-й способ.* Представим 2 в виде логарифма по основанию 0,5. $\log_{0,5}(x - 1) < \log_{0,5} 0,25$. Область определения неравенства $x > 1$. Поскольку логарифмическая функция $\log_{0,5} t$ с основанием $0 < 0,5 < 1$ убывает, имеем $x - 1 > 0,25$, $x > 1,25$. С учетом области определения получаем $x > 1,25$.

2-й способ. С помощью равносильных преобразований решение неравенства можно записать следующим образом:

$$\log_{0,5}(x-1)<2\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0,\\x-1>(0,5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\x>1,25.\end{cases}$$

Решением системы является промежуток $(1,25; +\infty)$.

Ответ: $(1,25; +\infty)$.

Задание 3. Решите неравенство $\log_3(x+7)<\log_3(5-x)$.

Решение. Учитывая возрастание и область определения логарифмической функции $y = \log_3 t$, получим что исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}x+7>0,\\5-x>0,\\x+7<5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7<x<5,\\2x<-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7<x<5,\\x<-1.\end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток $(-7; -1)$.

Ответ: $(-7; -1)$.

Задание 4. Решите уравнение $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение, начиная с внешнего логарифма. По определению логарифма:

$\log_2 \log_7 x = 5^0$, $\log_7 x = 2^1$, $x = 7^2$, $x = 49$.

Ответ: 49.

Решение уравнений (неравенств) с использованием свойств логарифма

Задание 5. Решите уравнение

$$\lg x^2 + \lg (x+4)^2 = -\lg\frac{1}{9}.$$

Решение. *1-й способ.* Преобразуя уравнение с учетом свойств логарифма и формул (3) и (2), получим уравнение, равносильное данному:

$$2\lg|x| + 2\lg|x+4| = 2\lg 3 \Leftrightarrow \lg|x(x+4)| = \lg 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x(x+4)| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+4) = 3, \\ x(x+4) = -3. \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений совокупности, получим четыре корня: $x_1 = -2+\sqrt{7}$, $x_2 = -2-\sqrt{7}$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$. Проверку делать не нужно, так как все преобразования были равносильными.

2-й способ. Применим свойство «логарифма произведения», т.е. $\lg x^2 + \lg(x+4)^2$ — $\lg(x(x+4))^2$, и решим уравнение $(x(x+4))^2 = 9$.

Ответ: $-2+\sqrt{7}$, $-2-\sqrt{7}$, -1, -3.

Задание 6. Решите неравенство

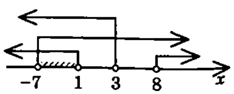
$$\log_3(x+7) < \log_3(5-x) - \log_{\frac{1}{3}}(3-x).$$

Решение. Сначала преобразуем неравенство с помощью свойств логарифма. Затем применим свойство логарифма произведения: $\log_3 x + \log_3 y = \log_3(x \cdot y)$ (для $x > 0$, $y > 0$) — и 4-ю схему равносильных преобразований.

$$\log_3(x+7) < \log_3(5-x) + \log_3(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log_3(x+7) < \log_3((5-x)(3-x)), \\ 5 - x > 0, \\ 3 - x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 7 < x^2 - 8x + 15, \\ x + 7 > 0, \\ x < 5, \\ x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 8, \\ x < 1; \end{array}\right. \\ x > -7, \\ x < 3 \end{array}\right.$$



Ответ: $(-7;\ 1)$.

Метод введения новой переменной

Задание 7. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_9(-27x)} > \dfrac{1}{\log_3(-x)}$.

Решение. Преобразуем неравенство с помощью свойств логарифма.

$$\frac{2}{\log_3 27 + \log_3(-x)} > \frac{1}{\log_3(-x)},$$

$$\frac{2}{3 + \log_3(-x)} > \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

Введем новую переменную $t = \log_3(-x)$. Неравенство примет вид: $\dfrac{2}{3+t} > \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{t-3}{t(3+t)} > 0$. Решая неравенство с помощью метода интервалов, получим $-3 < t < 0$, или $t > 3$.

Остается решить неравенства: $-3 < \log_3(-x) < 0$, $\log_3(-x) > 3$. Область определения первоначального неравенства: $x \neq -1$, $x \neq (-3)^{-3}$, $x < 0$.

Так как основание логарифма больше единицы, то, решая первое неравенство, получим $-1 < x < (-3)^{-3}$. Решая второе неравенство, получим $x < -27$. Объединяя решения, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -27) \cup \left(-1; -\dfrac{1}{27}\right)$.

Метод разложения на множители

Задание 8. Решите уравнение

$$\log_3 x + 3\log_2 x = -\frac{1}{\log_x \sqrt{5}}.$$

В ответе запишите число корней уравнения.

Решение. Преобразуем уравнение с помощью свойств логарифма (ООУ: $x \neq 1$, $x > 0$).

$$\log_5^3 x + 3\log_5^2 x = -\log_{\sqrt{5}} x,$$

$$\log_5^3 x + 3\log_5^2 x = -2\log_5 x.$$

Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим на множители: $\left(\log_5^2 x+3\log_5 x+2\right)\cdot\log_5 x=0$. Полученное уравнение на ООУ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 x=0,\\ \log_5^2 x+3\log_5 x+2=0.\end{array}\right.$$

Решая каждое уравнение совокупности отдельно, получим $x = 1$, $x = 0{,}2$ и $x = 0{,}04$. С учетом области определения получаем, что корнями уравнения являются числа 0,2 и 0,04.

Ответ: 2.

Замечание. При решении уравнения произошло расширение области определения уравнения. Действительно, ООУ начального уравнения задавалась условиями $x \neq 1$, $x > 0$. После преобразований с помощью свойств логарифма (переход к новому основанию) ООУ уравнения стала $x > 0$. Обращайте внимание на изменение области определения уравнения при применении этого свойства логарифмов.

Задание 9. Решите неравенство

$$\log_5^3 x + 3\log_5^2 x \geq -\frac{1}{\log_x \sqrt{5}}.$$

Решение. Преобразуем неравенство с помощью свойств логарифма (ООУ: $x \neq 1$, $x > 0$), как это сделано в предыдущем задании. Получим

$$\left(\log_5^2 x+3\log_5 x+2\right)\log_5 x\geq 0,$$

$$\left(\log_5 x+2\right)\left(\log_5+1\right)\log_5 x\geq 0.$$

Введем новую переменную $t = \log_5 x$ и решим неравенство $(t + 2)(t + 1)t \geqslant 0$ с помощью метода интервалов, учитывая, что $t \neq 0$.

Получим, что решением неравенства относительно t является объединение двух промежутков:

$$[-2;\ -1] \cup (0;\ +\infty).$$

Переходя к прежней переменной x, получим:

$$-2 \leqslant \log_5 x \leqslant -1, \text{ или } \log_5 x > 0.$$

Так как основание логарифма больше единицы, то, решая первое неравенство, получим $0{,}04 \leqslant x \leqslant 0{,}2$. Решим второе неравенство: $x > 1$. Объединим решения.

Ответ: $[0{,}04;\ 0{,}2] \cup (1;\ +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Решите уравнение $11 \cdot 2^{\log_2 x} = x + 70$.

2. Решите уравнение $13^{\log_{13}(x+7)} = 2x - 20$.

3. Решите уравнение $\log_3 x + \log_3 2 = \log_3 54$.

4. Решите уравнение $\log_{0,3} x + \log_{0,3} 5 = \log_{0,3} 55$.

5. Решите уравнение $\log_7(x-8) - \log_7 11 = \log_7 2$.

6. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{7}}(2x+5) - \log_{\frac{1}{7}} 6 = \log_{\frac{1}{7}} 2$.

7. Решите уравнение $\log_7(2x + 5) = 2$.

8. Решите уравнение $\log_2(2x + 5) = 7$.

9. Решите уравнение $\log_2(2x - 5) = -1$.

10. Решите уравнение $\log_{0,4}(6 - x) = -1$.

11. Решите уравнение $\log_2(\log_7 x) = 0$.

12. Решите уравнение $\log_7(\log_2 x) = 0$.

13. Решите уравнение $\log_5\left(\log_2\left(\log_7 x\right)\right) = 0$.

14. Решите уравнение $\log_7\left(\log_2\left(\log_5 x\right)\right) = 0$.

15. Решите уравнение $\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \frac{1}{2}$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

16. Решите уравнение

$$\log_3(x+2) = \left(\log_5(x+7)\right) \cdot \log_3(x+2).$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

17. Решите уравнение

$$\log_5(x-4) = \left(\log_3(x+2)\right) \cdot \log_5(x-4).$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

18. Решите уравнение $\log_5 x^2 = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

19. Решите уравнение $\log_2 x^2 = 5$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

20. Решите уравнение $\log_x 16 = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

21. Решите уравнение $\log_{-x}16 = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

22. Решите уравнение $\log_{x^2}16=2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

23. Решите уравнение $\log_{x^2}81=2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

24. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_2(2x)\le\log_2(x+4)$.

25. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_3(2x-3)\le\log_3(x+9)$.

26. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,5}(3x)\ge\log_{0,5}(x+16)$.

27. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{0,2}(4x-6)\ge\log_{0,2}(x+33)$.

28. Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\lg x \leqslant 1$.

29. Найдите произведение всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\log_{0,5}x\ge-2$.

30. Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\log_3 x < 2$.

31. Найдите произведение всех целых чисел, являющихся решением неравенства $\log_{\frac{1}{3}}x\ge-1$.

32. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+3x+12\right)<\log_{\frac{1}{3}}(9-x)$.

33. Найдите сумму целых решений неравенства $\log_2\frac{7}{x}>1$.

34. Сколько целых чисел, принадлежащих отрезку [7; 17], являются решением неравенства $\log_{0,5}\left(7x^{-1}\right)>1$?

35. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $\log_3\frac{x-7}{2x-5}<0$.

36. $2\log_4^2 x-\log_4 x-1\geq 0$.

37. $2\log_4 x-\sqrt{\log_4 x}-1\leq 0$.

38. $\log_{\frac{1}{3}}(x^4+1)\geq\log_{\frac{1}{3}}(2x^2)$.

39. $\log_{\frac{1}{3}}(x^4-1)\leq\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-2)$.

40. $\log_2(x-2)+0{,}5\log_2\left(5-4x\right)^2\leq 0$.

41. $\log_5(2-x)+0{,}5\log_5\left(4x-11\right)^2\leq 0$.

42. $\log_2(x-6)\leqslant 0{,}5\log_2 x$.

43. $2^{|\log_2 x|}\geqslant 3$.

44. $10^{1-\lg x}\geq 100^{2+\lg x}$.

45. $\log_5^3 x + 3\log_5^2 x \geq -\dfrac{1}{\log_x \sqrt{5}}$.

46. $\lg x^2 + \lg(x+4)^2 \geq -\lg\dfrac{1}{9}$.

47. $\log_4(7-x)^2 + \log_4(5-x)^2 \leq 4 + \log_4(x-5)^2$.

48. $\log_3 x^2 + \log_{\sqrt{3}}(x-8) \leq 4$.

49. $\log_2 x^2 + \log_2(x+3)^2 \leq 2$.

50. $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x \leq \dfrac{10}{\log_x 2}$.

51. $\log_3^3 x - 3\log_3^2 x \leq 1 - \dfrac{1}{\log_x \sqrt[3]{3}}$.

52. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+2) \leq 0$.

53. Решите неравенство $\log_{|x|-1}|x+2| \leq 0$.

54. Решите неравенство $\log_{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\left(4x - x^2 - 2\right) \geq 0$.

55. $\begin{cases} 4^{x+1} - 17\cdot 2^x + 4 \geq 0 \\ \log_4\left(x^2 - 2x\right) \leq 1{,}5 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 3\cdot 4^x - 7\cdot 2^x + 2 \geq 0 \\ \log_9\left(x^2 - 6x\right) \leq 1{,}5 \end{cases}$

57. Решите неравенство

$$\log_{5-x}\left(81 - 18x + x^2\right) \leq 2\log_{5-x}\left(-9 - x^2 + 10x\right).$$

58. Решите неравенство

$$2\log_{5-x}(9-x) \leq \log_{5-x}\left(-9 - x^2 + 10x\right)^2.$$

59. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{5-x}}(9-x)\le 2\log_{5-x}\left(-9-x^2+10x\right).$$

60. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_{\frac{x}{3}}3}{\log_{\frac{x}{27}}9}\le 3.$

61. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,1x}10\cdot\lg(10x)}{\log_{0,01x}10}\le 2.$

62. Решите неравенство

$$\log_9(x-7)^2\cdot\log_{81}(x-3)^4+\log_3\frac{(x-3)^3}{x-7}\ge 3.$$

63. Решите неравенство

$$2\log_9(x-7)\cdot\log_{81}(x-3)^4+\log_3\frac{(x-3)^3}{x-7}\ge 3.$$

64. Решите неравенство

$$4\log_9(x-7)^2\cdot\log_{81}(x-3)+\log_3\frac{(x-3)^3}{x-7}\ge 3.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите значение выражения

$$\log_2 12+\log_2 6-\log_2 18.$$

2. Вычислите: $0{,}25^{\log_2 5}$.

3. Решите уравнение $\log_2 x=-2.$

4. Укажите сумму всех целочисленных решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$.

5. Найдите произведение всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$y = \log_{0,5}\left(5x - x^2\right).$$

6. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{\sin^2 60^\circ - 2\log_5 \sqrt[4]{5}}\right)^{-1}.$$

7. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,2}\frac{1}{x-1} \geq -1.$$

8. Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 5 - \log_2(x + 14)$.

Запишите решение с полным его обоснованием.

9. Вычислите: $2\log_4\left(8\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\right) + \log_4\left(10 + 2\sqrt{21}\right)$.

10. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_2\left(x^2 - x + a\right) = \log_2(a - 3x)$.

Вариант 2

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите значение выражения

$$\log_2 6 + \log_2 3 - \log_2 9.$$

2. Вычислите: $128^{\log_{0,5}\sqrt[7]{10}}$.

3. Решите уравнение $\log_5 x = -2$.

4. Укажите произведение всех целочисленных решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$.

5. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \log_{0,2}\left(5x - x^2\right)$.

6. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{3\log_7 \sqrt[4]{7} - \cos^2 45^\circ}\right)^{-2}.$$

7. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,5} \frac{1}{x+2} \geq -1.$$

8. Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 5 - \log_2(x + 4)$.

Запишите решение с полным его обоснованием.

9. Вычислите: $2\log_4\left(8\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)\right) + \log_4\left(12 + 2\sqrt{35}\right)$.

10. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 3x - a\right) = \log_2(5x - a)$.

2.3. Показательные уравнения и неравенства

Теоретические сведения

Свойства степени положительного числа

Если $a > 0$, $b > 0$, r, s — действительные числа, то:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (1)$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \quad (2)$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs} \quad (3)$$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad (5)$$

$$a^0 = 1 \quad (6)$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \quad (7)$$

Свойства показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) Область определения: $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2) Область значения: $E(y) = (0; +\infty)$.

3) Монотонность: при $a > 1$ функция возрастает на $\boldsymbol{R}$, при $0 < a < 1$ функция убывает на $\boldsymbol{R}$.

Простейшее показательное уравнение — это уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. При $b > 0$ это уравнение имеет единственный корень $x = \log_a b$. При $b \leq 0$ оно не имеет корней.

На области определения показательного уравнения (неравенства) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 2. При $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Теорема 3. При $0 < a < 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Решение типовых заданий

Простейшие уравнения и неравенства

Задание 1. Решите уравнение $3^x = 81$.

Решение. *1-й способ.* Представим правую и левую части уравнения в виде степени с основанием 3 и от равенства степеней с одинаковым основанием перейдем к равенству показателей степеней: $3^x = 81$, $3^x = 3^4$, $x = 4$.

2-й способ. Это простейшее показательное уравнение, значит, $x = \log_3 81$, $x = 4$.

Ответ: 4.

Задание 2. Решите неравенство $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Представим правую часть неравенства в виде степени с основанием 2: $2^{x+2} > 2^{-\frac{2}{x}}$.

По теореме 2 данное неравенство равносильно неравенству $x+2 > -\frac{2}{x}$.

Решая его, получим $\frac{x^2+2x+2}{x} > 0$. Замечаем, что $x^2 + 2x + 2 > 0$ для любых действительных x. Получаем неравенство, равносильное данному: $\frac{1}{x} > 0$. Его решением является промежуток $(0; +\infty)$.

Ответ: $(0; +\infty)$.

При обосновании решения неравенства мы могли ссылаться на свойство монотонной (возрастающей) на своей области определения функции $y = 2^x$.

Выбирайте удобную для себя схему обоснований при решении уравнений и неравенств. Главное, чтобы был получен верный ответ.

При решении показательных уравнений (неравенств) полезно сначала произвести преобразования, получив в обеих частях уравнения степени с одинаковыми основаниями.

Задание 3. Решите уравнение $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}=\left(\frac{8}{5}\right)^{7x-3}$.

Решение. Представим правую часть уравнения в виде степени с основанием $\frac{5}{8}$. Получим $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}=\left(\frac{5}{8}\right)^{-7x+3}$.

Применяя теорему 1, получим уравнение, равносильное данному: $3x-7=-7x+3$, $10x=10$, $x=1$.

Ответ: 1.

Задание 4. Решите неравенство $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}\le\left(\frac{8}{5}\right)^{7x-3}$.

Решение. Представим правую часть неравенства в виде степени с основанием $\frac{5}{8}$: $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}\le\left(\frac{5}{8}\right)^{-7x+3}$. Применяя теорему 3, получаем неравенство, равносильное данному: $3x-7\ge-7x+3$, $10x\ge10$, $x\ge1$.

Без использования теорем о равносильных преобразованиях это неравенство решаем следующим образом: учитывая монотонность функции, $\left(\frac{5}{8}\right)^{t}$ — убывающая функция, так как $0<\frac{5}{8}<1$, можно перейти к неравенству: $3x-7\ge-7x+3{,}10x\ge10$, $x\ge1$.

Ответ: $[1;+\infty)$.

Задание 5. Решите уравнение $0{,}04\cdot(0{,}2)^{x-4}=5^{x}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(0{,}2)^{2}\cdot(0{,}2)^{x-4}=(0{,}2)^{-x}$.

Применяя свойства (1) и (7) степени с одинаковым основанием, получаем $(0{,}2)^{x-2} = (0{,}2)^{-x}$. Из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство показателей степеней: $x - 2 = -x$, $2x = 2$, $x = 1$.

Ответ: 1.

Если в показательном уравнении несколько показательных выражений с одинаковым основанием, то выражения можно преобразовать с помощью свойств степени (1) и (2): $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ и $a^{b-c} = a^b : a^c$ $(a > 0)$. После таких преобразований уравнение обычно решается методом введения новой переменной или разложением на множители.

Метод введения новой переменной

Задание 6. Решите уравнение $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения с помощью свойств степени (1) и (2):

$$5^{-1} \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 5^x = 250,$$

$$\frac{1}{5} \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 5^x = 250,$$

$$5^{2x} + 25 \cdot 5^x - 1250 = 0.$$

Введем замену $5^x = a$, $a > 0$. Уравнение принимает вид $a^2 + 25a - 1250 = 0$. Решая уравнение, находим его корни: $a = 25$ или $a = -50$.

Учитывая условие $a > 0$, отбросим $a = -50$. Переходя к прежней переменной x, остается решить уравнение $5x = 25$. Оно имеет корень $x = 2$.

Ответ: 2.

Метод разложения на множители

Задание 7. Решите уравнение $4^{x+1} - 2 \cdot 4^{x-2} = 124$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения с помощью свойств (1), (2) и вынесем за скобки степень с наименьшим показателем (4^{x-2}):

$$4^{x-2}\left(4^3-2\right)=124,$$
$$4^{x-2}\cdot 62=124,$$
$$4^{x-2}=2,$$
$$4^{x-2}=4^{0,5},$$
$$x-2=0,5,$$
$$x=2,5.$$

Ответ: 2,5.

Метод решения однородных уравнений

Задание 8. Решите уравнение $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x=5\cdot 25^x$.

Решение. Данное уравнение является однородным (почему?). Разделим обе части уравнения на выражение 25^x, большее нуля для любых x.

$$2\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x-3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x=5,\quad 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x=5.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\left(\frac{2}{5}\right)^x$.

Введем новую переменную $t=\left(\frac{2}{5}\right)^x, t>0$.

Уравнение $2t^2-3t-5=0$ имеет два корня $t=-1$ и $t=\frac{5}{2}$. С учетом условия $t>0$ отбрасываем $t=-1$. Остается решить уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{5}{2}$, $x=-1$.

Ответ: -1.

Задание 9. Решите неравенство $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x<5\cdot 25^x$.

Решение. $2\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x-3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x<5$, $2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x<5$.

Введем новую переменную $t=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, $t>0$.

Получим: $\begin{cases}2t^2-3t-5<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t<\frac{5}{2},\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{5}{2}.$

Возвращаясь к прежней переменной x, получим, что неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$ верно для любых x. Остается решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{5}{2}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$. Получаем $x > -1$.

Ответ: $(-1;\ +\infty)$.

Рассмотрим более сложные задания.

Задание 10. Решите уравнение $\left(3^{x^2} - 81\right)\cdot\sqrt{1-x} = 0$.

Решение. *1-й способ.* В основе решения уравнения лежит условие равенства произведения двух выражений нулю: произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом не теряет смысл.

1) $3^{x^2} - 81 = 0$, $3^{x^2} = 3^4$, $x^2 = 4$, $x = 2$ или $x = -2$. При $x = 2$ подкоренное выражение отрицательно, значит, число 2 не является корнем уравнения.

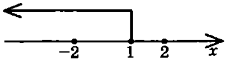
2) $\sqrt{1-x} = 0$ при $x = 1$. Это число является корнем данного уравнения, так как выражение $3^{x^2} - 81$ имеет смысл при любом x.

Ответ: 1, −2.

2-й способ. Если решать уравнение с помощью равносильности, то решение основано на применении следующего

$$f(x)\cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ или } g(x) = 0, \\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

Уравнение равносильно системе:



$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3^{x^2} - 81 = 0, \\ \sqrt{1-x} = 0, \end{array}\right. \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: 1, −2.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Укажите наибольшее решение неравенства

$$2^{\sqrt{5-x}} > -6.$$

2. Укажите наименьшее решение неравенства

$$2^{\sqrt{x+7}} > -1.$$

3. Решите уравнение $2^x = 0{,}5$.

4. Решите уравнение $5^{2x-1} = 625$.

5. Решите уравнение $3^{x+5} = \dfrac{1}{9}$.

6. Сколько корней имеет уравнение $3^{x+5} = -\dfrac{1}{9}$?

7. Решите уравнение $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x = 27$.

8. Решите уравнение $3^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 81$.

9. Найдите наибольшее натуральное решение неравенства $3^{x-5} < 81$.

10. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$5^{x-1} \le \frac{1}{\sqrt[5]{5}}.$$

11. Укажите наибольшее целое число, не удовлетворяющее неравенству $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1} \le \dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

12. Сколько целочисленных решений неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < 1$ принадлежит отрезку $[-5;\ 5]$?

13. Решите уравнение $4^x = 64^0$.

14. Укажите наибольшее целое решение, не удовлетворяющее неравенству $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

15. Решите уравнение $0{,}04 \cdot (0{,}2)^{x-4} = 5^x$.

16. Сколько целочисленных решений неравенства $9^x - 3^x - 72 > 0$ принадлежит отрезку $[-4;\ 4]$?

17. Решите неравенство $\sqrt{5^x - 25} \le 0$.

18. Укажите наименьшее целое решение неравенства $7^x - 6 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^x - 7 > 0$.

19. Решите уравнение $3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$.

20. Решите уравнение $2^x = 16 \cdot \sqrt[5]{8}$.

21. Сколько целочисленных решений неравенства $2^{x^2} \ge 16$ содержится в отрезке $[-3;\ 3]$?

22. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} - 3}$?

23. Решите уравнение $3 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

24. Укажите количество целых решений неравенства

$$\left(2^x - 1\right)\left(25 - 5^x\right) > 0.$$

25. Укажите количество целых решений неравенства

$$(3^x-1)(81-3^x)>0.$$

26. Укажите количество целых решений неравенства

$$\frac{(5^x-5)(16-2^x)}{3^x}\geq 0.$$

27. Решите уравнение $5^{x^2+(\sqrt{x})^2-1}=5$.

28. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\leq 9$.

29. Решите неравенство $(0{,}1)^{4x^2-2x-2}\geq(0{,}1)^{2x-3}$.

30. Решите уравнение $6^x-7^x=0$.

Решите неравенства или системы неравенств с полным обоснованием решения.

31. $5^{x^2+(\sqrt{x})^2}\leq 25$.

32. $3\cdot 4^x-6^x<2\cdot 9^x$.

33. $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x>5\cdot 25^x$.

34. $5\cdot 4^x+23\cdot 10^x\leq 10\cdot 25^x$.

35. $4\cdot 9^x+13\cdot 12^x\geq 12\cdot 16^x$.

36. $6^x+6^{x+1}<2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$.

37. $4^{x+1}+19\cdot 2^{x}-5\le 0.$

38. $3^{2x+5}-2^{2x+7}+3^{2x+4}-2^{2x+4}\ge 0.$

39. $3\cdot 2^{3-2x}<2^{1-x}+1.$

40. $3\cdot 4^{|x|}-14\cdot 2^{|x|}+8\le 0.$

41. $(3^{x^2}-81)\cdot\sqrt{1-x}\ge 0.$

42. $4^{x}+6\cdot 0{,}25^{x}\le 7.$

43. $81^{x}+108<31\cdot 9^{x}.$

44. $10^{x}+2\cdot 10^{1-x}\le 12.$

45. $\dfrac{x^2-3}{3^x-4}\le 0.$

46. $\dfrac{x^2-5}{3^x-7}>0.$

47. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x}<10.$

48. $(1{,}25)^{1-x}<(0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}.$

49. $5^{x}+4\cdot 3^{x+1}\ge 449.$

50. $2^{\sqrt{\cos x-1}}+\log_2\left(x^2+1\right)>\sin x+1.$

51. $\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{4^x-8}\ge 0,\\ 9^x-10\cdot 3^x+21\le 0.\end{cases}$

52. $\begin{cases}9^{x+0{,}5}-28\cdot 3^x+9\ge 0,\\ 2\log_3\dfrac{x-2}{2x+5}+\log(2x+5)^2\ge 2.\end{cases}$

53. $\begin{cases} \dfrac{2^{x^2}+x^2-2}{2^x-8}<0, \\ x^2>16. \end{cases}$

54. $\begin{cases} \dfrac{3}{2-x\sqrt{2}}+\dfrac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}-3}\geq 1{,}5, \\ 2^x+6\cdot 2^{-x}<7. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Решите уравнение $3^{x+1} + 5 \cdot 3^x = 72$.

2. Решите уравнение $2^x = 8\sqrt{2}$.

3. Укажите наименьшее целое решение неравенства
$$5^{2x+9} > 25.$$

4. Укажите наибольшее натуральное число, не являющееся решением неравенства $0{,}5^x \leq \dfrac{1}{128}$.

5. Укажите число целых решений неравенства
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+3}{x-2}} \leq 16.$$

6. Найдите корни уравнения $3^{2x+1}-4\cdot 3^{x+1}+9=0$. Если получили два корня, то в ответе запишите их произведение.

7. Укажите число корней уравнения

$$\left(4^{x^2}-16\right)\cdot\sqrt{x-1}=0.$$

8. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $(0{,}2)^{|2x-1|}\geq\frac{1}{25}$.

Запишите решение с полным его обоснованием.

9. Решите уравнение $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$.

10. Решите систему неравенств: $\begin{cases}3^{\frac{x+10}{10}}-13\cdot3^{\frac{x}{20}}+4\leq0,\\ \log^2_{x^2}x^4+\log_3x^4\geq8.\end{cases}$

Вариант 2

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Решите уравнение $2^{x+2}+7\cdot2^x=88$.

2. Решите уравнение $3^x=9\sqrt{3}$.

3. Укажите наибольшее целое решение неравенства $6^{2x-7}<36$.

4. Укажите наибольшее целое число, не являющееся решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x\leq\frac{1}{243}$.

5. Укажите число целых решений неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+3}} \geq 27.$$

6. Решите уравнение $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$. Если получили два корня, то в ответе запишите их произведение, если один, то его запишите в ответ.

7. Укажите число корней уравнения

$$\left(2^{x^2}-32\right)\cdot\sqrt{3-x}=0.$$

8. Укажите число целых решений неравенства

$$(0,5)^{|3x+1|} \geq \frac{1}{8}.$$

Запишите решение с полным его обоснованием.

9. Решите уравнение $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=62$.

10. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 9^{\frac{x+2}{4}}-13\cdot 9^{\frac{x}{8}}+4\leq 0, \\ \log^2_{x^2} x^4+\log_4 x^4 \geq 8. \end{cases}$

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Производная функции

Теоретические сведения

Нахождение производной данной функции называют дифференцированием.

Для нахождения производной используют формулы дифференцирования и правила дифференцирования.

Формулы дифференцирования

Функция f	$kx + C$, $C \in R$	x^{α}	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln x$	e^x	a^x
Производная функция f $(f'(x))$	k	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$a^x \ln a$

Правила дифференцирования

Значения производных функций f и g в точке x_0 обозначим так: $f'(x_0) = f'$, $g'(x_0) = g'$.

Правило 1. (Дифференцирование суммы.) Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке и $(f + g)' = f' + g'$.

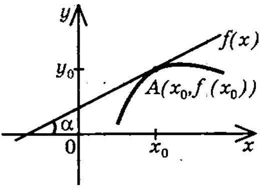
Правило 2. (Дифференцирование произведения.) Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Правило 3. (Дифференцирование частного.) Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и функция g не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{f}{g}$ также дифференцируемо в этой точке и $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Правило 4. (Производная сложной функции.) Если функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Геометрический смысл производной. Касательная к графику функции

Существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной в точке $(x_0;\ f(x_0))$ графика функции f, при этом угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной.



Уравнение касательной к графику функции f в точке $A(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Замечание. Число k в уравнении прямой $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называют угловым коэффициентом прямой. k равен тангенсу угла, который образует прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ с положительным направлением оси Ox $(k = \operatorname{tg} \alpha)$. В уравнении касательной $k = f'(x_0)$, значит, значение производной в точке x_0, т.е. $f'(x_0)$, равно тангенсу угла наклона касательной графика функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 к положительному направлению оси Ox.

Применение производной к исследованию функции

Признак возрастания (убывания) функции

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на интервале I.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на интервале I.

Промежутки возрастания и убывания функции называют промежутками монотонности функции.

Критические точки функции, максимумы и минимумы

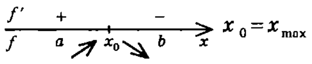
Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками.*

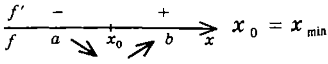
Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции. Короче: если в точке x_0 производная функции f меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума функции f.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции. Короче: если в точке x_0 производная функции f меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума функции f.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума. Значения функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции *(общее название — экстремум функции).*

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке





Теорема Вейерштрасса. Непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Правило нахождения наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции f на отрезке.

1. Находим критические точки функции f.
2. Выбираем те из них, которые принадлежат данному отрезку.
3. Вычисляем значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка.
4. Из полученных чисел выбираем наибольшее (наименьшее).

Решение типовых заданий

Прежде чем находить производную функции, полезно выполнить преобразования, упрощающие вид формулы, задающей функцию. Это существенно облегчает дальнейшие вычисления.

Задание 1. Найдите производную функции

$$f(x) = (x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 3).$$

Решение. Сначала упростим формулу, задающую функцию. Для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$f(x) = (x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 3) = 7x - 1.$$

Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

Используя формулу для нахождения производной линейной функции, получим $f'(x) = 7$.

Ответ: $f'(x) = 7$.

Задание 2. Найдите значение $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \ln e^{\sin x}$.

Решение. Сначала упростим формулу, задающую функцию. Для этого применим свойство логарифмов (см. раздел «Тождественные преобразования логарифмических выражений»). $f(x) = \ln e^{\sin x} = \sin x$. Данная функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел. Используем формулу для нахождения производной синуса. $f'(x) = \cos x$, значит,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Задание 3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x+3}{x+4}$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$.

Решение. Вспомним, что уравнение касательной имеет вид $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y\,(x_0)$.

Найдем последовательно $y(x_0)$, $y'(x_0)$, т.е. $y(-3)$, $y'(-3)$. Имеем: $y(-3) = 0$. Чтобы определить $y'(-3)$, найдем $y'(x_0)$, используя правило 3 о дифференцировании частного.

$$y'(x) = \frac{(x+3)'(x+4) - (x+3)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{1}{(x+4)^2}.$$

Получим, что $y'(-3) = 1$ и уравнение касательной имеет вид:

$$y = x + 3.$$

Ответ: $y = x + 3$.

Задание 4. Найдите угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox, проведенной к графику функции $y = -\ln x$ в его точке A (1; 0).

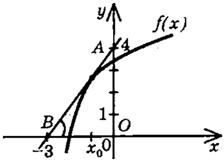
Решение. Тангенс угла наклона касательной равен значению производной функции $y(x)$ в точке $x_0 = 1$.

$y'(x) = -\dfrac{1}{x}$, $y'(1) = -1 < 0$, т.е. касательная образует тупой x угол α с положительным направлением оси абсцисс и тангенс этого угла равен -1. $\operatorname{tg}\alpha = -1, \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: 135°.

Замечание. Угол наклона касательной в **задании 3** равен $45°$.

Задание 5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Решение. Касательная AB образует $\angle ABO$ с положительным направлением оси Ox. Из ΔABO имеем $\operatorname{tg}\angle ABO = \frac{AO}{BO} = \frac{4}{3}$, значит, исходя из геометрического смысла производной, получаем $f'(x_0) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Задание 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 + 1}$ параллельной прямой $y = -32x + 7$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен $f'(x_0)$, то абсциссу точки касания найдем из уравнения $f'(x_0) = -32$.

Чтобы найти производную функции $f(x)$, сначала упростим формулу, задающую функцию. Применим формулу разности квадратов.

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 + 1} = x^4 - 1 \quad \text{и} \quad f'(x_0) = 4x_0^3.$$

Остается решить уравнение $4x_0^3 = -32$, $x_0 = -2$. Уравнение касательной имеет вид $y = -32(x + 2) + f(-2)$.

Так как $f(-2) = 15$, то $y = -32(x + 2) + 15$, $y = -32x - 49$.

Ответ: $y = -32x - 49$.

Замечание. Чтобы написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной оси абсцисс, необходимо учесть, что $f'(x_0) = 0$. В **задании 6** $4x_0^3 = 0$, $x_0 = 0$ и уравнение касательной, параллельной оси Ox, имеет вид: $y = -1$.

Задание 7. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{1 - x}$, проходящей через точку $P(2;\ 0)$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

Р е ш е н и е. Если найдем абсциссу точки касания (x_0), то напишем уравнение касательной. Но точка $P(2;\ 0)$ не лежит на графике функции $f(x) = \sqrt{1 - x}$, и абсцисса x_0 не задана. Поэтому напишем уравнение касательной к графику данной функции в общем виде.

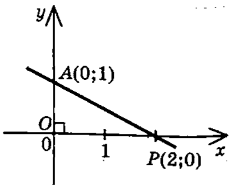
Имеем: $y = -\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x_0}}(x - x_0) + \sqrt{1 - x_0}$ (*).

Точка $P(2;\ 0)$ лежит на касательной, поэтому подставим ее координаты в уравнение касательной (*)

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x_0}}(2 - x_0) + \sqrt{1 - x_0},\ x_0 = 0.$$

Тогда уравнение (*) имеет вид: $y = -0{,}5x + 1$.

Найдем площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.



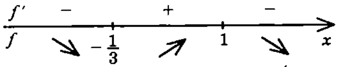
$S_{AOP} = \frac{1}{2} AO \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$

Ответ: 1.

Задание 8. Исследуйте функцию $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$ на возрастание и убывание. В ответе укажите длину промежутка возрастания.

Решение. Вспомните достаточный признак возрастания функции. Чтобы найти промежутки возрастания функции, определим, на каких промежутках производная функции положительна. Данная функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Исследуем знак производной, для этого решим уравнение $f'(x) = 0$ и отметим его корни на координатной прямой (корни $-\frac{1}{3}$ и 1).



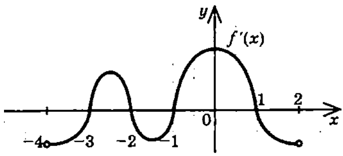
Функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и на промежутке $[1; +\infty)$.

Функция возрастает на промежутке $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. Длина промежутка возрастания равна $\frac{4}{3}$.

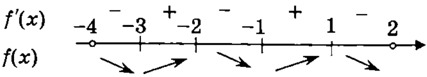
Ответ: $\frac{4}{3}$.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна в точках 1, $-\frac{1}{3}$, то эти точки включаются в промежутки монотонности.

Задание 9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков убывания функции.



Решение. Определим промежутки, на которых производная функции отрицательна, т.е. график производной лежит ниже оси абсцисс. Так как $f'(x) < 0$ на промежутках $(-4; -3)$, $(-2; -1)$, $(1; 2)$, то число промежутков убывания равно 3.



Ответ: функция $y = f(x)$ имеет три промежутка убывания.

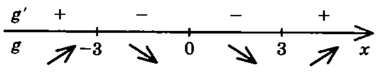
Замечание. Функция $y = f(x)$, заданная условиями задания 9, имеет два промежутка возрастания.

Задание 10. Найдите точки экстремума функции $g(x) = x^5 - 15x^3$.

Решение. Вспомните, что точки экстремума функции — это точки минимума и максимума функции. В этих точках производная функции $g'(x)$ меняет знак. Найдем $g'(x)$ и исследуем ее знак. Функция $g(x)$ определена и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $g'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x - 3)(x + 3)$.

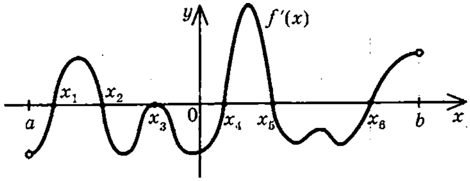
Функция имеет две точки экстремума: $x_{max} = -3$, $x_{min} = 3$.



Ответ: $x_{max} = -3$, $x_{min} = 3$.

Замечание. Функция $g(x) = x^5 - 15x^3$ имеет три критические точки −3, 0 и 3 (см. определение критических точек в теоретической части).

Задание 11. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(a; b)$. Сколько точек минимума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



Решение. В точках минимума производная функции меняет знак с минуса на плюс. Таких точек три: x_1, x_4, x_6.

Ответ: функция $y = f(x)$ имеет три точки минимума.

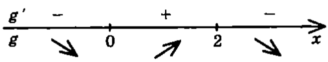
Замечание. Данная функция имеет две точки максимума (производная в этих точках меняет знак с плюса на минус): x_2 и x_5. И шесть критических точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Задание 12. Найдите максимум функции $g(x) = x^2e^{-x} + 7$.

Решение. Вспомните, что максимумом функции называется значение функции в точке максимума. Найдем точку максимума функции, для этого определим производную функции и исследуем ее знак. Функция $g(x)$ определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

При нахождении производной данной функции следует обратить внимание на то, что функция $y = e^{-x}$ является сложной функцией.

$$g'(x) = \left(x^2\right)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)' = e^{-x}\left(2x - x^2\right)$$



$x_{max} = 2$, значит, максимум равен $g\left(x_{max}\right) = g(2) = \dfrac{4}{e^2} + 7$.

Ответ: $\dfrac{4}{e^2} + 7$.

Замечание. Для данной функции: точка минимума $x_{\min} = 0$; минимум равен $g(x_{\min}) = g(0) = 7$.

Задание 13. Укажите точку минимума функции

$$f(x) = \frac{5^{\log_5(2-x)}}{5^{\log_5(x+4)}} + 6x.$$

Решение. Найдем область определения функции f:

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

Упростим формулу, задающую функцию

$$f(x) = \frac{5^{\log_5(2-x)}}{5^{\log_5(x+4)}} + 6x = \frac{2-x}{x+4} + 6x,\ x \in (-4; 2).$$

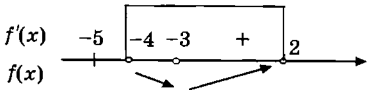
Чтобы найти точку минимума функции, найдем производную функции и исследуем ее знак.

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+4)^2} + 6.$$

Решим уравнение $f'(x) = 0$ при $x \in (-4;\ 2)$.

$$-\frac{6}{(x+4)^2} + 6 = 0;$$

$$x = -3\ (x = -5 \notin (-4; 2)).$$



Ответ: $x_{\min} = -3$.

Задание 14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4\ (x + 2)^3$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Решение. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$.

Найдем критические точки функции, т.е. в данном случае решим уравнение $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4x^3(x+2)^3 + x^4 \cdot 3 \cdot (x+2)^2 = x^3(x+2)^2(7x+8).$$

Функция имеет три критические точки: -2, $-\frac{8}{7}$ и 0.

Отрезку $[-1;\ 1]$ принадлежит только точка 0.

Вычислим значения функции на концах отрезка и в точке 0.

$f(-1) = 1,\ f(1) = 27,\ f(0) = 0.$

Ответ: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = 27,\ \min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 0.$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Известно, что $f'(x) = x^2 - 6x$. Укажите: 1) точки максимума функции; 2) точки минимума функции; 3) промежутки возрастания функции $y = f(x)$; 4) промежутки убывания функции $y = f(x)$; 5) в какой точке отрезка $[2;\ 7]$ функция принимает наименьшее значение; 6) в какой точке отрезка $[2;\ 6]$ функция принимает наибольшее значение.

Задание 2. Известно, что $f'(x) = -x^2 + 8x$. Укажите: 1) точки максимума функции; 2) точки минимума функции; 3) промежутки возрастания функции $y = f(x)$; 4) промежутки убывания функции $y = f(x)$; 5) в какой точке отрезка $[1;\ 10]$ функция принимает наибольшее значение; 6) в какой точке отрезка $[8;\ 10]$ функция принимает наименьшее значение.

Задание 3. Известно, что $f'(x) = 9 - x^2$. Укажите: 1) точки максимума функции; 2) точки минимума функции; 3) промежутки возрастания функции $y = f(x)$; 4) промежутки убывания функции $y = f(x)$; 5) в какой точке отрезка $[0;\ 4]$ функция принимает наибольшее значение; 6) в какой точке отрезка $[3;\ 14]$ функция принимает наибольшее значение.

Задание 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке без помощи производной:

1. $f(x) = -x^2 + 1,\ [-3;\ 2]$;

2. $f(x) = -x^3 + 2,\ [-3;\ 2]$;

3. $f(x) = -x^4 + 3,\ [-3;\ 2]$;

4. $f(x) = -|x| + 4,\ [-3;\ 2]$;

5. $g(x) = \sin x + 5,\ \left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$;

6. $f(x) = 2^x + 6,\ [-3;\ 2]$;

7. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 7,\ [-1;\ 2]$;

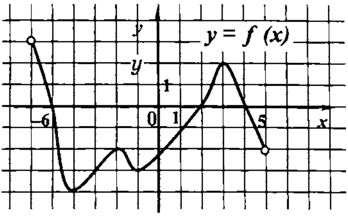
8. $f(x) = \log_3 x + 9,\ [1;\ 9]$.

Задание 5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке с помощью производной:

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$: 1) $[-1;\ 2]$; 2) $[-4;\ 0]$; 3) $[4;\ +\infty)$;

4) $y = \dfrac{1}{2}x + \cos x,\ \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задание 6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 5)$. На рисунке изображен ее **график.**



1. Укажите точки максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 5)$.

2. Укажите точки минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 5)$.

3. Укажите промежутки возрастания функции.

4. Укажите промежутки убывания функции.

5. Укажите, в какой точке отрезка $[0;\ 4]$ функция принимает наименьшее значение.

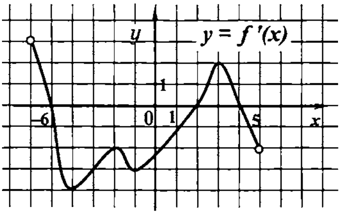
6. Укажите абсциссы точек, касательная к графику функции в которых параллельна (или совпадает) с осью абсцисс.

7. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?

8. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 3$.

9. Укажите число точек графика функции $y = f(x)$, касательная к которым параллельна или совпадает с прямой $y = -x - 5$.

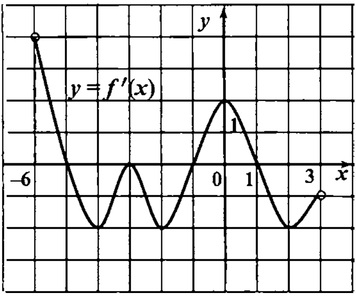
Задание 7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 5)$. На рисунке изображен **график ее производной.**



1. Укажите точки максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 5)$.

2. Укажите точки минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 5)$.
3. Укажите промежутки возрастания функции.
4. Укажите промежутки убывания функции.
5. Укажите, в какой точке отрезка $[0;\ 4]$ функция принимает наименьшее значение.
6. Укажите абсциссы точек, касательная к графику функции в которых параллельна (или совпадает) с осью абсцисс.
7. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?
8. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 3$.
9. Укажите число точек графика функции $y = f(x)$, касательная к которым параллельна или совпадает с прямой $y = -x - 5$.

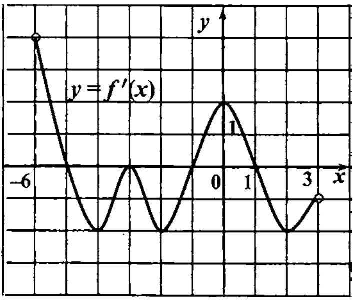
Задание 8. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 3)$. На рисунке изображен **ее график.**



1. Укажите точки максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 3)$.

2. Укажите точки минимума функции $y = f\ (x)$ на промежутке $(-6;\ 3)$.
3. Укажите промежутки возрастания функции.
4. Укажите промежутки убывания функции.
5. Укажите, в какой точке отрезка $[-3;\ 0]$ функция принимает наименьшее значение.
6. Укажите, в какой точке отрезка $[0;\ 2]$ функция принимает наибольшее значение.
7. Укажите абсциссы точек, касательная к графику функции в которых параллельна (или совпадает) с осью абсцисс.
8. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?
9. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют отрицательный угловой коэффициент?

Задание 9. Функция $y = f\ (x)$ определена на промежутке $(-6;\ 3)$. На рисунке изображен **график ее производной.**



1. Укажите точки максимума функции $y = f\ (x)$ на промежутке $(-6;\ 3)$.

2. Укажите точки минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6; 3)$.

3. Укажите промежутки возрастания функции.

4. Укажите промежутки убывания функции.

5. Укажите, в какой точке отрезка $[-3; 0]$ функция принимает наименьшее значение.

6. Укажите, в какой точке отрезка $[0; 2]$ функция принимает наибольшее значение.

7. Укажите абсциссы точек, касательная к графику функции в которых параллельна (или совпадает) с осью абсцисс.

8. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?

9. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют отрицательный угловой коэффициент?

10. Найдите значение производной функции

$f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$ в точке $x_0 = 2000$.

11. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{1-4x}{2x+1}$ в точке $x_0 = -1$.

12. Найдите значение производной функции

$f(x) = (x^2+1)^2 - 2(x^2+1) + 1$ в точке $x_0 = 2$.

13. Найдите значение производной функции

$f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{16}{x}$ в точке $x_0 = 4$.

14. Найдите значение производной функции $f(t)=\cos t+\operatorname{tg} t$ в точке $t_0=-\pi$.

15. Найдите значение производной функции $f(t)=\sin t-\operatorname{ctg} t$ в точке $t_0=0{,}5\pi$.

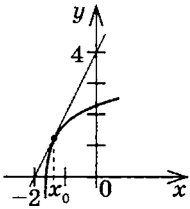
16. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезке [0; 3].

17. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезке [−3; 3].

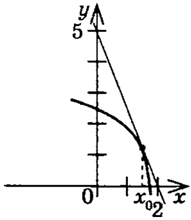
18. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x^3+3x$ на отрезке [−2; 31].

19. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=-x^3-3x$ на отрезке [−2; 31].

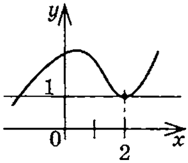
20. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



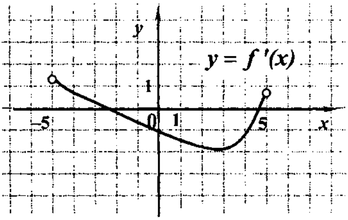
21. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



22. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Найдите значение производной в точке x_0.

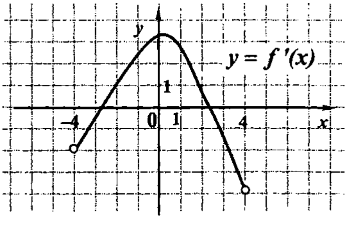


23. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции.



К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют отрицательный угловой коэффициент?

24. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 4)$. На рисунке изображен график производной этой функции.

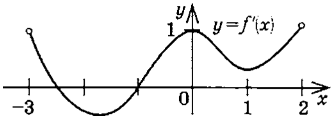


К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?

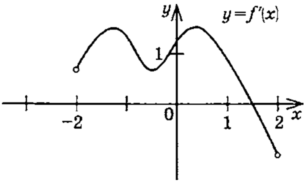
25. Укажите точку максимума функции $g(x)$, если $g'(x) = (x+6)(x-4)$.

26. Укажите точку минимума функции $g(x)$, если $g'(x) = (x-7)(x+3)$.

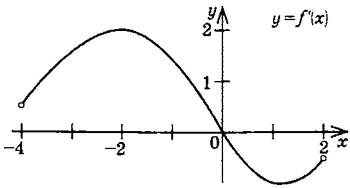
27. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков убывания функции.



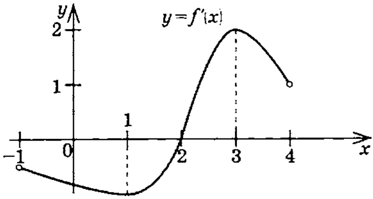
28. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков возрастания функции.



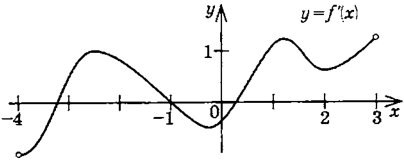
29. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



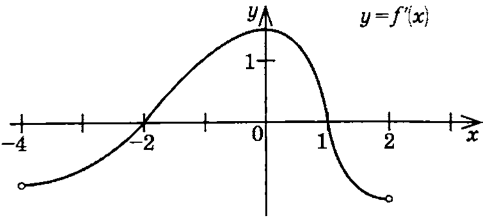
30. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1; 4)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение.



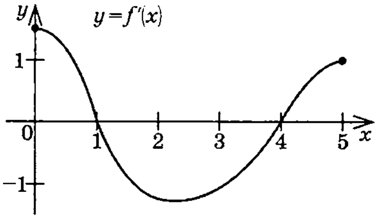
31. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 3)$. График ее производной изображен на рисунке. Сколько точек экстремума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



32. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите длину промежутка возрастания функции $y = f(x)$.



33. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0;\ 5]$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите длину промежутка убывания функции $y = f(x)$.



34. Найдите максимум функции $f(x)=x^3-2x^2-7x+3$.

35. Укажите точку максимума функции $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}$.

36. Укажите число точек экстремума функции

$$g(x)=x^5-15x^3.$$

37. Укажите число точек экстремума функции

$$f(x)=x^3(x-1)^4.$$

38. Укажите точку минимума функции

$$f(x)=x^3+x^2-5x+4.$$

39. Найдите минимум функции $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$.

40. Укажите длину промежутка возрастания функции

$$f(x)=-\frac{x^3}{3}-x^2+3x+4.$$

41. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^4(x + 2)^3$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

42. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{3}x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

43. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{3}x-\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

44. Найдите наибольшее значение функции

$f(x)=\sin x+\frac{9}{\pi}x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{5\pi}{6}\right]$.

45. Найдите наибольшее значение функции

$f(x)=\cos x-\frac{6}{\pi}x+4$ на отрезке $\left[0;\ \frac{5\pi}{3}\right]$.

46. Найдите точку минимума функции

$$f(x)=(x-6)e^{x-5}.$$

47. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=(x-6)e^{x-5}$$

на отрезке $[4;\ 6]$.

48. Найдите точку максимума функции

$$f(x)=\ln(x+4)^3-3x.$$

49. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\ln(x+4)^3-3x$$

на отрезке $[-3,5;\ 1]$.

3.2. Первообразная функции

Теоретические сведения

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на заданном промежутке I, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Общий вид первообразных. Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, а C — произвольная постоянная.

Три правила нахождения первообразных

Правило 1. Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.

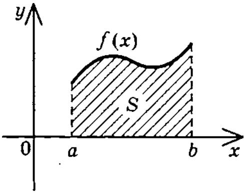
Правило 2. Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf.

Правило 3. Если F есть первообразная для f, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица первообразных для некоторых функций

Функция f	k	x^{α}, $\alpha \in R$, $\alpha \neq -1$	$\sin x$	$\cos x$
Общий вид первообразных для функции f	$kx + C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$
Функция f	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
Общий вид первообразных для функции f	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Определение. Фигура, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ при $x \in [a;b]$, называется **криволинейной трапецией.**



Площадь криволинейной трапеции находится по формуле (*) $S = F(b)-F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

Если $f(x) \le 0$ при $x \in [a;\ b]$, то $S = -(F(b)-F(a))$. (**)

Решение типовых заданий

Задание 1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

Решение. Преобразуем формулу, задающую функцию, т.е. представим $\dfrac{1}{x^4}$ в виде степени с отрицательным показателем $\left(\dfrac{1}{x^4} = x^{-4}\right)$ и воспользуемся формулой для первообразной степенной функции. Имеем:

$$F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{-3x^3} + C.$$

Ответ: $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3} + C,\ C \in R$.

Задание 2. Найти первообразную для функции $g(x)=\sqrt{x}$, график которой проходит через точку $P(9;\ 1)$.

Решение. Преобразуем формулу, задающую функцию, т.е. представим $\sqrt{x}$ в виде степени с рациональным показателем и воспользуемся формулой для первообразной степенной функции. Получим:

$$G(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$$

Так как $G(9) = 1$, то решим уравнение относительно C:

$$1 = \frac{2}{3} 9\sqrt{9} + C,\ C = -17.$$

Ответ: $G(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 17.$

Так как первообразная определяется для данной функции на заданном промежутке, то при необходимости этот промежуток указывается. Например, общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ таков: $F(x) = \ln|x| + C$, $C \in \boldsymbol{R}$; на промежутке $(-\infty; 0)$: $F(x) = \ln(-x) + C$, $C \in \boldsymbol{R}$; на промежутке $(0; \infty)$: $F(x) = \ln x + C$, $C \in \boldsymbol{R}$.

Однако если первообразная задана на множестве всех действительных чисел, то, как правило, в условии задачи об этом не говорится (как в задании 5).

Задание 3. Укажите первообразную для функции $f(x)=\frac{1}{x}$, если $F(-1) = 4$.

Решение. Имеем: $F(x) = \ln|x| + C$. Так как $-1 \in (-\infty; 0)$, то $F(x) = \ln(-x) + C$.
Учитывая, что $F(-1) = 4$, получим, что $C = 4$.

Ответ: $F(x) = \ln(-x) + 4$.

Задание 4. Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 2x}$, график которой проходит через точку $P\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Используя правило 3, получим общий вид всех первообразных для функции $f(x)$: $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + C$.

Укажем среди них ту первообразную, график которой проходит через точку P.

Так как $F\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}$, то получим уравнение для нахождения C:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\left(-\frac{\pi}{8}\right)+C,\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+C, \text{ откуда } C=1.$$

Ответ: $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+1.$

Так как общих формул для нахождения первообразных произведения или частного не существует (в отличие от соответствующих формул для производной), то при решении ряда задач необходимо выполнить некоторые преобразования: представить данную функцию в виде суммы элементарных функций, первообразные которых известны.

Задание 5. Укажите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{4+e^x}{4e^x}$.

Решение. Представим выражение $\frac{4+e^x}{4e^x}$ в виде суммы: $\frac{4+e^x}{4e^x}=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{4}=e^{-x}+\frac{1}{4}.$

Общий вид первообразных для функции $f(x)$ таков:

$$F(x)=-e^{-x}+\frac{1}{4}x+C,\ C\in \boldsymbol{R}.$$

Ответ: $F(x)=-e^{-x}+\frac{1}{4}x+C,\ C\in \boldsymbol{R}.$

Задание 6. Для функции

$$f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

найдите первообразную, проходящую через точку A (2; 17).

Решение. Упростим формулу, задающую функцию: $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^7-1$. Тогда $F(x)=\frac{x^8}{8}-x+C$. Так как $F(2)=17$, то $C=-13$.

Ответ: $F(x)=\frac{x^8}{8}-x-13.$

Задание 7. Укажите общий вид первообразных для функции $f(x)=(x-1)(x+3)^{32}$.

Решение. Представим выражение $(x-1)(x+3)^{32}$ в виде разности:

$$f(x)=(x-1)(x+3)^{32}=(x+3-4)(x+3)^{32}=(x+3)^{33}-4(x+3)^{32}$$

и $F(x)=\dfrac{(x+3)^{34}}{34}-\dfrac{4(x+3)^{33}}{33}+C,\ C\in \boldsymbol{R}.$

Ответ: $F(x)=\dfrac{(x+3)^{34}}{34}-\dfrac{4(x+3)^{33}}{33}+C,\ C\in \boldsymbol{R}.$

Следующее задание связано с исследованием первообразной данной функции. При этом ее решение не требует отыскания самой первообразной.

Задание 8. Сравните значения $F(1)$ и $F(2)$, если $F(x)$ — первообразная для функции

$$f(x)=-\sqrt{x^{20}+20}.$$

Решение. Чтобы сравнить значения $F(1)$ и $F(2)$, докажем, что функция $F(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$. Для этого исследуем знак $F'(x)$. Так как по определению $F'(x)=f(x)$, а функция $f(x)$ принимает только отрицательные значения на $\boldsymbol{R}$, то $F(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$ (см. «Достаточный признак убывания функции» в теоретических сведениях раздела «Производная функции»), значит, $F(1)>F(2)$.

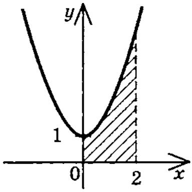
Ответ: $F(1)>F(2)$.

Рассмотрим применение первообразной к вычислению площадей плоских фигур.

Задание 9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

Решение. Построим схематично график функции $y=x^2+1$ и прямую $x=2$. (Криволинейную трапецию смотрите на рисунке.)

По формуле нахождения площади криволинейной трапеции (*) имеем:



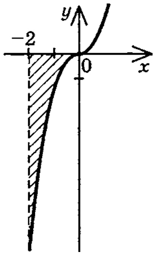
$S=F(2)-F(0)$, где $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ одна из первообразных для функции $y=x^2+1$.

$F(2)=\frac{2^3}{3}+3$, $F(0)=0$, поэтому

$S=\frac{8}{3}+3=5\frac{2}{3}$.

Ответ: $5\frac{2}{3}$.

Задание 10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=-2$.



Решение. Построим схематично график функции $y=x^3$ и прямую $x=-2$ в системе координат xOy.
Так как $y\ (x)\le 0$ при $x\in[-2;0]$, то, применяя формулу (**), получим $S=-(F(0)-F(-2))=F(-2)-F(0)$,

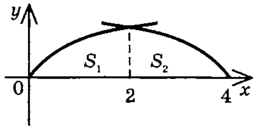
где $F(x)=\frac{x^4}{4}$ — одна из первообразных для функции $y=x^3$. $S=4$.

Ответ: 4.

Рассмотрим более сложные задания на вычисление площадей плоских фигур.

Задание 11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = 0$.

Решение. Построим схематично графики данных функций в одной системе координат.



Вычислим абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\sqrt{x} = \sqrt{4 - x}$; $x = 2$.

$S = S_1 + S_2$.

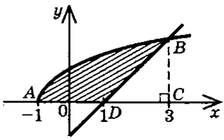
$S_1 = F_1(2) - F_1(0)$, $F_1(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ одна из первообразных для функции $y = \sqrt{x}$ и $S_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

$S_2 = F_2(4) - F_2(2)$, $F_2(x) = -\frac{2}{3}(4 - x)\sqrt{4 - x}$ одна из первообразных для функции $y = \sqrt{4 - x}$ и $S_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

$S = \frac{8}{3}\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

Задание 12. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x + 1}$, $y = x - 1$, $y = 0$.



Решение. Построим схематично графики данных функций в одной системе координат.

Вычислим абсциссы точек пересечения графиков функций:

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-1)^2, \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, x=3, \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Искомая площадь может быть найдена как разность площадей криволинейной трапеции ABC (S_1) и прямоугольного равнобедренного треугольника BCD (S_2).

$S=S_1-S_2$.

$S_1=S_{ABC}$, $S_1=F_1(3)-F_1(-1)$,

$F_1(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ одна из первообразных для функции $y=\sqrt{x+1}$ и $S_1=\frac{16}{3}$.

$S_2=S_{BCD}=2$.

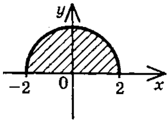
Окончательно имеем: $S=\frac{16}{3}-2=3\frac{1}{3}$, тогда $3S=10$.

Ответ: 10.

Задание 13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$.

Решение.

Имеем: $y=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4-x^2, \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4. \\ y \ge 0. \end{cases}$



Получаем, что графиком функции является полуокружность с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным 2, расположенная в верхней полуплоскости.

Площадь заштрихованной фигуры равна половине площади круга.

$$S=\frac{1}{2}S_{\text{круга}}=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите площадь фигуры (S), ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. В ответе запишите $3S$.

2. Вычислите площадь фигуры (S), ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. В ответе запишите $3S$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции $y = 2\sin x$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = 2$, $x = 4$ и графиком функции $y = \frac{1}{x^2}$.

5. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = -2x$.

6. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x$ и прямой $y = 0$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = -2$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ и графиком функции $y = \cos x$.

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 8$, осью ординат и $y = 8$.

11. Вычислите $3\sqrt{2}S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = 0$.

12. Вычислите $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{8 - x}$, $y = 0$.

13. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x + 1}$, $y = x - 1$, $y = 0$.

14. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$.

15. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{y} = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

16. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2$, $x = 0$, $x = 3$.

17. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные функции $f(x)$, причем $F_1(3) = 8$, $F_2(5) = 12$, $F_1(5) = 14$. Найдите $F_2(3)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите $f'(4)$, если $f(x)=4\sqrt{x}-5$.

2. Найдите $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $g(x) = 4x + \cos x$.

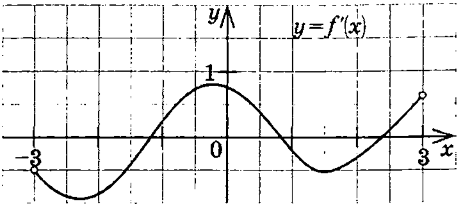
3. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки B этой прямой изменяется по закону $S(t) = 3t^2 - 12t + 7$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 72 м/с?

4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\frac{x-3}{x+4}$ в его точке с абсциссой (−3).

5. Укажите количество целочисленных решений неравенства $g'(x)\le 0$, если $g(x) = 2x^2e^x$.

6. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные функции $f(x)$, причем $F_2(7) = 8$, $F_1(7) = 18$. Найдите $F_2(2)$, если $F_1(2) = 3$.

7. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-3; 3)$. Сколько точек минимума имеет функция на этом промежутке?



8. Найдите минимум функции $g(x) = 3x^5 - 5x^3$.

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 9$.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Найдите наименьший из возможных углов, образуемых с положительным направлением оси абсцисс касательной к графику функции

$$f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+2x+1.$$

В ответе запишите его градусную меру.

Вариант 2

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите $f'(16)$, если $f(x)=8\sqrt{x}-3$.

2. Найдите $g'(\pi)$, если $g(x) = 5x - \sin x$.

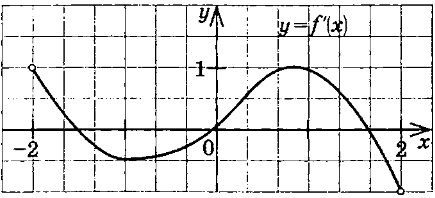
3. Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону $S = t + 0{,}4t^2 - 6$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 10 секунд после начала движения.

4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ в его точке с абсциссой (-3).

5. Укажите количество целочисленных решений неравенства $g'(x) < 0$, если $g(x) = 3x^2e^x$.

6. $G_1(x)$ и $G_2(x)$ — две различные первообразные функции $y = g(x)$, причем $G_2(2) = 3$, $G_1(2) = 7$. Найдите $G_1(6)$, если $G_2(6) = 5$.

7. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-2; 2)$. Сколько точек максимума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



8. Найдите максимум функции $g(x) = 3x^5 - 20x^3$.

9. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Найдите наименьший из возможных углов, образуемых с положительным направлением оси абсцисс касательной к графику функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+2x-3.$$

В ответе запишите его градусную меру.

4. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

4.1. Уравнения и неравенства с параметром

Теоретические сведения

Решить уравнение (неравенство) с **параметром** — это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество решений уравнения (неравенства).

4.1.1. Линейные уравнения и неравенства

Задание 1. Решите при всех значениях параметра a уравнение $ax = 3x - 5$.

Решение. Необходимо решить линейное уравнение с параметром.

1-й шаг. Приведение уравнения к «привычному виду».

Перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть уравнения и приведем подобные слагаемые.

Получим $(a-3)x = -5$.

2-й шаг. Нахождение «особого» значения параметра.

Чтобы найти значение x в данном случае, надо разделить уравнение на $(a - 3)$. При всех ли значениях параметра a мы можем обе части уравнения разделить на $(a - 3)$?

Нет. При $a = 3$ выражение $a - 3$ обращается в нуль, поэтому значение параметра $a = 3$ является **«особым»** — контрольным значением параметра. Рассмотрим это значение отдельно.

3-й шаг. Подстановка «особого» значения параметра в уравнение.

При $a = 3$ имеем: $(3 - 3)\,x = -5$; $0x = -5$ — уравнение решений не имеет.

4-й шаг. Окончательное решение уравнения.

Теперь $a \neq 3$, и чтобы выразить x, делим обе части уравнения на $(a - 3)$.

При $a \neq 3$ получим $x = -\dfrac{5}{a-3}$.

Ответ: при $a = 3$ решений нет; при $a \neq 3$ $x = -\dfrac{5}{a-3}$.

Задание 2. Решите при всех значениях параметра a неравенство $ax \leq -2x + 6$.

Решение. Необходимо решить линейное неравенство с параметром.

1-й шаг. Приведение неравенства к «привычному виду».

Перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть неравенства и приведем подобные слагаемые. Получим $(a+2)x \leq 6$.

2-й шаг. Нахождение «особого» значения параметра.

Чтобы найти значения x, надо разделить обе части неравенства на $(a + 2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем неравенство разделить на $(a + 2)$?

При $a = -2$ выражение $a + 2$ обращается в нуль.

3-й шаг. Подстановка «особого» значения параметра в неравенство.

Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = -2$ $(-2+2)x \leq 6$; $0x \leq 6$. Это неравенство верно при любых значениях x, поэтому решением исходного неравенства при $a = -2$ является промежуток $(-\infty;\ +\infty)$.

4-й шаг. Окончательное решение неравенства.

Теперь $a \neq -2$. Для того чтобы выразить x, надо разделить неравенство на $(a + 2)$.

Существенным отличием решения линейного неравенства с параметром от решения линейного уравнения с параметром является то, что знак неравенства при делении обеих частей неравенства на выражение с неизвестным может измениться на противоположный или не измениться. Поэтому при делении неравенства на выражение с параметром надо учитывать знак этого выражения.

Если $a+2<0$, то знак неравенства придется изменить; если $a+2>0$, то знак неравенства не меняется.

При $a<-2$ $x \geq \frac{6}{a+2}$ (знак неравенства изменился).

При $a>-2$ $x \leq \frac{6}{a+2}$ (знак неравенства не изменился).

Ответ: при $a = -2$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$; при $a<-2$ $x \geq \frac{6}{a+2}$; при $a>-2$ $x \leq \frac{6}{a+2}$.

4.1.2. Квадратные уравнения

Напомним, что число корней квадратного уравнения определяют по знаку дискриминанта:

если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;

если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два совпавших);

если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Задание 3. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2 - 4ax + 1 = 0$:

1) имеет два различных корня; 2) имеет два корня; 3) не имеет корней.

Решение. Найдем дискриминант исходного уравнения.

$$D = 16a^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 16a^2 - 16.$$

1. Так как уравнение имеет два различных корня, то $D = 16a^2 - 16 > 0, a^2 > 1$. Получим $a \in (-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$.

2. Так как уравнение имеет два корня, не обязательно различных, то $D = 16a^2 - 16 \geq 0, a^2 \geq 1$ и $a \in (-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$.

3. Так как уравнение не имеет корней, то $D = 16a^2 - 16 < 0, a^2 < 1$ и $a \in (-1;\ 1)$.

Ответ: при $a \in (-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ уравнение имеет два различных корня; при $a \in (-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$ уравнение имеет два корня; при $a \in (-1;\ 1)$ уравнение не имеет корней.

Задание 4. При каких значениях параметра уравнение $(b-1)x^2+bx=-b-7-4x$ имеет два различных корня?

Решение.

1-й шаг. Приведение уравнения к «привычному виду». Имеем: $(b-1)x^2+bx=-b-7-4x$,

$$(b-1)x^2+bx+b+7+4x=0.$$

Выделим коэффициенты квадратного уравнения и приведем подобные слагаемые:

$$(b-1)x^2+(b+4)x+b+7=0.$$

Первый коэффициент: $b-1$. Второй: $b+4$. Третий: $b+7$.

2-й шаг. Нахождение «особого» значения параметра.

При всех ли значениях параметра данное уравнение будет квадратным?

Нет, при $b=1$ уравнение становится линейным ($b=1$ — «особое» значение параметра). Подставим значение $b=1$ в исходное уравнение.

3-й шаг. Подстановка «особого» значения параметра в уравнение $(1-1)x^2+(1+4)x+1+7=0$, $5x+8=0$. Это уравнение имеет один корень $-1{,}6$.

4-й шаг. Окончательное решение уравнения.

При $b\neq 1$ имеем квадратное уравнение. Так как квадратное уравнение имеет два различных корня, то $D>0$.

Находим дискриминант и приравниваем его к нулю.

$$D=(b+4)^2-4\cdot(b-1)(b+7)=b^2+8b+16-4(b^2+6b-7)=$$

$$=-3b^2-16b+44,$$

$$-3b^2-16b+44>0,$$

$$3b^2+16b-44<0.$$

Соответствующее уравнение имеет корни 2 и $-\frac{22}{3}=-7\frac{1}{3}$, значит, решением неравенства является промежуток $\left(-7\frac{1}{3};\ 2\right)$.

Не забудем про «особое» значение параметра.

Ответ: при $b \in \left(-7\frac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 2)$ уравнение имеет два различных корня.

4.1.3. Квадратные неравенства

Задание 5. При каких значениях параметра неравенство $ax^2 \le -4ax - 5$ не имеет решений?

Решение.

1-й шаг. Приведение неравенства к «привычному виду».

$$ax^2 \le -4ax - 5,$$
$$ax^2 + 4ax + 5 \le 0.$$

2-й шаг. Нахождение «особого» значения параметра.

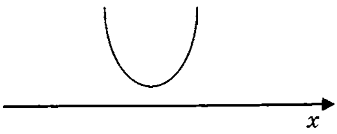
Данное неравенство не при любых значениях параметра a будет квадратным. Какое значение параметра является в данном случае «особым»? Анализируем коэффициенты. Старший коэффициент при $a = 0$ обращается в нуль.

3-й шаг. Подстановка «особого» значения параметра в неравенство.

Пусть $a = 0$. Имеем: $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5 \le 0$. Получаем $5 \le 0$. Это неверно. Значит, при $a = 0$ исходное неравенство решений не имеет.

4-й шаг. Окончательное решение неравенства.

При $a \ne 0$ исходное неравенство будет квадратным и графиком функции $f(x) = ax^2 + 4ax + 5$ является парабола. Чтобы неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \le 0$ не имело решений, надо, чтобы парабола была расположена выше оси абсцисс.



Запишем условия, соответствующие данному положению параболы.

$$\begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$D = 16a^2 - 4 \cdot a \cdot 5 = 16a^2 - 20a.$$

Решением неравенства $D < 0$ является промежуток (0; 1,25).

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0 < a < 1,25. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток (0; 1,25).

Объединяем полученные решения и получаем ответ.

Ответ: при $a \in [0;\ 1,25)$ неравенство не имеет решений.

4.1.4. Применение теоремы Виета

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, то сумма корней этого уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т.е. если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$ *(теорема Виета).*

Задание 6. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет различные положительные корни.

Решение.

1-й способ. Чтобы квадратное уравнение имело различные корни, необходимо, чтобы дискриминант его был положителен ($D > 0$). В каком случае оба корня положительны? Например, если и сумма корней положительна $(x_1 + x_2 > 0)$, и произведение корней положительно $(x_1 \cdot x_2 > 0)$.

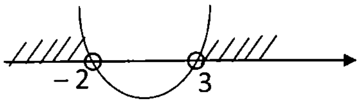
Пусть x_1 и x_2 корни уравнения, тогда, по теореме Виета: $x_1 + x_2 = 2b$ и $x_1 \cdot x_2 = b + 6$. И имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = b + 6 > 0, \\ D > 0; \end{cases} \begin{cases} b > 0, \\ b > -6, \\ 4b^2 - 4(b+6) > 0. \end{cases}$$

Решим квадратное неравенство:

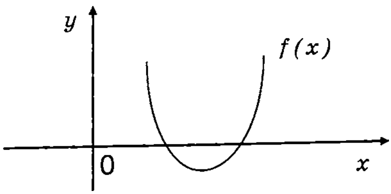
$$4b^2 - 4b - 24 > 0,$$

$$b^2 - b - 6 > 0.$$



Решением системы неравенств будет промежуток $(3;+\infty)$.

2-й способ. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2bx + b + 6$. Ее графиком является парабола. Изобразим параболу, удовлетворяющую условиям задачи.



Запишем условия, соответствующие этому расположению параболы.

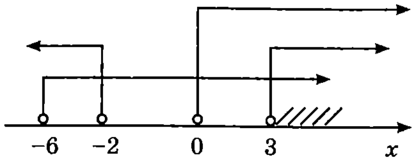
$$\begin{cases} f(0) > 0\text{, (1)} \\ D > 0\text{, (2)} \\ x_{\text{вершины}} > 0\text{. (3)} \end{cases}$$ Решим каждое из этих неравенств.

(1) $f(0) = b + 6 > 0, b > -6$.

(2) $D = 4b^2 - 4(b+6) \geq 0, \quad b \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$.

(3) $E_{x_{\text{вершины}}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2b}{2} = b > 0.$

Отметим решения каждого неравенства на координатной прямой и найдем пересечение решений.



Решением системы неравенств будет промежуток $(3;+\infty)$.

Ответ: при $b \in (3;\ +\infty)$ уравнение имеет различные положительные корни.

Задание 7. Найдите все значения параметра p, при которых разность корней уравнения $x^2+px+12=0$ равна 1.

Решение. Пусть x_1 и x_2 корни уравнения ($D=p^2-48,\ p^2-48\geq 0$), тогда, по теореме Виета, имеем

систему $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=12, \\ x_1-x_2=1. \end{cases}$

Выразим корни уравнения из первого и третьего уравнений через параметр p и подставим во второе уравнение.

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-p}{2}, \\ x_1\cdot x_2=12, \\ x_2=\dfrac{-1-p}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{1-p}{2}, \\ \dfrac{1-p\cdot}{2}\cdot\dfrac{-1-p}{2}=12, \\ x_2=\dfrac{-1-p}{2}. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение относительно параметра p.

$$\frac{(1-p)(1+p)}{4}=-12,$$

$$1-p^2=-48,$$

$$p^2=49.$$

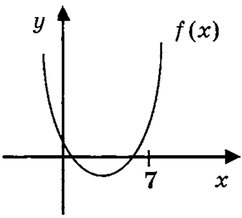
Рассмотрим дискриминант исходного квадратного уравнения: $D=p^2-48$. Так как $p^2=49$, то $D>0$, и уравнение имеет два корня 7 и (-7).

Ответ: при $p=\pm 7$ разность корней уравнения равна 1.

4.1.5. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

Задание 8. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2-ax+7=0$ меньше 7?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-ax+7$. Графиком данной функции является парабола. Изобразим параболу с указанными свойствами.



Запишем условия, соответствующие этому расположению параболы.

$$\begin{cases} f(7)>0, \\ D\geq 0, \\ x_{\text{вершины}}<7. \end{cases}$$

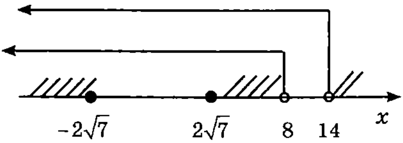
Решим каждое из этих неравенств.

$$f(7)=49-7a+7>0, a<8.$$

$$D=a^2-28\geq 0, \quad a^2\geq 28, a\in\left(-\infty;\ -2\sqrt{7}\right]\cup\left[2\sqrt{7};\ +\infty\right).$$

$$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-a}{2} = \frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2} < 7, a < 14.$$

Отметим решения каждого неравенства на координатной прямой и найдем пересечение решений.

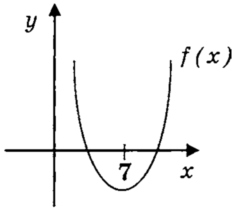


Решением системы неравенств будет объединение промежутков $\left(-\infty; -2\sqrt{7}\right] \cup \left[2\sqrt{7}; 8\right)$.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{7}\right] \cup \left[2\sqrt{7}; 8\right)$ оба корня уравнения меньше 7.

Задание 9. При каких значениях параметра a число 7 находится между корнями уравнения $x^2 - ax + 7 = 0$?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - ax + 7$. Изобразим параболу, удовлетворяющую условиям задачи, и опишем соответствующие условия.



Чтобы число 7 разделяло корни уравнения, достаточно, чтобы $f(7) < 0$.

Решим неравенство $f(7) = 49 - 7a + 7 < 0$, $a > 8$.

Ответ: при $a > 8$ число 7 находится между корнями уравнения $x^2 - ax + 7 = 0$.

4.1.6. Уравнения с модулем

Уравнения и неравенства с модулем можно решать графически. Для этого выражения, содержащие параметр, переносят в одну часть уравнения (неравенства) и строят графики функций левой и правых частей уравнения (неравенства).

Задание 10. Решите уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$ при $a > 0$.

Решение.

1-й шаг. Выделим (перенесем из одной части уравнения в другую) в одной части уравнения все выражения, не содержащие параметр.

$$|x + 3| - a|x - 1| = 4,$$
$$|x + 3| - 4 = a|x - 1|.$$

2-й шаг. Построим в одной системе координат графики функций из левой и правой частей уравнения.

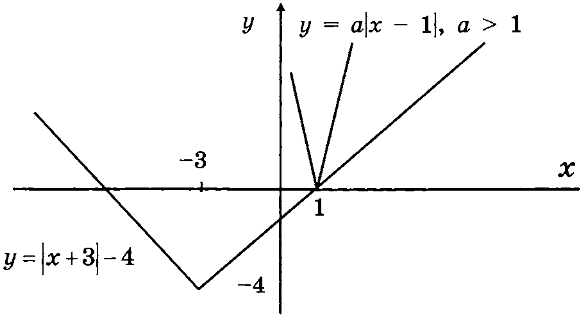
Будем строить в одной системе координат графики функций $y = |x + 3| - 4$, $y = a|x - 1|$.

Графиком функции $y = |x + 3| - 4$ является прямой угол с вершиной $(-3; -4)$.

Чтобы построить график функции $y = a|x - 1|$, рассмотрим четыре случая:

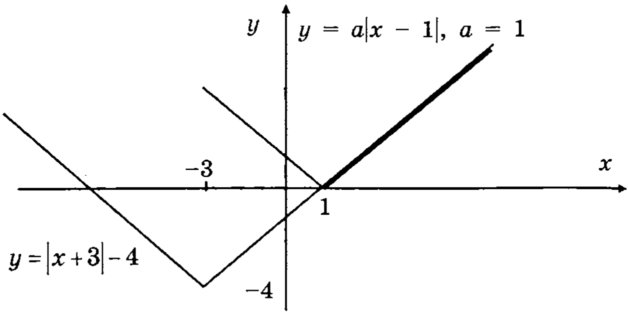
1) $a > 1$; 2) $a = 1$; 3) $0 < a < 1$; 4) $a = 0$.

1) При $a > 1$ графики выглядят следующим образом:



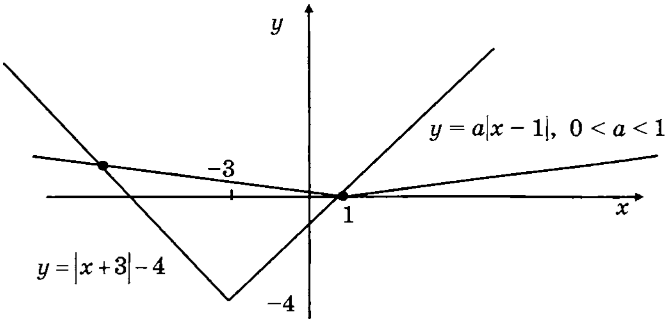
Графики пересекаются в одной точке: (1; 0), т.е. при $a > 1$ $x = 1$.

2) При $a = 1$ графики выглядят следующим образом.



При $x > 1$ графики совпадают, т.е. система имеет бесконечно много решений. При $a = 1$ решением уравнения будет промежуток $[1; +\infty)$.

3) При $0 < a < 1$ графики выглядят следующим образом.



Графики пересекаются в двух точках. Одна точка имеет координаты (1; 0).

Чтобы найти координаты второй точки, надо решить систему.

$$\begin{cases} |x+3|-4=a|x-1|, \\ x<-3. \end{cases}$$

Так как $x < -3$, то модули выражений раскрываются следующим образом:

$$|x+3|=-(x+3)=-x-3; \quad |x-1|=-(x-1)=-x+1.$$

Осталось решить уравнение:

$$-x-3-4=a(-x+1),$$
$$ax-x=a+7,$$
$$x(a-1)=a+7.$$

Так как $0 < a < 1$ (и поэтому $a \neq 1$), то $x=\frac{a+7}{a-1}$.

Итак, при $0 < a < 1$ $x = 1$ и $x=\frac{a+7}{a-1}$.

4) При $a = 0$ график $y=a|x-1|$ совпадает с осью абсцисс, и уравнение имеет два решения. Решения можно найти из уравнения $|x+3|-4=0$.

$|x + 3| = 4$,
$x + 3 = 4$ или $x + 3 = -4$,
$x = 1$ или $x = -7$.

При $a = 0$ уравнение имеет два корня: 1 и -7.

Ответ: при $a > 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \geq 1$; при $0 < a < 1$ $x = 1$ и $x=\frac{a+7}{a-1}$; при $a = 0$ $x = 1$ и $x = -7$.

4.1.7. Координатная плоскость xOa

Наряду с аналитическими методами при решении заданий с параметрами используют и координатный метод. Об этом уже говорилось при решении уравнений с модулем. Одной из разновидностей этого метода является использование координатной плоскости xOa. Построив на координатной плоскости множество всех точек $(x; a)$, для которых выполняется условия задания, можно найти его решение.

Задание 11. При каких значениях параметра все решения уравнения $|x-2|-a+3x=0$ лежат в отрезке $[-1;\ 4]$?

Решение.

1-й шаг. Традиционное решение уравнения с модулем.

$|x-2|-a+3x=0 \Leftrightarrow |x-2|=a-3x$

Если $x \geq 2$, то $x-2=a-3x$. Имеем: $x=\frac{a+2}{4}$. (1)

Если $x < 2$, то $2-x=a-3x$. Имеем: $x=\frac{a-2}{2}$. (2)

2-й шаг. Построение в плоскости xOa решений уравнения.

Мы привыкли строить графики функции вида $y=f(x)$, поэтому выразим параметр через переменную x.

$$\text{(I)}\quad x=\frac{a+2}{4} \Leftrightarrow a=4x-2,$$

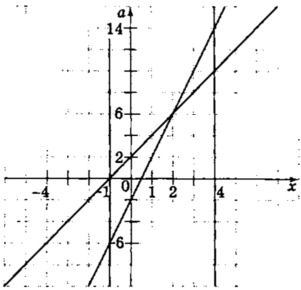
$$\text{(II)}\quad x=\frac{a-2}{2} \Leftrightarrow a=2x+2.$$

Построим графики функций.

$a=4x-2$ и $a=2x+2$.

3-й шаг. Дополнительный вопрос. Так как все решения исходного уравнения лежат в отрезке $[-1;\ 4]$, то построим еще прямые $x=-1$, $x=4$. Найдем точки пересечения этих прямых с графиками функций.

4-й шаг. Найдем точки пересечения и соотнесем их с вопросом в задании.



Чтобы все решения исходного уравнения лежали в отрезке $[-1;\ 4]$, достаточно, чтобы параметр a принимал значения от 0 до 14.

Ответ: при $a \in [0;\ 14]$.

4.1.8. Рациональные неравенства

Задание 12. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x+a}<0$ справедливо для любых $x \in [-1;\ 2]$?

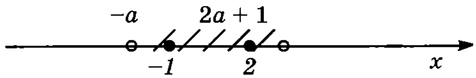
Сведем решение рационального неравенства к решению квадратного. Имеем: $\dfrac{x-2a-1}{x+a}<0 \Leftrightarrow (x-2a-1)(x+a)<0\ (*)$.

Сравним $2a+1$ и $(-a)$.

Возможны 3 случая взаимного расположения точек $2a+1$ и $(-a)$.

1) $2a+1>-a$; 2) $2a+1=-a$; 3) $2a+1<-a$.

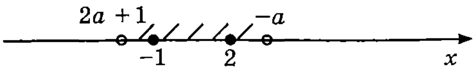
1-й случай. $2a+1>-a$, $a>-\dfrac{1}{3}$. Отрезок $[-1;\ 2]$ должен лежать внутри интервала $(-a;\ 2a+1)$, т.е.



$$\begin{cases} -a<-1, \\ 2a+1>2, \\ a>-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a>\dfrac{1}{2} \\ a>-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a>1}$$

2-й случай. $2a+1=-a$, $a=-\dfrac{1}{3}$. Подставим $a=-\dfrac{1}{3}$ в $(*)$, получим $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2<0$. Это неравенство решений не имеет.

3-й случай. $2a+1<-a$, $a<-\dfrac{1}{3}$, тогда



Решим систему $\begin{cases} a<-\dfrac{1}{3}, \\ 2a+1<-1, \\ -a>2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\dfrac{1}{3} \\ a<-1 \\ a<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a<-2}$.

Ответ: при $a\in(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$.

4.1.9. Тригонометрические уравнения

Задание 13. При каких значениях параметра a не имеет решения уравнение: $\cos^2 x-(a+4)\cos x+4a=0$?

Решение.

Решая соответствующее квадратное уравнение, найдем, что $\left[\begin{array}{l} \cos x=a \\ \cos x=4 \end{array}\right.$. Тогда исходное уравнение не имеет решений, если не имеет решений уравнение $\cos x=a$.

Ответ: при $a\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ уравнение не имеет решений.

Задание 14. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x-4\cos x-a=0$ не имеет решений?

Решение.

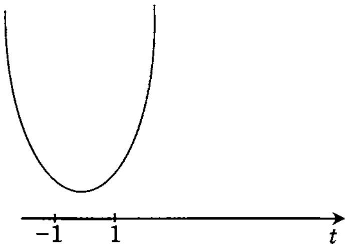
Аналогично поступить не получится, так как дискриминант соответствующего квадратного уравнения не является точным квадратом: $D=16+4a$.

В этих случаях используют свойства квадратичной функции.

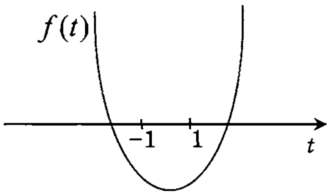
Пусть $t=\cos x$, тогда имеем квадратичную функцию $f(t)=t^2-4t-a$, $t\in[-1;\ 1]$, графиком которой является парабола. Изобразим параболу с указанными свойствами.

Возможны несколько случаев расположения параболы.

1-й случай. Парабола расположена выше оси. $D = 16 + 4a < 0$ (I), $\boxed{a < -4}$.

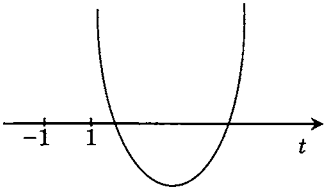


2-й случай. Отрезок [−1; 1] лежит между корнями:



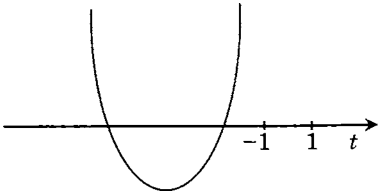
$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \\ -1 < t_{\text{верш}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 - 4\cdot(-1) - a < 0 \\ 1^2 - 4\cdot 1 - a < 0 \\ -1 < 2 < 1 \end{cases}$$ Решений нет.

3-й случай. Меньший корень уравнения больше 1.



$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ t_{\text{верш}} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 - 4\cdot 1 - a > 0 \\ 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a < -3} \text{ (II)}$$

4-й случай. Больший корень уравнения меньше −1.

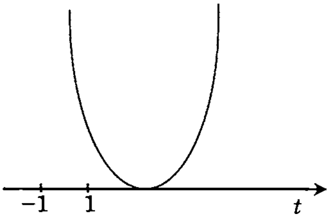


$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ t_{\text{верш}}<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2-4\cdot(-1)-a>0 \\ 1^2-4\cdot 1-a>0 \\ 2<-1 \end{cases}$$

Решений нет.

5-й случай. Парабола касается оси вне отрезка [−1; 1].

$$\begin{cases} D=0 \\ t_{\text{верш}}\notin [-1;1], \end{cases} \boxed{a=-4}.$$



Замечание:

Если сразу увидеть, что абсцисса вершина параболы $f(t)=t^2-4t-a$ равна 2, то можно рассматривать только случаи 1 и 3.

Ответ: при $a\in(-\infty;\ -3)$ исходное уравнение не имеет решений.

4.1.10. Иррациональные уравнения

Задание 15. Укажите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x+2a}=x-3$ имеет единственное решение.

$$\sqrt{x+2a}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0, \\ x+2a=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3, \\ x^2-7x+9-2a=0. \end{cases}$$

Уравнение имеет единственное решение, если

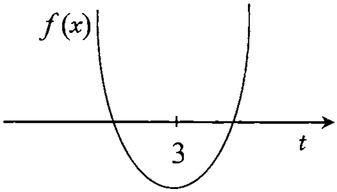
1) $D=0$ и $x_1=x_2\ge 3$;

2) $D>0$ и один из корней меньше 3, а другой больше 3, т.е., как говорят, 3 разделяет корни.

1. $\begin{cases} D=49-4(9-2a)=0, \\ x\ge 3(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{13}{8}, \\ x\ge 3 \end{cases}.$

При $a=-\dfrac{13}{8}$ $x_1=x_2=\dfrac{7\pm 0}{2}$ и выполняется условие (1).

2. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-7x+9-2a$. Изобразим график функции $f(x)$ (параболу) с указанными свойствами (3 разделяет корни).



Имеем следующие условия: $\begin{cases} D>0 & (2) \\ f(3)<0 & (3) \end{cases}$

Решим неравенство (2) $D=13+8a>0$, $a>-\dfrac{13}{8}$.

Решим неравенство (3) $f(3)<0$, так как $f(3)=-3-2a<0$, то $a>-1{,}5$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют следующие значения a: $a=-\dfrac{13}{8}$, $a>-1{,}5$. Наименьшее целое из них равно -1.

Ответ: -1.

4.1.11. Показательные уравнения

Задание 16. При каких значениях m уравнение $200^{2x} - 4 \cdot 200^x + m^2 - 3m = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Введем новую переменную $t = 200^x$, $t > 0$, тогда уравнение примет вид: $t^2 - 4t + m^2 - 3m = 0$. Это квадратное уравнение при $t > 0$ имеет единственный корень в двух случаях:

1) если его дискриминант $D = 0$ и корень квадратного уравнения — положительный;

2) если дискриминант $D > 0$ и только один корень квадратного уравнения положительный. В этом случае квадратное уравнение имеет два корня, но показательное уравнение имеет единственный корень.

Рассмотрим первый случай. Найдем дискриминант: $D = 16 + 12m - 4m^2$.

Решим квадратное уравнение $16 + 12m - 4m^2 = 0$, получим, что $m = 4$ или $m = -1$. При таких значениях параметра m квадратное уравнение имеет единственный корень $t = 2 > 0$, следовательно, первоначальное показательное уравнение также будет иметь единственный корень.

Рассматривая второй случай, решим квадратное неравенство:

$$D > 0,\ 4 + 3m - m^2 > 0,\ (m - 4)(m + 1) < 0,\ -1 < m < 4.$$

Для того чтобы один корень квадратного уравнения был положительным (при условии существования двух корней), второй должен быть отрицательным или равным нулю. Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

Если корни имеют разные знаки, значит, их произведение отрицательно, поэтому, применяя теорему Виета, получим $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m$, $m^2 - 3m < 0$. Решая последнее неравенство, получим $0 < m < 3$.

Если один из корней равен нулю, то, подставив его в квадратное уравнение, получим, что второй может быть найден из условия $m^2 - 3m = 0$, $m = 0$ или $m = 3$.

Объединяя все возможные значения параметра m, получим, что данное показательное уравнение имеет единственный корень при $m \in [0;\ 3] \cup \{-1;\ 4\}$.

Ответ: $[0;\ 3] \cup \{-1;\ 4\}$.

4.1.12. Логарифмические уравнения

Задание 17. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\log_5\left(x^2-2x-a\right)=\log_5(7x-a).$$

Решение.

$$\log_5\left(x^2-2x-a\right)=\log_5(7x-a) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-a=7x-a, \\ 7x-a>0 \end{cases}.$$

Уравнение в системе равносильно квадратному уравнению $x^2-9x=0$. Его корни: 0 и 9. При найденных значениях x рассмотрим неравенство $7x-a>0$.

При $x=0$ имеем $7\cdot 0-a>0$, т.е. $a<0$. При $x=9$ имеем $7\cdot 9-a>0$, т.е. $a<63$. Остается обобщить полученный результат.

Ответ: при $a<0$ уравнение имеет два корня: 0 и 9; при $0 \le a < 63$ уравнение имеет один корень 9; при $a \ge 63$ уравнение корней не имеет.

4.2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Задание 18. При каких значениях b прямая $y=bx$ является касательной к параболе $f(x)=x^2-2x+4$?

Решение. Для того чтобы прямая $y=bx$ была касательной к параболе $f(x)=x^2-2x+4$ в точке с абсциссой x_0, необходимо и достаточно, чтобы:

1) значения обеих функций при $x=x_0$ совпадали;

2) угловой коэффициент прямой $y=bx$ (b) был равен значению производной функции $f(x)=x^2-2x+4$ в точке x_0.

Решим систему: $\begin{cases} bx_0 = x_0^2 - 2x_0 + 4 \\ b = 2x_0 - 2 \end{cases}$. Подставив выражение для b в первое уравнение системы, получим

$$\begin{cases} (2x_0 - 2)x_0 = x_0^2 - 2x_0 + 4, \\ b = 2x_0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0 = -2, \\ x_0 = 2, \end{array}\right. \\ b = 2x_0 - 2. \end{cases}$$

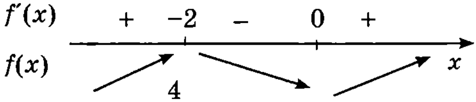
И искомые значения b равны -6 и 2.

Ответ: при $b = -6$ и $b = 2$.

Задание 19. При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$ более чем в двух различных точках?

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2$. Построим схематично ее график. Функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

$$f'(x) = x^2 + 2x = x(x + 2)$$



$f(0) = 0$, $f(-2) = \dfrac{4}{3}$. Тогда прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$ более чем в двух различных точках (т.е. в данном случае в трех точках), если $0 < a < \dfrac{4}{3}$.

Ответ: при $0 < a < \dfrac{4}{3}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Дано уравнение: $x^2 - (4 + a)x + 4a = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет два различных корня, и: 1) оба корня лежат в промежутке $(1;\ 5)$; 2) 5 разделяет корни; 3) оба

корня больше 5; 4) оба положительны; 5) оба отрицательны; 6) корни разных знаков; 7) разность корней равна 5; 8) отношение корней равно 5.

2. Дано уравнение: $x^2 - ax + 5 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет два различных корня, и: 1) оба корня лежат в промежутке (1; 5); 2) 5 разделяет корни; 3) оба корня больше 5; 4) оба положительны; 5) оба отрицательны; 6) корни разных знаков; 7) разность корней равна 5; 8) отношение корней равно 5.

3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(x-2a)(x-a-2) \le 0$ имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x+a \ge 4 \\ x-a \le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

5. При каких значениях a уравнение $(x+2)\sqrt{x-a} = 0$ имеет единственное решение?

6. При каких значениях a уравнение $(x-a)\sqrt{x-2} = 0$ имеет ровно два решения?

7. При каких значениях a уравнение $(x-a)\sqrt{x^2-4x+3} = 0$ имеет более двух решений?

8. При каких значениях a уравнение $(x^2+4x+3)\sqrt{x-a} = 0$ имеет ровно два решения?

9. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $\sin x = \dfrac{a^2}{2} - 4$ имеет хотя бы одно решение.

10. Укажите наименьшее натуральное значение a, при котором уравнение $\cos x = \dfrac{a^2}{7}$ не имеет решений.

11. При каких значениях a уравнение $(\sin x - a) \cdot \cos x = 0$ имеет единственное решение при $x \in [0; \pi]$?

12. При каких значениях a уравнение $(\cos x - a)\sin x = 0$ имеет единственное решение при $x \in [\pi;\ 1{,}5\pi]$?

13. При каких значениях a уравнение $(\sqrt{x} - a)(x^2 - a) = 0$ имеет ровно три решения?

14. При каких значениях параметра a уравнение имеет хотя бы два различных решения:
1) $x^2 - 2x - a = 0$; 2) $x^4 - 2x^2 - a = 0$; 3) $x - 2\sqrt{x} - a = 0$;
4) $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - a = 0$; 5) $4^x - 2^{x+1} - a = 0$;
6) $\log_2^2 x - 2\cdot\log_2 x - a = 0$?

15. При каких значениях параметра a система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ y = |x-a| \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ y = -|x-a| \end{cases}$; 3) $\begin{cases} y = -\sqrt{x-2} \\ y = |x-a| \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ y = 2-|x-a| \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$?

16. При каких значениях параметра a неравенство не имеет решений:
1) $\sqrt{4 - x^2} > a$; 2) $\sqrt{4 - x^2} > a - x$?

17. При каких значениях параметра все решения уравнения $|x - 2a| = a - 3x$ лежат в отрезке $[-1;\ 4]$?

18. При каких значениях параметра все решения уравнения $|x - 2| - a + 2x = 0$ лежат в отрезке $[-2;\ 3]$?

19. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} |x + a| \le 4 \\ x - a \le 0 \end{cases}$ имеет единственное натуральное решение.

20. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} |x+a| \le 4 \\ x-a \le 0 \end{cases}$ имеет ровно 5 целых решений.

21. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+a \le 4 \\ x+2-a \le 0 \end{cases}$ имеет ровно 3 целых решения.

22. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+a \le 8 \\ x^2-a \le 0 \end{cases}$ имеет ровно 5 целых решений.

23. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $|x^2-2x+a|>8$ не имеет решений на отрезке $[-1;\ 2]$.

24. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}=x+4$ имеет единственное решение.

25. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x+4}=x-a$ имеет единственное решение.

26. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x+2a}=x-3$ имеет единственное решение.

27. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-3}=x+2a$ имеет единственное решение.

28. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^4 x-3\sin^2 x-a=0$ имеет хотя бы одно решение?

29. При каких значениях параметра a уравнение $4^x-5\cdot 2^x+a=0$ имеет два различных решения?

30. При каких значениях параметра a уравнение $\log_2^2 x-5\cdot\log_2 x+a=0$ имеет два различных решения?

31. При каких значениях параметра a уравнение $4^x-(2a+1)2^x+a(a+1)=0$ имеет хотя бы одно решение?

32. При каких значениях параметра a уравнение $4^x-(2a+1)2^x+a(a+1)=0$ имеет два различных решения?

33. При каких значениях параметра a уравнение $4^x-(2a-1)2^x+a(a-1)=0$ не имеет решений?

34. При каких значениях параметра m уравнение $200^{2x}-6\cdot200^x+m^2-8m=0$ имеет хотя бы одно решение?

35. При каких значениях параметра a уравнение $25^{x+0,5}-(5a+2)10^x+a\cdot4^{x+0,5}=0$ имеет два различных корня?

36. При каких значениях параметра a уравнение $2\cdot9^x-(2a+3)6^x+3a\cdot4^x=0$ имеет один корень?

37. Решите неравенство $9^{x+1}+a\cdot8\cdot3^x-a^2<0$.

38. При каких значениях параметра a прямая $y=-10x+a$ является касательной к параболе $f(x)=3x^2-4x-2$?

39. При каких значениях параметра a прямая $y=a$ пересекает график функции $y=x^3-3x^2$ в единственной точке?

40. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает график функции $y=x^3-3x^2$ в трех различных точках?

41. При каких значениях параметра a прямая $y=a$ не пересекает график функции $y=x^4-2x^2-5$?

5. ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Планиметрия

Теоретические сведения

a, b, c — стороны треугольника.

α, β, γ — углы треугольника, $\angle A$ — угол, лежащий против стороны a, $\angle B$ — угол, лежащий против стороны b, $\angle C$ — угол, лежащий против стороны c.

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные из вершин соответственно на стороны a, b и c.

R — радиус окружности, описанной около треугольника. r — радиус окружности, вписанной в треугольник. P — периметр треугольника, p — полупериметр треугольника. S — площадь.

Треугольники

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A,\ S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ S = pr.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (теорема синусов).}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A \text{ (теорема косинусов).}$$

1. *Прямоугольный треугольник (a — катет, b — катет, c — гипотенуза)*

$a^2+b^2=c^2$ (теорема Пифагора).

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

2. *Равнобедренный треугольник*

Углы при основании равнобедренного треугольника равны. В равнобедренном треугольнике три отрезка — высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, равны.

Четырехугольники

d_1, d_2— диагонали четырехугольника, S — площадь.

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle d_1 d_2$.

1. *Параллелограмм*

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны. Противоположные углы параллелограмма равны.

$S = ah_a$, $S = ab \sin \angle ab$, где a и b — смежные стороны параллелограмма, h_a — высота, проведенная к стороне a.

2. *Прямоугольник*

Имеет все свойства параллелограмма.

Диагонали прямоугольника равны.

$S = ab$, где a и b — смежные стороны прямоугольника.

3. *Ромб*

Имеет все свойства параллелограмма. Все стороны ромба равны. Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

4. *Квадрат*

Имеет все свойства прямоугольника и ромба. Стороны квадрата равны.

Диагонали квадрата перпендикулярны и равны.

5. *Трапеция*

$S = \frac{a+b}{2} h$, где a и b — основания трапеции, h — ее высота.

6. *Вписанный четырехугольник*

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

7. *Описанный четырехугольник*

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, т.е. $a+c=b+d$.

Решение типовых заданий

В содержание ЕГЭ часто включаются планиметрические задачи, связанные с нахождением площадей, линейных или угловых величин треугольников или четырехугольников. Для решения этих задач необходимо помнить:

— основные определения и свойства геометрических фигур: треугольников (равностороннего, равнобедренного, прямоугольного), четырехугольников (квадрата, ромба, параллелограмма, трапеции и др.), углов (вписанного, центрального, вертикального и др.) и т.п.;

— полезные формулы, которые приведены выше, для нахождения длин и площадей или связывающие линейные и угловые элементы треугольника.

Чаще всего решение задач состоит в последовательном применении 4—5 подобных свойств и формул. Рассмотрим применение этих свойств на примерах.

Задание 1. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\angle CAD=30°$, $BD=13$, $AD=5$. В ответе укажите значение найденной величины, умноженное на $12-5\sqrt{3}$.

Решение.

1-й способ

1) Найдем площадь треугольника AOD, а затем найдем площадь параллелограмма. Чтобы найти площадь треугольника AOD, достаточно найти длину стороны AO.

2) Из треугольника AOD по теореме косинусов

$$6{,}5^2=AO^2+5^2-2\cdot 5\cdot AO\cdot\cos\angle OAD,$$

$$AO^2-5\sqrt{3}AO-17{,}25=0.$$

Получаем, что $AO=\dfrac{5\sqrt{3}+12}{2}$.

3) Площадь треугольника AOD равна

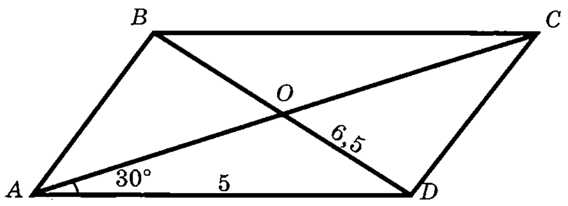
$$S=0{,}5\cdot5\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}+12}{2}\right)\cdot\sin\,30°=\frac{5}{8}\cdot\left(5\sqrt{3}+12\right).$$

4) Площадь параллелограмма $ABCD$ в 4 раза больше площади треугольника AOD, поэтому

$$S_{ABCD}=\frac{5}{2}\cdot\left(5\sqrt{3}+12\right).$$

2-й способ

1) Обозначим буквой O точку пересечения диагоналей. Рассмотрим треугольник AOD. В нем известны два линейных элемента (сторона $OD=6{,}5$, $AD=5$) и один угловой ($\angle OAD=30°$), значит, в этом треугольнике можно найти оставшиеся элементы, например $\angle AOD$.



По теореме синусов:

$$\frac{OD}{\sin\angle OAD}=\frac{AD}{\sin\angle AOD};\quad\frac{6{,}5}{\sin30°}=\frac{5}{\sin\angle AOD};$$

$$\sin\angle AOD=\frac{5}{13},\quad\angle AOD=\arcsin\frac{5}{13}.$$

2) В треугольнике AOD $\angle ADO=150°-\arcsin\dfrac{5}{13}$.

(по теореме о сумме углов треугольника).

3) Площадь

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADO=\frac{1}{2}\cdot5\cdot13\cdot\sin\left(150^\circ-\arcsin\frac{5}{13}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}5\cdot13\cdot\left(\sin150^\circ\cdot\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)-\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\cdot\cos150^\circ\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}5\cdot13\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}5\cdot13\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

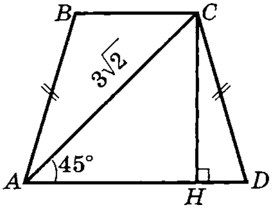
$$=\frac{5}{4}\left(12+5\sqrt{3}\right).$$

4) Так как диагональ BD разбивает параллелограмм на два равных треугольника, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади $\triangle ABD$: $S=2{,}5\cdot(12+5\sqrt{3})$.

5) В ответе следует записать результат умножения: $2{,}5\cdot(12+5\sqrt{3})\cdot(12-5\sqrt{3})=2{,}5\cdot(144-75)=172{,}5$.

Ответ: 172,5.

Задание 2. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна $3\sqrt{2}$ и составляет с основанием угол 45°.



Решение.

1-й способ. 1) Для того чтобы найти площадь трапеции, достаточно найти ее высоту и длины оснований (см. формулу площади трапеции). Высоту найдем с помощью теоремы Пифагора из прямоугольного равнобедренного (почему?) $\triangle ACH$.

$2CH^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$, $CH^2=9$, значит, высота $CH=3$, следовательно, $AH=3$.

2) Обозначим длину HD через a, тогда $AD=3+a$, $BC=3-a$. Используя формулу для нахождения площади трапеции, получим:

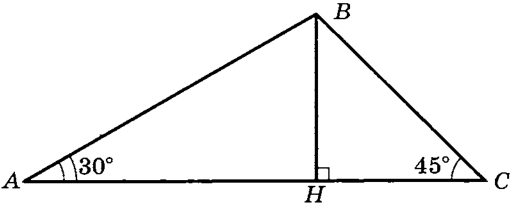
$$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot CH=\frac{3-a+3+a}{2}\cdot 3=3\cdot 3=9.$$

2-й способ. 1) Проведем диагонали трапеции (см. рисунок к задаче). Учитывая, что в данном случае угол между диагоналями трапеции — прямой (почему?), площадь трапеции можно найти по формуле площади произвольного четырехугольника:

$$S=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin\angle(d_1d_2)=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin 90^\circ=3\cdot 3=9.$$

Ответ: 9.

Задание 3. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $2\sqrt{2}$. Найдите длину высоты BH, если $\angle A=30^\circ$, а $\angle C=45^\circ$.



Решение.

1) Применяя теорему синусов для ΔABC, получим

$$\frac{BC}{\sin 30^\circ}=2R,\ BC=2R\sin 30^\circ=2\sqrt{2}.$$

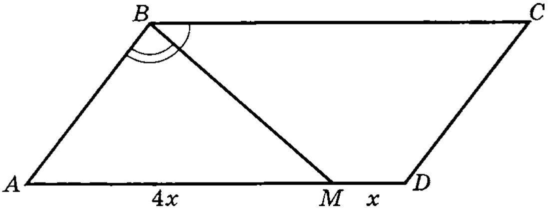
2) Треугольник BCH — прямоугольный и равнобедренный. Применяя теорему Пифагора для ΔBCH, найдем длину стороны BH:

$$2BH^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2,\ BH=2.$$

Ответ: 2.

Задание 4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке M так, что AM

в 4 раза больше MD. Найдите длину большей стороны параллелограмма, если его периметр равен 36.



Решение.

1) Точка M делит сторону AD в отношении 4:1, следовательно, обозначив длину MD через x, получим $AM=4x$, а $BC=AD=5x$ по свойству параллелограмма.

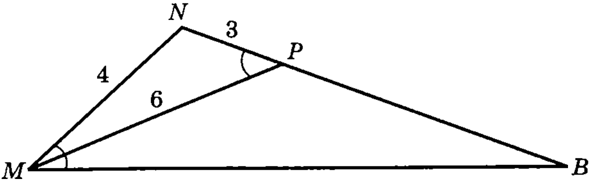
2) $\angle AMB=\angle MBC$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BM, значит, $\angle ABM=\angle AMB=\angle MBC$, поэтому треугольник ABM — равнобедренный.

3) Получили, что длины сторон параллелограмма равны $AB=DC=4x$, $AD=BC=5x$. Зная периметр, можем составить уравнение: $4x+4x+5x+5x=36$, $18x=36$, $x=2$.

4) Получили, что $AB=DC=8$, $AD=BC=10$.

Ответ: 10.

Задание 5. Известны длины сторон треугольника MNP: $MN=4$, $NP=3$, $MP=6$. На луче NP выбрана такая точка B, что угол NMB равен углу NPM. Найдите большую сторону треугольника MPB.



Решение

1) $\Delta MNP \sim \Delta BNM$ (по двум углам), следовательно, из соотношения сторон получим:

$$\frac{MN}{NB}=\frac{MP}{MB}=\frac{NP}{MN},$$

$$NB=\frac{16}{3},\ MB=8.$$

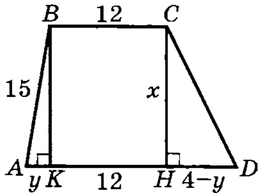
2) Стороны треугольника MPB имеют следующие длины:

$$MB=8,\ MP=6,\ PB=2\frac{1}{3}.$$

3) В треугольнике MPB MB — большая сторона. Ее длина равна 8.

Ответ: 8.

Задание 6. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию с основаниями 12 и 16 и одной из боковых сторон, равной 15.



Решение.

1) По свойству описанного четырехугольника:

$$BC+AD=AB+CD,\ 12+16=15+CD,\ CD=13.$$

2) Две высоты трапеции (BK и CH) отсекают на большем основании три отрезка. Пусть $AK=y$, тогда $KH=BC=12$ и $HD=AD-AH=16-y-12=4-y$.

3) Применяя теорему Пифагора для ΔABK и ΔCDH, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}15^2=x^2+y^2\\13^2=x^2+(4-y)^2,\end{cases}$$

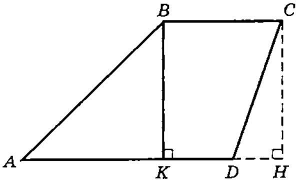
где x — длина высоты трапеции, y — длина отрезка AK.

Решая систему методом сложения, находим $y=9$, $x=12$.

4) Так как диаметр окружности, вписанной в трапецию, равен высоте трапеции, то радиус вписанной окружности равен половине высоты, т.е. радиус равен 6.

Замечание

Полученное решение позволяет уточнить вид трапеции (см. рис.).



Ответ: 6.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами, равными 6 и 8.

2. Найдите диаметр окружности, описанной около квадрата со стороной $8\sqrt{2}$.

3. Найдите площадь круга (S), вписанного в прямоугольный треугольник с катетами, равными 24 и 10. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

4. Найдите площадь круга (S), вписанного в квадрат с диагональю $10\sqrt{2}$. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

5. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна $2\sqrt[4]{3}$.

6. Найдите диагональ AC параллелограмма $ABCD$, если $AB = 16$, $AD = 7$, $BD = 21$.

7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 13$, $AD = 14$, $BD = 15$.

8. Найдите площадь ромба с диагоналями, равными 10 и 16.

9. Найдите высоту ромба со стороной 10 см и диагональю 12 см.

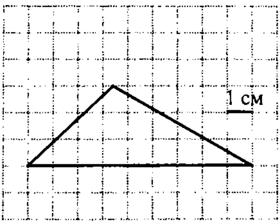
10. Равнобедренная трапеция $MNPQ (MN \parallel PQ)$ описана около окружности. Известно, что $MN = 1$, $PQ = 9$. Найдите радиус окружности.

11. Найдите площадь круга (S), вписанного в равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$), если $AB = 4$, $DC = 16$. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

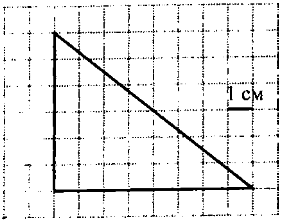
12. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами 20, 20, 32.

13. Найдите длину большей диагонали параллелограмма со сторонами $3\sqrt{2}$ см и 1 см и углом 45°.

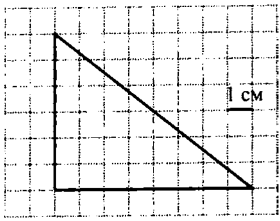
14. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 × 1 см изображен треугольник. Найдите площадь треугольника (в квадратных сантиметрах).



15. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 × 1 см изображен треугольник. Найдите высоту, проведенную к большей стороне треугольника (в сантиметрах).



16. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 × 1 см изображен треугольник. Найдите медиану треугольника, проведенную к большей стороне (в сантиметрах).



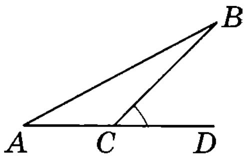
17. В треугольнике KBC угол K равен 90°, $KB = 12$, $KC = 16$. Найдите синус меньшего угла треугольника.

18. В треугольнике KBC угол K равен 90°, $KB = 12$, $KC = 16$. Найдите косинус меньшего угла треугольника.

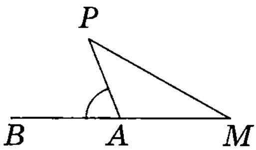
19. В треугольнике KMB угол M равен 90°, $KB = 10$, $BM = 8$. Найдите тангенс меньшего угла треугольника.

20. В треугольнике KMB угол M равен $90°$, $KB = 26$, $BM = 10$. Найдите тангенс меньшего угла треугольника.

21. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 7$, $BC = 8\sqrt{3}$, $\angle DCB = 60°$.



22. Найдите площадь треугольника PAM, если $PA = 8$, $AM = 4$, $\angle PAB = 30°$.

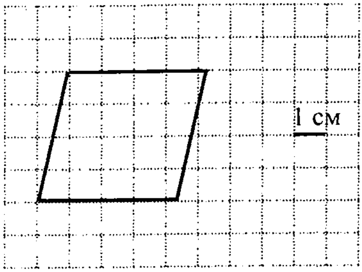


23. В треугольнике AEC угол E равен $90°$, $AC = 10$, $CE = 8$. Найдите синус внешнего угла при вершине C.

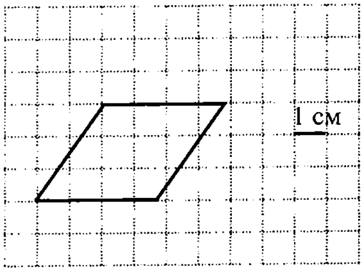
24. В треугольнике AEC угол E равен $90°$, $AC = 10$, $CE = 6$. Найдите косинус внешнего угла при вершине C.

25. В треугольнике MPK угол P равен $90°$, $MK = 25$, $PM = 24$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине K.

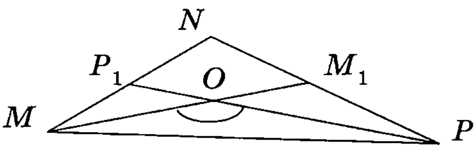
26. На клетчатой бумаге с клетками размером 1×1 см изображен ромб. Найдите радиус вписанной в него окружности (в сантиметрах).



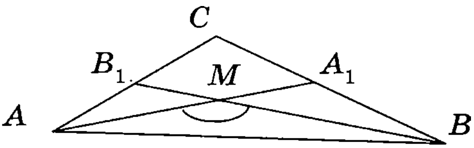
27. На клетчатой бумаге с клетками размером 1×1 см изображен ромб. Найдите высоту ромба (в сантиметрах).



28. В треугольнике MNP MM_1, PP_1 — медианы, $MM_1 = 9\sqrt{3}$, $PP_1 = 6$, $\angle MOP = 150°$. Найдите MP.



29. В треугольнике ABC AA_1, BB_1 — медианы, $AA_1 = 9$, $BB_1 = 15$, $\angle AMB = 120°$. Найдите AB.



30. В треугольнике MOA угол A равен $90°$, $MO = 9$, $\sin\angle M = 0{,}4$. Найдите OA.

31. В треугольнике KOE угол E равен $90°$, $EO = 10$, $\operatorname{ctg}\angle O = 1{,}(6)$. Найдите KE.

32. В треугольнике со сторонами 7 см, 9 см, 14 см найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

33. В треугольнике со сторонами 7 см, 11 см, 12 см найдите медиану, проведенную к большей стороне.

34. Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

35. Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 15, 15, 24.

36. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 20, а косинус угла при основании треугольника равен 0,8. Найдите периметр треугольника.

37. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 34, а котангенс угла при основании треугольника равен $\frac{15}{8}$. Найдите площадь треугольника.

38. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = 18$, $AC = 5$, $AH = 3$ и AH — высота треугольника ABC.

39. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MNP, если $MN = 5$, $NP = 16$, $NA = 4$ и NA — высота треугольника MNP.

40. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 9, 10, 17.

41. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 4, 13, 15.

42. Три окружности, радиусы которых 6 см, 2 см и 4 см, касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через центры данных окружностей.

43. Три окружности, радиусы которых 10 м, 2 м и 3 м, касаются друг друга внешним образом. Найдите диаметр окружности, проходящей через центры данных окружностей.

44. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, площадь которой равна 64 см^2. Найдите боковую сторону трапеции (a), если острый угол при основании трапеции равен 30°. В ответе запишите $a\sqrt{2}$.

45. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна $3\sqrt{2}$ и составляет с основанием угол 45°.

46. В треугольнике ABC сторона $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, медианы треугольника AA_1 и CC_1 пересекаются под углом 90°. Найдите длину стороны AC. В ответе запишите $AC\sqrt{5}$.

47. Средние линии прямоугольного треугольника, параллельные катетам, равны 5 см и 12 см. Найдите высоту треугольника (h), опущенную из вершины прямого угла. В ответе запишите $13h$.

48. В прямоугольнике $MNPQ$ сторона MN в 6 раз меньше диагонали NQ. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Периметр треугольника NEM равен 35 см. Найдите диагональ MP.

49. В трапеции $ABND$ ($BN \parallel AD$) проведена средняя линия OE. Найдите длину наименьшего из отрезков, на которые OE разбивается диагоналями BD и AN, если $BN = 12$ и $AD = 20$.

50. В равнобедренной трапеции $FOND$ $ON \parallel FD$ проведена средняя линия AB. Из вершины тупого угла трапеции проведена высота NC. Найдите длину FC, если $ON = 8$ и $FD = 18$.

51. Найдите площадь параллелограмма, если его меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне и высота, проведенная из вершины тупого угла параллелограмма, делит большую сторону на отрезки 9 см и 25 см.

52. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если длина гипотенузы равна $2\sqrt{13}$ см, а длина медианы меньшего острого угла равна 5 см.

53. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30°$, $\angle BDC = 45°$. Найдите длину стороны AB.

54. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведенной к боковой стороне.

55. Найдите площадь параллелограмма $MPKN$, если $\angle PKM = 45°$, $PK = 5\sqrt{2}$, $PN = 26$.

56. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

57. В треугольнике MBO построена высота BH. Длина $BO = 5$, $OH = 4$, радиус окружности, описанной около треугольника MBO, равен 10. Найдите длину стороны MB.

58. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

59. На диагонали BD прямоугольника $ABCD$ взята точка N так, что $BN : ND = 3 : 2$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCN$, если $AC = 10$ и $\angle AOB = 30°$.

60. В параллелограмме $MNPQ$ биссектриса угла M пересекает сторону NP в точке A так, что $AN : AP = 3 : 2$. Найдите длину меньшей стороны параллелограмма, если его периметр равен 48 см.

61. Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

62. Известны длины сторон треугольника ABC : $AB = 6$, $CA = 7$, $BC = 5$. На луче BC выбрана такая точка F, что угол BAF равен углу ACB. Найдите меньшую сторону треугольника ACF.

63. Трапеция $MNPQ$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание MN равно 24, $\sin\angle MQN = 0{,}2$, $\cos\angle PMQ = 0{,}6$.

64. Две окружности касаются внешним образом в точке C. К ним проведена общая касательная, имеющая общие точки с окружностями A и B соответственно. Прямая AC пересекает большую окружностью в точке D.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
б) Докажите, что треугольник CBD — прямоугольный.
в) Докажите, что треугольник ABD — прямоугольный.
г) Докажите, что треугольники ACB и ADB подобны.

д) Докажите, что треугольники ACB и CDB подобны.

е) Найдите площадь треугольника ADB, если радиусы окружностей 3 см и 5 см.

ж) Найдите AD, если радиусы окружностей 3 см и 5 см.

з) Найдите коэффициент пропорциональности треугольников ACB и ADB, если радиусы окружностей 3 см и 5 см.

и) Найдите площадь треугольника ACB, если радиусы окружностей 3 см и 5 см.

к) Найдите площадь треугольника CBD, если радиусы окружностей 3 см и 5 см.

л) Найдите площадь четырехугольника, образованного центрами окружностей радиусами 3 см и 5 см и точками A и B.

м) Найдите CB, если радиусы окружностей 3 см и 5 см.

65. Две окружности касаются внешним образом в точке F. К ним проведена общая касательная, имеющая общие точки с окружностями M и P соответственно. Прямая MF пересекает большую окружность в точке K.

а) Докажите, что треугольник MFP — прямоугольный.

б) Докажите, что треугольник PFK — прямоугольный.

в) Докажите, что треугольник MPK — прямоугольный.

г) Докажите, что треугольники MPK и MPF подобны.

д) Докажите, что треугольники MFP и FPK подобны.

е) Докажите, что отрезок общей касательной окружностей есть среднее геометрическое между диаметрами окружностей.

ж) Найдите MP, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

з) Найдите MK, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

и) Найдите площадь треугольника MPK, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

к) Найдите коэффициент пропорциональности треугольников MFP и PFK, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

л) Найдите площадь треугольника MFP, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

м) Найдите площадь треугольника PFK, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

н) Найдите площадь четырехугольника, образованного центрами окружностей радиусами 2 см и 8 см и точками M и P.

о) Найдите FP, если радиусы окружностей 2 см и 8 см.

66. К каждой из двух непересекающихся окружностей проведены две общие внутренние касательные, пересекающиеся в точке O. Точки касания одной окружности A и B, другой окружности — C и D.

а) Докажите, что два треугольника, образованных центром окружности, точками A и B и точкой пересечения касательных, равны.

б) Докажите, что два треугольника, образованных точкой O, центрами окружностей и точками A и C соответственно, подобны.

в) Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

г) Найдите угол между касательными, если угол между радиусами большей окружности, проведенными в точки касания, равен 120°, а радиусы окружностей равны 1 см и 6 см соответственно.

д) Найдите расстояния от точки пересечения касательных до центров каждой окружности, если угол между радиусами большей окружности, проведенными в точки касания, равен 120°, а радиусы окружностей равны 1 см и 6 см соответственно.

е) Найдите длины AB и CD, если угол между радиусами большей окружности, проведенными в точки касания, равен 120°, а радиусы окружностей равны 1 см и 6 см соответственно.

ж) Найдите расстояние между AB и CD, если угол между радиусами большей окружности, проведенными в точки касания, равен 120°, а радиусы окружностей равны 1 см и 6 см соответственно.

з) Найдите площадь четырехугольника, образованного точками A, B, D и C, если угол между радиусами большей окружности, проведенными в точки касания, равен 120°, а радиусы окружностей равны 1 см и 6 см соответственно.

67. Четыре окружности попарно касаются друг друга.

а) Докажите, что четырехугольник, образованный четырьмя центрами окружностей, является квадратом.

б) Докажите, что четырехугольник, образованный четырьмя точками касания окружностей, является квадратом.

в) Найдите площадь четырехугольника, образованного четырьмя точками касания окружностей, если радиусы четырех окружностей равны 4.

г) Найдите радиус окружности, касающейся внутренним образом данных окружностей, если радиусы четырех окружностей равны 4.

68. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C — прямой) построили окружность радиуса AC с центром в вершине A, которая пересекла AB в точке M. Касательная к окружности в точке M пересекла BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и MBP подобны.

б) Докажите, что треугольник MCP — равнобедренный.

в) Найдите угол CMP, если угол $BAC = 36°$.

г) Найдите BP, если $MB = 2$, а угол между AC и MP равен 45°.

69. Окружности касаются внутренним образом в точке H так, что центр большей окружности лежит на окружности меньшего радиуса. Прямая, соединяющая центры окружностей, пересекает большую окружность в точке A. Из этой точки к окружности меньшего радиуса проведены две касательные, пересекающие большую окружность в точках B и C.

а) Докажите подобие треугольников ABL и AKO, где O — центр окружности меньшего радиуса, K — точка касания прямой AB и окружности с центром O, L — точка пересечения BC с линией, соединяющей центры окружностей.

б) Докажите равенство углов AKO и ABH.

в) Докажите подобие треугольников AKO и ABH, где O — центр окружности меньшего радиуса, K — точка касания прямой AB и окружности с центром O.

г) Докажите равенство углов ABL и AHC.

д) Найдите длину BH, если радиус большей окружности равен 6 см.

е) Найдите площадь треугольника ABH, если радиус большей окружности равен 6 см.

ж) Найдите длину BC, если радиус большей окружности равен 6 см.

з) Найдите длину LH, если радиус большей окружности равен 6 см.

и) Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A.

70. Шесть одинаковых окружностей касаются внешним образом и касаются внутренним образом большой окружности, радиусом 9 см.

а) Докажите, что центры двух внутренних касающихся окружностей и центр большой окружности образуют равносторонний треугольник.

б) Докажите, что центр большой окружности и точки касания двух внутренних касающихся окружностей с большой окружностью образуют равносторонний треугольник.

в) Докажите, что фигура, образованная четырьмя центрами последовательно касающихся внутренних окружностей, является равнобедренной трапецией.

г) Найдите радиус вписанных окружностей.

д) Найдите площадь фигуры, образованной четырьмя центрами последовательно касающихся внутренних окружностей.

е) Найдите длину дуги окружности, соединяющей центры вписанных окружностей, между центрами двух соседних вписанных окружностей.

71. Хорда окружности, радиус которой 10 см, отсекает треть окружности. В каждый из полученных сегментов вписано по окружности наибольшего из возможных радиусов.

а) Докажите, что центры вписанных окружностей лежат на диаметре окружности, радиус которой 10 см.

б) Найти длину хорды окружности.

в) Найдите радиусы вписанных окружностей.

72. К окружности в точке B проведена касательная. Параллельно касательной проведена секущая, которая пересекает окружность в точках A и C.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным, если внутренняя часть секущей в два раза больше расстояния между касательной и секущей.

в) Найдите угол между AB и касательной, если внутренняя часть секущей в два раза больше расстояния между касательной и секущей.

г) Найдите радиус окружности, если внутренняя часть секущей равна 10 см, а расстояние между касательной и секущей равно 5 см.

д) Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 5$, а расстояние между касательной и секущей равно 3 см.

5.2. Стереометрия

Теоретические сведения

Прямые и плоскости

Признак параллельности прямых. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Теорема 1. Если двугранные углы при основании пирамиды равны, то центр вписанного шара принадлежит ее высоте.

Теорема 2. Если боковые ребра пирамиды равны, то центр описанного шара лежит на высоте или ее продолжении.

Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Определение. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Определение. Двугранным углом называется фигура в пространстве, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая прямая — ребром двугранного угла.

Двугранный угол измеряется линейным углом, т.е. углом между двумя перпендикулярами к ребру, выходящими из одной точки и лежащими в разных гранях.

Определение. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на данных прямых, перпендикулярный к ним.

Определение. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Пирамида

Определение. Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Определение. Апофемой правильной пирамиды называется высота ее боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.

Призма

Определение. Прямая призма называется правильной, если ее основания — правильные многоугольники.

Определение. Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется ее сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной к ним.

Площади и объемы

ПИРАМИДА

1) *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды*

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h,$$

где $P_{осн}$ — периметр основания, h — длина апофемы.

2) *Площадь полной поверхности произвольной пирамиды*

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн},$$

где $S_{осн}$ — площадь основания.

3) *Объем произвольной пирамиды*

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания, H — высота пирамиды.

ПРИЗМА

4) *Площадь боковой поверхности прямой призмы*

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot H,$$

где $P_{осн}$ — периметр основания, H — высота призмы.

5) *Площадь боковой поверхности наклонной призмы*

$$S_{бок} = P_{пер.\ сеч} \cdot l,$$

где $P_{перп.\ сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро призмы.

6) *Площадь полной поверхности произвольной призмы*

$$S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн},$$

где $S_{осн}$ — площадь основания.

7) *Объем произвольной призмы*

$$V = S_{осн} \cdot H,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания, H — высота призмы.

8) *Объем наклонной призмы*

$$V = S_{\text{пер. сеч}} \cdot l,$$

где $S_{\text{пер. сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро призмы.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

9) *Площадь боковой поверхности конуса*

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot r \cdot l,$$

где r — радиус основания конуса, l — образующая конуса.

10) *Объем конуса*

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h,$$

где r — радиус основания конуса, h — высота конуса.

11) *Площадь боковой поверхности цилиндра*

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot r \cdot h,$$

где r — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра.

12) *Объем цилиндра*

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

где r — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра.

13) *Площадь сферы*

$$S = 4\pi \cdot R^2,$$

где R — радиус сферы.

14) *Объем шара*

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3,$$

где R — радиус сферы.

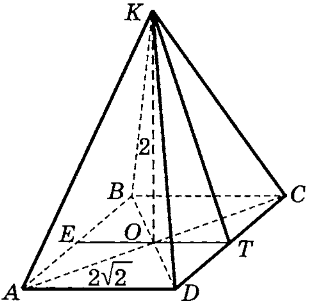
Решение типовых заданий

Стереометрические задания в ЕГЭ включены в часть 1 и часть 2: одно задание в части 1 и одно задание в части 2. Основное отличие стереометрических заданий, включаемых в разные группы, — это разный уровень необходимых для решения обоснований и количество шагов в их решении. Так, задания из части 1 в своем решении содержат обычно 2—3 вычислительных действия и 1—2 обоснования, без которых невозможно решить их. Эти обоснования связаны чаще всего с переводом условия задания на «язык чертежа» и построениями, о которых прямо или косвенно говорится в задании. Например, построение и введение в рассмотрение элементов, заданных в условии, таких как расстояние от точки до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми, линейный угол.

Стереометрические задания из части 2 сложнее. Они требуют большего количества развернутых обоснований и обычно несложных вычислений. При решении этих заданий часто требуется построение вспомогательных элементов и сечений, сопровождаемых необходимыми доказательствами.

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Задание 1. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания $2\sqrt{2}$ и длина высоты 2. Найдите: а) объем пирамиды; б) площадь боковой поверхности; в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; г) угол наклона боковой грани к плоскости основания; д) радиус вписанного шара; е) радиус описанного шара; ж) расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания; з) расстояние от вершины пирамиды до ребра основания; и) расстояние от ребра основания до противоположной грани; к) расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания; л) объем вписанного конуса; м) площадь боковой поверхности описанного конуса.



а) KO — высота пирамиды (O — центр квадрата $ABCD$, точка пересечения диагоналей). По формуле (3)

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{16}{3}.$$

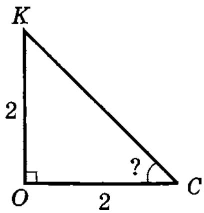
б) Проведем апофему KT и найдем ее длину из ΔKOT:

$$KT = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

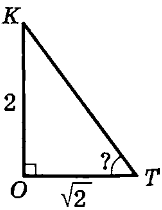
По формуле (1)

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}.$$

в) Так как в правильной пирамиде углы наклона всех боковых ребер к плоскости основания равны, то найдем, например, угол наклона ребра KC к плоскости основания (см. определение угла между прямой и плоскостью). Это угол KCO. Рассмотрим ΔKCO. $KO=2$, $OC=0{,}5AC$, а AC является диагональю квадрата $ABCD$, значит, $AC=(2\sqrt{2})\sqrt{2} = 4$. Поэтому $\angle KCO = 45°$.



г) Так как в правильной пирамиде углы наклона всех боковых граней к плоскости основания равны, то найдем, например, угол наклона боковой грани KCD к плоскости ABC. Так как $KT \perp DC$, то и $OT \perp DC$ (по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах), поэтому



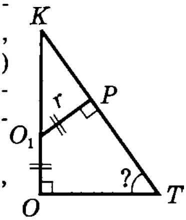
$\angle KTO$ — линейный угол искомого двугранного угла. Рассмотрим ΔKTO.

$$KO = 2,\ OT = \frac{1}{2}AD = \sqrt{2},\ KT = \sqrt{6}.$$

Имеем: $\angle KTO = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, или $\angle KTO = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, или

$$\angle KTO = \arccos\sqrt{\frac{1}{3}},\ \text{или}\ \angle KTO = \arcsin\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

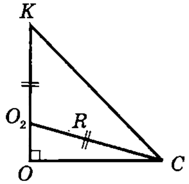
д) Так как двугранные углы при основании правильной пирамиды равны, то центр вписанного шара (точка O_1) принадлежит высоте KO. Обозначим радиус вписанного шара буквой r. Рассмотрим ΔKOT. $O_1P = O_1O = r$.



Используя подобие ΔKO_1P и ΔKTO, имеем:

$$\frac{KO_1}{KT} = \frac{O_1P}{OT},\ \frac{2-r}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{2}},\ (2-r)\sqrt{2} = r\sqrt{6},\ \ r = \sqrt{3} - 1.$$

е) Так как боковые ребра правильной пирамиды равны, то центр описанного шара (точка O_2) лежит на прямой KO. Обозначим радиус описанного шара через R. Рассмотрим ΔKCO. По теореме Пифагора из ΔO_2OC:



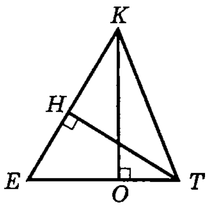
$$O_2C^2 = OC^2 + O_2O^2,$$

$$R^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + (2 - R)^2,\ R = 2.$$

Получаем, что центр описанного шара совпадает с точкой O.

ж) Расстояние от точки K до плоскости ABC равно длине отрезка KO и равно 2.

з) Так как в правильной пирамиде расстояния от вершины до ребер основания равны, то найдем, например, расстояние от точки K до ребра CD. Это расстояние равно длине апофемы KT и равно $\sqrt{6}$.



и) Так как прямая DC параллельна плоскости ABK (по признаку параллельности прямой и плоскости), то расстояние от прямой DC до плоскости ABK равно расстоянию от любой точки прямой DC до этой плоскости. Рассмотрим на прямой DC точку T. И из ΔEKT (точка E — середина AB) найдем искомое расстояние. Это расстояние равно длине высоты TH. Найдем длину TH, выразив двумя способами площадь ΔEKT.

$$KT = KE = \sqrt{6},\ ET = 2\sqrt{2}.$$

$$S_{EKT} = \frac{1}{2} KO \cdot ET = \frac{1}{2} EK \cdot TH,$$

$$2 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot TH,$$

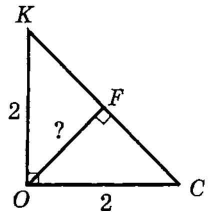
$$TH = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

к) Найдем, например, расстояние от ребра KC до диагонали BD. Проведем высоту OF в ΔKOC и докажем, что OF — общий перпендикуляр к прямым KC и BD (смотрите определение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых).

1) $OF \perp KC$ по построению.

2) Так как $BD \perp (KCO)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), а $OF \subset (KCO)$, то $BD \perp OF$ (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости).

3) Найдем длину OF, используя площадь ΔKOC.



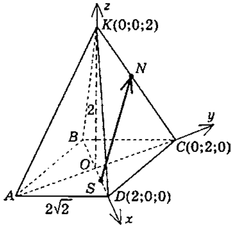
$$S_{KOC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot OF,$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot OF,$$

$$OF = \sqrt{2}.$$

На примере пункта к) предыдущей задачи покажем применение векторно-координатного метода для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми. Этот метод используется, когда непосредственно определить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых сложно.

1) Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке. Пусть SN — общий перпендикуляр прямых KC и BD. Найдем длину вектора $\overline{SN}$: $\overline{SN}=\overline{SD}+\overline{DC}+\overline{CN}$.



2) Так как $\overline{SD}$ коллинеарен $\overline{BD}$, то существует число x, такое что $\overline{SD} = x\overline{BD}$, аналогично: $\overline{CN} = y\overline{CK}$.

Имеем:

$$\overline{SN}=x\overline{BD}+\overline{DC}+y\overline{CK}.$$

3) Найдем координаты векторов: $\overline{BD}$ (4; 0; 0), $\overline{DC}$ (–2; 2; 0), $\overline{CK}$(0; –2; 2), поэтому $\overline{SN}$ ($4x$–2; 2–$2y$; $2y$).

4) Учитывая, что $\overline{SN}\perp\overline{BD}$ ($\overline{SN}\cdot\overline{BD}=0$) и $\overline{SN}\perp\overline{CK}$ ($\overline{SN}\cdot\overline{CK}=0$), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases}(4x-2)4=0,\\(2-2y)(-2)+2y\cdot 2=0\end{cases}\begin{cases}x=0{,}5,\\y=0{,}5.\end{cases}$$

5) Получаем $\overline{SN}$ (0; 1; 1), поэтому его длина

$$\left|\overline{SN}\right|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

л) Высота вписанного конуса равна высоте пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, поэтому

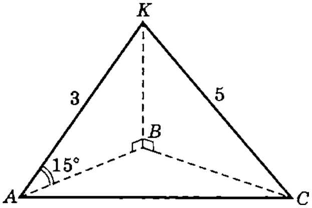
$$V_{\text{впис. конуса}}=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 2=\frac{4}{3}\pi.$$

м) Образующая описанного конуса равна боковому ребру пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, описанной около квадрата $ABCD$, поэтому

$$S_{\text{опис. конуса}}=\pi\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi.$$

НЕПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Задание 2. В треугольной пирамиде $ABCK$ ребро BK перпендикулярно основанию ABC. Длины ребер $AK=3$, $CK=5$, ($CK>AC$), а грань AKC является прямоугольным треугольником. Найдите объем пирамиды, если угол между гранями ABC и AKC равен 15°.



Решение. 1) Так как ΔAKC — прямоугольный и CK — большая сторона, то CK — гипотенуза, сторона $AC=4$, $\angle KAC=90°$.

2) По теореме, обратной к теореме о трех перпендикулярах, $AB \perp AC$. Получаем, что двугранный угол $KACB$ измеряется линейным углом KAB, значит, $\angle KAB=15°$.

3) Можем считать основанием пирамиды треугольник AKB, а ее высотой — отрезок AC.

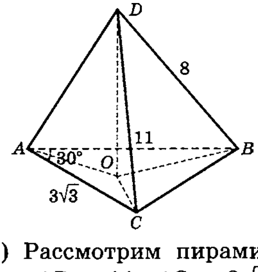
$$S_{\Delta AKB}=0{,}5\cdot 3\cdot AB\ \sin 15°=0{,}5\cdot 3\cdot(3\ \cdot\cos 15°)\cdot\sin 15°=\frac{9}{8}.$$

4) Тогда объем пирамиды можно найти по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta AKB}\cdot AC=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot 4=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Задание 3. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $3\sqrt{3}$; 11 и углом в 30° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 8. Найдите объем пирамиды (V). В ответе запишите $V\cdot\sqrt{5}$.



Решение. 1) Рассмотрим пирамиду $DABC$. Пусть DO — ее высота и $AB=11$, $AC=3\sqrt{3}$, $\angle BAC=30°$.

По формуле объема пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{33\sqrt{3}}{4}.$$

2) Остается найти высоту пирамиды, т.е. DO. Выясним положение точки O. Так как $\Delta AOD = \Delta BOD = \Delta COD$ (по гипотенузе и катету), то $AO = BO = CO$ и точка O равноудалена от вершин, следовательно, точка O — центр описанной окружности.

3) Обозначим около треугольника ABC радиус описанной окружности через R.

По теореме синусов из ΔABC: $2R = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$ (*).

4) По теореме косинусов из ΔABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = 11^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 49$, $BC = 7$.

5) Подставим BC в (*). Получим $R = 7$.

6) По теореме Пифагора из ΔAOD:

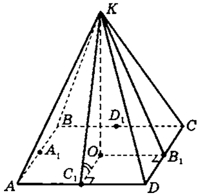
$$DO = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}.$$

7) Окончательно получаем $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{33\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{15} = \frac{33\sqrt{5}}{4}$.

В ответе $V \cdot \sqrt{5} = 41{,}25$.

Ответ: 41,25.

Задание 4. Найдите площадь полной поверхности четырехугольной пирамиды, если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40 и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°.

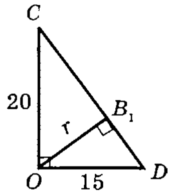


Решение. 1) Рассмотрим пирамиду $KABCD$, KO — высота, $AC = 40$, $BD = 30$.

2) По формуле площади полной поверхности пирамиды:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{ABCD},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600.$$



3) Найдем длину высоты пирамиды, для этого выясним положение точки O. Опустим из точки O перпендикуляры к DC и AD, соответственно OB_1 и OC_1. По теореме о трех перпендикулярах: $KB_1 \perp DC$, $KC_1 \perp AD$, поэтому $\angle KC_1O$, $\angle KB_1O$ — линейные углы двугранных углов $KADB$ и $KDCB$, значит, $\angle KC_1O = \angle KB_1O = 30°$. Аналогично: $\angle KA_1O = \angle KD_1O = 30°$.

4) Так как $\Delta KC_1O = \Delta KB_1O = \Delta KA_1O = \Delta KD_1O$ (почему?), то $A_1O = B_1O = C_1O = D_1O$ и точка O равноудалена от сторон, следовательно, точка O — центр вписанной в ромб окружности.

5) Обозначим радиус вписанной окружности буквой r.

Найдем его из ΔCOD.

$$CD = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Из подобия ΔOB_1D и ΔCOD получим пропорцию

$$\frac{CO}{OB_1} = \frac{CD}{OD}, \quad \frac{20}{r} = \frac{25}{15}, \quad r = \frac{20 \cdot 15}{25}, \quad r = 12.$$

Из ΔKB_1O: $\cos \angle KB_1O = \dfrac{OB_1}{KB_1}$,

$$KB_1 = \frac{r}{\cos 30°} = 8\sqrt{3}.$$

6) $S_{\text{бок}} = 4S_{KCD}$, а $S_{KCD} = \dfrac{1}{2} KB_1 \cdot DC = \dfrac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 25 = 100\sqrt{3}$.

$S_{\text{бок}} = 400\sqrt{3}$.

7) Окончательно имеем $S_{\text{полн}} = 600 + 400\sqrt{3}$.

Ответ: $600 + 400\sqrt{3}$.

ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА

Задание 5. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6. Прямая AB_1 образует с основанием угол 30°. Найдите:

I. Площади и объемы

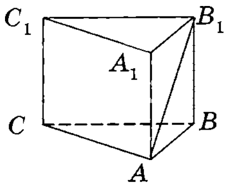
а) площадь боковой поверхности призмы; б) площадь полной поверхности призмы; в) объем призмы; г) на сколько процентов объем вписанного цилиндра меньше объема описанного цилиндра? д) сколько процентов от площади боковой поверхности вписанного цилиндра составляет площадь боковой поверхности описанного цилиндра? е) площадь описанного шара; ж) площадь сечения AB_1C; з) отношение объемов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды B_1ABC;

II. Углы

и) между прямыми AB_1 и CC_1; к) между плоскостями AB_1C и ABC; л) угол между прямой B_1M и плоскостью ABC, если BM — медиана треугольника ABC;

III. Расстояния

м) от точки B_1 до плоскости ACC_1; н) от точки B_1 до прямой AC; о) от прямой BB_1 до плоскости ACC_1; п) между прямыми AC и BB_1.



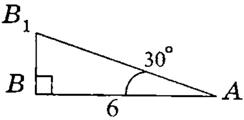
I. Площади и объемы

а) 1. $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$. В основании лежит правильный треугольник ABC, значит, $P_{осн} = P_{ABC} = 3 \cdot 6 = 18$.

2. Найдем высоту призмы. Прямая AB_1 образует с основанием угол 30° (см. определение угла между пря-

мой и плоскостью). Проекцией диагонали AB_1 является сторона основания AB (так как в правильной призме боковые грани перпендикулярны к плоскости основания), поэтому углом между прямой AB_1 и плоскостью основания ABC является угол B_1AB. Итак, $\angle B_1AB = 30°$. Высоту призмы BB_1 можно найти двумя способами.

1-й способ



Из треугольника ABB_1 имеем

$$\operatorname{tg}\angle B_1AB = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{6},$$

$$BB_1 = 6 \cdot \operatorname{tg}30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

2-й способ

По свойству катета, лежащего против угла в 30°, имеем $AB_1 = 2BB_1$, и если $BB_1 = x$, тогда $AB_1 = 2x$. По теореме Пифагора $x_2 + 6^2 = (2x)^2$, откуда $x = 2\sqrt{3}$.

3. $S_{бок} = P_{ABC} \cdot BB_1 = 18 \cdot 2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}.$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

б) $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 36\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60° =$

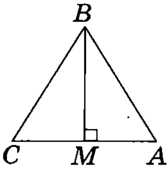
$= 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$

Ответ: $54\sqrt{3}$.

в) $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 54.$

Ответ: 54.

г) Сначала рассмотрим цилиндр, описанный около призмы. Высота описанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности (R), описанной около треугольника ABC.



$$R = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6^2 - 3^2} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$V_{\text{опис. цилиндра}} = \pi \cdot R^2 \cdot BB_1 = 24\sqrt{3}\pi.$$

Теперь рассмотрим цилиндр, вписанный в призму. Высота вписанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC (r).

$$r = \frac{1}{3} \cdot BM = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

$$V_{\text{впис. цилиндра}} = \pi \cdot r^2 \cdot BB_1 = 6\sqrt{3}\pi.$$

Решим пропорцию:

$$\begin{array}{l} 24\sqrt{3}\pi - 100\% \\ 6\sqrt{3}\pi - x \end{array}, \quad \frac{24\sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3}\pi} = \frac{100\%}{x}, \quad x = 25\%.$$

Прежде чем записать ответ, вспомним, на какой вопрос необходимо ответить в пункте г).

Ответ: на 75% объем вписанного цилиндра меньше объема описанного цилиндра.

д) Сначала рассмотрим цилиндр, описанный около призмы. Образующая описанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности (R), описанной около треугольника ABC, поэтому

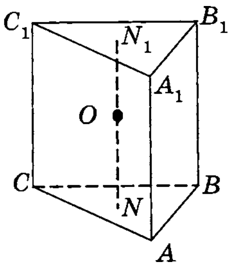
$$S_{\text{бок. опис. цилиндра}} = 2\pi \cdot R \cdot BB_1 = 72\pi.$$

Теперь рассмотрим цилиндр, вписанный в призму. Образующая вписанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности (r), вписанной в треугольник ABC, поэтому

$S_{\text{бок. впис. цилиндра}} = 2\pi \cdot r \cdot BB_1 = 36\pi.$

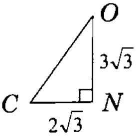
Решим пропорцию:

$$\begin{array}{l} 36\pi - 100\% \\ 72\pi - y \end{array}, \quad \frac{36\pi}{72\pi} = \frac{100\%}{y}, \quad y = 200\%.$$



Ответ: 200% составляет площадь боковой поверхности описанного цилиндра от площади боковой поверхности вписанного цилиндра.

е) 1. Центр описанной сферы (точка O) является серединой отрезка NN_1, где точки N и N_1 — центры треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Эта точка равноудалена от всех вершин призмы. Радиус сферы (OC) найдем из треугольника ONC.



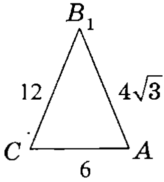
2. $ON=0{,}5NN_1=3\sqrt{3}$.

3. NC равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC, $NC=2\sqrt{3}$.

4. $OC^2=27+12=39$.

5. $S=4\pi\cdot OC^2=60\pi$.

Ответ: 60 л.



ж) Искомое сечение — треугольник AB_1C, причем $AB_1=CB_1$ (почему?). Найдем площадь треугольника.

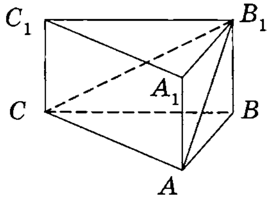
Высота треугольника, опущенная из вершины B_1, равна

$$\sqrt{48-9}=\sqrt{39}\text{, тогда } S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{39}=3\sqrt{39}.$$

Ответ: $3\sqrt{39}$.

з) Найдем отношение объемов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды B_1ABC.

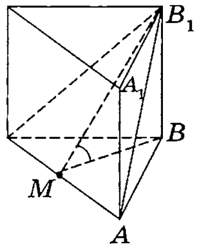
$$\frac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{V_{B_1ABC}}=\frac{S_{ABC}\cdot BB_1}{\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot BB_1}=3.$$



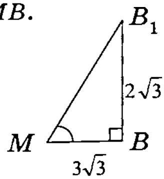
II. Углы

и) Прямые AB_1 и CC_1 являются скрещивающимися. Заменим угол между скрещивающимися прямыми углом между пересекающимися прямыми. Так как прямая CC_1 параллельна прямой AA_1, то $\angle(AB_1;\ CC_1)=$ $=\angle(AB_1;\ AA_1)=60°$.

Ответ: 60°.



к) 1. Чтобы найти угол между плоскостями AB_1C и ABC, построим соответствующий линейный угол (см. определение линейного угла). Плоскости AB_1C и ABC пересекаются по прямой AC. В плоскости ABC к прямой AC уже проведен перпендикуляр — это высота BM. Так как $AC \perp BM$ (проекции), то $AC \perp MB_1$ (наклонной) по теореме о трех перпендикулярах. Поэтому угол B_1MB является соответствующим линейным углом.



2. Определим его из треугольника B_1MB.

3. $\operatorname{tg}\angle B_1MB = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$,

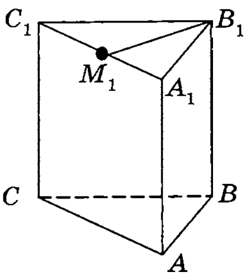
$\angle B_1MB = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

л) Угол между прямой B_1M и плоскостью ABC равен углу B_1MB, так как проекцией B_1M на плоскость ABC является BM.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

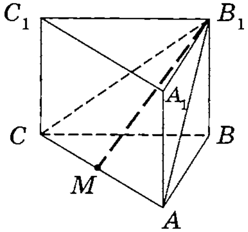
III. Расстояния



м) Так как точка B_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, перпендикулярной к плоскости ACC_1 то перпендикуляр из точки B_1 к линии пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и ACC_1 будет перпендикуляром и к плоскости ACC_1. Итак, искомым расстоянием от точки B_1 до плоскости ACC_1 является высота B_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$. $B_1M_1 = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

н) Расстоянием от точки B_1 до прямой AC является высота B_1M треугольника AB_1C, проведенная к стороне AC.

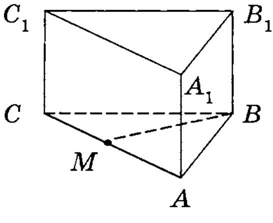


Ответ: $\sqrt{39}$.

о) Так как прямая BB_1 параллельна плоскости ACC_1, то расстояние от прямой BB_1 до плоскости ACC_1 равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости, например от точки B_1. А это расстояние мы уже находили в пункте м).

Ответ: $3\sqrt{3}$.

п) Так как $BM \perp AC$, $BM \perp BB_1$, то расстояние между прямыми AC и BB_1 равно длине отрезка BM — общего перпендикуляра к этим прямым.

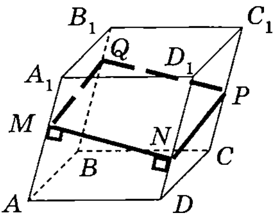


Ответ: $3\sqrt{3}$.

НЕПРАВИЛЬНЫЕ ПРИЗМЫ

Задание 6. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 6 и 8, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 10.

Найдите: а) объем параллелепипеда; б) площадь боковой поверхности параллелепипеда.



Из точки M на ребре AA_1 проведем в грани ABB_1A_1 перпендикуляр MQ к ребру AA_1. Плоскость MNQ перпендикулярна боковым ребрам параллелепипеда и сечение этой плоскостью параллелепипеда — есть параллелограмм $MNPQ$ (перпендикулярное сечение) (см. Теоретические сведения в начале раздела).

а) Итак, расстояние между ребрами AA_1 и BB_1 равно MQ, расстояние между ребрами AA_1 и DD_1 равно MN, расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 равно MP.

$$S_{бок} = P_{MNPQ} \cdot AA_1 = 2 \cdot (6 + 8) \cdot 5 = 140.$$

Ответ: 140.

б) Так как в треугольнике MNP $MP^2 = MN^2 + PN^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle MNP = 90°$ и перпендикулярное сечение является прямоугольником.

Ответ: 240.

Задания для самостоятельного решения

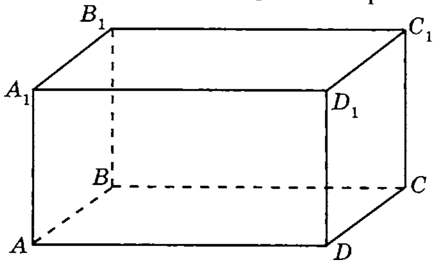
Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Ребро куба равно $3\sqrt{2}$. Найдите диагональ грани куба.
2. Ребро куба равно $4\sqrt{3}$. Найдите диагональ куба.
3. Ребро куба равно $2\sqrt[3]{2}$. Найдите объем куба.
4. Ребро куба равно $2\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности куба.

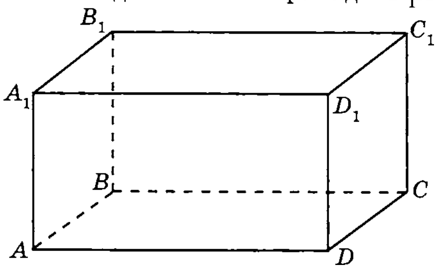
5. Диагональ грани куба равна $2\sqrt{2}$. Найдите объем куба.

6. Диагональ куба равна $6\sqrt{3}$. Найдите объем куба.

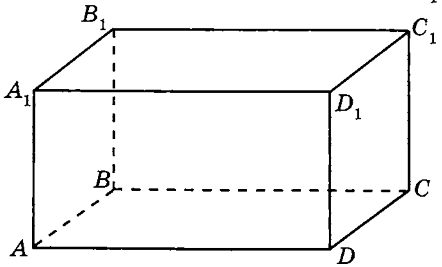
7. Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 24. Найдите объем пирамиды D_1ABCD.



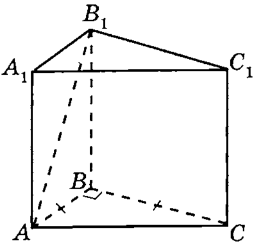
8. Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 96. Найдите объем пирамиды D_1ACD.



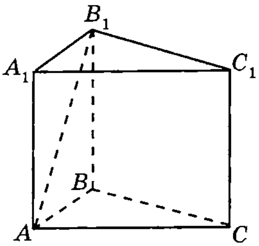
9. Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 24. Найдите объем призмы $ABDA_1B_1D_1$.



10. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагональ AB_1 равна $\sqrt{5}$, а высота равна 1. Найдите объем призмы, если в ее основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом ABC.



11. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагональ AB_1 равна $\sqrt{5}$, а высота равна 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если в ее основании лежит равносторонний треугольник ABC.



12. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 5, а ее объем равен 75. Найдите высоту призмы.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 6$, $AA_1 = 8$. Найдите площадь диагонального сечения ADC_1B_1.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. Найдите угол между прямыми CC_1 и AB. Ответ запишите в градусах.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма, $AB = 4$. Найдите расстояние между прямыми CC_1 и AB.

16. В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны $2\sqrt{2}$. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

17. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна апофеме. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

18. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания 12 и длина высоты 8. Найдите расстояние от вершины пирамиды до ребра основания.

19. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания 12 найдите расстояние от высоты пирамиды до стороны основания.

20. Найдите площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды, проходящего через высоту и боковое ребро, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а высота равна 2.

21. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра (S), если его ребро равно 6. В ответе запишите $S\cdot\sqrt{3}$.

22. Найдите площадь полной поверхности правильного октаэдра, если площадь его одной грани равна 15.

23. Объем правильной треугольной пирамиды равен 12. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания, если площадь основания пирамиды равна 4.

24. Дана правильная треугольная призма со стороной основания $4\sqrt{3}$ и высотой $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем вписанного в призму цилиндра.

25. Дана правильная треугольная призма со стороной основания $4\sqrt{3}$ и высотой $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем описанного около призмы цилиндра.

26. Дана правильная четырехугольная призма со стороной основания 4 и высотой $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем вписанного в призму цилиндра.

27. Дана правильная четырехугольная призма со стороной основания 4 и высотой $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем описанного около призмы цилиндра.

28. Дана правильная шестиугольная призма со стороной основания 4 и высотой $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем вписанного в призму цилиндра.

29. Дана правильная шестиугольная призма со стороной основания $4\sqrt{3}$ и высотой $\frac{4}{\pi}$. Найдите объем описанного около призмы цилиндра.

30. Найдите образующую конуса, если его высота равна 8, а диаметр основания равен 12.

31. Найдите высоту конуса, если его образующая, равная 12, наклонена к плоскости основания под углом 30°.

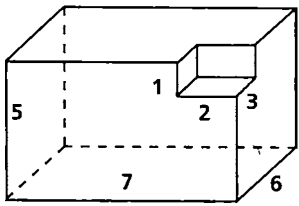
32. Из квадрата, со стороной 2π, свернута боковая поверхность цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра.

33. Найдите площадь основания цилиндра (S), который получен вращением прямоугольника со сторонами 4 и 3 вокруг меньшей стороны. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

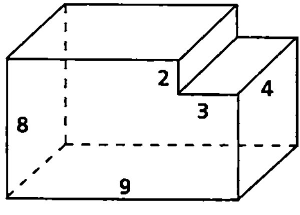
34. Вычислите длину окружности основания конуса (C), если разверткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 6, а центральный угол 120°. В ответе запишите $\frac{C}{\pi}$.

35. Высота конуса равна половине образующей. Определите градусную меру угла, который составляет образующая с плоскостью основания.

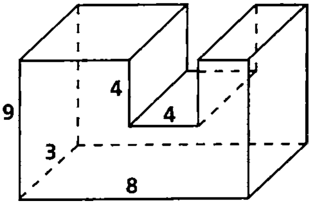
36. Найдите объем и площадь полной поверхности многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника — прямые.



37. Найдите объем и площадь полной поверхности многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника — прямые.



38. Найдите объем и площадь полной поверхности многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника — прямые.



39. Шар радиуса 13 пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 5 от его центра. Найдите радиус получившегося сечения.

40. Найдите радиус сферы, если площадь сферы равна 64π.

41. Найдите радиус шара, если его объем равен 288π.

42. Вершины квадрата лежат на сфере радиуса 10. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна $6\sqrt{2}$.

43. Две параллельные плоскости касаются сферы радиуса 5. Найдите расстояние между плоскостями.

44. Радиусы двух параллельных сечений сферы равны $6\sqrt{2}$. Расстояние между секущими плоскостями равно $12\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

45. В куб с ребром 2 вписана сфера, найдите ее радиус.

46. Около куба с ребром $2\sqrt{3}$ описана сфера. Найдите ее радиус.

47. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания 6 и высотой $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

48. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания 6 и высотой $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем описанного около пирамиды конуса.

49. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 6 и высотой $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

50. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 6 и высотой $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем описанного около пирамиды конуса.

51. Дана правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 6 и высотой $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

52. Дана правильная шестиугольная пирамида со стороной основания 6 и высотой $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем описанного около пирамиды конуса.

Запишите решение с полным его обоснованием.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между B_1D и плоскостью ABC.

54. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между B_1M и плоскостью ABC, где т. M — середина AC.

55. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между B_1D и плоскостью ABC.

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между B_1D и плоскостью DCC_1.

57. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между B_1A и плоскостью BCC_1.

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между плоскостью ADC_1 и плоскостью ABC.

59. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между плоскостью ABC_1 и плоскостью ABC.

60. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между плоскостью A_1BC_1 и плоскостью ABC.

61. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой AD.

62. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой AB.

63. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите расстояние от точки C_1 до ребра AB.

64. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма. $AB = 4$, $AA_1 = 6$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой AB.

65. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. $AB = 4$. Найдите расстояние между прямыми CC_1 и AB.

66. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. $AB = 4$. Найдите расстояние между прямыми CC_1 и DB.

67. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма. $AB = 4$. Найдите расстояние между прямыми CC_1 и AF.

68. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, причем $AC = 4$, $\angle C = 120°$, боковое ребро AA_1 равно 8. Найдите площадь сечения A_1B_1C.

69. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, причем $AC = 4$, $\angle C = 120°$, боковое ребро AA_1 равно 8. Найдите угол между плоскостями ABB_1 и A_1CB_1.

70. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, причем $AC = 4$, $\angle C = 120°$. Найдите расстояние между прямыми AC и BB_1.

71. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$ с углом A, равным 60°, и стороной $AB = 4$. Известно, что высота AA_1 равна $2\sqrt{3}$. Определите угол между плоскостью ABC и плоскостью сечения, проходящего через прямые AB и C_1D_1.

72. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 6 и 8, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 10. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

73. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 6 и 8, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 10. Найдите объем параллелепипеда.

74. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

75. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

76. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{2}$, а высота равна 2. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

77. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 2 и равна высоте пирамиды. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

78. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 2 и равна высоте пирамиды. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

79. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 2 и равна высоте пирамиды. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Ответ записать в радианах.

80. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания $4\sqrt{3}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды.

81. Основанием треугольной пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 12 и 16. Каждое боковое ребро пирамиды равно 26. Найдите объем пирамиды.

82. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $3\sqrt{3}$; 11 и углом в 30° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 8. Найдите объем пирамиды.

83. В треугольной пирамиде все боковые ребра равны 15,5. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 7, 15, 20. Найдите объем пирамиды.

84. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $\sqrt{2}$; 8 и углом в 45° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 7. Найдите объем пирамиды.

85. Найдите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды, если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40 и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $30°$.

86. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом. Найдите боковую поверхность пирамиды, если ее высота равна 16 см.

87. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является прямоугольник, длины ребер $SC = 8$, $CD = 6$, а ребро $SB \perp ABC$. Угол между плоскостями SCD и ABC равен $30°$. Во сколько раз площадь основания больше площади грани SBC?

88. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна $36\sqrt{3}$. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с плоскостью основания углы $45°$, $30°$. Найдите объем пирамиды.

89. В основании четырехугольной пирамиды $ABCDF$ лежит квадрат со стороной, равной 4. Боковые грани FAD и FCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а высота пирамиды равна диагонали ее основания. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой FB.

90. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания 12. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $30°$. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

91. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания 12. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем описанного около пирамиды конуса.

92. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания $2\sqrt{6}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

93. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания $2\sqrt{6}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем описанного около пирамиды конуса.

94. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания $2\sqrt{6}$. Боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

95. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания $4\sqrt{3}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса.

96. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, O, F — середины ребер DC, CC_1, BC.

Докажите:

а) $EO \parallel AB_1$; б) $BE \parallel (A_1B_1C_1)$; в) $(BC_1D) \parallel (EFO)$;
г) $AC_1 \perp BD$; д) $A_1C_1 \perp (BB_1D_1)$; е) $(AD_1C) \perp (BB_1D_1)$.

97. Дан куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$.

Докажите:

а) $NP_1 \parallel (MQQ)$; б) $(MQQ_1) \parallel (NPP_1)$;
в) $PN_1 \perp MN$; г) $Q_1P \perp PN$; д) $MP \perp Q_1N$;
е) $NP_1 \perp (M_1N_1P)$; ж) $MP \perp (QNN_1)$; з) $PN_1 \perp (MNP_1)$;
и) $(MN_1P) \perp (QNN_1)$; к) $(MP_1N) \perp (QPN_1)$.

98. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, L — середина ребра AD, N — середина ребра DC, ребро куба равно 2.

Определите взаимное расположение прямых:
а) A_1L и DD_1; б) A_1L и BB_1.

Докажите:
в) $LN \parallel A_1C_1$; г) $C_1D_1 \parallel (A_1B_1L)$; д) $A_1C_1 \subset (C_1NL)$.

Найдите углы между прямыми:
е) DC и B_1A_1; ж) CD_1 и DA_1; з) CD_1 и AB_1;
и) B_1L и D_1N; к) C_1L и D_1N.

Постройте сечение куба соответствующей плоскостью и найдите его площадь:
л) (D_1LN); м) (A_1LN); н) (D_1LB); о) (C_1BL).

99. Дан прямоугольный треугольник MNQ ($\angle Q = 90°$). Через точку N проведена прямая NA, перпендикулярная к плоскости треугольника. Известно, что $MN = 13$, $NQ = 12$, $NA = 6$.

Докажите:
а) прямая MQ перпендикулярна плоскости (QNA);
б) прямая MQ перпендикулярна прямой AQ;
в) найдите угол между прямой MN и плоскостью (QNA);
г) найдите угол между плоскостями (AMQ) и (QNM).

100. Дан квадрат $ABCD$. Сторона квадрата равна 6. Диагонали квадрата пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая OS, перпендикулярная плоскости квадрата. Известно, что $OS = 6$ (L — середина AD, H — середина CD).

Докажите:
а) прямая DH перпендикулярна плоскости SOH;
б) прямая SH перпендикулярна прямой BA;
в) прямая HL параллельна плоскости SAC.

Найдите угол между прямыми:
г) BC, LD; д) BC, AS.

Найдите угол между прямой и плоскостью:

е) SH и (ABC); ж) SD и (ABC); з) BD и (SOL).

Найдите расстояние:

и) от точки S до прямой CB; к) от точки B до плоскости (ASC);

л) между прямыми SO и CD;

м) между прямыми SD и OC.

101. Точка O – точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка T — середина ребра CD.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку T параллельно прямым AO и C_1D. Определите вид многоугольника, полученного в сечении.

б) Найдите площадь сечения, если ребро куба равно $2a$.

102. Точки K и P — соответственно середины ребер AA_1 и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку K, перпендикулярно к прямой CP. Определите вид многоугольника, полученного в сечении.

б) Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 2a$.

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Теоретические сведения

Решением уравнения $x^2 = 5$ являются иррациональные числа $\pm\sqrt{5}$.

Решением уравнения $x^2 = -5$ являются комплексные числа $\pm\sqrt{5}i$.

Для записи решения любого квадратного уравнения в математике используют комплексные числа.

Основные определения. Операции над комплексными числами

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где a — действительная часть комплексного числа z, b — мнимая часть числа z.

Обозначение: $Re(z) = a$, $Im(z) = b$.

Например, для $z = -2 + 3i$ $\quad Re(z) = -2$, $Im(z) = 3$.

Равенство комплексных чисел. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части,

$a + bi = c + di$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Правило сложения комплексных чисел:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Правило вычитания комплексных чисел:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Правило умножения комплексных чисел:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Правило деления комплексных чисел:

Рассмотрим комплексное число $z = a + bi$. *Сопряженным числу* z называют число $\overline{z} = a - bi$.

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 .$$

Деление комплексных чисел выполняют с помощью умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac-b(-d))+(bc+a(-d))i}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Деление выполнимо, если $c + di \neq 0 + 0i$.

Решение типовых заданий

Задание 1.

$z_1 = -2+3i$, $z_2 = 5+4i$. Выполните действия: $z_1 + z_2$.

Решение.

$z_1 + z_2 = (-2+3i)+(5+4i) = (-2+5)+(3+4)i = 3+7i$

Ответ: $3+7i$.

Задание 2.

$z_1 = -2+3i$, $z_2 = 5+4i$. Выполните действия: $z_1 - z_2$.

Решение.
$z_1 - z_2 = (-2+3i)-(5+4i) = (-2-5)+(3-4)i = -7-i$.

Ответ: $-7-i$.

Задание 3.

$z_1 = -2+3i$, $z_2 = 5+4i$. Выполните действия: $z_1 \cdot z_2$.

Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = (-2+3i)\cdot(5+4i) = (-2\cdot 5 - 3\cdot 4) + (-2\cdot 4 + 3\cdot 5)i =$$
$$= -22+7i.$$

Ответ: $-22+7i$.

Задание 4.

$z_1 = -2+3i$, $z_2 = 5+4i$. Выполните действия: $z_1 : z_2$.

Решение.

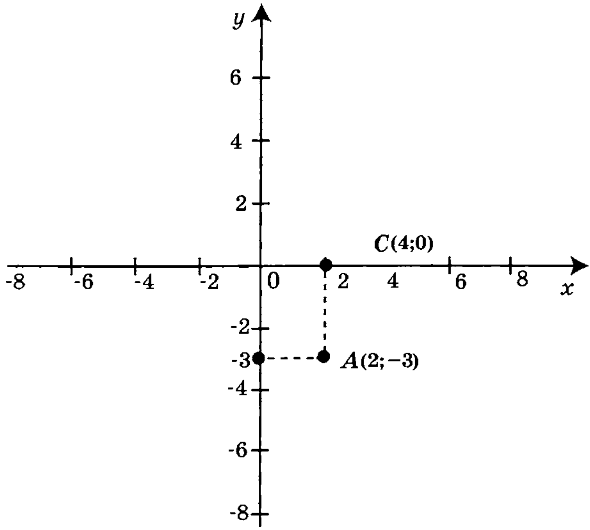
$$\frac{-2+3i}{5+4i} = \frac{(-2+3i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)} =$$
$$= \frac{(-2\cdot 5 - 3\cdot(-4)) + (3\cdot 5 + (-2)(-4))i}{5^2+4^2} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i.$$

Ответ: $\frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Рассмотрим комплексное число $z = x + yi$ и прямоугольную систему координат xOy. Комплексное число $z = x + yi$ задается парой действительных чисел (x,y). Эта же пара чисел может рассматриваться в качестве координат точки $P(x,y)$ на координатной плоскости.

Например, числу $z_1 = 2 - 3i$ соответствует точка $A(2;-3)$; числу $z_2 = 4i$ соответствует точка $B(0;4)$; числу $z_3 = 4$ соответствует точка $C(4;0)$.



Ось Ox называют действительной осью, а ось Oy — мнимой осью.

Модуль комплексного числа

Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называется расстояние от начала системы координат до точки с координатами (x,y).

Можно доказать, что модуль числа $z = x + yi$ равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение типовых заданий

Задание 5.

Найдите модуль комплексного числа $z = 2-3i$.

Решение.

$|z| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}.$

Ответ: $\sqrt{13}$.

Задание 6.

Изобразите на комплексной плоскости решение следующих уравнений:

1) $|z| = 2$;

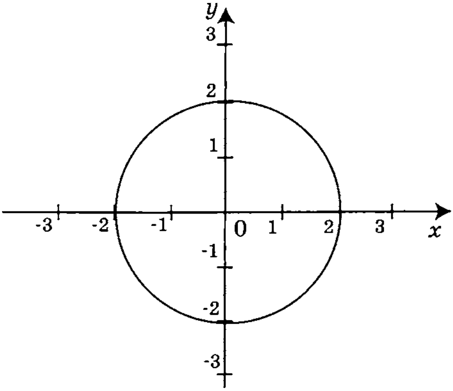
2) $|z-3| = 2$;

3) $|z-(2-3i)| = 2$.

Решение.

1) Пусть число $z = x+yi$, тогда $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Подставив значения, получим $\sqrt{x^2+y^2}=2$.

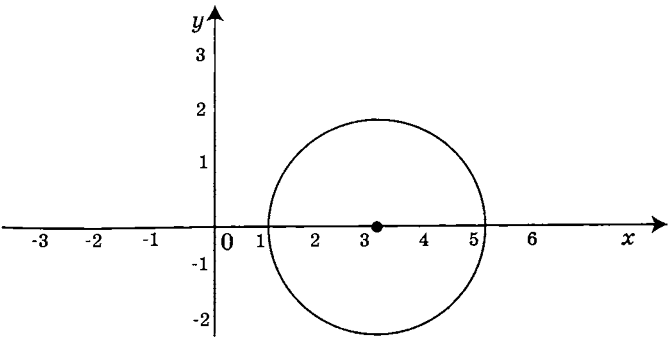
Уравнение $x^2+y^2=4$ задает окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 2.



Ответ: окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 2.

2) Пусть число $z = x + yi$. Так как $|z-3| = 2$, то $|(x + yi) - 3| = 2$. После сложения получим $|(x-3) + yi| = 2$.

По определению модуля комплексного числа $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2$. Избавимся от корня: $(x-3)^2 + y^2 = 4$. Это уравнение задает окружность с центром в точке (3;0) и радиусом 2.



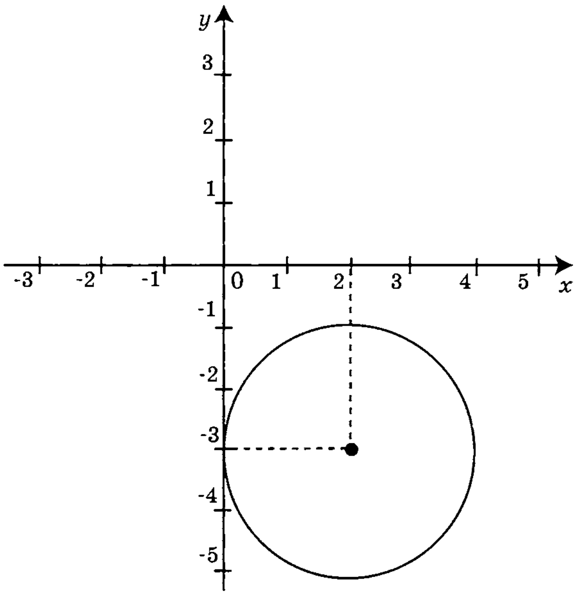
Ответ: окружность с центром в точке (3; 0) и радиусом 2.

3) Пусть число $z = x + yi$. Так как $\left|z-(2-3i)\right| = 2$,

то $\left|x+yi-(2-3i)\right| = 2$. $\left|(x-2)+(y+3)i\right| = 2$,

$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = 2$, $(x-2)^2+(y+3)^2 = 4$.

Решением исходного уравнения $\left|z-(2-3i)\right| = 2$ является окружность с центром в точке (2; −3) и радиусом 2.



Ответ: окружность с центром в точке (2; −3) и радиусом 2.

Задние 7.

Изобразите на комплексной плоскости решение уравнения $\left|z-(-2+8i)\right|=\left|z-4\right|$.

Решение.

1 способ. Пусть $z=x+yi$, подставим z в исходное уравнение:

$\left|(x+yi)-(-2+8i)\right|=\left|(x+yi)-4\right|$. После выполнения операций получим уравнение $\left|(x+2)+(y-8)i\right|=\left|(x-4)+yi\right|$.

По определению модуля комплексного числа получим

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

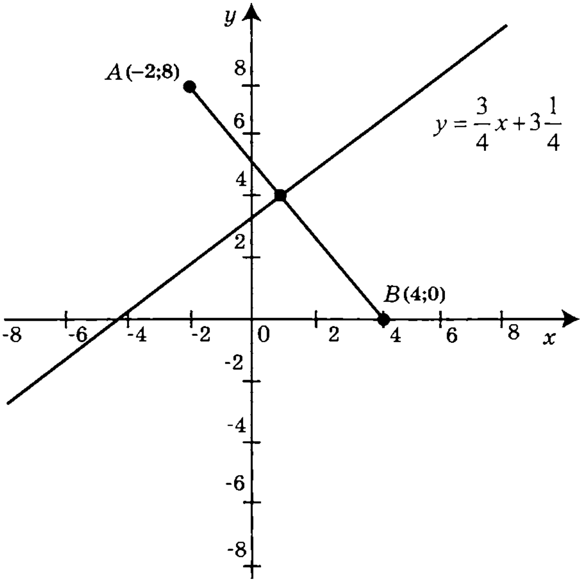
$$x^2+4x+4+y^2-16y+64=x^2-8x+16+y^2$$

$$12x-16y=-52$$

$$y=\frac{3}{4}x+3\frac{1}{4}$$

Ответ: прямая $y=\frac{3}{4}x+3\frac{1}{4}$.

2 способ. Если использовать определение модуля комплексного числа (как расстояние до начала координат до точки с координатами $(x;\ y)$), то решить уравнение $\left|(x+2)+(y-8)i\right|=\left|(x-4)+yi\right|$ — означает найти точки, равноудаленные от точек $A(-2;\ 8)$ и $B(4;\ 0)$, т.е. все точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Таким образом, прямая $y=\frac{3}{4}x+3\frac{1}{4}$ является серединным перпендикуляром к отрезку AB.



Ответ: прямая $y=\frac{3}{4}x+3\frac{1}{4}$.

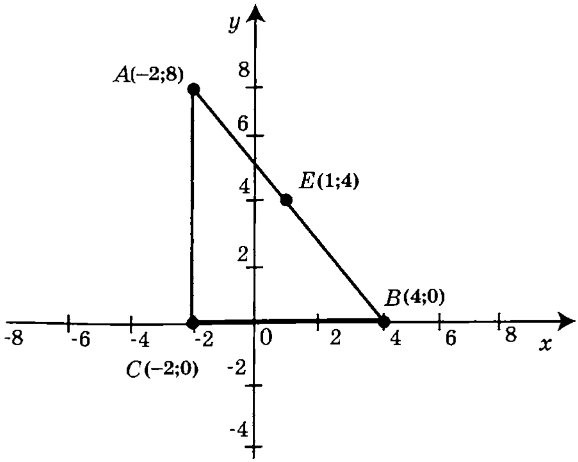
Задание 8.

Изобразите на комплексной плоскости решение уравнения $|z-(-2+8i)|=|z-4|=|z+2|$.

Решение.

Если использовать определение модуля комплексного числа (как расстояние до начала координат до точки с координатами $(x;\ y)$), то решить уравнение $|z-(-2+8i)|=|z-4|=|z+2|$ — значит, найти точку, равноудаленную от точек $A(-2;\ 8)$, $B(4;\ 0)$, $C(-2;\ 0)$.

Эта точка является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Так как треугольник является прямоугольным, то искомая точка — середина гипотенузы AB.



Ответ: точка $E(1;\ 4)$.

Задание 9.

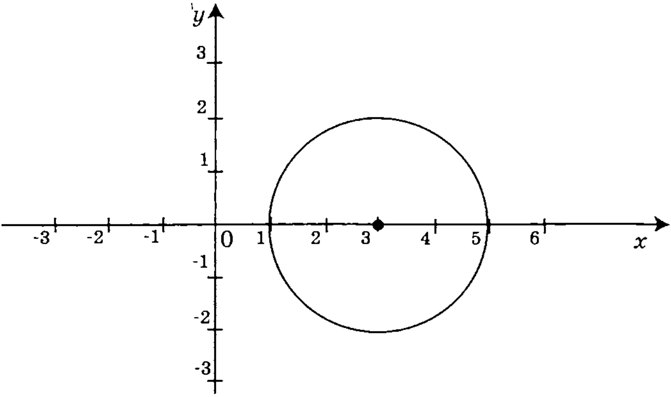
Про комплексное число z известно, что $|z-3|=2$. Найдите наименьшее и наибольшее значения $|z|$.

Решение.

Решением исходного уравнения $|z-3|=2$ является окружность $(x-3)^2+y^2=4$ с центром в точке (3; 0) и радиусом 2. Надо найти наименьшее и наибольшее значения $|z|$, т.е. наименьшее и наибольшее расстояние от начала координат до точек окружности.

Если число z является решением исходного уравнения, то его модуль может принимать значения от 1 включительно до 5 включительно, $1\le|z|\le5$. Получим, что $|z|$ принимает наименьшее значение, равное 1, при $z=1+0i$.

$|z|$ принимает наибольшее значение, равное 5, при $z=5+0i$.



Ответ: наименьшее значение $|z|$ равно 1, наибольшее значение $|z|$ равно 5.

Задание 10.

Про комплексное число z известно, что $|z-5|=|z-2|$. Найдите наименьшее значение $|z|$.

Решение.

1 способ (аналитический). Пусть $z=x+yi$, подставим в исходное уравнение $|(x+yi)-5|=|(x+yi)-2|$. По определению модуля получим $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

Решив это уравнение, получим $x = 3{,}5$.

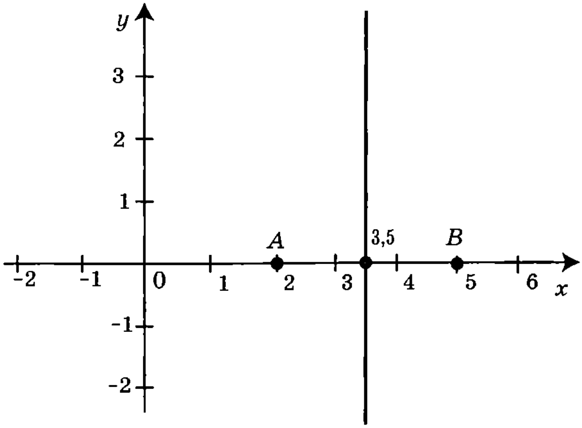
Наименьшее значение $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ принимается при $x = 3{,}5$ и $y = 0$ и равно 3,5.

Ответ: 3,5.

2 способ (графический)

Так как модулем комплексного числа $z=x+yi$ называется расстояние от начала координат до точки с координатами $(x;y)$ и известно, что $|(x-5)+yi|=|(x-2)+yi|$, то в задании требуется найти точки, равноудаленные от точек с координатами B (5; 0) и A (2; 0).

Все такие точки лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB.



Ответ: наименьшее значение $|z|$ равно 3,5.

Задание 11.

Про комплексное число z известно, что $|z-(-2+8i)|=|z-4|$. Найдите наименьшее значение $|z|$.

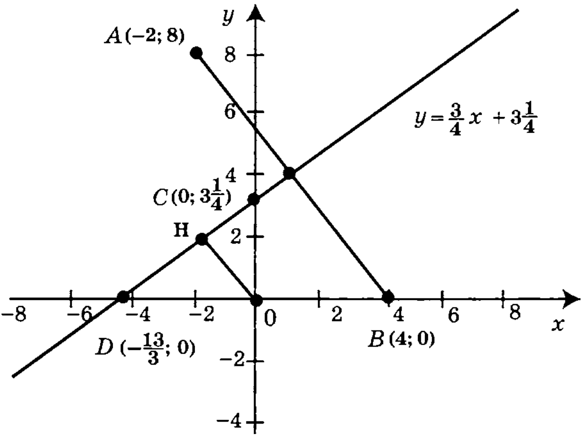
Решение.

Рассмотрим точки $A(-2;\ 8)$ и $B(4;\ 0)$.

В решении Задания 7 получено, что множеством точек, удовлетворяющих исходному уравнению, является серединный перпендикуляр к отрезку AB:

$$y=\frac{3}{4}x+3\frac{1}{4}.$$

Так как модулем комплексного числа $z=x+yi$ называется расстояние от начала координат до точки с координатами $(x; y)$, то в задаче требуется найти расстояние от начала координат до серединного перпендикуляра к отрезку AB.



Серединный перпендикуляр пересекает оси Oy и Ox, соответственно в точках $C(0;\ 3\frac{1}{4})$ и $D\ (-\frac{13}{3};\ 0)$.

Искомое расстояние равно высоте OH треугольника CDO.

Рассмотрим треугольник DOH: OH = OD : $\sin\angle HDO$.

Прямая $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$ образует с положительным направлением оси Ox угол HDO, значит, $\operatorname{tg}\angle HDO = \frac{3}{4}$, поэтому $\sin\angle HDO = \frac{3}{5}$.

OH = OD : $\sin\angle HDO = \frac{13}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6.$

Ответ: наименьшее значение $|z|$ равно 2,6.

Задания для самостоятельного решения

1. Пусть $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 3+i$. Выполните действия:
1) z_1+z_2; 2) z_2+z_1; 3) z_1-z_2; 4) z_2-z_1; 5) $z_1\cdot z_2$; 6) $z_2\cdot z_1$; 7) z_1^2; 8) z_2^2; 9) $\overline{z}_1$; 10) $\overline{z}_2$; 11) $z_1\cdot\overline{z}_1$; 12) $z_2\cdot\overline{z}_2$; 13) $z_1:z_2$; 14) $z_2:z_1$.

2. Пусть $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 5+i$. Выполните действия:
1) z_1+z_2; 2) z_2+z_1; 3) z_1-z_2; 4) z_2-z_1; 5) $z_1\cdot z_2$; 6) $z_2\cdot z_1$; 7) z_1^2; 8) z_2^2; 9) $\overline{z}_1$; 10) $\overline{z}_2$; 11) $z_1\cdot\overline{z}_1$; 12) $z_2\cdot\overline{z}_2$; 13) $z_1:z_2$; 14) $z_2:z_1$.

3. Изобразите на комплексной плоскости решение уравнения:
1) $|z|=5$; 2) $|z+3|=4$; 3) $|z-(3+4i)|=2$.

4. Изобразите на комплексной плоскости решение уравнения:
$|z-(-3-i)|=|z-(3+7i)|$.

5. Изобразите на комплексной плоскости решение уравнения:
$|z-(-3-i)|=|z-(3+7i)|=|z-(3-i)|$.

6. Изобразите на комплексной плоскости решение уравнения:
$|z-(-3-i)|=|z-(3+7i)|=|z-(3-i)|=|z-(-3+7i)|$.

7. Про комплексное число z известно, что $|z-3i|=4$. Найдите наименьшее и наибольшее значения $|z|$.

8. Про комплексное число z известно, что $|z-6i|=|z-2i|$. Найдите наименьшее значения $|z|$.

9. Про комплексное число z известно, что $|z-(-3-i)|=|z-(3+7i)|$. Найдите наименьшее значение $|z|$.

II. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЗ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ (7—11 классы)

1. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1.1. Задания на проценты

Процентом числа называется его сотая часть, например,

1% — это одна сотая числа,

1% от числа 500 – это число 5,

3% — это три сотых числа,

3% от числа 500 – это число 15.

Отсюда легко получаются соотношения, которые полезно помнить:

50% числа x — это его половина ($0{,}5x$), или одна вторая,

25% числа x — это его четверть ($0{,}25x$, или $\frac{1}{4}$),

20% числа x — это его пятая часть ($0{,}2x$, или $\frac{1}{5}$),

75% числа x — это его три четверти ($0{,}75x$, или $\frac{3}{4}$),

100% числа x — это все число (x).

Решение любых задач на проценты сводится к основным **трем действиям** с процентами:

— нахождение процентов от числа:

Пример. Найти 15% от числа 60.

$0{,}15 \cdot 60 = 9$.

Ответ: 9.

— нахождение числа по его процентам:

Пример. Найти число, 12% которого равны 30.

12% искомого числа нам известны — это 30. Какое же это число? Это число (x) принимаем за 100% и находим его:

12% — 30

100% — x

$$\frac{12}{100}=\frac{30}{x},\ x=\frac{30\cdot 100}{12}=250.$$

Ответ: 250.

— нахождение процентного отношения чисел:

Пример. Сколько процентов составляет 120 от 600?

$$\frac{120}{600}\cdot 100\%=20\%.$$

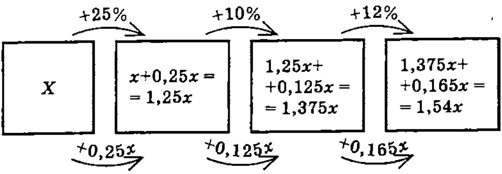
Ответ: 20%.

Задание 1. Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

Решение.

Обозначим первоначальную цену товара за x (руб.), тогда после первого повышения цена товара стала — $1,25x$. Второе повышение цены было на $0,1\cdot 1,25x$. После него цена товара стала — $1,25x + 0,1\cdot 1,25x = 1,375x$. Третье повышение цены на 12% производилось от цены, полученной после второго повышения, и составило $0,12\cdot 1,375x=0,165x$. После последнего повышения цена товара составила $1,375x+0,165x=1,54x$.

Схема рассуждений была следующей:



Осталось выяснить процент повышения первоначальной цены. Цена была повышена на $1,54x - x = 0,54x$ рублей, что составляет 54% от первоначальной цены.

Ответ: 54%.

ВКЛАДЫ

Задание 2. Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 100 тыс. рублей через 2 года?

Решение.

Эта задача на так называемые «сложные проценты». Так говорят, когда в задаче идет речь о поэтапном изменении некоторой величины. В данном случае рассмотрим два этапа: на первом начисляется процент на сумму, находившуюся на счету первый год, а на втором этапе производится начисление процентов на сумму, получившуюся после первого этапа, т.е. на сумму с уже начисленными процентами после первого года.

100 тыс. рублей — первоначальная сумма вклада. Начисленные проценты после первого года составят $0{,}03\cdot 100\,000$. По окончании первого года на счету окажется $100\,000+0{,}03\cdot 100\,000=103\,000$. По окончании второго года проценты составят $0{,}03\cdot 103\,000=3090$. Таким образом, после двух лет сумма вклада составит $103\,000+3090=106\,090$. Первоначальный вклад был увеличен на 6090 рублей.

Ответ: 6090 рублей.

Задание 3. После истечения двух лет сумма банковского вклада, положенного под 3% годовых, выросла на 3045 рубля. Найдите первоначальную сумму вклада.

Решение.

Пусть A рублей — первоначальная сумма вклада. Тогда через год сумма вклада составила $A+0{,}03\times$ $\times A=A\cdot(1+0{,}03)=1{,}03\cdot A$ руб. За второй год проценты составили $0{,}03\cdot(1{,}03\cdot A)$. Через два года сумма вклада станет равной $1{,}03\cdot A+0{,}03\cdot(1{,}03\cdot A)=1{,}03\cdot 1{,}03\cdot A$. Получаем уравнение:

$1{,}03\cdot 1{,}03\cdot A=A+3045,$

$0{,}0609\cdot A=3045,$

$A=50\,000.$

Ответ: 50 000 рублей.

Задание 4. В январе 2014 года ставка по депозиту в банке составила $x\%$ годовых, тогда как в январе 2015 года — $y\%$ годовых, причем $x + y = 20\%$. В январе 2014 года клиент открыл счет в банке, положив на него некоторую сумму. В январе 2015 года, по прошествии года с того момента, клиент снял со счета десятую часть этой суммы. Найдите значение x, при котором сумма на счету клиента в январе 2016 года станет максимально возможной.

Решение.

Пусть в январе 2014 года клиент положил на счет S руб. Составим таблицу.

Время	**Оставшаяся сумма, руб.**
Январь 2015 года	$S+0{,}01xS$
Снял десятую часть	$S+0{,}01xS-0{,}1S=0{,}9S+$ $+\,0{,}01xS$
Январь 2016 года	$0{,}9S+0{,}01xS+0{,}01y\times$ $\times(0{,}9S+0{,}01xS)$

Преобразуем выражение $0{,}9S+0{,}01xS+0{,}01y \times$ $\times\ (0{,}9S + 0{,}01xS) = (0{,}9S + 0{,}01xS)(1 + 0{,}01y)$, где $y = 20 - x$. Имеем: $(0{,}9S + 0{,}01xS)(1 + 0{,}01(20 - x))$.

Раскроем скобки и получим квадратичную функцию от x: $f(x) = -0{,}0001Sx^2 + 0{,}003Sx + 1{,}08S$.

Данная функция принимает наибольшее значение в вершине параболы $x_{\text{верш}} = -\dfrac{b}{2a}$, т.е.

$$x_{\text{верш}} = -\frac{0{,}003S}{-2\cdot 0{,}0001S} = \frac{3S}{0{,}2S} = 15.$$

Ответ: 15.

КРЕДИТЫ

В экономических задачах на ЕГЭ, связанных с кредитами, обычно нужно установить связи между следующими условиями:

1) суммой (S), взятой в кредит;

2) погашением процентов по кредиту (выплата банку за пользование его деньгами);

3) погашением долга по кредиту (погашение суммы S);

4) регулярные периодические (в конце каждого периода) выплаты, состоящие из погашения процентов и погашения долга по кредиту;

5) срок кредита.

В таких задачах может потребоваться найти:

— сумму выплат по процентам банку;

— сумму периодических выплат банку;

— срок, в течение которого при данных условиях кредита и платежа клиент сможет полностью расплатиться с банком, и т.д.

При решении задач важно понимать условия кредитования: каждый период требуется выполнять одинаковые выплаты (аннуитетные платежи) или выплаты будут уменьшаться от периода к периоду (дифференцированные платежи).

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ПЛАТЕЖИ

Задание 5. Клиент в банке взял в кредит 400 тыс. рублей на 4 месяца. Причем каждый платежный период долг сначала возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Сколько составит переплата клиента банку?

Решение.

За 4 месяца нужно погасить весь кредит, т.е. отдавать каждый месяц по 100 тыс. рублей. Кроме того, нужно каждый месяц выплачивать проценты за пользование кредитом. Занесем данные в таблицу.

Месяц	**Долг в начале периода, тыс. руб.**	**Начисленные проценты, тыс. руб.**	**Выплата по долгу, тыс. руб.**	**Регулярная выплата, тыс. руб.**
1	400	$0{,}1\cdot 400=40$	$\frac{400}{4}=100$	$100+40=140$
2	300	$0{,}1\cdot 300=30$	100	$100+30=130$

Месяц	Долг в начале периода, тыс. руб.	Начисленные проценты, тыс. руб.	Выплата по долгу, тыс. руб.	Регулярная выплата, тыс. руб.
3	200	$0{,}1 \cdot 200 = 20$	100	$100 + 20 = 120$
4	100	$0{,}1 \cdot 100 = 10$	100	$100 + 10 = 110$

Все выплаты банку составят $140 + 130 + 120 + 110 = 500$ тыс. рублей. Переплата составит 100 тыс. рублей.

Ответ: 100 тыс. руб.

Задание 6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 1,5 млн рублей?

Решение.

По условию задачи в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, т.е. выплата в счет погашения долга в каждый период одна и та же, равная $\frac{1}{n}$ (дифференцированные платежи), где n – количество периодов (лет) выплаты кредита. Заполним таблицу с первой строки слева направо.

Год	Долг в начале периода, млн руб.	Начисленные проценты, млн руб.	Выплата по долгу, млн руб.	Регулярная выплата, млн руб.
1	1	0,1	$\frac{1}{n}$	$0{,}1 + \frac{1}{n}$

Год	Долг в начале периода, млн руб.	Начисленные проценты, млн руб.	Выплата по долгу, млн руб.	Регулярная выплата, млн руб.
2	$1-\frac{1}{n}$	$0{,}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=$ $=0{,}1-\frac{0{,}1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$0{,}1-\frac{0{,}1}{n}+\frac{1}{n}=$ $=0{,}1+\frac{0{,}9}{n}$
3	$1-\frac{2}{n}$	$0{,}1\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)=$ $=0{,}1-\frac{0{,}2}{n}$	$\frac{1}{n}$	$0{,}1-\frac{0{,}2}{n}+\frac{1}{n}=$ $=0{,}1+\frac{0{,}8}{n}$
...	...	...	...	...
n	$1-\frac{(n-1)}{n}$	$0{,}1\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=$ $=0{,}1-\frac{0{,}1(n-1)}{n}$	$\frac{1}{n}$	$0{,}1-\frac{0{,}1(n-1)}{n}+\frac{1}{n}=$ $=0{,}1+\frac{1-0{,}1(n-1)}{n}$

По условию задачи общая сумма выплат после его погашения равнялась 1,5 млн рублей, что составляет 1 млн рублей выплат по кредиту и 0,5 млн рублей выплат по процентам, поэтому можем составить уравнение относительно суммы выплат начисленных процентов:

$$0{,}1+\left(0{,}1-\frac{0{,}1}{n}\right)+\left(0{,}1-\frac{0{,}2}{n}\right)+\dots+\left(0{,}1-\frac{0{,}1(n-1)}{n}\right)=0{,}5.$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму арифметической прогрессии:

$$\frac{0{,}1+0{,}1-\frac{0{,}1(n-1)}{n}}{2}\cdot n=0{,}5$$

$$0{,}1n-0{,}05n+0{,}05=0{,}5$$

$$0{,}05n=0{,}45$$

$$n=9$$

Ответ: 9 лет.

АННУИТЕТНЫЕ ПЛАТЕЖИ

Нахождение количества лет выплаты кредита

Задание 7. Иван Петрович хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка по кредиту 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Иван Петрович взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300 тыс. рублей?

Решение.

Составим таблицу, с учетом того, что, чем больше ежегодная выплата, тем меньше будет требоваться лет для выплаты кредита, поэтому считаем, что ежегодно выплачивали 300 тыс. рублей, кроме, возможно, последней выплаты.

Год	**Долг на начало периода (с %), млн руб.**	**Регулярная выплата, млн руб.**	**Остаток долга после выплаты, млн руб.**
1	1,1	0,3	0,8
2	0,88	0,3	0,58
3	0,638	0,3	0,338
4	0,3718	0,3	0,0718
5	0,07898	0,07898	0

Действительно, если бы банку возвращался только долг по кредиту, то потребовалось 4 года: 300 тыс. + + 300 тыс. + 300 тыс. + 100 тыс.. Проценты, которые набегают за пользование кредитом, также нужно выплачивать.

Ответ: 5 лет.

Нахождение ежегодного платежа

Задание 8. Клиент взял 364 тыс. рублей в кредит. Срок кредита составляет три года. Ставка по кредиту 20% годовых (в конце периода банк начисляет 20%, т.е. увеличивает долг на 20%, после чего клиент производит выплату). По договору клиент должен платить каждый год одну и ту же сумму x рублей. Какую сумму (x) клиенту нужно платить каждый год?

Решение.

1-й способ. Заполним таблицу по строкам слева направо, учитывая, что выплата каждый год одинакова (аннуитетные платежи). Она будет состоять из погашения долга по кредиту и долга по процентам.

Год	Долг в начале периода	Начисленные проценты	Регулярная выплата	Выплата по долгу
1	364000	$0{,}2\cdot364000 = 72800$	x	$x - 72800$
2	$364000 - (x - 72800) = 436800 - x$	$0{,}2\cdot(436800 - x) = 87360 - 0{,}2x$	x	$x - (87360 - 0{,}2x) = 1{,}2x - 87360$
3	$436800 - x - (1{,}2x - 87360) = 524160 - 2{,}2x$	$0{,}2\cdot(524160 - 2{,}2x) = 104832 - 0{,}44x$	x	$x - (104832 - 0{,}44x) = 1{,}44x - 104832$

За три года клиент отдает весь долг, значит сумма выплат по долгу должна составлять 364 тыс. рублей, можем составить уравнение:

$x - 72800 + 1{,}2x - 87360 + 1{,}44x - 104832 = 364000$

$3{,}64x = 628992$

$x = 628992 : 3{,}64$

$x = 172800$

2-й способ. Можно рассуждать иначе, заполняя таблицу с первой строки слева направо, записывая остаток долга по кредиту на конец каждого периода.

Год	Долг в начале периода, тыс. руб.	Долг на конец года, тыс. руб.	Регулярная выплата, тыс. руб.	Остаток долга после выплаты, тыс. руб.
1	$3{,}64$	$3{,}64 \cdot 1{,}2$	x	$3{,}64 \cdot 1{,}2 - x$
2	$3{,}64 \cdot 1{,}2 - x$	$1{,}2 \cdot (3{,}64 \times 1{,}2 - x)$	x	$1{,}2 \cdot (3{,}64 \times 1{,}2 - x) - x$
3	$1{,}2 \cdot (3{,}64 \times 1{,}2 - x) - x$	$1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot (3{,}64 \times 1{,}2 - x) - x)$	x	$1{,}2 \cdot (1{,}2 \times (3{,}64 \cdot 1{,}2 - x) - x) - x$

По истечению трех лет клиент должен выплатить всю сумму, т.е. остаток долга будет равен нулю, можно составить уравнение:

$1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot 3{,}64 - x) - x) - x = 0$

$3{,}64 \cdot 1{,}2^3 - 1{,}2^2 x - 1{,}2x - x = 0$

$3{,}64 \cdot 1{,}2^3 = 1{,}2^2 x + 1{,}2x + x$

$4 \cdot 1{,}2^3 = x(1{,}2^2 + 1{,}2 + 1)$

$3{,}64 \cdot 1{,}2^3 = x \cdot 3{,}64$

$x = 1{,}2^3$

$x = 1{,}728$

Ответ: 172 800 руб.

1.2. Задания на «концентрацию», на «смеси и сплавы»

Теоретические сведения

В таких задачах часто встречаются понятия процентного содержания или концентрации. Например, если в задаче идет речь о девятипроцентном растворе уксуса, то можно понять, что в этом растворе 9% чистого уксуса, а остальные 91% приходится на воду, с которой смешивался чистый уксус. Также можно сказать, что 0,09 части составляет в этом растворе чистый уксус, а 0,91 части приходится на воду. Понятно, что объем всего раствора принимается за 100% (или за 1).

В задачах этого типа обычно присутствуют три величины, соотношение между которыми позволяет составлять уравнение:

— концентрация (доля чистого вещества в смеси);

— масса чистого вещества в смеси (или сплаве);

— масса смеси (сплава).

Соотношение между этими величинами следующее:

Масса смеси × концентрация = масса чистого вещества

Задание 9. Сколько литров воды надо добавить к 20 литрам пятипроцентного раствора соли, чтобы получить четырехпроцентный раствор?

Решение.

Соль содержится в каждом из растворов. В 20 литрах пятипроцентного раствора соли содержится $20\times0{,}05 = 1$ (ед.) соли. Ее количество не меняется. Доливается только вода. Узнаем, каково ее количество.

Обозначим x (л) — количество добавленной воды. Из условия задачи получаем, что четырехпроцентную концентрацию раствора характеризует уравнение $\frac{1}{20+x}=0{,}04$. Решением уравнения является $x = 5$.

Ответ: 5 литров.

Задание 10. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 42% и 65% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив, получить сплав, содержащий 50% меди?

Решение.

Изобразим схематически условие задачи:

концентрация 0,42 масса сплава x количество меди $0{,}42x$	концентрация 0,65 масса сплава y количество меди $0{,}65y$	концентрация 0,5 масса сплава $x+y$ количество меди $0{,}5(x+y)$

Количество меди в каждом сплаве найдено с помощью соотношения (1). Можем составить уравнение: $0{,}42x + 0{,}65y = 0{,}5(x+y)$.

В этом уравнении две неизвестных, а в задаче требуется найти их отношение $\frac{x}{y}$. Решая уравнение, получим $42x + 65y = 50(x + y)$, $15y = 8x$, $x : y = 15:8$.

Ответ: Нужно взять первый и второй сплавы в отношении 15 к 8.

1.3. Задания на «движение»

Теоретические сведения

Действие движения характеризуется тремя компонентами: пройденный путь, скорость и время. Известно соотношение между ними:

Путь = скорость × время.

Задание 11. Скорость велосипедиста от поселка до станции была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. На обратный путь он затратил на 2 минуты больше. Расстояние между пунктами 7 км. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $\frac{7}{x+1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$. Б. $\frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$. В. $\frac{7}{x-1} + \frac{7}{x} = 2$.

Г. $\frac{7}{x-1} + \frac{7}{x} = 2$.

Решение. Если x км/ч — скорость велосипедиста от поселка до станции, то $(x-1)$ км/ч — скорость велосипедиста на обратном пути. Время велосипедиста от поселка до станции $\frac{7}{x}$ ч, а время обратного движения $\frac{7}{x-1}$ ч. Так как время обратного движения на 2 минуты (т.е. на $\frac{1}{30}$ ч) больше, составим уравнение: $\frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$.

Ответ: Б.

Задание 12. Катер прошел 20 км по течению реки и такой же путь обратно, затратив на весь путь 1 ч 45 мин. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите время катера в пути.

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $\frac{20}{x+2}=1{,}45$. Б. $\frac{20}{x-2}-\frac{20}{x+2}=1{,}45$. В. $\frac{20}{x-2}+\frac{20}{x+2}=\frac{7}{4}$.

Г. $\frac{20}{2-x}+\frac{20}{2+x}=\frac{7}{4}$.

Решение. Скорость катера по течению $(x+2)$ км/ч, а против течения $(x-2)$ км/ч. Время движения катера по течению $\frac{20}{x+2}$ ч, а против течения $\frac{20}{x-2}$ ч. На весь путь катер потратил $\frac{20}{x-2}+\frac{20}{x+2}$, или 1 ч 45 мин. Переведем 1 ч 45 мин в часы: 1 ч 45 мин $= 1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ (ч).

Уравнение под буквой В соответствует условию задачи.

Ответ: В.

Задание 13. Два тела, движущиеся в разные стороны по окружности длиной 500 м с постоянными скоростями, встречаются каждые 12,5 секунды. При движении в одну сторону первое догоняет второе каждые 125 секунд. Найдите скорости каждого тела.

Решение. При движении в одном направлении время, через которое одно тело догонит второе, можно найти по формуле: $\frac{S}{v_2-v_1}$. Пусть скорости тел равны x и y (м/с), тогда получим первое уравнение: $\frac{500}{y-x}=125$.

При движении навстречу друг другу время, через которое тела встретятся, можно найти по формуле: $\frac{S}{v_2+v_1}$. Получим второе уравнение: $\frac{500}{y+x}=12{,}5$.

Решением системы $\begin{cases} \dfrac{500}{y-x}=125, \\ \dfrac{500}{y+x}=12{,}5 \end{cases}$ является пара

$x=18$ (м/с) и $y=22$ (м/с).

Ответ: Скорость первого тела 18 м/с, скорость второго 22 м/с.

1.4. Задания «на работу»

Теоретические сведения

Работу характеризуют три компонента действия:

— время работы;

— объем работы;

— производительность (количество произведенной работы в единицу времени).

Существует следующее соотношение между этими компонентами:

Объем работы = время работы × производительность

Задание 14. Две копировальные машины печатают рукопись. Если всю рукопись будет печатать первая машина, то работа будет выполнена на 4 минуты позже, чем две машины, работая вместе. Если печатать всю рукопись будет вторая машина, то она напечатает на 25 минут позже, чем обе машины, работая вместе. За сколько минут может напечатать эту рукопись вторая машина?

Решение.

1-й способ. Примем за единицу работу по печати всей рукописи. Пусть время печати всей рукописи первой машиной — x (мин), а второй — y (мин). Тогда производительность первой машины $\dfrac{1}{x}$, производительность второй машины $\dfrac{1}{y}$, общая их производительность

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Получаем время их общей работы: $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Можем составить два уравнения относительно времени работы:

$$\begin{cases} x-4=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \\ y-25=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-4=y-25, \\ y+25=\frac{y\cdot(y-21)}{2y-21}; \end{cases} \quad \begin{cases} y=15 \text{ или } y=35, \\ x=-6 \text{ или } x=14. \end{cases}$$

В соответствии с условиями задачи решение $(-6;\ 15)$ является посторонним. Вторая машина может напечатать рукопись за 35 минут.

2-й способ. Пусть время печати всей рукописи первой машиной — x (мин), а второй — y (мин). Тогда время общей работы двух машин можно найти двумя способами: $x-4$ и $y-25$. Поэтому получим первое уравнение: $x-4=y-25$.

Примем за единицу работу по печати всей рукописи. Производительность первой машины — $\frac{1}{x}$, производительность второй машины — $\frac{1}{y}$, общая их производительность — $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Зная их общее время работы $(x-4)$, можно составить второе уравнение $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x-4)=1$. Решая систему $\begin{cases} x-4=y-25, \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x-4)=1, \end{cases}$ получим, что вторая машина может напечатать рукопись за 35 минут.

Ответ: Вторая машина может напечатать рукопись за 35 минут.

Задания для самостоятельного решения

1. Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

2. Катер прошел 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

3. Для распечатки 302 страниц были использованы две копировальные машины. Первая машина работала 8 минут, вторая — 10 минут. Сколько страниц в минуту печатает первая машина, если первая печатает в минуту на 4 страницы больше, чем вторая?

4. Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготовлял в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

5. В связи с распродажей диван подешевел на 20% и теперь стоит 12 тыс. рублей. Сколько диван стоил до распродажи?

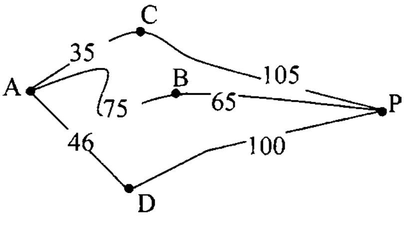
6. Некоторое число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

7. Вкладчик положил в банк 10 тыс. рублей из расчета 1% годовых. Каким будет его вклад через один год?

8. Банк в конце года начисляет 4% годовых к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 2500 рублей через один год?

9. Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% овощей, проданных в первый день. В третий день — оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

10. Водитель машины собирается проехать из пункта A в пункт P, в который ведут три маршрута: через пункт B, через пункт C и через пункт D. Расстояния в километрах между соседними пунктами показаны на схеме. Известно, что если ехать через C, то средняя скорость автобуса будет равна 50 км/ч, если ехать через B — 56 км/ч, если ехать через D — 58 км/ч. Водитель выбрал маршрут так, чтобы доехать до пункта P за наименьшее время. Сколько часов он будет в пути?



11. Конфеты продаются в трех различных упаковках. В 300-граммовой упаковке они стоят 27 рублей, в 500-граммовой упаковке они стоят 41 рубль, а в 900-граммовой упаковке — 77 рублей. Покупатель выбрал самую выгодную упаковку. Сколько он заплатил за две упаковки таких конфет?

12. На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может построить эту стену первый каменщик, работая один?

13. За определенное время на заводе собирают 90 автомобилей. Первые три часа на заводе выполняли установленную норму, а затем стали собирать на один автомобиль в час больше. Поэтому за час до срока уже было собрано 95 автомобилей. Сколько автомобилей в час должны были собирать на заводе?

14. Два велосипедиста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 54 км, и встречаются через 2 ч. Определите скорость каждого велосипедиста, если скорость у одного из них на 3 км/ч больше, чем у другого.

15. Два пешехода отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 50 км, и встречаются через 5 ч. Определите скорость первого пешехода, если его скорость на 2 км/ч больше, чем у другого.

16. Найдите двузначное число, если частное от деления искомого числа на сумму его цифр равно 4, а частное от деления произведения его цифр на сумму цифр равно 2.

17. Найдите двузначное число, если произведение его цифр в 6 раз меньше самого числа, а если к исходному числу прибавить 9, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

18. К 40% раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найдите первоначальный вес раствора.

19. Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9%-ного раствора уксуса, чтобы получить 3%-ный раствор?

20. Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

21. Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

22. Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 1000 рублей через 2 года?

23. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения двух лет она выросла на 304,5 рубля при 3% годовых.

24. В первый день со склада было отпущено 20% имевшихся яблок. Во второй день — 180% от того количества яблок, которое было отпущено в первый день. В третий день — оставшиеся 88 кг яблок. Сколько килограммов яблок было на складе первоначально?

25. Изделие, цена которого 500 рублей, сначала подорожало на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена изделия?

26. Цену на некоторый товар сначала снизили на 30%, а затем повысили на 20%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

27. Цену некоторого товара снизили на 15%, а потом еще на 20%. Найдите общий процент снижения цены.

28. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом еще на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена одного товара больше первоначальной цены другого товара.

29. Сумма двух чисел равна 1100. Найдите наибольшее из них, если 6% одного из них равны 5% другого.

30. Зарплата была повышена два раза за один год. При таком повышении рабочий стал получать вместо 1000 руб. за один день 1254,4 руб. Определите, на сколько процентов повысилась зарплата.

31. Сберегательный банк в конце года начисляет 2% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 5000 рублей через 3 года?

32. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трех лет она выросла на 765,1 рубля при 2% годовых.

33. Сберегательный банк в конце года начисляет 5% к сумме, находившейся на счету. На сколько процентов увеличится первоначальный вклад в 2000 рублей через 2 года?

34. Для перевозки 25 тонн груза на 900 км можно использовать одну из транспортных компаний, причем у каждой из них автомобили определенной грузоподъемности. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку товара за один рейс?

Транспортная компания	Стоимость перевозки одной машиной (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобиля (тонн)
А	1000	2
В	1200	2,5
С	1300	3

35. Для сборки шкафа требуется заказать 8 одинаковых зеркал площадью 0,3 м^2 каждое у одного из трех производителей. В таблице приведены цены на зеркала, а также на резку и обработку края. Сколько рублей придется заплатить за самый дешевый заказ?

Производитель	**Стоимость зеркала (руб. за 1 м^2)**	**Резка и обработка (руб. за одно зеркало)**
А	600	100
В	650	90
С	700	80

36. Строительной компании необходимо купить 25 тонн кирпича у одного из трех поставщиков. Вес одного кирпича 2,5 кг. Цены и условия доставки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдется самый дешевый заказ с учетом доставки? Ответ дайте в тыс. руб.

Поставщик	**Цена кирпича (руб. за шт.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	35	11 000	
Поставщик	**Цена кирпича (руб. за шт.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
В	36	15 000	При заказе на сумму свыше 350 000 руб. доставка бесплатно
С	34	20 000	При заказе на сумму свыше 330 000 руб. доставка со скидкой 10%

37. Для одного из заводов зависимость объема спроса на продукцию m (единиц в неделю) от ее цены n (тыс. руб. определяется по формуле $m = 140 - 10n$).

Найдите наибольшую цену (в тыс. руб.), при которой значение выручки за неделю $k = m \cdot n$ составит не менее 450 тыс. руб.

38. Прибыль фабрики в неделю вычисляется по формуле $m(t) = t(k - n) - r$. Фабрика продает свою продукцию по цене $k = 300$ руб. за штуку, затраты на производство единицы продукции составляют $n = 100$ руб. за штуку, а расходы за неделю $r = 200$ тыс. руб. Найдите наименьший объем производства t (шт.), при котором прибыль фабрики составит не менее 100 тыс. руб. в месяц.

39. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота его над землей описывается по формуле $h(t) = -2t^2 + 26t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее со времени броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 72 м?

40. Велосипедист, едущий по городу со скоростью $v_0 = 5$ км/ч, выезжает из города на трассу и начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 4$ км/ч^2. Расстояние велосипедиста до города определяется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Найдите наибольшее время в минутах, в течение которого велосипедист будет находиться в зоне функционирования местной телефонной связи, если оператор гарантирует покрытие не далее чем 12 км от города.

41. В одном рыбном хозяйстве собираются разводить карпов. Прежде чем запускать мальков в пруд, решили провести расчеты. Согласно закону Мальтуса изменение числа рыб за один год вычисляется по формуле $\Delta N = kN - qN^2$, где N — число карпов в начале года, k и q — коэффициенты, соответствующие состоянию водоема, наличию корма. Экспериментально установлено, что для данного вида рыб (карпы) и данного водоема коэффициенты $k = 1$, $q = 0{,}001$.

а) На какой прирост карпов (в штуках) можно рассчитывать через год, если первоначально планируется выпустить 200 штук мальков-двухлеток карпа?

б) Какое количество карпов будет обитать в пруду через год, если первоначально выпустить 200 штук мальков-двухлеток карпа?

42. Общая площадь квартиры — суммарная площадь жилых и подсобных помещений квартиры с учетом лоджий, балконов, веранд, террас. Общую площадь квартир следует определять как сумму площадей всех помещений, встроенных шкафов, а также лоджий, балконов, веранд, террас и холодных кладовых, подсчитываемых со следующими понижающими коэффициентами: для лоджий — 0,5, для балконов и террас — 0,3, для веранд и холодных кладовых — 0,1. Общая формула для подсчета:

$$S = S_{\text{помещений}} + 0{,}5S_{\text{лоджий}} + 0{,}3S_{\text{балконов}} + 0{,}1S_{\text{веранд}}.$$

а) Укажите общую площадь квартиры, состоящей из двух комнат площадью 16 и 18 $м^2$, одной лоджии площадью 2 $м^2$, кухни, площадь которой 8 $м^2$, одного балкона, площадь которого 3 $м^2$, коридора 6 $м^2$ и санузла 3,1 $м^2$.

б) Какова площадь веранды в квартире, состоящей из одной комнаты площадью 21 м^2, кухни 10 м^2, санузла 4 м^2 и веранды, если общая площадь квартиры 36,5 м^2?

в) Какова площадь балкона в квартире, состоящей из двух комнат по 18 м^2, кухни 9 м^2, коридора 6 м^2, санузла 3 м^2, лоджии 4 м^2 и балкона, если общая площадь квартиры 57,2 м^2?

43. При параллельном соединении проводников величина, обратная общему сопротивлению цепи R, равна сумме величин, обратных сопротивлениям всех параллельно включенных проводников. При параллельном соединении трех проводников формула для расчета сопротивления следующая:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3},$$

где R (Ом) — общее сопротивление цепи, R_1, R_2, R_3 (Ом) — сопротивления трех проводников цепи.

а) Определите общее сопротивление (R) трех параллельных сопротивлений, каждое из которых 6 Ом.

б) Определите общее сопротивление (R) трех параллельных сопротивлений по 2, 2 и 4 Ом.

в) Определите общее сопротивление (R) трех параллельных сопротивлений, по 3, 2,5 и 15 Ом.

г) Определите сопротивление (R_3) цепи из трех параллельных сопротивлений, если общее сопротивление равно 6 Ом и два сопротивления (R_1 и R_2) по 14 Ом.

д) Определите сопротивление (R_2) цепи из трех параллельных сопротивлений, если общее сопротивление равно 2 Ом и два сопротивления R_1 и R_3 по 4 Ом и 12 Ом соответственно.

44. При прокладке коммуникаций для вычисления объема котлована с прямоугольными основаниями, имеющего откосы со всех четырех сторон, используют преобразованную формулу:

$$V = \frac{H}{6}\left(ab + cd + (a+c)(b+d)\right),$$

где H — глубина котлована, a и b — ширина и длина котлована по дну соответственно, c и d — ширина и длина котлована по верху.

а) Найдите глубину котлована, если было вывезено 52,5 м^3 грунта, а размеры прямоугольников дна и верха котлована соответственно 1 м × 10 м и 2 м × 13 м.

б) Найдите длину прямоугольника основания котлована, если было вывезено 56,5 м^3 грунта, размеры прямоугольника верха котлована 2 м×13 м, ширина прямоугольника основания котлована 1 м, глубина котлована 3 м.

45. Предприниматель переложил некоторую сумму из государственного банка в коммерческий, так как процент годовых в коммерческом банке оказался в 8 раз выше, чем в государственном банке. Через год сумма предпринимателя превысила вложенную сумму на 6%. Каков процент годовых в государственном банке?

46. Фермер хочет взять в кредит 2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка 20% годовых. На какое минимальное количество лет может фермер взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 700 тыс. рублей?

47. Два бизнесмена купили акции банка «Достижение» одного достоинства на сумму 16 400 рублей. Через месяц цена акции возросла, и они продали часть акций на сумму 18 760 рублей, при этом первый бизнесмен продал половину своих акций, а второй бизнесмен — 80% своих. Сумма от продажи акций вторым бизнесменом превысила сумму, полученную первым, на 150%. На сколько процентов повысилась цена акции?

48. Бизнесмен хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка по кредиту 10% годовых. Сколько составит переплата клиента по процентам банку (в млн руб.), если ежегодные выплаты были не более 300 тыс. рублей?

49. После истечения двух лет сумма банковского вклада, положенного под 10% годовых, выросла на 84 тыс. рублей. Найдите первоначальную сумму вклада.

50. Клиент в банке взял в кредит 300 тыс. рублей на 3 месяца. Причем каждый платежный период долг сначала возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Сколько составит переплата клиента банку?

51. Клиент хочет взять в кредит 500 тыс. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка по кредиту 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Иван Петрович взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 200 тыс. рублей?

52. В сентябре планируется взять кредит в банке на сумму 500 тыс. рублей на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

– 1 числа каждого месяца долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– с 2 по 15 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– после оплаты долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего месяца.

На сколько месяцев был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 999,6 тыс. рублей?

53. Клиент взял в банке кредит 2 млн 979 тыс. рублей под 10% в год. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами после начисления процентов. Какую сумму клиент должен погашать каждый год, чтобы выплатить все за 3 года?

54. Допустим, что в банке взят кредит 993 тыс. рублей на 3 месяца. Причем, каждый платежный период долг сначала возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Найдите переплату.

55. Клиент взял в банке кредит 993 тыс. рублей под 10% в месяц. Погашение кредита происходит раз в месяц равными платежами после начисления процентов. Какую сумму клиент должен погашать каждый месяц, чтобы выплатить все за 3 месяца? Найдите переплату.

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Задания для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $|2x-7|=5$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

2. Укажите число корней уравнения $|2x^2-7|=5$.

3. Решите уравнение $|14-6^x|=22$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

4. Решите уравнение $\left|\left(\frac{1}{6}\right)^x-7\right|=29$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

5. Решите уравнение $|2\log_2 x-1|=3$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

6. Решите уравнение $|2\sin x-1|=3$. В ответе укажите наименьший положительный корень (в градусах).

7. Решите уравнение $|2\cos x+1|=3$. В ответе укажите наибольший отрицательный корень (в градусах).

8. Решите уравнение $\left|1-5\sqrt{x}\right|=14$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

9. Решите уравнение $\left|5\sqrt[4]{x}-1\right|=19$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

10. Решите уравнение $\left|0{,}5\sqrt[3]{x}-1\right|=2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

11. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $|x-3|<4$?

12. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\sqrt{x^4-6x^2+9}\le 6$?

13. Сколько натуральных чисел являются решением неравенства $\left|7^x-3\right|\le 4$?

14. Сколько целых чисел, принадлежащих промежутку $(-3;\ 3]$, являются решением неравенства

$$\left|\left(\frac{1}{7}\right)^x-3\right|\le 4?$$

15. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $|\lg x|\le 2$?

16. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\left|\log_{0,25}x\right|\le 2$?

17. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\left|\sqrt[3]{x}\right|\le 3$?

18. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\left|\sqrt{x}-1\right|\le 2$?

19. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $|2-x|>9$.

20. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $|x^2-3|>17$.

21. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $|\sqrt{x}-2|>17$.

22. Сколько целых чисел, принадлежащих промежутку (20; 30), являются решением неравенства $|\log_5 x-3|\geq 1$?

23. Сколько целых чисел, принадлежащих промежутку [–3; 3], являются решением неравенства $|2^x-5|>1$?

24. Сколько целых чисел являются решением неравенства $(0{,}2)^{|2x-1|}\geq \frac{1}{25}$?

25. Укажите середину промежутка, являющегося решением неравенства $(0{,}5)^{|4x+1|}\geq \frac{1}{8}$.

26. Сколько целых чисел являются решением неравенства $\log_{\frac{1}{6}}|3x-3|\geq -1$?

27. Сколько целых чисел являются решением неравенства $\log_{0{,}25}|2x-8|\geq -2$?

28. Решите уравнение $|x-3|=3x+1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

29. Решите уравнение $|x^2-3|=3x^2-1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

30. Решите уравнение $|\sqrt{x}-3|=3\sqrt{x}+1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

31. Решите уравнение $|2^x-3|=3\cdot 2^x-1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

32. Решите уравнение $|3\sin x-1|=2\sin x+1$. В ответе укажите наименьший положительный корень (в градусах).

33. Решите уравнение $|3\cos x-1|=2\cos x+1$. В ответе укажите наибольший отрицательный корень (в градусах).

34. Укажите наименьшее решение уравнения $|4x-7|=4x-7$.

35. Укажите наибольшее целое решение уравнения $\left|x^2-27\right|=27-x^2$.

36. Укажите наименьшее целое решение уравнения $\left|2^x-17\right|=2^x-17$.

37. Укажите наибольшее решение уравнения $\left|\log_5 x-2\right|=2-\log_5 x$.

38. Решите уравнение $x^2+\sqrt{x^2}-12=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

39. Решите уравнение $x^2+\left(\sqrt{x}\right)^2-20=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

40. Решите уравнение $\log_2^2 x+2\sqrt{(\log_2 x)^2}-3=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

41. Решите уравнение $\log_2^2 x+2\left(\sqrt{\log_2 x}\right)^2-3=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

42. Решите уравнение $x^2+4\left(x^{0,5}\right)^2=21$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

43. Решите уравнение $x^2+4\left(x^2\right)^{0,5}=21$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

44. Решите уравнение $|0{,}5x-6|=|x|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите среднее арифметическое всех его корней.)

45. Решите уравнение $\left|3^x-8\right|=\left|3^x-10\right|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

46. Решите уравнение $|2\lg x-1|=|\lg x+1|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

47. Решите уравнение $\left|0{,}5\sqrt{x}-2\right|=\left|1{,}5\sqrt{x}-3\right|$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

48. Укажите наименьшее решение неравенства $|x-3|(x-7)\geq 0$.

49. Укажите наибольшее целое решение неравенства $|x-5|(x-6)<0$.

50. Укажите наименьшее решение неравенства $\left|2^x-4\right|\left(2^x-64\right)\geq 0$.

51. Укажите наибольшее целое решение неравенства $|\lg x|(\lg x-1)<0$.

52. Решите уравнение $\left||x|-7\right|=4$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите наименьший из всех его корней.)

53. Решите уравнение $\left||x|-4\right|=7$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

54. Решите неравенство $\left|\left|\dfrac{1}{x}\right|-7\right|<4$.

55. Решите уравнение $\left||\cos x|-3\right|=2$.

56. Решите уравнение $\left||\log_2 x|-2\right|=3$.

57. Решите уравнение $\left|\left|6^x-1\right|-3\right|=2$.

58. Решите уравнение $\left|\left|\sqrt[4]{x}-1\right|-1\right|=1$.

59. Решите уравнение $\log_3(1-x)+0{,}5\log_3(4x-7)^2=0$.

60. Решите уравнение
$\log_2(4x-11)+0{,}25\log_2(2-x)^4=0$.

61. Решите уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|x^2-9\right|=7$.

62. Решите уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|x^2-9\right|=5$.

63. Решите уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|x^2-9\right|=4$.

64. Решите уравнение $\left|2-\sqrt{x}\right|+\left|\sqrt{x}-4\right|=2$.

65. Решите уравнение $\left|\log_3 x+2\right|+\left|\log_3 x-1\right|=5$.

66. Решите уравнение $\sqrt{4^x-2\cdot 2^x+1}+\left|2^x-9\right|=7$.

67. Решите уравнение $\left|5-\log_2 x\right|+\left|2+\log_2 x\right|=7$.

68. Решите уравнение $\left|5-\sqrt[3]{x}\right|+\left|2+3\sqrt[3]{x}\right|=7+2\sqrt[3]{x}$.

69. Решите уравнение $\left|4-3^x\right|+\left|9-3^x\right|=2\cdot 3^x-13$.

70. Решите неравенство $|x+1|+|x+2|+|x-1|<8x-32$.

71. Решите неравенство
$|x+1|+|x+2|+|x-1|+|x-2|<8x-32$.

72. Решите неравенство
$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}<4x+4$.

73. Решите уравнение
$\left|\log_3\left(x^2-16\right)+x-5\right|=\left|\log_3\left(x^2-16\right)\right|+|x-5|$.

74. Решите неравенство
$\left|\log_3\left(x^2-16\right)+x-5\right|\le\left|\log_3\left(x^2-16\right)\right|+|x-5|$.

75. Решите неравенство

$\left|\log_3\left(x^2-16\right)+x-5\right|\ge\left|\log_3\left(x^2-16\right)\right|+|x-5|$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В математике возможность наступления того или иного случайного события **А** выражают числом и называют вероятностью этого события **Р(А)**.

Событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Достоверным называется событие А, которое в результате опыта обязательно должно произойти. Вероятность достоверного события равна 1.

Невозможным событием называется событие А, которое в результате опыта не может произойти. Вероятность невозможного события равна 0.

Таким образом, вероятность любого события заключена между 0 и 1: **$0 \le P(A) \le 1$.**

Случай (исход) называется благоприятным событию, если появление этого случая влечет за собой появление события.

Решение типовых заданий

Классическое определение вероятности

Вероятность Р(А) случайного события А равна значению дроби $\frac{m}{n}$, где n — общее число случаев, а m — число случаев, благоприятных событию А, т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Задание 1. В урне 30 белых, 20 черных и 50 зеленых шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар: а) белый; б) черный; в) не белый.

Решение.

а) Событие А состоит в появлении белого шара. Всего шаров 30 + 20 + 50 = 100, из них белых — 30, значит, по формуле классической вероятности, имеем:

$$P(A) = \frac{30}{100} = 0{,}3.$$

б) Событие А состоит в появлении черного шара. Всего шаров 30 + 20 + 50 = 100, из них черных — 20, значит, по формуле классической вероятности, имеем:

$$P(A) = \frac{20}{100} = 0{,}2.$$

в) Событие А состоит в появлении не белого шара. Всего шаров 30 + 20 + 50 = 100, из них не белых (т.е. черных или зеленых) — 70, значит, по формуле классической вероятности, имеем: $P(A) = \frac{70}{100} = 0{,}7$.

Ответ: а) 0,3; б) 0,2; в) 0,7.

Сложение и умножение вероятностей

Суммой двух событий А и В называется событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А или В.

Несколько событий в данном опыте называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе. Если события несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Произведением двух событий А и В называется событие С, состоящее в совместном появлении события А и события В. События А и В называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Если события независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Если события совместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Задание 2. Два брата Сергей и Виктор решили подарить сестре мягкую игрушку. Игрушку можно выиграть в тире, попав в мишень с расстояния 10 метров. Вероятность попадания в мишень у Сергея равна 0,7, у Виктора — 0,8. Два брата делают по одному выстрелу. Если они хотя бы один раз попадут в мишень, то им достанется игрушка. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

Р е ш е н и е. Событие A состоит в попадании Сергея в мишень. Вероятность этого события равна $P(A) = 0{,}7$.

Событие B состоит в попадании Виктора в мишень. Вероятность этого события равна $P(B) = 0{,}8$.

Так как события A и B совместны, то вероятность хотя бы одного попадания в мишень равна $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.

Ответ: 0,94.

Событие $\bar{A}$ называется **противоположным** событию **A**, если оно состоит в непоявлении события **A**.

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1.

Задание 3. В урне 30 белых, 20 черных и 50 зеленых шаров. Из урны три раза вынимают наугад один шар и возвращают в урну. Найти вероятность того, что все три раза не вынут белый шар.

Р е ш е н и е. Пусть событие **A** состоит в появлении белого шара, его вероятность равна 0,3. Противоположное событие $\bar{A}$ состоит в появлении либо черного, либо зеленого шаров. Вероятность противоположного события (не вынут белый шар) $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Искомая вероятность равна $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$.

Ответ: 0,343.

Задание 4. В урне 3 белых, 2 черных и 5 зеленых шаров. Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что эти шары: а) белые; б) черные; в) разноцветные. Ответ округлите до сотых.

Решение.

а) Событие состоит в вынимании двух белых шаров. Вероятность появления первого белого шара равна $\frac{3}{10}$, второго белого шара (всего осталось 9 шаров, из них 2 белых шаров) — $\frac{2}{9}$. Вероятность появления двух белых шаров равна $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \approx 0{,}07$.

б) Событие состоит в вынимании двух черных шаров. Вероятность появления первого черного шара равна $\frac{2}{10}$, второго черного шара (всего осталось 9 шаров, из них 1 черный шар) — $\frac{1}{9}$. Вероятность появления двух черных шаров равна $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \approx 0{,}02$.

в) Событие состоит в вынимании двух разноцветных шаров. Это могут быть белый и черный (вероятность $2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{15}$). Это могут быть белый и зеленый (вероятность $2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{6}$). Это могут быть черный и зеленый (вероятность $2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$). Вероятность появление разноцветных шаров равна $\frac{2}{15} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9} = \frac{31}{45} \approx 0{,}69$

Ответ: а) 0,07; б) 0,02; в) 0,69.

Условная вероятность

Условная вероятность P(A|B) — это вероятность события A, если событие B уже произошло.

С учетом условной вероятности правило произведения записывается так $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Решим **задачу 4а** с помощью условной вероятности.

Рассмотрим исходы:

A — вынули два белых шара.

A_1 — вынут белый шар в первый раз.

A_2 — вынут белый шар во второй раз.

Тогда вероятность вынуть оба раза белый шар равна $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$.

Формула полной вероятности

Рассмотрим событие A, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных гипотез H_1, H_2.

Пусть известны вероятности их гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, и соответствующие условные вероятности: $P(A|H_1)$ и $P(A|H_2)$. Тогда вероятность наступления события A равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2).$$

Задание 5. Имеются две одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие A — появление белого шара.

Рассмотрим две возможности:

а) H_1 — выбор первой урны. Вероятность выбора первой урны равна $P(H_1) = 0{,}5$, вероятность появления белого шара из первой урны — $P(A|H_1) = \frac{3}{5}$.

б) H_2 — выбор второй урны. Вероятность выбора второй урны равна $P(H_2) = 0{,}5$, вероятность появления белого шара из второй урны — $P(A|H_2) = \frac{4}{5}$.

По формуле полной вероятности белый шар может появиться с вероятностью: $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}7$.

Ответ: 0,7.

Формула гипотез (формула Баейса)

Рассмотрим событие **A**, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных гипотез $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

Надо найти условную вероятность каждой гипотезы $P(H_1|A)$ и $P(H_2|A)$ при условии, что событие A уже произошло. Вероятности гипотез определяются по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)}, \quad P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)}.$$

Задание 6. Имеются две одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что вынут белый шар из первой урны. Ответ округлите до сотых.

Р е ш е н и е. Событие A — появление белого шара. Рассмотрим две возможности:

H1 — выбор первой урны, H2 — выбор второй урны.

Воспользуемся результатом **задания 5.**

Вероятность появления белого шара равна

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}7$, тогда по формуле гипотез, вероятность того, что белый шар вынут из первой урны равна

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43.$$

Ответ: 0,43.

Задания для самостоятельного решения

1. В 11 классе 30 человек. 18 человек изучают английский язык, 16 — немецкий, 9 — оба языка. Сколько человек изучают: а) только английский язык; б) только немецкий язык; в) не изучают ни одного языка?

2. Из 5 различных книг выбирают 3 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

3. Из 5 одинаковых книг выбирают 3 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «роза»?

5. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «окно»?

6. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «книга», так, чтобы сочетание «ни» всегда присутствовало?

7. Сколько существует двузначных чисел, в записи которых нет цифры 0?

8. Сколько существует двузначных чисел, в записи которых нет цифры 7?

9. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых нет цифры 7?

10. Найдите вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 2.

11. В барабане лежат одинаковые на ощупь шары лотереи с номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер вынутого наудачу шара делится на 4?

12. Набирая номер телефона, вы забыли последнюю цифру и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что набрана нужная вам цифра?

13. В ящике лежат 100 одинаковых на ощупь шаров: 10 — зеленых, 30 — красных, 60 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) зеленый; 2) не красный.

14. В ящике лежат 100 одинаковых на ощупь шаров: 20 — зеленых, 30 — красных, 50 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар красный или синий?

15. В урне 10 одинаковых на ощупь шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 4?

16. В урне 10 одинаковых на ощупь шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара больше 7?

17. Из слова «математика» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это будет буква «м»?

18. Из слова «математика» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это будет согласная буква?

19. Бросают одновременно две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков четна.

20. Бросают одновременно две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков делится на 4.

21. Бросают одновременно две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков четно.

22. Куб, все грани которого окрашены, распилили на 64 равных кубика. Найдите вероятность того, что наудачу взятый кубик имеет: 1) три окрашенные грани; 2) две окрашенные грани.

23. В квадрат с вершинами в точках (0,0); (0,1); (1,1); (1,0) наудачу брошена точка $K(x;y)$. Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y \geq 0{,}5x$.

24. Два друга договорились о встрече на следующих условиях: каждый приходит в указанное место независимо друг от друга в любой момент времени от 18^{00} до 19^{00}. Придя, ожидает не более 30 минут, а уходит не позднее 19^{00}. Какова вероятность их встречи?

25. В урне 4 белых и 2 черных одинаковых на ощупь шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми.

26. В ящике лежат 5 одинаковых на ощупь шаров: 2 — зеленых, 3 — красных. Из ящика вынули наудачу 2 шара. Найдите вероятность того, что оба вынутых шара разноцветные.

27. В урне 3 белых и 8 черных одинаковых на ощупь шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

28. В урне 8 белых и 3 черных одинаковых на ощупь шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найдите вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — белый.

29. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных одинаковых на ощупь шаров, вынимают один за другим все шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

30. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; второго — 0,8. Какова вероятность: а) хотя бы одного попадания; б) ровно одного попадания; в) двух попаданий, если каждый сделал по одному выстрелу.

31. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; второго — 0,6; третьего — 0,4. Какова вероятность: а) хотя бы одного попадания; б) трех попаданий, если каждый сделал по одному выстрелу.

32. Два брата Андрей и Семен решили подарить сестре мягкую игрушку. Игрушку можно выиграть в тире, попав в мишень с расстояния 10 метров. Вероятность попадания в мишень у Андрея равна 0,6, у Семена — 0,9. Два брата делают по одному выстрелу. Если они хотя бы один раз попадут в мишень, то им достанется игрушка. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

33. В урне 30 белых, 20 черных и 50 зеленых шаров. Из урны три раза вынимают наугад один шар и возвращают в урну. Найти вероятность того, что все три раза не вынут черный шар.

34. В урне 30 белых, 20 черных и 50 зеленых шаров. Из урны четыре раза вынимают наугад один шар и возвращают в урну. Найти вероятность того, что все четыре раза не вынут зеленый шар.

35. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 2 белых и 8 черных. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый. Результат округлите до сотых.

36. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 2 белых и 8 черных. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что вынут белый шар из первой урны.

37. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 2 белых и 8 черных. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что вынут белый шар из второй урны.

38. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 2 белых и 8 черных. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар черный. Результат округлите до сотых.

39. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 2 белых и 8 черных.

Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что вынут черный шар из первой урны. Ответ округлите до сотых.

40. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 2 белых и 8 черных. Ученик выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что вынут черный шар из третьей урны. Ответ округлите до сотых.

41. На курсе в вузе 81 студент, среди них два студента из одной школы — Илья и Алексей. Курс разбит на 9 равных групп. Найдите вероятность того, что Илья и Алексей окажутся в одной группе.

42. На курсе в вузе 81 студент, среди них два студента из одной школы — Илья и Алексей. Курс разбит на 9 равных групп. Найдите вероятность того, что Илья и Алексей не окажутся в одной группе.

43. Буфет в студенческой столовой предлагает 5 видов салатов. Вероника и ее подруги, Ира и Лена, выбирают один из 5 салатов наугад. Какова вероятность того, что три подруги выберут один и тот же салат?

44. Буфет в студенческой столовой предлагает 5 видов салатов. Вероника и ее подруги, Ира и Лена, выбирают один из 5 салатов наугад. Какова вероятность того, что две из трех подруг выберут один и тот же салат?

4. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

В заданиях ЕГЭ встречается два способа задания функций: аналитический (формулой) и графический (графиком).

Область определения функции D(y) — множество всех значений аргумента x, на котором задается функция $y = f(x)$. При графическом способе задания функции ее область определения можно найти как проекцию графика на ось абсцисс. Для нахождения области определения функции, заданной аналитически, нужно найти множество всех допустимых значений x.

Нули функции. Для функции, заданной графически, — это абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось абсцисс или касается ее. Чтобы найти нули функции, заданной аналитически, надо решить уравнение $f(x) = 0$.

Решение типовых заданий

Задание 1. Найдите область определения следующих функций:

а) $y=\log_2(4-x^2)$, б) $y=\sqrt{6x-x^2-8}$, в) $y=\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

Решение.

а) Областью определения функции $y = \log_2 t$ является промежуток $(0; +\infty)$, поэтому область определения функции $y=\log_2(4-x^2)$ можно найти из неравенства $4 - x^2 > 0$, $-2 < x < 2$.

Ответ. (-2; 2).

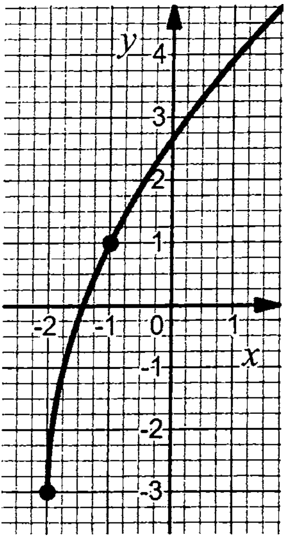
б) Областью определения функции $y=\sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, поэтому область определения функции $y=\sqrt{6x-x^2-8}$ можно найти из неравенства $6x - x^2 - 8 \geq 0$, $x^2 - 6x + 8 \leq 0$, $2 \leq x \leq 4$.

Ответ. $[2; 4]$.

в) Областью определения дробно-рациональной функции $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ являются любые действительные x, не обращающие знаменатель $Q(x)$ в нуль. Поэтому областью определения функции $y=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ являются все действительные числа, кроме корней уравнения $x^2 - 9 = 0$, т.е. $x = 3$ или $x = -3$.

Сокращение дроби на общий множитель привело бы к сужению области определения.

Ответ. $(-\infty; -3)\cup(-3; 3)\cup(3; +\infty)$.



Задание 2. На рисунке изображен график функции вида $f(x)=k\sqrt{x+2}+n$, где числа k, n — целые.

Найдите значение $f(7)$.

Решение. Сначала найдем коэффициенты в формуле, задающей функцию. Для этого используем точки с целочисленными координатами на графике этой функции, например $(-2; -3)$ и $(-1; 1)$.

Точка (–2; –3) лежит на графике функции, значит $f(-2)=-3$.

Подставим координаты точки (–2; –3) в формулу, задающую функцию: $f(-2)=k\sqrt{-2+2}+n$, $f(-2)=n$. Получаем n = – 3. Аналогично для точки (–1;1):

$$f(-1)=1,\ f(-1)=k\sqrt{-1+2}+n=k+n,\ k+n=1.$$

Должны выполняться оба условия: $\begin{cases} n=-3, \\ k+n=1 \end{cases}$ значит $n=-3$, $k=4$.

Окончательно получаем, $f(x)=4\sqrt{x+2}-3$.

Найдем значение функции $f(7)=4\sqrt{7+2}-3=9$.

Ответ. 9

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-1}$.
2. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2+1}$.
3. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.
4. Найдите область определения функции $y=2^{\log_2 x}$.
5. Найдите область определения функции $y=\sqrt{4-x}$.
6. Найдите область определения функции $y=\dfrac{x-9}{\sqrt{x-4}}$.
7. Найдите область определения функции $y=\log_2(1-x)$.
8. Найдите область определения функции $y=\log_2(-x)$.
9. Найдите область определения функции $y=\log_2(2-x)^2$.
10. Найдите область определения функции $y=\operatorname{tg}(x+\pi)$.

11. Найдите область определения функции

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{3-\sin x}}.$$

12. Найдите область определения функции

$$y=\frac{x-7}{\sqrt{x^2+x-6}}.$$

13. Укажите функцию, областью определения которой является промежуток $(5;\ +\infty)$

а) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-5}}$ б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$

в) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-5}}$ г); $f(x)=\frac{x}{x-5}$.

14. Найдите область определения функции $y=\sqrt{3^x-81}$.

15. Найдите область определения функции $y=\sqrt[3]{x-5}$.

16. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{1}{27}}.$$

17. Укажите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y=\log_2 x\cdot\log_x 2$.

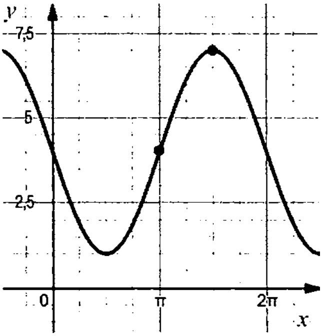
18. Укажите, сколько целых чисел содержит область определения функции $y=\log_4\frac{1-x}{x+2}$.

19. Найдите длину промежутка, являющегося областью определения функции $y=\sqrt{\lg\frac{1-3x}{x-2}}$.

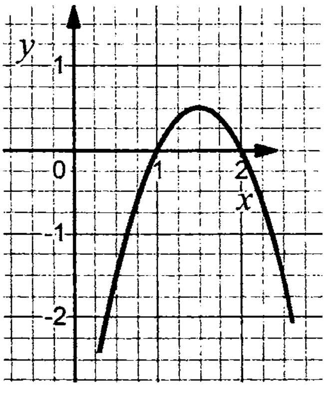
20. При каком значении а область определения функции $y=\sqrt[6]{-x^2+4x+a}+\sqrt{x-3}$ состоит из одной точки.

21. При каком значении а область определения функции $y=\sqrt[6]{-x^2+6x+a}+\sqrt{x-4}$ состоит из одной точки.

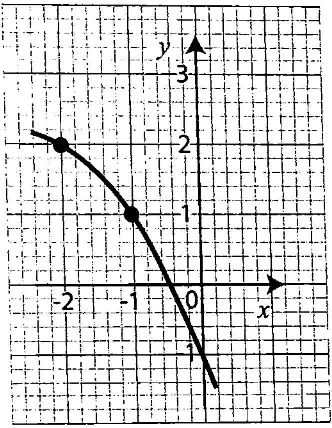
22. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a\sin x + b$, где числа a, b — целые. Найдите значение: а) a, б) b, в) $f(10\pi)$, г) $f\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$.



23. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b, c — целые. Найдите значение: а) a, б) b, в) c, г) $f(-2)$.



24. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a \cdot 2^x + b$, где числа a, b — целые. Найдите значение: а) a, б) b, в) $f(-3)$, г) $f(3)$.



III. ОТВЕТЫ

I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ (10—11 КЛАССЫ)

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

№	Ответ	№	Ответ
1	13	11	0
2	10	12	0,11
3	1	13	−0,24
4	0	14	0,41
5	0,29	15	−0,59
6	1,5	16	0,16
7	−0,6	17	0,04
8	−0,96	18	−8
9	0,28	19	4
10	0,28		

1.2. Тригонометрические уравнения

№	Ответ	№	Ответ
1	−30	8	0
2	150	9	−30
3	−120	10	150
4	30	11	120
5	15	12	240
6	−120	13	3
7	5	14	3

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
15	2	37	90
16	0	38	3
17	1	39	1
18	0	40	1
19	360	41	2
20	20	42	3
21	8	43	0
22	7	44	0
23	210	45	−180
24	300	46	540
25	1	47	3
26	0	48	810
27	1	49	0
28	2	50	190
29	1	51	$\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$
30	2,5	52	$\frac{\pi}{7}$
31	135	53	$\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z, k\neq 0$
32	−360	54	$\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z, k\neq 0$
33	30	55	$-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$
34	−120	56	$\frac{4\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$
35	−60	57	$\pi+\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}+2\pi n, n\in Z$
36	2	58	$\pi-\arcsin\frac{12}{13}+2\pi n, n\in Z$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
1	0,6	1	−0,6
2	0,5	2	1
3	0,5	3	0,5
4	0	4	−1
5	−150	5	210
6	2	6	36
7	−5	7	5
8	3	8	1
9	2	9	−4
10	$\frac{2\pi}{3}$	10	2

2. АЛГЕБРА

2.1. Тождественные преобразования логарифмических выражений

№	Ответ	№	Ответ
1	−2	9	1
2	−2	10	5
3	0,5	11	47
4	3	12	2
5	2	13	4
6	2	14	9
7	1	15	2
8	−1	16	9

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
17	−2	31	0,6
18	1	32	0,5
19	16	33	1,5
20	0	34	2
21	0	35	1
22	−3,5	36	16
23	10	37	3
24	2	38	1
25	3,5	39	1
26	8	40	0
27	−10	41	4
28	4	42	0
29	28,5	43	1
30	4		

2.2. Логарифмические уравнения и неравенства

№	Ответ	№	Ответ
1	7	8	61,5
2	27	9	2,75
3	27	10	3,5
4	11	11	7
5	30	12	2
6	3,5	13	49
7	22	14	25

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
15	2,5	**32**	8
16	–1	**33**	6
17	5	**34**	3
18	–25	**35**	8
19	–32	**36**	$(0;0{,}5]\cup[4;+\infty)$
20	4	**37**	[1;4]
21	–4	**38**	$\{\pm1\}$
22	–4	**39**	$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$
23	0	**40**	(2;2,25]
24	1	**41**	[1,75;2)
25	12	**42**	(6;9]
26	1	**43**	$\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[3;+\infty)$
27	13	**44**	(0;0,1]
28	55	**45**	$[0{,}04;0{,}2]\ (1;+\infty)$
29	24	**46**	$\left[-2-\sqrt{7};-4\right)\cup(-4;-3]\cup$ $\cup[-1;0)\cup\left(0;-2+\sqrt{7}\right]$
30	36	**47**	$[-9;5)\cup(5;7)\cup(7;23]$
31	6	**48**	(8;9]

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
49	$\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2};-3\right)\cup(-3;-2]\cup$ $\cup[-1;0)\cup\left(0;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$	57	$[2;4)$
50	$\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup(1;32]$	58	$(-\infty;0]\cup[2;4)$
51	$(0;1)\cup(1;3]$	59	$[2;4)$
52	$(1;\ 2)$	60	$(0;1]\cup(3;27)\cup(27;2187]$
53	$[-3;\ -2)\cup(1;\ 2)$	61	$(10;100)\cup(100;1000]$
54	$(2-\sqrt{2};\ 1]\cup[3;\ 2+\sqrt{2})$	62	$(-\infty;0]\cup\left[7\frac{1}{27};+\infty\right)$
55	$\{-2\}\cup(2;4]$	63	$\left[7\frac{1}{27};+\infty\right)$
56	$(-\infty;0]\cup[2;4)$	64	$\left[7\frac{1}{27};+\infty\right)$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
1	2	1	1
2	0,04	2	0,1
3	0,25	3	0,04

Окончание табл.

Вариант 1		Вариант 2	
№	**Ответ**	**№**	**Ответ**
4	10	**4**	1
5	24	**5**	15
6	2	**6**	4
7	2	**7**	–1
8	1	**8**	2
9	5	**9**	4
10	При $a > 0$ $x = -2$, $x = 0$; при $-6 < a \leqslant 0$ $x = -2$; при $a \leqslant -6$ решений нет	**10**	При $a < 0$ $x = 0$, $x = 8$; при $0 \leqslant a < 40$ $x = 8$; при $a \geqslant 40$ решений нет

2.3. Показательные уравнения и неравенства

№	Ответ	№	Ответ
1	5	**10**	0
2	–7	**11**	1
3	–1	**12**	6
4	2,5	**13**	0
5	–7	**14**	–1
6	0	**15**	1
7	30	**16**	2
8	–0,6	**17**	2
9	8	**18**	3

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
19	3,5	35	$(-\infty;\ 1]$
20	4,6	36	$(-\infty;\ 0)$
21	4	37	$(-\infty;\ -2]$
22	2	38	$[-1;\ +\infty)$
23	0	39	$(2;\ +\infty)$
24	1	40	$[-2;\ 2]$
25	3	41	$(-\infty;\ -2]\cup\{1\}$
26	4	42	$[0;\ \log_4 6]$
27	1	43	$(\log_3 2;\ 1{,}5)$
28	2	44	$[\lg 2;\ 1]$
29	0,5	45	$(-\infty;\ -\sqrt{3}]\cup(\log_3 4;\ \sqrt{3}]$
30	0	46	$(-\sqrt{5};\ \log_3 7)\cup(\sqrt{5};\ +\infty)$
31	[0; 1]	47	$(-2;\ 2)$
32	$(0;\ +\infty)$	48	$(25;\ +\infty)$
33	$(-\infty;\ -1)$	49	$[3;\ +\infty)$
34	$[1;\ +\infty)$	50	$R\setminus\{2\pi k, k\in Z, k\neq 0\}$

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
51	$\{1\}\cup(1,5;\ \log_3 7]$	53	$(-\infty;\ -4)$
52	$(-\infty;\ -4)$	54	$\left(0;\ \sqrt{2}\right]\cup\left[1,5\sqrt{2};\ \log_2 6\right)$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1		Вариант 2	
№	**Ответ**	**№**	**Ответ**
1	2	1	3
2	3,5	2	2,5
3	–3	3	4
4	6	4	4
5	1	5	1
6	0	6	2
7	2	7	3
8	1	8	2
9	1; –1	9	2; –2
10	$[-20;\ -3]\cup[3;\ 20\log_3 4]$	10	$[-16;\ -4]\cup[4;\ 4\log_3 4]$

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

№	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
1	0	6	$(-\infty; 0]$; $[6; +\infty)$	$[0; 6]$	6	2			
2	8	0	$[0; 8]$;	$(-\infty; 0]$; $[8; +\infty)$	8	10			
3	3	-3	$[-3; 3]$;	$(-\infty; -3]$; $[3; +\infty)$	3	14			
4	1; −8	29; −6	3; −78	4; 1	5,5; 5	10; 6,125	9; 7,25	11; 9	
5	7; −25	0; −268	Нет; −25	$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1					
6	−2; 3	−1; −4	[−4; −2]; [−1; 3]	(−6; −4]; [−2; −1]; [3; 5)	0	−4; −2; −1; 3	4	0	4
7	−5; 4	2	(−6; −5]; [2; 4]	[−5; 2] [4; 5)	2	−5; 2; 4	1	2	3
8	−3; 0	−4; −2; 2	[−4; −3]; [−2; 0]; [2; 3)	(−6; −4]; [−3; −2]; [0; 2]	−2	0	−4; −3; −2; 0; 2	1	2
9	−5; 1	−1	(−6; −5]; [−1; 1]	[−5;−1]; [1;3)	−1	1	−5; −3; −1;1	1	3

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
10	1	**30**	2
11	−6	**31**	3
12	32	**32**	3
13	−0,5	**33**	3
14	1	**34**	7
15	1	**35**	−3
16	18	**36**	2
17	−18	**37**	3
18	−14	**38**	1
19	14	**39**	4
20	2	**40**	4
21	−2,5	**41**	0
22	0	**42**	−3
23	7	**43**	3
24	5	**44**	8
25	−6	**45**	5
26	7	**46**	5
27	1	**47**	−1
28	1	**48**	−3
29	0	**49**	9

3.2. Первообразная функции

№	Ответ	№	Ответ
1	8	9	0,2
2	14	10	12
3	1	11	16
4	0,25	12	32
5	4	13	10
6	32	14	9
7	4	15	4,5
8	3	16	9
		17	6

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1		Вариант 2	
№	Ответ	№	Ответ
1	1	1	1
2	3	2	4
3	14	3	9
4	7	4	5
5	3	5	1
6	−7	6	9
7	2	7	2

Окончание табл.

Вариант 1		**Вариант 2**	
№	**Ответ**	**№**	**Ответ**
8	−2	**8**	64
9	36	**9**	32
10	45	**10**	45

4. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

№	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
1	$(1;\ 5)$	$(5;\ +\infty)$	Не сущ.	$(0;\ +\infty)$	Не сущ.	$(-\infty;\ 0)$	$-1;9$	$0,8;20$
2	$(2\sqrt{5};\ 6)$	$(6;\ +\infty)$	Не сущ.	$(2\sqrt{5};+\infty)$	$(-\infty;-2\sqrt{5})$	Не сущ.	$\pm3\sqrt{5}$	±6

№	Ответ
3	2
4	2
5	$[-2;\ +\infty)$
6	$(2;\ +\infty)$
7	$a\neq1;\ a\neq3$
8	$[-3;\ -1)$
9	-3
10	3
11	$(-\infty;\ 0\ )\cup[1;\ +\infty)$
12	$(-\infty;\ -1]\cup(0;+\infty)$
13	$(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$

№	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
14	$(-1;\ +\infty)$	$[-1;\ +\infty)$	$(-1;0]$	$[-1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0)$	$[-1;\ +\infty)$	
15	$(-\infty;\ 1,75)$	$a\neq2$	$a\neq2$	$(-\infty;\ 0)$	$\|a\|<\sqrt{2}$	$\|a\|<\sqrt{2}$ $\|a\|>2$	$\|a\|<\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\|a\|>2$

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
16.1)	$[2;\ +\infty)$	**29**	$(0;\ 6{,}25)$
16.2)	$\left[2\sqrt{2};\ +\infty\right)$	**30**	$(-\infty;\ 6{,}25)$
17	$[-1\frac{1}{3};\ 2]$	**31**	$(-1;\ +\infty)$
18	$[0;\ 7]$	**32**	$(0;\ +\infty)$
19	$[1;\ 2)\cup(2;\ 3]$	**33**	$(-\infty;\ 0]$
20	$[0;\ 1)$	**34**	$[0;\ 8]\cup\{-1;\ 9\}$
21	3	**35**	$(0;\ 0{,}4)\cup(0{,}4;\ +\infty)$
22	4	**36**	$(-\infty;\ 0)\cup\{1;\ 5\}$
23	$[-7;\ 5]$	**37**	при $a<0$ $x<\log_3(-a)$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x<\log_3\frac{a}{9}$
24	$\{-3{,}75\}\cup(-\infty;\ -4)$	**38**	-5
25	$\{-4{,}25\}\cup(-4;\ +\infty)$	**39**	$(-\infty;\ -4)\cup(0;\ +\infty)$
26	$\left\{-1\frac{5}{8}\right\}\cup(-1{,}5;\ +\infty)$	**40**	$(-4;\ 0)$
27	$\left\{-1\frac{3}{8}\right\}\cup(-\infty;\ -1{,}5)$	**41**	$(-\infty;\ -6)$
28	$[-2;\ 0]$		

5. ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Планиметрия

№	Ответ	№	Ответ
1	10	19	0,75
2	16	20	2,4
3	16	21	42
4	25	22	8
5	3	23	0,6
6	13	24	–0,8
7	168	25	–2,4
8	80	26	2
9	9,6	27	3
10	1,5	28	14
11	16	29	14
12	19,2	30	3,6
13	5	31	6
14	13,5	32	4
15	4,8	33	7
16	5	34	12
17	0,6	35	8
18	0,8	36	72

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
37	480	**55**	170
38	15	**56**	24
39	10	**57**	12
40	10,625	**58**	25
41	8,125	**59**	15
42	5	**60**	9
43	13	**61**	6,5
44	16	**62**	2,2
45	9	**63**	60
46	20	**64е**	$10\sqrt{15}$
47	120	**64ж**	$4\sqrt{10}$
48	30	**64з**	$\sqrt{3}:2\sqrt{2}$
49	4	**64и**	$\frac{15\sqrt{15}}{4}$
50	13	**64к**	$\frac{25\sqrt{15}}{4}$
51	510	**64л**	трапеция, $8\sqrt{15}$
52	12	**64м**	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$
53	4	**65ж**	8
54	28	**65з**	$8\sqrt{5}$

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
65и	64	68г	$2\sqrt{2}$
65к	1:2	69д	4
65л	$21\frac{1}{3}$	69е	$16\sqrt{2}$
65м	$42\frac{2}{3}$	69ж	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$
65н	трапеция, 40	69з	$\frac{4}{3}$
65о	$\frac{16\sqrt{5}}{5}$	69и	1
66г	60°	70г	3
66д	2 см и 12 см	70д	$27\sqrt{3}$
66е	$\sqrt{3}$ $6\sqrt{3}$	70е	2π
66ж	10,5	71б	$10\sqrt{3}$
66з	36,75 $\sqrt{3}$	71в	7,5 и 2,5
67в	8	72в	45°
67г	$4\sqrt{2}-4$	72г	5
68в	18°	72д	18

5.2. Стереометрия

№	Ответ	№	Ответ
1	6	4	48
2	12	5	8
3	16	6	216

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
7	8	28	48
8	16	29	192
9	12	30	10
10	2	31	6
11	6	32	1
12	3	33	16
13	60	34	4
14	90	35	30
15	4	36	204; 214
16	45	37	264; 268
17	60	38	168; 238
18	10	39	12
19	6	40	8
20	4	41	6
21	108	42	8
22	90	43	10
23	9	44	12
24	16	45	1
25	64	46	3
26	16	47	2
27	32	48	8

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
49	6	63	$2\sqrt{13}$
50	12	64	$4\sqrt{3}$
51	18	65	$2\sqrt{3}$
52	24	66	$2\sqrt{2}$
53	$\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{2}}{3}$	67	$4\sqrt{3}$
54	$\frac{\pi}{3}$	68	$4\sqrt{51}$
55	$\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$	69	$\operatorname{arcctg}4$
56	$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$	70	$2\sqrt{3}$
57	$\arcsin\sqrt{\frac{3}{13}}$	71	45
58	$\operatorname{arctg}1{,}5$	72	140
59	$\frac{\pi}{3}$	73	140
60	$\frac{\pi}{3}$	74	45
61	$2\sqrt{13}$	75	$\operatorname{arctg}2$
62	$4\sqrt{3}$	76	45

Продолжение табл.

№	Ответ	№	Ответ
77	$\mathrm{arctg}\,2$	**93**	24π
78	$\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$	**94**	12π
79	$\frac{\pi}{3}$	**95**	32π
80	16	**96**	–
81	768	**97**	–
82	$\frac{33\sqrt{5}}{4}$	**98е**	0°
83	126	**98ж**	60°
84	$\frac{16\sqrt{6}}{3}$	**98з**	90°
85	$400\sqrt{3}$	**98и**	$\arccos\frac{2\sqrt{5}}{15}$
86	1000	**98к**	$\arccos\frac{4}{9}$
87	3	**98л**	$2\sqrt{6}$
88	$72\sqrt{3}$	**98м**	4,5
89	$8\sqrt{2}$	**98н**	$2\sqrt{6}$
90	16π	**98о**	18
91	64π	**99в**	$\arccos\frac{12}{13}$
92	12π	**99г**	$\mathrm{arcctg}\,2$

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
100г	0°	100л	3
100д	$\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$	100к	$3\sqrt{2}$
100е	arctg2	100л	3
100ж	$\mathrm{arctg}\sqrt{2}$	100м	$2\sqrt{3}$
100з	45°	101а	Прав. шести-угольник
100и	$3\sqrt{5}$	101б	$3\sqrt{3}a^2$
100к	$3\sqrt{2}$	101б	$3\sqrt{3}a^2$

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
$4-i$	$4-i$	$-2-3i$	$2+3i$	$5-5i$	$5-5i$	$-3-4i$
8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)
$8+6i$	$1+2i$	$3-i$	5	10	$0{,}1-0{,}7i$	$0{,}2-12i$

2.

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
$7-2i$	$7-2i$	$-3-4i$	$3+4i$	$13-13i$	$13-13i$	$-5-12i$
8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)
$24+10i$	$2+3i$	$5-i$	13	26	$\frac{1}{2}-\frac{17}{26}i$	$\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
3	1) окружность с центром в точке (0;0) и радиусом 5; 2) окружность с центром в точке (−3;0) и радиусом 4; 3) окружность с центром в точке (3;4) и радиусом 2.	7	Наименьшее значение равно 1, наибольшее значение равно 7.
4	Прямая - серединный перпендикуляр к отрезку AB ($A(-3; -1)$, $B(3;7)$).	8	Наименьшее значение равно 4.
5	Точка с координатами (0;3) – центр окружности, описанной около треугольника ABC ($A(-3;-1)$, $B(3;7)$, $C(3;1)$).	9	Наименьшее значение равно 1,8.
6	Точка с координатами (0;3) – центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$ ($A(-3;-1)$, $B(3;7)$, $C(3;1)$, $D(-3;7)$).		

II. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЗ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ (7—11 классы)

1. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

№	Ответ	№	Ответ
1	15	22	60,9
2	16	23	5000
3	19	24	200
4	168	25	660
5	15 000	26	16
6	25	27	32
7	10 100	28	9,2
8	2600	29	600
9	100	30	12
10	2,5	31	306,04
11	82	32	12 500
12	15	33	10,25
13	6	34	105 300
14	15	35	2240
15	6	36	358
16	36	37	9
17	12	38	1500
18	100	39	5
19	2	40	90
20	720	41а	160
21	54	41б	360

Окончание табл.

42а	53	**46**	8 лет
42б	15	**47**	67,5%
42в	4	**48**	0,2718
43а	2	**49**	400 000 рублей
43б	0,8	**50**	60 тыс. рублей
43в	1,25	**51**	4 года
43г	42	**52**	5 месяцев
43д	6	**53**	1 197 300
44а	3	**54**	198,6 тыс. рублей
44б	12	**55**	204,9 тыс. рублей
45	0,75%		

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

№	Ответ	№	Ответ
1	7	**12**	7
2	6	**13**	1
3	2	**14**	5
4	–2	**15**	100
5	4,5	**16**	16
6	270	**17**	55
7	–360	**18**	10
8	9	**19**	12
9	256	**20**	4
10	208	**21**	441
11	7	**22**	5

Продолжение табл.

23	6	**44**	−4
24	2	**45**	2
25	−0,25	**46**	101
26	4	**47**	7,25
27	16	**48**	3
28	0,5	**49**	4
29	−1	**50**	2
30	0,25	**51**	9
31	0	**52**	−11
32	90	**53**	−11
33	−270	**54**	$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{11}\right) \cup \left(\frac{1}{11}; \frac{1}{3}\right)$
34	1,75	**55**	$\pi k,\ k \in Z$
35	5	**56**	$32; \frac{1}{32}$
36	5	**57**	$1; \log_6 2$
37	25	**58**	1; 81
38	−9	**59**	0,75
39	4	**60**	3
40	2,5	**61**	$\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{10}$
41	2	**62**	$[-3; -2] \cup [2; 3]$
42	3	**63**	Решений нет
43	3	**64**	[4; 16]

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
65	$9;\ \frac{1}{27}$	69	$[2;\ +\infty)$
66	Решений нет	70	$(6{,}8;\ +\infty)$
67	$[0{,}25;\ 32]$	71	$(8;\ +\infty)$
68	$\left[-\frac{8}{27};\ 125\right]$	72	$[5;\ +\infty)$

73	$\left[-\sqrt{17};\ -4\right)\cup\left(4;\ \sqrt{17}\right]\cup[5;\ +\infty)$
74	$(-\infty;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$
75	$\left[-\sqrt{17};\ -4\right)\cup\left(4;\ \sqrt{17}\right]\cup[5;\ +\infty)$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

№	Ответ	№	Ответ
1	9; 7; 5	8	81
2	20	9	648
3	10	10	0,5
4	24	11	0,25
5	12	12	0,1
6	24	13	0,1; 0,7
7	81	14	0,8

Окончание табл.

№	Ответ	№	Ответ
15	0,4	30	0,94; 0,38; 0,56
16	0,3	31	0,928; 0,168
17	0,2	32	0,96
18	0,5	33	0,512
19	0,5	34	0,0625
20	0,25	35	0,53
21	0,75	36	0,375
22	0,125; 0,375	37	0,5
23	0,75	38	0,47
24	0,75	39	0,29
25	0,4	40	0,57
26	0,6	41	0,1
27	0,2	42	0,9
28	0,7	43	0,04
29	0,6	44	0,32

4. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

№	Ответ	№	Ответ
1	$(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$	**13**	в
2	$(-\infty; +\infty)$	**14**	$[4; +\infty)$
3	$(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$	**15**	$(-\infty; +\infty)$
4	$(0; +\infty)$	**16**	$(-\infty; 3]$
5	$(-\infty; 4]$	**17**	2
6	$[0; 16)\cup(16; +\infty)$	**18**	2
7	$(-\infty; 1)$	**19**	1,25
8	$(-\infty; 0)$	**20**	а = −3
9	$(-\infty; 2]\cup[2; +\infty)$	**21**	а = −8
10	$(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k), k\in$	**22**	а) −3; б) 4; в) 4; г) 1
11	$(-\infty; +\infty)$	**23**	а) −2; б) 6; в) −4; г) −24
12	$(-\infty; -3)\cup(2; +\infty)$	**24**	а) −4; б) 3; в) 2,5; г) −29

СОДЕРЖАНИЕ

Справочное издание
анықтамалық баспа

ЕГЭ. СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Кочагин Вадим Витальевич
Кочагина Мария Николаевна

ЕГЭ 2024. МАТЕМАТИКА
СБОРНИК ЗАДАНИЙ: 900 ЗАДАНИЙ С ОТВЕТАМИ
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Редакторы *А. Проценко, П. Умитбаева*
Художественный редактор *А. Кашлев*
Технический редактор *Л. Зотова*
Компьютерная верстка *К. Смолин*

Страна происхождения: Российская Федерация
Шығарылған елі: Ресей Федерациясы

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Россия, город Москва, улица Зорге, дом 1, строение 1, этаж 20, каб. 2013.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы,
123308, Ресей, қала Мәскеу, Зорге көшесі, 1 үй, 1 ғимарат, 20 қабат, офис 2013 ж.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail. info@eksmo.ru
Тауар белгісі: «Эксмо»
Интернет-магазин : www.book24.ru

6+

Интернет-магазин : www.book24.kz
Интернет-дүкен : www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды
қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел. 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»
www.eksmo.ru/certification
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылмаған

Дата изготовления / Подписано в печать 17.05.2023. Формат 60x90 1/16.
Гарнитура «SchoolBook». Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,0.
Тираж 3000 экз. Заказ 1754/23.

Отпечатано в Акционерном обществе
«Можайский полиграфический комбинат»
143200, Россия, г. Можайск, ул. Мира, 93.
www.oaompk.ru, тел.: (49638) 20-685

Москва. ООО «Торговый Дом «Эксмо»
Адрес: 123308, г. Москва, ул. Зорге, д.1, строение 1.
Телефон: +7 (495) 411-50-74 **E-mail:** reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»
E-mail: **international@eksmo-sale.ru**

International Sales: International wholesale customers should contact Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном оформлении, обращаться по тел.: +7 (495) 411-68-59, доб. 2151
E-mail: **borodkin.da@eksmo.ru**

Оптовая торговля бумажно-беловыми и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»:
Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2, Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).
e-mail: **kanc@eksmo-sale.ru**, сайт: www.**kanc-eksmo.ru**

Филиал «Торгового Дома «Эксмо» в Нижнем Новгороде
Адрес: 603094, г. Нижний Новгород, улица Карпинского, д. 29, бизнес-парк «Грин Плаза»
Телефон: +7 (831) 216-15-91 (92, 93, 94) **E-mail:** reception@eksmonn.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Санкт-Петербурге
Адрес: 192029, г. Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, д. 84, лит. «Е»
Телефон: +7 (812) 365-46-03 / 04. **E-mail:** server@szko.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Екатеринбурге
Адрес: 620024, г. Екатеринбург, ул. Новинская, д. 2щ
Телефон: +7 (343) 272-72-01 (02/03/04/05/06/08)

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Самаре
Адрес: 443052, г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е»
Телефон: +7 (846) 207-55-50. **E-mail:** RDC-samara@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Ростове-на-Дону
Адрес: 344023, г. Ростов-на-Дону, ул. Страны Советов, 44А
Телефон: +7(863) 303-62-10. **E-mail:** info@rnd.eksmo.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Новосибирске
Адрес: 630015, г. Новосибирск, Комбинатский пер., д. 3
Телефон: +7(383) 289-91-42. E-mail: eksmo-nsk@yandex.ru

Обособленное подразделение в г. Хабаровске
Фактический адрес: 680000, г. Хабаровск, ул. Фрунзе, 22, оф. 703
Почтовый адрес: 680020, г. Хабаровск, А/Я 1006
Телефон: (4212) 910-120, 910-211. **E-mail:** eksmo-khv@mail.ru

Республика Беларусь: ООО «ЭКСМО АСТ Си энд Си»
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Минске
Адрес: 220014, Республика Беларусь, г. Минск, проспект Жукова, 44, пом. 1-17, ТЦ «Outleto»
Телефон: +375 17 251-40-23, +375 44 581-81-92
Режим работы: с 10.00 до 22.00. **E-mail:** exmoast@yandex.by

Казахстан: «РДЦ Алматы»
Адрес: 050039, г. Алматы, ул. Домбровского, 3А
Телефон: +7 (727) 251-58-12, 251-59-90 (91,92,99). E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

ISBN 978-5-04-185050-0

900
ЗАДАНИЙ
С ОТВЕТАМИ

ЕГЭ 2024

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ! * ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ! *

ВСЕ ТЕМЫ
ЕГЭ

УСПЕХ НА ЕГЭ ГАРАНТИРОВАН!

НАСТОЯЩЕЕ ИЗДАНИЕ СОДЕРЖИТ:

- задания профильного уровня;
- краткие теоретические сведения;
- решение типовых заданий;
- ответы ко всем заданиям.

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Аналогичные учебные пособия выходят по основным предметам: русскому языку, литературе, математике, истории, обществознанию, биологии, географии, физике, химии, информатике и английскому языку.

Для комплексной подготовки к ЕГЭ выходят серии:

· Тренировочные варианты
· Тематические тренировочные задания
· Сборник заданий
· Универсальный справочник

ISBN 978-5-04-185050-0
9 785041 850500 >