

**Н. А. БЕРКОВ, В. Г. ЗУБКОВ,
В. Б. МИНОСЦЕВ, Е. А. ПУШКАРЬ**

КУРС МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

**Часть 3
Дифференциальные уравнения.
Уравнения математической физики.
Теория оптимизации**

Под редакцией
В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря
Издание второе, исправленное

ДОПУЩЕНО

*НМС по математике Министерства образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по инженерно-техническим специальностям*



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2013 •

ББК 22.1я73

К 93

**Берков Н. А., Зубков В. Г., Миносцев В. Б.,
Пушкарь Е. А.**

К 93 Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 3. Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики. Теория оптимизации: Учебное пособие / Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 528 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1560-1

Учебное пособие соответствует Государственному образовательному стандарту. Пособие включает в себя лекции и практические занятия. Третья часть пособия содержит 25 лекций и 25 практических занятий по следующим разделам: «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Дифференциальные уравнения в частных производных», «Элементы вариационного исчисления и теории оптимизации».

Пособие предназначено для студентов технических, физико-математических и экономических направлений.

ББК 22.1я73

Рецензенты:

А. В. СЕТУХА — доктор физико-математических наук, профессор, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; **А. А. ПУНТУС** — профессор факультета прикладной математики и физики МАИ, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; **А. В. НАУМОВ** — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей МАИ; **А. Б. БУДАК** — доцент, зам. председателя отделения учебников и учебных пособий НМС по математике Министерства образования и науки РФ; **У. Г. ПИРУМОВ** — профессор, зав. кафедрой вычислительной математики и программирования МАИ (Технический университет), член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

Охраняется законом РФ об авторском праве.

Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издателя.

*Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2013

© Коллектив авторов, 2013

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2013

Оглавление

Предисловие	7
ГЛАВА X. Обыкновенные дифференциальные уравнения	9
Лекция 60. Дифференциальные уравнения первого порядка	9
Практическое занятие 60. Дифференциальные уравнения первого порядка	34
Лекция 61. Уравнения первого и второго порядков	44
Практическое занятие 61. Уравнения первого и второго порядков	65
Лекция 62. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	73
Практическое занятие 62. Линейные уравнения второго порядка	88
Лекция 63. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	91
Практическое занятие 63. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	97
Лекция 64. Неоднородные линейные уравнения второго порядка	100
Практическое занятие 64. Неоднородные линейные уравнения второго порядка	109
Лекция 65. Дифференциальные уравнения высших порядков	115
Практическое занятие 65. Линейные уравнения высших порядков	128

Лекция 66. Приложения дифференциальных уравнений	134
Практическое занятие 66. Приложения дифференциальных уравнений	146
Лекция 67. Системы дифференциальных уравнений	155
Практическое занятие 67. Системы дифференциальных уравнений	167
Лекция 68. Приближённые решения дифференциальных уравнений	181
Практическое занятие 68. Решение задачи Коши численными методами	210
ГЛАВА XI. Дифференциальные уравнения в частных производных	237
Лекция 69. Решение дифференциальных уравнений первого порядка	237
Практическое занятие 69. Решение уравнений первого порядка	251
Лекция 70. Метод сеток	252
Практическое занятие 70. Квазилинейные дифференциальные уравнения	260
Лекция 71. Дифференциальные и разностные операторы	262
Практическое занятие 71. Решение задач переноса методом сеток	276
Лекция 72. Дифференциальные уравнения второго порядка	294
Практическое занятие 72. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка	306

Лекция 73. Вывод уравнения теплопроводности и понятия о рядах Фурье	307
Практическое занятие 73. Разложение функций в ряд Фурье	320
Лекция 74. Аналитические методы решения задач теплопроводности	323
Практическое занятие 74. Решение задач теплопроводности аналитическими методами	339
Лекция 75. Решение задач теплопроводности методом сеток	340
Практическое занятие 75. Решения однородных задач теплопроводности	346
Лекция 76. Вывод волнового уравнения	350
Практическое занятие 76. Решение задачи теплопроводности методом сеток	365
Лекция 77. Решение краевых задач для волнового уравнения методом Фурье	380
Практическое занятие 77. Аналитическое решение простейших волновых задач	392
Лекция 78. Метод сеток для решения волнового уравнения	393
Практическое занятие 78. Решение волнового уравнения аналитическими методами	399
Лекция 79. Уравнение Лапласа	406
Практическое занятие 79. Решение волнового уравнения методом сеток	414
ГЛАВА XII. Элементы вариационного исчисления и теории оптимизации	424
Лекция 80. Введение в теорию вариационного исчисления	424

Практическое занятие 80. Решение задачи Дирихле методом сеток	434
Лекция 81. Элементы функционального анализа	445
Лекция 82. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами	450
Практическое занятие 81. Уравнение Эйлера	469
Практическое занятие 82. Уравнение Эйлера. Задача о брахистохроне	473
Лекция 83. Функционалы, зависящие от нескольких функций, старших производных и функций многих переменных	476
Практическое занятие 83. Вариационные задачи, зависящие от нескольких функций, старших производных и функций многих переменных	488
Лекция 84. Вариационные задачи с подвижными границами	492
Практическое занятие 84. Вариационные задачи с подвижными границами	499
Ответы	504
Предметный указатель	509
Список литературы	512

Предисловие

Данное учебное пособие рассчитано на студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и имеет целью познакомить их с терминологией, основными понятиями и положениями, а также приемами и методами решений задач таких разделов математики, как «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Вариационное исчисление и теория оптимизации», которые необходимы современному инженеру. По сравнению с учебным пособием «Курс высшей математики» под редакцией В.Б. Миносцева [7], эти разделы подверглись наибольшей переработке. Как и в «Курсе высшей математики» [7], учебное пособие объединяет лекционный материал, примеры и задачи для практических занятий и лабораторных работ. Авторы считают, что наряду со студентами дневной (очной) формы обучения данное пособие с успехом может быть использовано студентами дистанционной (заочной) формы обучения. В принятом в 2011 году Государственным образовательным стандарте математика разбивается на отдельные курсы. Данная часть нашего пособия может составить основу такого, например, курса, как «Математические методы в науке и технике», преподаваемом в МГИУ с 2012 года. В данном курсе авторы постарались без излишних математических сложностей дать материал, позволяющий инженеру технической специальности познакомиться с основными понятиями вышеуказанных разделов математики, чтобы в случае необходимости иметь базу для углубления своих знаний в этой области. Например, для более углубленного изучения некоторых разделов курса дифференциальных уравнений, таких как методы решения систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высшего порядка, исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений и поведения в окрестности особых точек, можно рекомендовать пособия [19, 20]. Для более основательного изучения уравнений математической физики можно использовать учебники [9, 25]. Для совершенствования знаний в области методов вариационного исчисления можно обратиться к книгам [8] и [28].

Считаем, что выпускники технических высших учебных заведений должны уметь доводить решение до числа, а в сложных случаях это невозможно сделать без использования численных методов и пакетов прикладных программ. С этими вопросами студенты должны начать активно знакомиться уже в курсе математики. Решение сложных

задач этих разделов данного курса входит в лабораторные работы, проводимые с использованием пакетов прикладных программ Excel, MathCad, а также для контингента, не имеющего соответствующих лицензий на пользование этими пакетами, в Maxima, находящемся в свободном доступе. Следует отметить, что для решения задач каждого раздела курса математики существуют свои специальные пакеты как свободного доступа, так и лицензионные, как отечественные, так и иностранные. В целях единообразия были выбраны вышеупомянутые пакеты (см. предисловие к [14]). Кроме изучения материала лекций, решения примеров на практических занятиях, студентам необходимо выполнить индивидуальные задания [22]. В последние годы во многих учебных заведениях, в том числе и МГИУ, проверка знаний студентов проводится в компьютерных классах с помощью тестов. Поэтому мы сочли целесообразным в виде отдельного тома [23] включить материал по подготовке к тестам с разбором решения задач, входящих в тест, примеры тестов и задачи для самостоятельного решения.

В.Б.Миносцев, Е.А.Пушкарь

ГЛАВА X

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекция 60. Дифференциальные уравнения первого порядка

Введение. Эволюционные процессы. Определения, примеры. Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка. Метод изоклин. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли.

60.1. Введение

Дифференциальные уравнения были введены в научную практику Ньютоном (1642 – 1727). Ньютон считал это свое открытие настолько важным, что зашифровал его, как было принято в ту эпоху, в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно передать так: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями».

Открытие Ньютона трудно переоценить. Именно с этого момента появилась возможность описать явления природы, развивающиеся во времени и пространстве, математическим языком, устанавливая связь между неизвестной величиной и скоростью её изменения. В качестве примеров дифференциальных уравнений прежде всего можно упомянуть второй закон Ньютона, который гласит, что произведение массы материальной частицы на её ускорение равно сумме сил, действующих на эту частицу. Но ускорение есть вторая производная координат частицы по времени, и если силы, действующие на частицу, известны как функции её координат и скорости, которая, в свою очередь, есть первая производная координат, то мы тем самым получаем некоторое дифференциальное уравнение (или систему уравнений), связывающее координаты частицы и их первые и вторые производные по времени.

В качестве другого примера отметим уравнения Максвелла, связывающие между собой напряжённости электрического и магнитного полей и их производные по времени и пространственным координатам и электрические токи и заряды.

Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707 – 1783) и Лагранжа (1736 – 1813). В этих работах была прежде всего развита теория малых колебаний, а следовательно – теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и собственные векторы).

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений выше четвертой степени в радикалах, Лиувиль (1809 – 1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в том числе таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах.

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Анри Пуанкаре (1854 – 1912). Созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексного переменного привела к основанию современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как её чаще называют, теория динамических систем, является сейчас наиболее активно развивающейся областью, которая имеет наиболее важные для естествознания приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Начиная с классических работ А.М. Ляпунова (1857 – 1918) по теории устойчивости движения в развитии этой области большое участие принимают русские математики. Упомянем лишь работы А.А. Андропова (1901 – 1952) по теории бифуркаций, А.А. Андропова и Л.С. Понтрягина по структурной устойчивости, Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова по теории усреднения, А.Н. Колмогорова по теории возмущений условно-периодических движений.

60.2. Эволюционные процессы

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности*, *конечномерности* и *дифференцируемости*.

Рассмотрим несколько примеров эволюционных процессов.

Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящее время. Например, классическая механика рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы.

Примером недетерминированного процесса может служить движение частиц в квантовой механике, которое не описывается однозначно начальными положениями и начальными скоростями частиц. В качестве другого примера недетерминированного процесса можно упомянуть распространение тепла, который является «полудетерминированным» процессом: будущее (распространение тепла с ростом времени) определяется настоящим состоянием рассматриваемой системы, тогда как прошлое («предыстория» состояния в настоящий момент времени) не может быть однозначно восстановлено по состоянию, известному на настоящий момент.

Процесс называется *конечномерным*, если число параметров, нужных для описания его состояния, конечно. Например, ньютоновская механика движения систем из конечного числа материальных точек или абсолютно твердых тел относится к этому классу. Размерность фазового пространства системы из n материальных точек равна $6n$, а системы из n твердых тел — $12n$.

Движение жидкости, изучаемое в гидродинамике, процессы колебаний струны и мембраны, распространение волн в оптике и акустике — примеры процессов, которые нельзя описать с помощью конечномерного фазового пространства.

Процесс называется *дифференцируемым*, если изменение его состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями. Например, координаты и скорости точек механической системы меняются со временем дифференцируемым образом. Свойством дифференцируемости не обладают движения, изучаемые в теории удара, или гидродинамические течения с ударными волнами.

Таким образом, движение системы в классической механике может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как квантовая механика, теория теплопроводности, гидродинамика, теория упругости, оптика, акустика и теория удара требуют иных средств.

Ещё два примера детерминированных конечномерных и дифференцируемых процессов: процесс радиоактивного распада вещества и процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества. В обоих случаях фазовое пространство одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества или количеством бактерий. В обоих случаях процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Заметим, что вид дифференциального уравнения процесса, а также самый факт детерминированности, конечномерности и дифференцируемости того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности.

60.3. Определения, примеры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение между аргументом x , его функцией y и производными этой функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$:*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (60.1)$$

Предполагается, что уравнение (60.1) содержит явно по крайней мере одну из производных искомой функции y .

Например уравнения $\sin x - y + 2y' = 0$ и $x^2 y'' = 2 \ln x + xy'$ являются дифференциальными уравнениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.2. *Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков производных искомой функции, входящих в это уравнение.*

Например $y' - 2xy^2 + 3x^3 = 0$ — это уравнение первого порядка, а $y''' + 2y'' + y = e^x$ — уравнение третьего порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.3. *Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид*

$$F(x, y, y') = 0. \quad (60.2)$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y' , то его можно записать так:

$$y' = f(x, y). \quad (60.3)$$

Уравнение (60.3) называется уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.

Будем предполагать что рассматриваемые величины принимают конечные значения, а все рассматриваемые функции являются однозначными функциями своих аргументов.

Таким образом, в обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестная функция зависит только от одного аргумента. В противоположность этому в уравнениях с частными производными неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных. В дальнейшем этой главе, говоря о дифференциальных уравнениях, мы будем иметь в виду только обыкновенные дифференциальные уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.4. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения (60.1), если после замены y на $\varphi(x)$, $y'(x)$ на $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ уравнение (60.1) становится тождеством.

График этой функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Если решение получено в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется интегралом дифференциального уравнения.

Последние два определения связаны с тем, что для нахождения решения часто необходимо проинтегрировать функции, входящие в уравнение. Например, если известна производная искомой функции $y' = f(x)$ в зависимости только от аргумента x и $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) , то, как известно из курса интегрального исчисления, одним из решений этого дифференциального уравнения будет функция

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi,$$

где $x_0, x \in (a, b)$. Все другие решения отличаются от него только на постоянную и общее решение имеет вид

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C,$$

то есть все интегральные кривые получаются из какой-либо интегральной кривой сдвигом, параллельным оси OY .

В общем случае, когда правая часть дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ зависит не только от x , но от y , интегральные кривые

не могут быть получены одна из другой каким-либо сдвигом. Подчеркнём, что для нахождения решения вовсе не обязательно находить какие-то интегралы или *квадратуры* (как иначе называют интегралы, чтобы не путать с решениями дифференциальных уравнений), но такая терминология остаётся справедливой и в этом случае. В дальнейшем будем использовать также следующую терминологию: если график решения проходит через точку (x_0, y_0) , то для краткости будет говорить, что решение проходит через точку (x_0, y_0) . Эти два выражения равносильны.

Дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.5. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ называется **общим решением** дифференциального уравнения в области G , если при любых допустимых значениях постоянных C_1, C_2, \dots, C_n она удовлетворяет уравнению и любое решение этого уравнения может быть получено из зависимости $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ соответствующим выбором постоянных C_1, \dots, C_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.6. Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ будем называть **общим интегралом**, если при соответствующем выборе постоянных C_1, \dots, C_n это уравнение определяет любую интегральную кривую нашего уравнения в области G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.7. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных. Заданное в неявном виде, это решение называется частным интегралом.

Для выделения частного решения из общего, т.е. для нахождения соответствующих значений произвольных постоянных, необходимо задать дополнительные условия, которые фиксируют значение искомой функции $y = y(x)$ и, возможно, её производных в одной или нескольких точках. Часто эти дополнительные условия задаются в виде так называемых *начальных условий*: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ и т.д. Термин *начальные условия* происходит из физических задач, в которых аргументом часто является время t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.8. Задача нахождения частного решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

ПРИМЕР 60.1. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству. Допустим, при $t = t_0$ имелось m_0 граммов радия. Как масса образца зависит от времени?

Р е ш е н и е: Обозначим коэффициент пропорциональности между массой радия m и скоростью его распада буквой c ($c > 0$). Тогда для массы радия имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -cm$$

и начальное условие: $m|_{t=t_0} = m_0$.

Решение этой задачи имеет вид

$$m = m_0 \cdot e^{-c(t-t_0)}.$$

ПРИМЕР 60.2. При движении лодки в спокойной воде при небольшой скорости она испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. После остановки мотора её начальная скорость была равна 1,5 м/сек, а через 4 сек стала равной 1 м/сек. Как скорость лодки зависит от времени?

Р е ш е н и е: При решении этой задачи воспользуемся вторым законом Ньютона. Произведение массы тела на его ускорение равно сумме сил, действующих на тело. Лодка движется по поверхности воды и по вертикали на неё действуют две силы: архимедова сила и сила тяжести, которые уравнивают друг друга. В направлении движения лодки действует сила сопротивления, поэтому уравнение движения можно записать в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -kv,$$

где m – масса лодки, v – её скорость, t – время, а $k > 0$ – коэффициент сопротивления. Знак минус в правой части означает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости. Начальное условие имеет вид: $v|_{t=t_0} = v_0$. В нашем случае $v_0 = 1,5$ м/сек.

Уравнение движения лодки очень похоже на уравнение распада радия в предыдущей задаче. Они совпадут с точностью до замены массы радия на скорость лодки, если положить в последнем уравнении $k/m = c$. Его решение имеет вид

$$v = v_0 \cdot e^{-k(t-t_0)/m}.$$

В этом решении коэффициент $\frac{k}{m}$ имеет размерность сек^{-1} и его значение $\frac{k}{m} = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} \text{ сек}^{-1}$ может быть найдено после подстановки в полученное решение начального условия и условия $v|_{t=4 \text{ сек}} = 1 \text{ м/сек}$.

Из этих примеров видно, что одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению могут удовлетворять многие функции. Поэтому для определения искомой функции нужно задавать не только дифференциальное уравнение, но и *начальное значение*, которому она должна удовлетворять при каком-то определённом значении аргумента.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение всех решений дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений. Нахождение решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Приведённые примеры демонстрируют ещё один важный факт. Внешне совершенно различные явления (распад радия и движение лодки) могут описываться одинаковыми уравнениями. В данном случае это совпадение объясняется совпадением закона полураспада (для каждого радиоактивного элемента время, за которое распадается половина имеющегося количества элемента, постоянно и скорость распада пропорциональна количеству радиоактивного элемента) и закона сопротивления движению лодки. Если лодка имеет другую форму, например, она плохо обтекаема, то сила сопротивления может быть пропорциональна квадрату скорости и тогда её скорость будет описываться другим дифференциальным уравнением, а закон движения будет отличаться от найденного выше.

60.4. Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной искомой функции y :

$$y' = f(x, y), \quad (60.4)$$

где правая часть уравнения — известная функция $f(x, y)$, — определена в некоторой области G плоскости (x, y) .

Выясним, каков геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (60.4).

Будем рассматривать в уравнении (60.4) переменные x и y как декартовы координаты точек на плоскости. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение

уравнения (60.4). Значит, после подстановки функции $y = \varphi(x)$ в это уравнение оно превращается в тождество:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)). \quad (60.5)$$

Рассмотрим на графике функции $y = \varphi(x)$ произвольную точку $M(x, y)$ и проведем в этой точке касательную. Из геометрического смысла производной следует, что

$$\varphi'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (60.6)$$

где α — угол наклона касательной к оси абсцисс. Из соотношений (60.6), (60.5) и (60.4) получаем, что $\operatorname{tg} \alpha = f(x, \varphi(x)) = f(x, y)$, где (x, y) — координаты точки M . Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику решения уравнения (60.4) в каждой его точке равен значению в этой точке правой части дифференциального уравнения первого порядка (60.4), то есть дифференциальное уравнение (60.4) задаёт в любой точке (x, y) области G значение углового коэффициента касательной к графику решения уравнения (60.4), проходящему через эту точку: $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.9. В области G дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ задаёт поле направлений, которое в каждой точке G изображается с помощью отрезков касательных, угловые коэффициенты которых определяются значениями правой части дифференциального уравнения $f(x, y)$ в этой точке.

В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения (60.4). Построив отрезки касательных для достаточно большого числа точек, мы получим достаточно наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке графика решения имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу нахождения решения (интегрирования) дифференциального уравнения (60.4) геометрически можно сформулировать так: найти кривую $y = \varphi(x)$, которая в каждой точке имеет касательную, заданную уравнением (60.4), или, что тоже самое, в каждой точке касается поля направлений, заданного уравнением (60.4).

Пример такого графического решения уравнения $y' = \sin(x^2 + y^2)$ приведен на рис. 1.

С геометрической точки зрения в такой постановке задачи не очень естественными представляются следующие ограничения:

- (1) исключены направления, параллельные оси OY ;

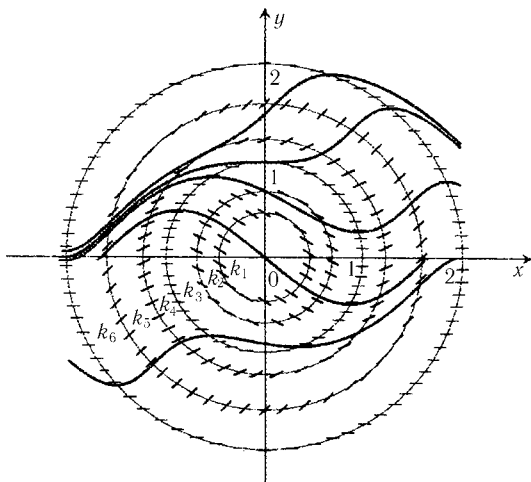


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения $y' = \sin(x^2 + y^2)$

- (2) исключены те линии, которые перпендикулярны к оси OX и пересекаются вертикальными прямыми более одного раза.

Поэтому, наряду с уравнением (60.4), естественно также рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y), \quad (60.7)$$

где $f_1(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$ всюду, где эти функции имеют смысл, и использовать уравнение (60.7) там, где уравнение (60.4) не имеет смысла. При этом считается, что в любой точке, принадлежащей G , хотя бы одна из функций $f(x, y)$ или $f_1(x, y)$ имеет смысл, т.е. считается, что $f_1(x, y) = 0$ там, где $f(x, y)$ не имеет смысла (стремится к бесконечности).

Тогда задачу интегрирования дифференциальных уравнений (60.4), (60.7) можно поставить так: в области G найти все линии, касающиеся в любой точке поля направлений, заданного уравнениями (60.4) или (60.7). Эти линии называются интегральными кривыми (или интегральными линиями) уравнений (60.4) или (60.7).

Если

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

то вместе с уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (60.8)$$

будем рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \quad (60.9)$$

Можно также записать уравнение в симметричной форме

$$M(x, y)dx - N(x, y)dy = 0. \quad (60.10)$$

При этом поле направлений определено всюду, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ имеют смысл и

$$M^2 + N^2 \neq 0. \quad (60.11)$$

ПРИМЕР 60.3. Построить поле направлений для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (60.12)$$

и найти его интегральные кривые.

Р е ш е н и е: Уравнение (60.12) определяет поле направлений всюду, кроме начала координат. Схематически это поле направлений изображено на рис. 2.

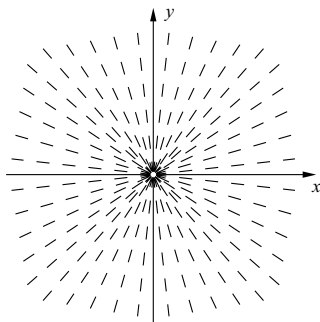


Рис. 2. Поле направлений уравнения (60.12)

Все определяемые им направления проходят через начало координат. Ясно, что при любом k функции $y = kx, x > 0$ и $y = kx, x < 0$ являются решениями уравнения (60.12). Интегральные кривые представляют собой полупрямые, исходящие из начала координат. Принципиальным является то, что при движении точки по интегральной кривой переход через начало координат невозможен, так как в начале координат поле направлений не определено, поскольку в точке $O(0, 0)$ условие (60.11) не выполняется.

ПРИМЕР 60.4. Построить поле направлений для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (60.13)$$

и найти его интегральные кривые.

Решение: Уравнение (60.13) задаёт поле направлений всюду, за исключением начала координат. Схематически это поле направлений изображено на рис. 3. Направления, задаваемые в точке (x, y) урав-

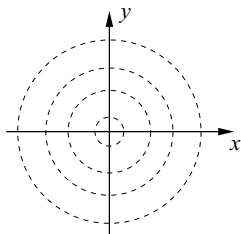


Рис. 3. Поле направлений уравнения (60.13)

нениями (60.12) и (60.13), взаимно перпендикулярны. Ясно, что все окружности $x^2 + y^2 = R^2$, имеющие центр в начале координат, будут интегральными кривыми уравнения (60.13). Решениями этого уравнения будут функции $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ ($-R < x < R$), графическим представлением которых являются полуокружности в верхней и нижней полуплоскостях.

Таким образом, в первом из приведённых выше примеров функции $y = kx, x > 0$ и $y = kx, x < 0$ являются общими решениями уравнения (60.12) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ всюду, кроме оси OX , а $ax + by = 0$ является общим интегралом этого уравнения во всей плоскости XOY , за исключением

начала координат. Во втором примере мы имеем *общее решение* уравнения (60.13) $y' = -\frac{x}{y}$ в верхней полуплоскости $y > 0$: $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$

и *общее решение* в нижней полуплоскости $y < 0$: $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, а $x^2 + y^2 = R^2$ — *общий интеграл*.

60.5. Метод изоклин

Для упрощения построения поля направлений найдем все те точки плоскости (x, y) , в которых отрезки, изображающие наклон интегральных кривых, имеют одно и то же направление.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.10. *Изоклиной дифференциального уравнения называется множество всех точек плоскости, в которых отрезки поля направлений имеют один и тот же наклон.*

Уравнение изоклины (кривой равных наклонов интегральных кривых) найти очень просто. Действительно, в каждой точке изоклины тангенс угла наклона отрезков поля направлений имеет одно и то же значение $\operatorname{tg} \alpha = k$, где k — параметр. Так как, с другой стороны, $\operatorname{tg} \alpha = y' = f(x, y)$, то координаты каждой точки изоклины удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = k. \quad (60.14)$$

Соотношение (60.14) служит уравнением изоклины дифференциального уравнения (60.4). Так как k в уравнении (60.14) может принимать различные значения, то это уравнение можно рассматривать как уравнение семейства изоклин.

ПРИМЕР 60.5. *Построить поле направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$.*

Решение: Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения имеет вид $x^2 + y^2 = k$, т.е. изоклинами служат концентрические окружности радиусом \sqrt{k} с центром в начале координат (рис. 4).

В точках каждой из окружностей нужно провести отрезки, образующие с осью OX один и тот же угол α , тангенс которого равен k . Так, при $k = 1$ изоклиной является единичная окружность $x^2 + y^2 = 1$, при $k = 4$ — окружность $x^2 + y^2 = 2^2$ радиуса 2, при $k = 9$ — окружность $x^2 + y^2 = 3^2$ радиуса 3 и т.д. Этим изоклинам соответствуют направления отрезков, образующих с осью OX углы $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 4$ и $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 9$. При $k = 0$ получаем $x^2 + y^2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет единственная точка

$(0, 0)$. В этом случае изоклина состоит из одной точки, для которой $\operatorname{tg} \alpha = 0$. На рис. 4 построены вышеперечисленные изоклины и изображено поле направлений данного дифференциального уравнения. Для того чтобы построить интегральную кривую, возьмём на плоскости произвольную точку (x_0, y_0) . Проведем через эту точку кривую так, чтобы она в каждой точке касалась поля направлений. Это и будем искомой интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) . В качестве примера, на рис. 4 построены интегральные кривые, проходящие через точки $(0, 0)$, $(-1, 1)$ и $(1, -1)$.

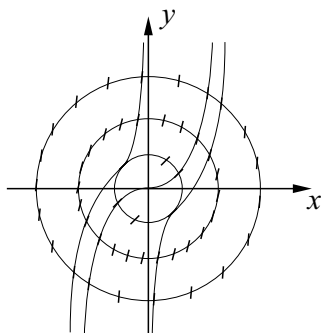


Рис. 4. *Изоклины и интегральные кривые уравнения $y' = x^2 + y^2$*

Прежде, чем решать любое дифференциальное уравнение, необходимо знать, существует ли на самом деле решение дифференциального уравнения, и если существует, то является ли оно единственным.

Условия, при которых дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет решение, составляют содержание теоремы Коши – теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 60.1 (Теорема Коши). *Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, правая часть которого $f(x, y)$ определена в области $G(x, y)$, причём $f(x, y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по y в $G(x, y)$. Тогда:*

- (1) *для любой внутренней точки $(x_0, y_0) \in G$ существует непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x_0) = y_0$;*

- (2) если два решения $y = \psi(x)$ и $y = \chi(x)$ совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$, т.е. $\psi(x_0) = \chi(x_0)$, то они совпадают тождественно в области G , т.е. $\psi(x) \equiv \chi(x)$ для любого $x \in G$.

Геометрический смысл теоремы Коши заключается в том, что существует единственная интегральная кривая $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0) .

60.6. Уравнения с разделяющимися переменными

В приложениях достаточно часто возникают ситуации, когда производная искомой функции равна произведению двух сомножителей, один из которых зависит только от аргумента, а второй только от искомой функции. Например, такая ситуация возможна при рассмотрении процессов передачи тепла в одномерном случае, когда коэффициент теплопроводности пропорционален некоторой степени температуры. Поэтому очень полезно уметь решать уравнения такого типа. Кроме того, многие интегрируемые в квадратурах дифференциальные уравнения могут быть преобразованы к уравнениям такого вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.11. Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad (60.15)$$

у которых правая часть есть произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

В уравнении (60.15) можно «разделить переменные», т.е. при помощи умножения и деления привести уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила функция от x и дифференциал dx , а в другую часть – функция от y и dy . Для этого умножим обе части уравнения на dx и разделим на $f_2(y)$, предполагая, что $f_2(y) \neq 0$ ни в одной точке рассматриваемого интервала $x \in (a, b)$. Тогда уравнение (60.15) запишется в виде

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \quad (60.16)$$

В уравнении (60.16) переменные разделены. Допустим, что существует дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению (60.15). Тогда в обеих частях уравнения (60.16) стоят дифференциалы, которые тождественно равны друг другу, только в правой

части этот дифференциал выражен через независимую переменную x , а в правой – через y , который является функцией x . Если дифференциалы равны, то их неопределённые интегралы могут отличаться только на постоянное слагаемое. Поэтому мы можем проинтегрировать левую часть по y , а правую по x . Получим

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \quad (60.17)$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, предположив, что у уравнения (60.15) есть решение, мы получили соотношение (60.17), которое связывает это решение y и независимую переменную x , т.е. получили искомый общий интеграл уравнения (60.15). Если нам удастся разрешить соотношение (60.17), то мы получим в явном виде общее решение данного уравнения. Оказывается, для это достаточно выполнение условия $f_2(y) \neq 0$ ни при каких значениях $y \in (c, d)$. В этом случае решение единственно, если задать точку (x_0, y_0) , через которую должна проходить интегральная кривая.

Отметим, что если $f_2(y)$ обращается в нуль в какой-то точке $y = y_1$, то это может привести к нарушению единственности. Это зависит от сходимости несобственного интеграла

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f_2(\eta)} \quad (60.18)$$

при $y \rightarrow y_1$ и того, меняется ли знак функции $f_2(y)$ при переходе через $y = y_1$.

Если несобственный интеграл (60.18) сходится и функция $f_2(y)$ не меняет знака при $y = y_1$, то через любую точку (x_0, y_0) прямоугольника $Q : \{(x, y), x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ проходит бесконечно много интегральных кривых, касающихся прямой $y = y_1$.

Если несобственный интеграл (60.18) сходится и функция $f_2(y)$ меняет знак при переходе через $y = y_1$, то через любую точку прямой $y = y_1$ проходит бесконечно много интегральных кривых, однако в любой из полос $y \in (c, y_1)$ и $y \in (y_1, d)$ через каждую точку проходит одна интегральная кривая, то есть всюду, за исключением прямой $y = y_1$, решение единственно.

Если несобственный интеграл (60.18) при $y \rightarrow y_1 \pm 0$ расходится, то решение всегда единственно.

Значения y_i , при которых $f_2(y_i) = 0$, дают решения уравнения (60.15) вида $y = y_i = \text{const}$.

ПРИМЕР 60.6. Найти общее решение уравнения

$$2yy' = 1 - 6x^2.$$

Решение: Очевидно, что данное уравнение допускает разделение переменных:

$$2ydy = (1 - 6x^2)dx.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, найдем:

$$\int 2ydy = \int (1 - 6x^2)dx,$$

откуда получаем

$$y^2 = x - 2x^3 + C.$$

Это соотношение является общим интегралом исходного уравнения. Из него можно получить общее решение $y = \pm\sqrt{x - 2x^3 + C}$, задающее интегральные кривые в верхней и нижней полуплоскостях.

ПРИМЕР 60.7. Найти частное решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$, при $y(1)=2$.

Решение: Разделив переменные

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

интегрируем и получаем:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + \ln C_1,$$

где произвольная постоянная C_0 для удобства записана как $\ln |C_1|$, где C_1 может быть любого знака. Воспользовавшись свойством логарифма, после операции потенцирования получим общее решение в виде:

$$y = \frac{C}{x}, \quad \text{где } C = \pm C_1.$$

Подставляя в общее решение начальное условие $y(1) = 2$, находим $2 = \frac{C}{1}$, откуда $C = 2$ и искомое частное решение равно $y = \frac{2}{x}$.

При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но последнее содержится в формуле $y = \frac{C}{x}$ при $C = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 60.1. К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся дифференциальные уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, у которых правая часть зависит только от $ax + by + c$, где a, b, c — некоторые постоянные. Для их интегрирования достаточно сделать замену переменных $ax + by + c = t$, где t — некоторая неизвестная функция x .

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

ПРИМЕР 60.8. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \cos(y - x).$$

Решение: Сделаем замену переменных $y - x = t$. Тогда $y = t + x$, $y'_x = \frac{dt}{dx} + 1$. Подставим эти соотношения в исходное уравнение. Получим

$$\frac{dt}{dx} + 1 = \cos t \Leftrightarrow \frac{dt}{\cos t - 1} = dx.$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства

$$\int dx = \int \frac{dt}{\cos t - 1},$$

находим:

$$x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + C.$$

Для получения решения сделаем обратную подстановку $t = y - x$:

$$x = \operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} + C.$$

Это соотношение определяет искомое общее решение уравнения.

60.7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В приложениях встречаются дифференциальные уравнения, в которых при одинаковом изменении масштабов измерения x и y , имеющих одинаковую размерность, само уравнение не меняется. Это очень важный класс дифференциальных уравнений, решение которых обладает свойством подобия, так что любое решение может быть получено из какого-либо решения растяжением или сжатием осей Ox и Oy .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.12. Уравнение называется однородным, если его правая часть зависит от отношения $\frac{y}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (60.19)$$

Если функция $f(u)$ определена при $u \in (a, b)$, то функция $f\left(\frac{y}{x}\right)$ определена в углах, состоящих из точек (x, y) , для которых $a < \frac{y}{x} < b$. Области, образованные этими двумя углами, будем обозначать G .

Теорема 60.2. Если функция $f(u)$ непрерывна на интервале $a < u < b$: $f(u) \in C(a, b)$ и $f(u) \neq u$ для любого $u \in (a, b)$, то через любую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Доказательство. Положим $y = ux$, где $u = u(x)$, тогда из уравнения (60.19) следует: $xu' + u = f(u)$ и мы получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}. \quad (60.20)$$

Из уравнения (60.20) получаем

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln |x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + C, \quad (60.21)$$

где $\Phi(u) = \int \frac{du}{f(u) - u}$.

Из уравнения (60.21) следует, что все интегральные кривые уравнения (60.19) подобны, центром подобия служит начало координат. Действительно, при подходящем выборе C_1 замена x на C_1x и y на C_1y переводит кривую

$$\ln |x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

в любую кривую семейства (60.21).

Если $f(u) = u$ в отдельных точках u_1, \dots, u_n , то через некоторые точки $(x_0, y_0) \in G$ может проходить бесконечно много интегральных кривых. Это зависит от сходимости несобственного интеграла

$$\int_c^u \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi}, \quad (60.22)$$

когда u стремится к одному из значений u_1, \dots, u_n , например к u_1 .

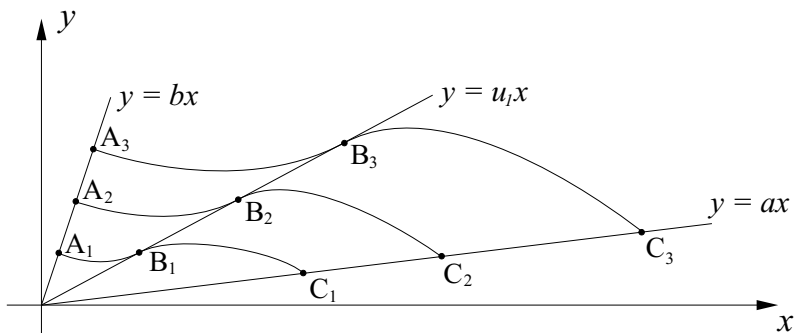


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения $y' = f(y/x)$ (сходящийся интеграл (60.22)).

На рис. 5 схематически изображено поведение интегральных кривых в случае сходимости интеграла (60.22). Через точку A_1 будут, например, проходить интегральные кривые $A_1B_1B_2C_2$, $A_1B_1B_3C_3$, ... Все они касаются прямой $y = u_1x$.

Однородным дифференциальным уравнением является также уравнение, в которое входят однородные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.13. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией k -той степени, если при любом λ , кроме $\lambda = 0$, имеет место тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = 3xy - 2y^2$ есть однородная функция второй степени, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda x \cdot \lambda y - 2\lambda^2 y^2 = \lambda^2(3xy - 2y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.14. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если его можно представить в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (60.23)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одной степени.

Для решения однородных уравнений используется подстановка $y = tx$, где $t = t(x)$ – новая неизвестная функция.

ПРИМЕР 60.9. Найти общее решение уравнения:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

Р е ш е н и е: Очевидно, это уравнение является однородным, поскольку коэффициенты при дифференциалах $P(x, y) = y^2 - 2xy$ и $Q(x, y) = x^2$ – однородные функции x и y второй степени. Сделаем подстановку $y = tx$, откуда $dy = tdx + xdt$. Подставим выражения для y и dy в исходное дифференциальное уравнение. Тогда

$$(x^2 t^2 - 2x^2 t)dx + x^2 (tdx + xdt) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается:

$$x^2(t^2 - t)dx = -x^3 dt;$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2 - t};$$

$$\ln C|x| = \ln \frac{t}{t-1}.$$

Сделав обратную подстановку, получим общий интеграл уравнения

$$Cx(y - x) = y.$$

Полученный общий интеграл определяет искомую функцию $y = y(x)$ в неявном виде.

Поскольку при решении уравнения с разделяющимися переменными мы делили на x , то теперь нужно проверить, не является ли функция $x = 0$ ещё одним решением нашего уравнения (легко видеть, что в общее решение эта функция не входит). Подставив её и её дифференциал в исходное уравнение, получим тождество $0 \equiv 0$, следовательно, функция $x = 0$ – ещё одно (частное) решение данного уравнения.

При разделении переменных мы также делили на $t^2 - t$, поэтому необходимо проверить, не являются ли соотношения, полученные при

приравняв к нулю выражения $t^2 - t$, решениями исходного уравнения. Легко видеть, что $t = 0$ даёт $y = 0$, а $t = 1$ даёт $y = x$. Подставляя эти соотношения в исходное дифференциальное уравнение, найдем, что они удовлетворяют уравнению и являются решениями.

Эти частные решения могут быть получены из общего решения при $C = 0$ и $C = +\infty$ (последнее означает перенос постоянной C в правую часть решения за счёт деления на C , введение новой произвольной постоянной $\tilde{C} = 1/C$ и приравнивание новой постоянной к нулю). Из записи общего решения в виде

$$x(y - x) = \tilde{C}y$$

следует, что решение $x = 0$ содержится в общем решении.

60.8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейные дифференциальные уравнения представляют собой важный класс уравнений, которые допускают аналитическое решение и часто встречаются в приложениях. Если уравнение нелинейное, то, как правило, найти его общее решение невозможно. В этом случае, если нужно понять характер решения в окрестности некоторой точки, нелинейное уравнение заменяют приближённо некоторым линейным уравнением (как говорят, *линеаризуют*) и находят решение последнего. Поэтому необходимо уметь решать линейные уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.15. *Линейные уравнения содержат неизвестную функцию и её производную в первой степени:*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x). \quad (60.24)$$

Если $b(x)$ равно тождественно нулю, то уравнение (60.24) называется линейным уравнением без правой части или линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Если $b(x)$ не равно тождественно нулю, то уравнение (60.24) называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Наиболее распространенным и универсальным методом решения линейных уравнений является *метод вариации произвольной постоянной*, который может быть использован также при решении линейных уравнений более высоких порядков и даже при решении систем линейных уравнений.

Суть метода вариации произвольной постоянной заключается в следующем. На первом этапе рассматривается соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0. \quad (60.25)$$

Оно получается из уравнения (60.24) при $b(x) \equiv 0$ и является уравнением с разделяющимися переменными. Уравнение (60.25) легко интегрируется после разделения переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = -a(x)dx &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int a(x)dx \Rightarrow \\ \ln |y| = - \int a(x)dx + \ln |C|. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения после потенцирования получим решение однородного уравнения в явном виде

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}. \quad (60.26)$$

На втором этапе, который, собственно, и дал название методу вариации произвольной постоянной, общее решение исходного неоднородного уравнения ($b(x) \neq 0$) ищется в виде (60.26), где произвольная постоянная C рассматривается как некоторая дифференцируемая функция $z(x)$ (постоянная C *варируется*, от английского variation – непрерывное, плавное изменение).

Таким образом, решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = z(x)e^{-\int a(x)dx}. \quad (60.27)$$

Для нахождения неизвестной пока функции $z(x)$ нужно подставить выражение (60.27) в уравнение (60.24). Для этого найдем производную функции (60.27):

$$\begin{aligned} y' &= z(x)'e^{-\int a(x)dx} + z(x)e^{-\int a(x)dx} \left(- \int a(x)dx \right)' = \\ &= z(x)'e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}. \end{aligned} \quad (60.28)$$

Подставляя выражения для y (60.27) и y' (60.28) в уравнение (60.24), получаем соотношение для определения неизвестной функции $z(x)$:

$$z'(x)e^{-\int a(x)dx} - z(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)z(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

откуда

$$z'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \quad \text{или} \quad z'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Интегрируя последнее выражение, находим

$$z(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_0. \quad (60.29)$$

Подставляя найденное выражение для $z(x)$ в формулу (60.27), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения (60.24)

$$y = \left(\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{-\int a(x)dx}. \quad (60.30)$$

Запоминать выведенную формулу нет необходимости, важно запомнить алгоритм ее нахождения по методу вариации произвольной постоянной, а именно, решение на первом этапе соответствующего однородного уравнения и, на втором этапе, поиск решения неоднородного уравнения в форме полученного решения однородного уравнения, в котором произвольная постоянная рассматривается как переменная величина.

ЗАМЕЧАНИЕ 60.2. Из (60.30) следует, что общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

ПРИМЕР 60.10. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 2x.$$

Решение: Вначале решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2}.$$

После интегрирования и потенцирования получим

$$y = C(1+x^2). \quad (60.31)$$

Второй этап: ищем общее решение неоднородного уравнения, варьируя произвольную постоянную $C = z(x)$:

$$y = z(x)(1 + x^2). \quad (60.32)$$

Находим производную $y' = z'(x)(1 + x^2) + z(x) \cdot 2x$ и подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$z'(x)(1 + x^2) + 2x z(x) - \frac{2x \cdot z(x)(1 + x^2)}{1 + x^2} = 2x.$$

После приведения подобных членов получим выражение для $z'(x)$:

$$z'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$z(x) = \int \frac{2x dx}{1 + x^2} = \ln(1 + x^2) + C_0. \quad (60.33)$$

Для получения общего решения осталось подставить (60.33) в (60.32):

$$y = (\ln(1 + x^2) + C_0)(1 + x^2).$$

60.9. Уравнение Бернулли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60.16. Уравнение Бернулли — это нелинейное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \quad (60.34)$$

где $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

Уравнение Бернулли сводится к линейному подстановкой $z = y^k$, где $k = 1 - n$. В результате этой подстановки исходное уравнение (60.34) преобразуется к виду

$$\frac{1}{1 - n} z' + a(x)z = b(x). \quad (60.35)$$

Действительно, пусть $z = y^{1-n}$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (1 - n)y^{-n} \frac{dy}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz/dx}{(1 - n)y^{-n}}.$$

Подставим найденное выражение в исходное уравнение и проведем преобразования:

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= b(x)y^n \implies \frac{dz/dx}{(1-n)y^{-n}} + a(x)y = b(x)y^n \implies \\ \implies \frac{dz}{dx} + a(x)(1-n)y^{1-n} &= (1-n)b(x). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x).$$

Последнее уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Оно может быть решено методом вариации произвольной постоянной.

Практическое занятие 60. Дифференциальные уравнения первого порядка

ПРИМЕР 60.1. Убедиться, что функция

$$y(x) = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$$

при каждом $C \in \mathbb{R}$ является решением уравнения

$$y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (60.1)$$

Р е ш е н и е: Вычислим производную функции $y(x)$ и подставим $y'(x)$ и $y(x)$ в уравнение (60.1). Получим

$$\begin{aligned} y'(x) &= C; \\ Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} - xC &= \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, полученное равенство является тождеством, следовательно данная функция является решением уравнения.

ПРИМЕР 60.2. Проверить, является ли функция $y = \sin 2x + 3x$ решением дифференциального уравнения $y'' + 4y = 12x$.

Р е ш е н и е: Находим первую и вторую производные данной функции $y' = 2 \cos 2x + 12$ и $y'' = -4 \sin 2x$ и подставляем в исходное уравнение

$y'' + 4y \equiv -4 \sin 2x + 4 \sin 2x + 12x \equiv 12x$. Следовательно, функция $y = \sin x + 12x$ является решением уравнения $y'' + 4y = 12x$.

ПРИМЕР 60.3. Убедиться, что функция $y = \varphi(x)$, определяемая соотношением

$$y = \operatorname{arctg}(x + y) + C, \quad (60.2)$$

является решением уравнения

$$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1. \quad (60.3)$$

Р е ш е н и е: Для решения задачи необходимо вычислить производную от функции, определённой равенством (60.2), из которого явно выделить $y(x)$ невозможно. Запишем равенство (60.2) в виде неявной функции $F(x, y) = 0$ и вычислим производную y'_x , как производную неявной функции:

$$F(x, y) \equiv \operatorname{arctg}(x + y) - y + C = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

$$F'_x = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

$$F'_y = \frac{1}{1 + (x + y)^2} - 1 = \frac{-(x + y)^2}{1 + (x + y)^2},$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + (x + y)^2} \cdot \frac{1 + (x + y)^2}{-(x + y)^2} = \frac{1}{(x + y)^2}.$$

Подставив полученную формулу в уравнение (60.3), получим тождество

$$(x + y)^2 \frac{1}{(x + y)^2} \equiv 1.$$

Следовательно, данное соотношение является интегралом уравнения.

ПРИМЕР 60.4. Методом изоклин построить решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

Р е ш е н и е: Сначала построим графики изоклин. Так как изоклины – линии равного наклона поля направлений, то для уравнения $y' = f(x, y)$ их графики удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = k,$$

где $k = \text{const}$.

Для данного уравнения $y' = y - x^2$ получим уравнение семейства изоклин:

$$y - x^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 + k,$$

то есть изоклины представляют собой семейство квадратичных парабол с осями, совпадающими с осью OY (рис. 6).

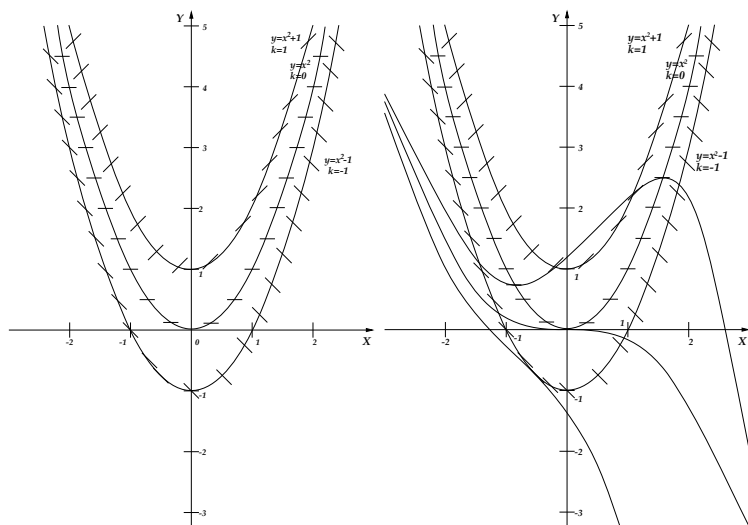


Рис. 6. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2$

Меняя параметр k , получим семейство графиков изоклин и построим на них поле направлений. Так как $k = \text{tg } \alpha$, где α – угол наклона

касательной к графику, то при $k = 0$ получим горизонтальные касательные на изоклине $y = x^2$, при $k = 1$ угол наклона касательной к оси X составит $\alpha = \frac{\pi}{4}$ на изоклине $y = x^2 + 1$, а при $k = -1$ наклон касательных $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ на изоклине $y = x^2 - 1$ (слева на рис. 6). Проводя интегральные кривые, касающиеся поля направлений, получим картину, изображенную справа на рис. 6, с экстремумами на параболе $y = x^2$: максимумами в первой четверти и минимумами во второй четверти.

ПРИМЕР 60.5. Решить дифференциальное уравнение

$$xydx + (x + 1)dy = 0.$$

Р е ш е н и е: Для того, чтобы разделить переменные, перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения, а затем разделим уравнение на $y(x + 1)$:

$$xydx = -(x + 1)dy;$$

$$\frac{xdx}{x + 1} = -\frac{dy}{y}.$$

Теперь проинтегрируем обе части равенства. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x + 1} &= -\int \frac{dy}{y}; \\ -\ln|y| &= x - \ln|x + 1| - \ln|C|; \\ |y| &= e^{\ln|C| + 1 - x}; \\ y &= C \frac{x + 1}{e^x} \Leftrightarrow y = C(x + 1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Так как при разделении переменных мы делили уравнение на $y(x + 1)$, то теперь необходимо проверить, не потеряны ли решения, обращающие это выражение в нуль. Решение $y = 0$ входит в полученное решение (чтобы убедиться в этом, достаточно положить $C = 0$). Подставив $x = -1$ в исходное уравнение, получим тождество, т.е. $x = -1$ также является решением. Таким образом, решение данного уравнения представляет собой совокупность функций $y = 0$, $x = -1$ и $y = C(x + 1)e^{-x}$.

ПРИМЕР 60.6. Решить задачу Коши

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad \text{где } y(0) = 1.$$

Решение: Записав производную в форме $\frac{dy}{dx}$, перенесем второе слагаемое в правую часть равенства и умножим полученное выражение на $\frac{dx}{(x^2 - 1)y^2}$:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2xdx}{x^2 - 1}.$$

Разделив таким образом переменные, можем получить решение, проинтегрировав полученное выражение:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} &= - \int \frac{2xdx}{x^2 - 1}; \\ \frac{1}{y} &= \ln|x^2 - 1| + C. \end{aligned}$$

Получили общее решение уравнения:

$$y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + C}.$$

Можно проверить, что решением данного уравнения является также прямая $y = 0$. Кроме того, если понимать исходное дифференциальное уравнение обобщённо, как соотношение между дифференциалами dx и dy , а именно записать его в виде $(x^2 - 1)dy + 2xy^2dx = 0$, то решениями также будут вертикальные прямые $x = \pm 1$. Однако эти решения не удовлетворяют начальному условию $y(0) = 1$ задачи Коши.

Для решения задачи Коши определим постоянную C в полученном выше общем решении из условия $y(0) = 1$. Для этого подставим это начальное условие в общее решение:

$$1 = \frac{1}{\ln|-1| + C};$$

$$\ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Таким образом, искомое решение задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| + 1}.$$

ПРИМЕР 60.7. Решить уравнение:

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

Решение: Разделить переменные, как это удавалось сделать в двух последних примерах, в данном случае мы не можем, так как коэффициент при dx является суммой выражений, содержащих x и y . Однако коэффициенты при дифференциалах dx и dy являются однородными функциями x и y первого порядка. Следовательно, данное уравнение однородное. Сделаем замену переменных: $\frac{y}{x} = t$. Тогда $y = tx$, $dy = tdx + xdt$. Подставив y и dy в исходное уравнение и приведя подобные члены, получим уравнение с разделяющимися переменными, решать которое мы уже умеем:

$$(x + 2tx)dx - x(tdx + xdt) = 0;$$

$$x(1 + t)dx - x^2dt = 0;$$

$$(1 + t)dx = xdt;$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1 + t};$$

$$\ln|x| + \ln C = \ln|1 + t|;$$

$$\ln C|x| = \ln|1 + t|;$$

$$Cx = 1 + t;$$

Сделав обратную замену $t = \frac{y}{x}$, получим искомую функцию:

$$Cx = 1 + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx^2 - x.$$

Поскольку при решении уравнения с разделяющимися переменными мы разделили на x , то теперь нужно проверить, не является ли функция $x = 0$ ещё одним решением нашего уравнения (легко видеть, что в общем решении эта функция не входит). Подставив её и её дифференциал в исходное уравнение, получим тождество $0 \equiv 0$, следовательно, функция $x = 0$ – частное решение данного уравнения, помимо найденного выше общего решения.

ПРИМЕР 60.8. Прочиттегрировать уравнение $xyy' = x^2 - y^2$.

Решение: Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - (y/x)^2}{y/x}.$$

Данное уравнение является однородным, поскольку правая часть зависит только от отношения y/x . Сделаем подстановку $y = xt$, где $t = t(x)$. После подстановки y и y' в уравнение получим

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{1 - t^2}{t}, \quad \text{или} \quad x \frac{dt}{dx} = \frac{1 - 2t^2}{t}.$$

В полученном уравнении можно разделить переменные:

$$\frac{t \, dt}{1 - 2t^2} = \frac{dx}{x}.$$

Умножив обе части уравнения на 4 и проинтегрировав, получим

$$\ln |C| - \ln |1 - 2t^2| = 4 \ln |x|, \quad \text{откуда} \quad x^4(1 - 2t^2) = C.$$

Возвращаясь к функции y , после обратной подстановки $t = y/x$ имеем общее решение уравнения

$$x^4 \left(1 - 2 \frac{y^2}{x^2} \right) = C, \quad \text{или} \quad x^4 - 2x^2 y^2 = C.$$

ПРИМЕР 60.9. Найти общее решение уравнения:

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Решение: Данное уравнение является линейным. Для его решения используем метод вариации произвольной постоянной.

Решим сначала соответствующее линейное однородное уравнение

$$xy' - 2y = 0.$$

Это уравнение решается разделением переменных:

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x},$$

интегрируя которое, получим общее решение однородного линейного уравнения:

$$y = Cx^2.$$

Теперь применим метод вариации произвольной постоянной. Примем, что в полученном решении C — функция от x ($C = C(x)$). Продифференцируем общее решение однородного уравнения, учитывая, что $C = C(x)$, и подставим в исходное неоднородное уравнение полученное решение $y = Cx^2$ и выражение для его производной $y' = C'_x x^2 + 2xC$. Получим уравнение для $C = C(x)$:

$$x(C'_x x^2 + 2xC) - 2Cx^2 = 2x^4.$$

Приведя подобные, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно C . Решим это уравнение:

$$x^3 \frac{dC}{dx} = 2x^4.$$

Интегрируя, получим общее решение

$$C = x^2 + C_1.$$

Теперь, подставив $C = C(x)$ в общее решение однородного уравнения, получим общее решение исходного линейного неоднородного уравнения:

$$y = x^2(x^2 + C_1), \quad \text{или} \quad y = x^4 + C_1 x^2.$$

Обратите внимание, что общее решение линейного неоднородного уравнения является суммой общего решения соответствующего линейного однородного уравнения ($y = C_1 x^2$) и некоторого частного решения исходного неоднородного линейного уравнения (то, что функция $y = x^4$ – частное решение исходного уравнения, можно легко проверить, подставив эту функцию и её производную в уравнение).

ПРИМЕР 60.10. Решить уравнение:

$$y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x.$$

Р е ш е н и е: Данное дифференциальное уравнение нелинейное. Однако нелинейность здесь самого простого вида – степенная. Это уравнение Бернулли и его можно привести к линейному уравнению. Для этого поделим его на y^4 :

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{\operatorname{tg} x}{y^3} = \cos x$$

и сделаем замену переменной $z = \frac{1}{y^3}$. В этом случае $z' = -3\frac{y'}{y^4}$, следовательно $\frac{y'}{y^4} = -\frac{1}{3}z'$. После замены переменных и необходимых сокращений получим линейное дифференциальное уравнение, решаемое описанными выше методами:

$$-\frac{1}{3}z' - z \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Решаем соответствующее однородное линейное уравнение:

$$\frac{1}{3}z' + z \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\frac{dz}{z} = -3 \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln |z| = 3 \ln |\cos x| + \ln |C| \Rightarrow z = C \cos^3 x.$$

В полученном решении линейного однородного уравнения варьируем произвольную постоянную C :

$$C = C(x), \quad z'_x = C'_x \cos^3 x - 3C \cos^2 x \sin x$$

и подставим в исходное неоднородное уравнение

$$-\frac{1}{3}(C'_x \cos^3 x - 3C \cos^2 x \sin x) - C \cos^2 x \sin x = \cos x,$$

$$-dC = \frac{3dx}{\cos^2 x}.$$

Интегрируя это уравнение и подставляя найденное выражения для $C = C(x)$ в решение однородного уравнения, находим

$$C = -3 \operatorname{tg} x + C_1,$$

$$z = C_1 \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x.$$

Делая обратную замену переменных, получим общее решение:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{C_1 \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x}}.$$

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 60.11. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции

а) $y' + 2xy = 0$, $y = 3e^{-x^2}$,

б) $y'^2 = 4y$, $y = (x+1)^2$,

в) $y'(2y+3x) + 3y = 5 \cos 5x$, $y^2 + 3xy = \sin 5x$,

г) $y'' - 2y' + y = 0$, $y = xe^x$,

д) $y'' + y'^2 = 0$, $y = \ln x$,

е) $y'' = x^2 + y^2$, $y = \frac{1}{x}$.

ПРИМЕР 60.12. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ и найти интегральную кривую, удовлетворяющую начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ (рис. 7).

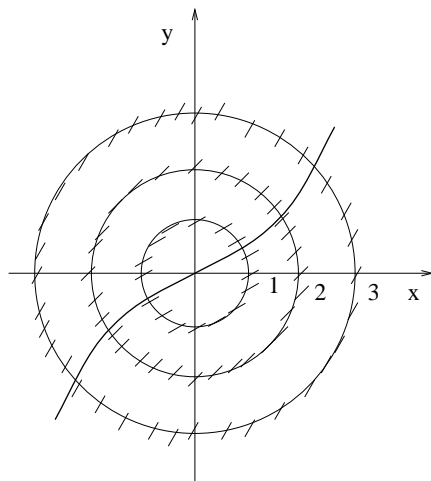


Рис. 7. Поле интегральных кривых уравнения $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$

ПРИМЕР 60.13. Найти общее решение дифференциальных уравнений

- а) $y' = y \operatorname{tg} 3x$,
- б) $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$,
- в) $y' = \frac{2}{y}\sqrt{x+1}$,
- г) $3xe^{3y}y' = \ln^4 x$.

ПРИМЕР 60.14. Найти частное решение уравнения $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ при $y(0) = 1$.

ПРИМЕР 60.15. Найти общее решение уравнения

- а) $y' = -\frac{x+y}{x}$,
- б) $3y' = \frac{3y}{x} + \sqrt{\frac{3y}{x} + 4}$,
- в) $2y' = \frac{2y}{x} + \operatorname{ctg}\left(\frac{2y}{x}\right)$,
- г) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

ПРИМЕР 60.16. Найти частное решение уравнения $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ при $y(2) = 1$.

ПРИМЕР 60.17. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{2y}{x} = x^3$.

ПРИМЕР 60.18. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 \cos 2x.$$

ПРИМЕР 60.19. Найти частное решение уравнения

$$y' - \frac{2y}{1+x} = (1+x)^3, \text{ при } y(0) = 0.$$

ПРИМЕР 60.20. Найти частное решение уравнения

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \text{ при } y(0) = 0.$$

ПРИМЕР 60.21. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2.$$

ПРИМЕР 60.22. Найти общее решение уравнения

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{x^2}{2 \cos^2 x} y^{-1}.$$

Лекция 61. Уравнения первого и второго порядков

Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Решение дифференциальных уравнений в параметрической форме. Особые точки и особые решения. Дифференциальные уравнения второго порядка. Теорема существования и единственности решения (теорема Коши). Задача Коши и краевая задача. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

61.1. Уравнение в полных дифференциалах

Всякое дифференциальное уравнение, разрешённое относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (61.1)$$

может быть переписано в виде $dy = f(x, y)dx$, или, в более общей форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (61.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.1. Если левая часть уравнения (61.2) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то это уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Для того, чтобы уравнение (61.2) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (61.3)$$

Если в (61.2) подставить $y = y(x)$, — решение уравнения (61.1) или (61.2), то получим

$$dU(x, y(x)) \equiv 0, \quad (61.4)$$

что равносильно тому, что

$$U(x, y) = C. \quad (61.5)$$

Наоборот, для любой функции $y(x)$, определяемой уравнением (61.5), имеем $U(x, y(x)) \equiv C$, следовательно, $dU = 0$. Поэтому соотношение (61.5), которое содержит произвольную постоянную, является общим интегралом уравнения (61.2), если это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Для существования решения $y(x)$ уравнения (61.2), удовлетворяющего условию $y(x = x_0) = y_0$, необходимо, чтобы соотношение (61.5) определяло неявную функцию $y = y(x)$. Для этого нужно, чтобы выполнялись условия теоремы о неявной функции, а именно, условие

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

и существовало бы такое C , при котором было выполнено соотношение $U(x_0, y_0) = C$. В этом случае решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$, определится из уравнения

$$U(x, y) = U(x_0, y_0).$$

Если же $Q(x_0, y_0) = 0$, но $P(x_0, y_0) \neq 0$, то можно найти решение в виде зависимости $x = x(y)$, при этом начальные условия имеют вид $x_0 = x(y_0)$. Решение нельзя найти, если одновременно $P(x_0, y_0) = 0$ и $Q(x_0, y_0) = 0$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 61.3. *Чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в прямоугольнике $G(x, y) : a < x < b, c < y < d$ функции*

$P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были непрерывны вместе с их частными производными P'_y и Q'_x , причём всюду в G было выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и $Q(x, y) \neq 0$. Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Доказательство. Необходимость. По условию теоремы имеем

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то есть равенства (61.3) выполнены:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продифференцируем первое из этих равенств по y , а второе — по x . В левой части получим: в первом случае $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, во втором $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Поскольку по условию теоремы P'_y и Q'_x непрерывны, то по теореме о независимости частных производных от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

и, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность. Доказательство проведем для прямоугольника R . Построим функцию

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta,$$

которая получается в результате интегрирования дифференциального выражения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ вдоль ломаной, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) и состоящей из горизонтального и вертикального отрезков (первое и второе слагаемые соответственно).

Полный дифференциал этой функции равен $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Действительно, используя правила дифференцирования интегралов,

зависящих от параметров, вычислим частные производные от функции $U(x, y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x} dy = P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y).\end{aligned}$$

Аналогично найдем, что $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

Таким образом, на решении дифференциального уравнения (61.2) имеем $dU = 0$ и, следовательно, его общий интеграл имеет вид:

$$U(x, y) \equiv \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta = C.$$

На практике для нахождения решения поступают несколько иначе. Это можно продемонстрировать на следующем примере.

ПРИМЕР 61.1. *Найти общий интеграл дифференциального уравнения*

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Решение: Легко видеть, что условие $P'_y = Q'_x$ выполнено. Действительно, поскольку $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ и $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$, то $P'_y = 12xy \equiv Q'_x = 12xy$.

Из условия

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

после интегрирования по x находим

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя это выражение по y и приравнявая его коэффициенту при dy в исходном уравнении $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$, получаем уравнение для $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = 4y^3.$$

Интегрируя это уравнение, получим $\varphi(y) = y^4 + C_0$ и, следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

61.2. Интегрирующий множитель

Если левая часть уравнения (61.2) не является полным дифференциалом, то возникает вопрос: нельзя ли найти такую функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (61.2) станет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Такая функция называется *интегрирующим множителем*.

Таким образом, если μ — интегрирующий множитель, то

$$\mu(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = dU; \quad \mu P = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (61.6)$$

Возникает вопрос: для всякого ли уравнения первого порядка существует интегрирующий множитель? Оказывается, всякое дифференциальное уравнение первого порядка, удовлетворяющее некоторым условиям, имеет интегрирующий множитель. Более того, число интегрирующих множителей данного уравнения бесконечно.

Второй вопрос: как найти интегрирующий множитель? Из определения интегрирующего множителя, используя уравнение (61.6) и теорему о необходимых и достаточных условиях для уравнения в полных дифференциалах, имеем:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

или

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu \quad (61.7)$$

или же, деля обе части равенства (61.7) на μ ,

$$Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (61.8)$$

Таким образом, мы получили в виде (61.7) или (61.8) *уравнение в частных производных* для определения неизвестной функции μ . Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще (а на самом деле сложнее), чем задача решения уравнения (61.2). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (61.7). Иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (61.7), удаётся найти такое частное решение, и тогда интегрирование уравнения (61.2) сводится к квадратурам.

Рассмотрим, например, ситуацию, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией только x : $\mu = \mu(x)$. В этом

случае $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, и уравнение (61.8) превращается в следующее *обыкновенное* дифференциальное уравнение:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \quad (61.9)$$

Для существования $\mu = \mu(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$$

являлось функцией только x , тогда μ находится квадратурой $\mu = e^{\int f(x) dx}$.

Аналогично, для существования $\mu = \mu(y)$ необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = g(y)$$

являлось функцией только y , тогда μ находится квадратурой $\mu = e^{-\int g(y) dy}$.

ПРИМЕР 61.2. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0.$$

Решение: Здесь

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = 1, \quad \mu = e^x.$$

Уравнение

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0.$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Проинтегрируем это уравнение:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + \varphi(y) = \\ &= y \int e^x (2x + x^2) dx + \frac{y^3}{3} e^x + \varphi(y) = ye^x \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Для нахождения $\varphi(y)$ вычисляем $\frac{\partial U}{\partial y}$ и приравняем μQ :

$$e^x(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x(x^2 + y^2),$$

откуда $\varphi'(y) = 0$ и общий интеграл нашего уравнения есть

$$ye^x \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = C.$$

61.3. Решение дифференциальных уравнений в параметрической форме

Рассмотрим в качестве примера решения дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно производной, уравнение вида

$$y = f(y'). \quad (61.10)$$

Если в некоторой точке $y' = y_0$, $f'_y(y'_0) \neq 0$, то уравнение (61.10) можно разрешить относительно y' . Однако это не всегда возможно сделать аналитически, и имеется ряд существенных трудностей при приведении уравнения (61.10) к виду $y' = f^{-1}(y)$.

Тем не менее, покажем, что уравнение (61.10) всегда можно проинтегрировать (точнее, свести к квадратурам). Для этого ищем решение в виде:

$$\begin{cases} y = f(p), \\ x = \varphi(p), \end{cases} \quad (61.11)$$

то есть в параметрической форме. Так как $f(p)$ известно, то для нахождения решения нужно найти функцию $\varphi(p)$, где $\frac{dy}{dx} = p$.

С другой стороны, найдем производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y(x)$, заданной параметрически соотношениями (61.11)

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{f'_p(p)dp}{\varphi'_p(p)dp},$$

и приравняем её параметру p :

$$\frac{f'_p(p)}{\varphi'_p(p)} = p. \quad (61.12)$$

Разрешив (61.12) относительно $\varphi'(p)$, находим

$$\varphi'(p) = \frac{f'(p)}{p},$$

значит

$$\varphi(p) = \int \frac{f'(p)}{p} dp,$$

и окончательно получаем

$$\begin{cases} y = f(p), \\ x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C \end{cases}$$

решение уравнения $y = f(y')$ в параметрической форме в виде квадратур.

ПРИМЕР 61.3. Найти решение уравнения $y = y' + \ln(y')$.

Решение: Будем искать решение в параметрической форме:

$$y = p + \ln(p).$$

С учётом того, что $\frac{dy}{dx} = p$ и дифференцируя предыдущее равенства, получим дифференциальное уравнение для нахождения $x(p)$:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p} \right) dp = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p^2},$$

следовательно, $x = \ln(p) - \frac{1}{p} + C$.

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} x = \ln(p) - \frac{1}{p} + C, \\ y = p + \ln(p). \end{cases}$$

61.4. Особые точки и особые линии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.2. Точку области G , в которой рассматривается дифференциальное уравнение (60.4) (или (60.7)), будем называть обыкновенной точкой уравнения (60.4) или (60.7), если существует такая окрестность этой точки, что через каждую точку этой окрестности проходит ровно одна интегральная кривая и, кроме того, по крайней мере одна из правых частей уравнений (60.4) или (60.7) непрерывна в этой окрестности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.3. *Особой точкой дифференциального уравнения называется точка, не являющаяся обыкновенной точкой.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.4. *Линия, любая точка которой — особая, называется особой линией.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.5. *Если особая линия есть интегральная кривая, она называется особой интегральной кривой.*

ПРИМЕР 61.4. *Ось Ox является особой интегральной кривой для уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y \cdot \ln^2 |y|, & \text{если } y \neq 0; \\ 0, & \text{если } y = 0; \end{cases}$$

поскольку $y = 0$ — это интегральная кривая неединственности.

В конкретных примерах обычно наибольший интерес представляет разыскание интегральных линий неединственности, так как их знание помогает представить картину интегральных кривых в целом.

61.5. Особое решение

Точками неединственности дифференциального уравнения называются те точки, через которые проходит более одного решения по одному и тому же направлению, т.е. эти решения имеют в точке неединственности общую касательную.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.6. *Особое решение — это такое решение дифференциального уравнения, каждая точка которого есть точка неединственности.*

Условия теоремы существования и единственности являются достаточными для того, чтобы в некоторой области G не существовало особого решения. Поэтому для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы существования и единственности, например, в виде теоремы Коши. Следовательно, для того чтобы найти особое решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, необходимо найти линию $y = \varphi(x)$, в каждой точке которой терпит разрыв $f(x, y)$ или $f'_y(x, y)$, и проверить, является ли $y = \varphi(x)$ решением данного уравнения. Если функция $y = \varphi(x)$ окажется решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, то она и будет особым решением.

ПРИМЕР 61.5. Рассмотрим уравнение

$$(y')^3 = y^2.$$

Р е ш е н и е: Это уравнение легко разрешить относительно производной:

$$y' = y^{2/3}.$$

Правая часть этого уравнения $f(x, y) = y^{2/3}$ непрерывна при всех значениях y , однако производная $f'_y(x, y) = 2/(3\sqrt[3]{y})$ терпит бесконечный разрыв при $y = 0$ и неограничена в окрестности оси OX , т.е. условие Липшица в окрестности оси OX не выполнено. Таким образом, каждая точка прямой $y = 0$ является особой. Очевидно, что функция $y = 0$ служит особым решением данного уравнения. Следовательно, решение $y = 0$ является *особым решением*.

Найдем теперь общее решение данного уравнения. Разделяя переменные, находим $\frac{dy}{y^{2/3}} = dx$. Интегрируя, получаем общее решение

$$3y^{1/3} = x + C, \text{ или } y = \frac{(x + C)^3}{27}.$$

Семейство интегральных кривых, соответствующих найденному общему решению, состоит из кубических парабол, получающихся одна из другой сдвигом параллельно оси OX . Так как через каждую точку особого решения $y = 0$ проходит ещё одна интегральная кривая данного уравнения (кубическая парабола), то в каждой точке оси OX нарушается свойство единственности (рис. 8).

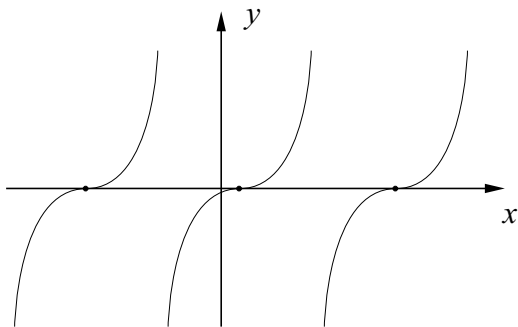


Рис. 8. Интегральные линии уравнения $(y')^3 = y^2$

Заметим, что *особое решение, вообще говоря, не содержится в общем решении и не может быть выделено из него ни при каком конкретном значении постоянной C .*

Рассмотрим, например, уравнение $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$. Как и в предыдущем примере, в каждой точке оси OX нарушены условия теоремы существования и единственности. Однако функция $y = 0$, как легко проверить, не является решением уравнения. Поэтому данное уравнение особых решений не имеет.

61.5.1. Нахождение особого решения. Итак, предположим, что нарушено условие теоремы существования и единственности для дифференциального уравнения, неразрешённого относительно производной $F(x, y, y') = 0$, а именно гладкая функция $F_{y'}(x, y, y')$ обращается в нуль на некотором множестве. Составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F_{y'}(x, y, y') = 0. \end{cases} \quad (61.13)$$

Решение системы (61.13) в плоскости (x, y) называется *дискриминантной кривой*. Это не обязательно особое решение. Верно лишь обратное: если решение особое, то оно принадлежит дискриминантной кривой. Таким образом, для нахождения особого решения следует:

- (1) Найти дискриминантную кривую для системы (61.13), для чего необходимо исключить из неё y' . Запишем дискриминантную кривую в виде $\varphi(x, y) = 0$.
- (2) Проверить, является ли функция, определяемая уравнением

$$\varphi(x, y) = 0,$$

решением дифференциального уравнения или нет. Если такая функция задаёт решение дифференциального уравнения, то это решение особое, если в его окрестности не выполнено условие Липшица, в частности, не ограничена производная $\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{F_{y'}}{F_{y'}}$.

ПРИМЕР 61.6. Рассмотрим уравнение $y - (y')^2 - x = 0$.

Решение: Дискриминантная кривая этого уравнения определяется системой

$$\begin{cases} y - (y')^2 - x = 0, \\ -2y' = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = x,$$

но подстановка $y = x$ в исходное уравнение даёт: $x - 1 - x \neq 0$. Следовательно, $y = x$ не решение и данное уравнение не имеет особых решений.

Заметим, что решение, удовлетворяющее дискриминантной кривой, может не быть особым. Покажем это на следующем примере.

ПРИМЕР 61.7. Найти особые решения уравнения $(y')^3 = y^4$.

Решение: В данном случае дискриминантная кривая определяется системой

$$\begin{cases} (y')^3 - y^4 = 0, \\ 3(y')^2 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $y = 0$. Легко проверить, что $y = 0$ является решением исходного уравнения. Однако на этом решении производная $\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial(y^{4/3})}{\partial y} = 0$, то есть условие Липшица не нарушено, и $y = 0$ не является особым решением данного уравнения.

Действительно, общее решение имеет вид

$$\frac{dy}{y^{4/3}} = dx; \quad -3y^{-1/3} = x + C; \quad y = -\frac{27}{(x + C)^3},$$

и все точки прямой $y = 0$ являются точками единственности (рис. 9).

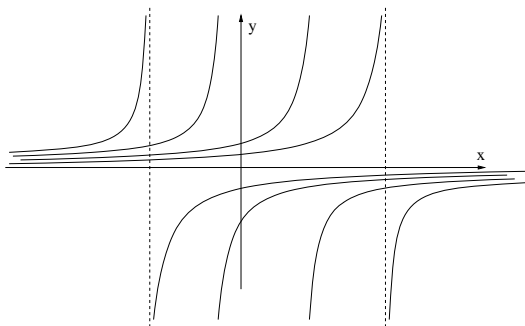


Рис. 9. Интегральные линии уравнения $(y')^3 = y^4$

Таким образом, следует обязательно проверить, выполнены или нет на полученной дискриминантной кривой условия теоремы существования и единственности, и, если они выполняются, то дискриминантная кривая не будет особым решением.

61.6. Дифференциальные уравнения второго порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.7. Уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и её первую и вторую производные y' и y'' , называется дифференциальным уравнением второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (61.14)$$

В частных случаях уравнение (61.14) может не содержать x , y , или y' (или любую их комбинацию), но уравнение второго порядка обязательно должно содержать y'' .

Если это уравнение можно разрешить относительно старшей производной, то оно записывается в виде

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (61.15)$$

Рассмотрим следующую физическую задачу, приводящую к дифференциальному уравнению второго порядка.

ПРИМЕР 61.8. Тело массы m падает в атмосфере под действием силы земного притяжения. Найти закон движения тела, если известно, что в начальный момент времени $t = t_0$ тело находилось над Землей на высоте $y = y_0$ и имело скорость $v = v_0$.

Решение: Примем вертикальную прямую, по которой движется тело, за ось Oy , причём положительное направление оси Oy направлено к Земле. Путь y , пройденный телом, есть некоторая функция времени t : $y = y(t)$. Нам нужно найти эту функцию.

Второй закон Ньютона гласит, что произведение массы тела на его ускорение равно сумме сил, действующих на тело. Известно, что скорость и ускорение тела v и a равны первой и второй производным пути по времени y' и y'' . На тело действуют следующие силы. Это сила тяжести $F_g = mg$, где g – ускорение свободного падения, и сила сопротивления воздуха, которая, если тело плохо обтекаемо, пропорциональна квадрату скорости $F_d = -\lambda v^2$, где λ – коэффициент сопротивления тела, а знак минус означает, что сила сопротивления направлена против движения. Подставляя эти выражения во второй закон Ньютона, получим уравнение

$$ma = F_g + F_d,$$

откуда, после подстановки $a = y''$, $v = y'$ и выражений для F_g и F_d , получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$my'' = mg - \lambda y'^2,$$

решение которого $y = y(t)$ определяет закон движения тела.

Надо найти решение, удовлетворяющее некоторым ограничениям, указанным в условии задачи, а именно, в начальный момент времени $t = t_0$ тело находилось над Землей на высоте $y = y_0$ и имело скорость $v = v_0$. Отсюда следуют начальные условия для функции $y(t)$: $y(t_0) = y_0$ и $y'(t_0) = v_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.8. *Общим решением уравнения (61.14) или (61.15) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащая две произвольные постоянные C_1 и C_2 и удовлетворяющая условиям:*

1) *при любых фиксированных C_1 и C_2 функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением уравнения;*

2) *каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, существуют единственные значения C_{10} и C_{20} постоянных C_1 и C_2 такие, что функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ является решением уравнения и удовлетворяет этим начальным условиям.*

Геометрически общее решение представляет бесконечное множество кривых. Для выделения из этого множества какой-либо одной необходимо, кроме координат точки (x_0, y_0) , через которую эти кривые проходят, дополнительно задать ещё одно условие, например, угловой коэффициент касательной, т.е. значение производной y' в этой точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61.9. *Частным решением уравнения (61.14), или (61.15), называется всякое решение $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при фиксированных значениях $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 61.1. 1) *Соотношение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения (61.15).*

2) *График частного решения называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.*

61.7. Теорема существования и единственности решения (теорема Коши)

ТЕОРЕМА 61.1. Если правая часть $f(x, y, y')$ дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ и её частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ определены и непрерывны в некоторой области G переменных x, y и y' , то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0, y'_0) этой области, существует и притом единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.

Теорема приводится без доказательства.

61.8. Задача Коши и краевая задача

Итак, для получения частного решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо задать два дополнительных условия. В зависимости от способа задания этих дополнительных условий существует два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и её производной в некоторых точках исследуемой области.

Если эти условия задаются в одной точке, то мы имеем дело с задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями, а точка $x = x_0$, в которой они задаются, – начальной точкой. Математическая формулировка задачи Коши имеет вид:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (61.16)$$

Если дополнительные условия задаются в более чем одной точке, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются при этом граничными или краевыми условиями. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами области решения дифференциального уравнения. Математическая формулировка краевой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b. \end{cases} \quad (61.17)$$

В этом случае не существует теоремы, подобной теореме Коши, и в зависимости от граничных условий задача может иметь единственное решение, может иметь бесчисленное множество решений или вообще не иметь решения.

Например, общим решением уравнения $y'' + y = 0$ является функция

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

что легко проверить непосредственной подстановкой.

Рассмотрим три случая задания дополнительных условий:

1) $y(0) = y(\pi) = 0$; в этом случае из условия $y(0) = 0$ находим $C_2 = 0$, следовательно, $y = C_1 \sin x$ и при втором условии $y(\pi) = 0$ получаем бесчисленное множество решений (рис.10).

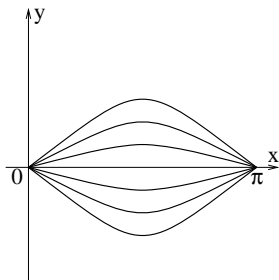


Рис. 10. Бесчисленное множество решений краевой задачи

2) $y(0) = 0, \quad y(b) = 1; \quad 0 < b < \pi$; в этом случае существует единственное решение $y = \frac{\sin x}{\sin b}$ (рис. 11).

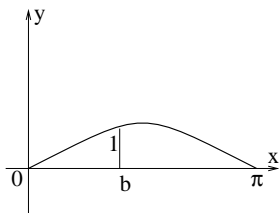


Рис. 11. Единственное решение краевой задачи

3) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$; в этом случае решений нет, так как не существует синусоиды $y = C_1 \sin x$, получающейся из первого граничного условия ($y(0) = 0$), которая проходит также через точку $(\pi, 1)$.

61.9. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, которые с помощью замены переменной приводятся к уравнениям первого порядка. Такое преобразование уравнения называется понижением порядка.

1. Уравнение не содержит y и y' :

$$y'' = f(x). \quad (61.18)$$

Обозначим производную через новую переменную $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$. Подставляем новое значение производной в исходное уравнение (61.18), получим уравнение первого порядка:

$$p'(x) = f(x),$$

решая которое, имеем

$$p(x) = \int f(x) dx = F(x) + C_1.$$

Так как $p(x) = y'$, то $y' = F(x) + C_1$. Отсюда, интегрируя ещё раз, находим общее решение уравнения (61.18):

$$y = \int F(x) dx + C_1 x + C_2.$$

ПРИМЕР 61.9. Найти общее решение уравнения $y'' = \cos x$.

Решение: Полагая $y' = p(x)$, получаем $y'' = p'(x)$ и следовательно, необходимо решить уравнение первого порядка

$$p'(x) = \cos x.$$

Решение этого уравнения $p(x) = \int \cos x dx = \sin x + C_1$. Заменяя $p(x)$ на y' и интегрируя ещё раз, находим общее решение уравнения:

$$y = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

2. Уравнение не содержит явным образом искомой функции y :

$$f(x, y', y'') = 0. \quad (61.19)$$

Вводя, как и предыдущем случае, новую функцию $y' = p(x)$ и замечая, что $y'' = p'(x)$, получаем уравнение первого порядка, относительно функции $p(x)$:

$$f(x, p, p') = 0.$$

Допустим, нам удалось найти его общее решение $p = \varphi(x, C_1)$, тогда после подстановки в него $p = \frac{dy}{dx}$ получаем общий интеграл уравнения (61.19)

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

ПРИМЕР 61.10. Найти частное решение уравнения

$$(1 + x^2)y'' = 2xy' \quad \text{при} \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Решение: Положим $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Получим уравнение первого порядка

$$p'(x) = \frac{2xp}{1 + x^2}.$$

Разделим в этом уравнении переменные и проинтегрируем его

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x dx}{1 + x^2} \Rightarrow \ln |p| = \ln(1 + x^2) + \ln |C_1|.$$

Потенцируя, находим

$$p = C_1(1 + x^2).$$

Так как $p = y'$, то $y' = C_1(1 + x^2)$. Интегрируя последнее уравнение, получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2.$$

Используя дополнительные начальные условия, получим систему из двух уравнений и найдем частное решение

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(1) = 0, \\ y'(1) = 1, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1(1 + \frac{1}{3}) + C_2 = 0, \\ C_1(1 + 1) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = \frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{2}{3}, \\ C_1 = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}.$$

3. Уравнение не содержит явным образом независимую переменную x :

$$f(y, y', y'') = 0. \quad (61.20)$$

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $p(y)$, зависящую от переменной y , полагая $y' = p(y)$. Дифференцируем последнее равенство по x по правилу дифференцирования сложной функции с учётом того, что y является функцией от x :

$$y'' \equiv \frac{d(y')}{dx} \equiv \frac{dp(y)}{dx} \equiv \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Так как $\frac{dy}{dx} \equiv y' \equiv p(y)$, то окончательно

$$y'' \equiv \frac{dp(y)}{dy} \cdot p(y).$$

Подставляя выражение для y' и y'' в исходное уравнение (61.20), получаем уравнение первого порядка относительно функции $p(y)$:

$$f\left(y, p, \frac{dp}{dy} \cdot p\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, можно найти:

$$p = \varphi(y, C_1).$$

Подставляя найденный интеграл $p = \varphi(y, C_1)$ в соотношение $y' = p(y)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции y от x :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получим общий интеграл исходного уравнения (61.20):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

ПРИМЕР 61.11. Найти общее решение уравнения $yy'' = y'^2$.

Р е ш е н и е: Введем новую переменную $y' = p(y)$, тогда $y'' = p \frac{dp}{dy}$, и наше уравнение преобразуется к виду:

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2.$$

Предполагая, что $p \neq 0$, сократим это уравнение на p , разделим переменные $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ и проинтегрируем:

$$\ln |p| = \ln |y| + \ln |C_1| \Rightarrow p = C_1 y.$$

Поскольку $y' = p(y)$ мы имеем уравнение

$$y' = C_1 y.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln |y| = C_1 x + \ln |C_2| \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Решение уравнения $p = 0$ ($y = \text{const}$) содержится в полученном общем решении при $C_1 = 0$.

4. Если дифференциальное уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ однородно относительно искомой функции y и ее производных, т. е. $F(x, ky, ky', ky'') = k^n F(x, y, y', y'')$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, найдем выражение для y'' . Дифференцируя $y' = yz$ по x и заменяя y' на yz , будем иметь:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

то есть все выражения для производных содержат y как множитель. В силу предположенной однородности при одновременной замене y, y', y'' на ky, ky', ky'' уравнение не изменяется, поэтому, взяв $k = 1/y$, можно исключить y из уравнения и понизить порядок уравнения на единицу.

ПРИМЕР 61.12. Проинтегрировать уравнение

$$x^2 y'' - (y - xy')^2 = 0.$$

Р е ш е н и е: Левая часть уравнения – однородная функция относительно переменных y, y', y'' с показателем однородности $n = 2$:

$$F(x, \lambda^t y, \lambda^t y', \lambda^t y'') = \lambda^{2t} [x^2 y'' - (y - xy')^2] = \lambda^{2t} F(x, y, y', y'').$$

Сделаем замену $y' = yu$. Тогда $y'' = y'u + yu' = y(u^2 + u')$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция. После подстановки в исходное уравнение получим

$$\begin{aligned}x^2 y^2 (u^2 + u') - (y - xyu)^2 &= 0, \\ y^2 [x^2 (u^2 + u') - (1 - xu)^2] &= 0.\end{aligned}$$

Функция $y \equiv 0$, очевидно, является решением данного уравнения. При $y \neq 0$ имеем

$$x^2 u^2 + x^2 u' - 1 + 2xu - x^2 u^2 = 0,$$

откуда для функции u получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2},$$

которое легко интегрируется методом вариации произвольной постоянной.

Действительно, решение соответствующего однородного уравнения $u' + \frac{2}{x}u = 0$ имеет вид $u = \frac{C}{x^2}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $u = \frac{C(x)}{x^2}$, следовательно $u' = \frac{C'}{x^2} - \frac{2C}{x^3}$, и после подстановки выражений для u и u' в уравнение получаем $C' = 1$, откуда находим $C = x + C_1$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$u = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Согласно произведённой замене имеем

$$\begin{aligned}y' = yu &\Rightarrow y'/y = u \Rightarrow (\ln |y|)' = u \Rightarrow \ln |y| = \int u \, dx \Rightarrow y = C_2 e^{\int u \, dx}, \\ y &= C_2 e^{\int (\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}) dx} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.\end{aligned}$$

Решение $y \equiv 0$ получается при $C_2 = 0$ и, следовательно, входит в общее решение.

Практическое занятие 61. Уравнения первого и второго порядков

ПРИМЕР 61.1. Найти общее решение уравнения

$$(2 - 9xy^2)dx + (4y^2 - 6x^3)dy = 0.$$

Р е ш е н и е: Уравнение не принадлежит ни к одному из типов, рассмотренных на предыдущем занятии: в нём нельзя разделить переменные, а также оно не является однородным или линейным. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Тогда можно найти функцию $U(x, y)$, такую что $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, и общий интеграл уравнения будет иметь вид $U(x, y) = \text{const}$.

В данном уравнении

$$P(x, y) = (2 - 9xy^2)x, \quad \text{а} \quad Q(x, y) = (4y^2 - 6x^3)y.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -18x^2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -18x^2y,$$

то есть требуемое тождество $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, которое является необходимым и достаточным условием того, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, выполнено.

Проинтегрировав функцию $P(x, y) = U'_x$ по переменной x , получим функцию U :

$$U = \int (2 - 9xy^2)xdx = x^2 - 3y^2x^3 + C,$$

где C является функцией от y :

$$U = x^2 - 3y^2x^3 + \varphi(y),$$

Найдем $\varphi(y)$, продифференцировав U по переменной y и учитывая, что $U'_y = Q$:

$$\begin{aligned} U'_y &= -6x^3y + \varphi(y); \\ -6x^3y + \varphi(y) &= 4y^2 - 6x^3y; \\ \varphi'(y) &= 4y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^4; \\ U(x, y) &= x^2 - 3y^2x^3 + y^4. \end{aligned}$$

Тогда функция $U(x, y) = C$ будет искомым решением уравнения в полных дифференциалах:

$$x^2 - 3y^2x^3 + y^4 = C.$$

ПРИМЕР 61.2. Решить уравнение

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

Р е ш е н и е: Аналогично предыдущей задаче, проверим условие выполнения тождества $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (e^{-y})'_y = -e^{-y},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-2y - xe^{-y})'_x = -e^{-y}.$$

Найдем функцию U , интегрируя $P(x, y)$:

$$U(x, y) = \int e^{-y}dx = xe^{-y} + \varphi(y),$$

$$U'_y = -xe^{-y} + \varphi'_y = Q = -2y - xe^{-y} \Rightarrow \varphi'(y) = -2y,$$

$$\varphi(y) = -y^2.$$

Тогда $U(x, y) = xe^{-y} - y^2$, а искомое решение – функция

$$xe^{-y} - y^2 = C.$$

ПРИМЕР 61.3. Решить уравнение

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$$

Р е ш е н и е: Убедимся, что данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2 + x)'_y = 2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y'_x = 0. \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теперь проверим, нельзя ли найти интегрирующий множитель, который зависит только от одной переменной. Для этого посмотрим, от каких переменных зависят выражения

$$\frac{P'_y - Q'_x}{P} \quad \text{и} \quad \frac{P'_y - Q'_x}{Q}.$$

Найдем, что $\frac{P'_y - Q'_x}{P} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + x}$ – зависит от обеих переменных; вычислим $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2y}{y} = 2$. Будем считать, что это выражение зависит от x .

Так как выражение $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ зависит только от одной переменной (в нашем случае от x), то существует интегрирующий множитель $\mu(x)$, зависящий от этой переменной. Попробуем вычислить функцию $\mu(x)$, домножив на неё исходное уравнение и используя условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Получим

$$\mu(x)(x^2 + y^2 + x) dx + \mu(x)y dy = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\mu(x)(x^2 + y^2 + x))'_y = 2\mu(x)y;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\mu(x)y)'_x = y\mu'_x;$$

$$2\mu y = y\mu'_x.$$

Из полученного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными найдем μ :

$$\mu = C_1 e^{2x}.$$

Поскольку в полученном решении C_1 – произвольная постоянная, то примем $C_1 = 1$. Домножим исходное уравнение на полученный интегрирующий множитель:

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + ye^{2x}dy = 0.$$

Легко проверить, что полученное уравнение уже является уравнением в полных дифференциалах и при решении его описанным выше способом получается функция

$$2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$$

Рассмотрим на следующем примере ещё один важный метод нахождения общего решения.

ПРИМЕР 61.4. Решить уравнение

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx.$$

Р е ш е н и е: Легко проверить, что уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, но его левая часть напоминает числитель в полном дифференциале дроби $d\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \frac{x dy - y dx}{x^2}$.

Чтобы в левой части получился полный дифференциал, разделим обе части уравнения на x^2 . Тогда получим уравнение

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = 2x \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx \quad \Leftrightarrow \quad -d\left(\frac{y}{x}\right) = 2x \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx.$$

Теперь, сделав замену переменных $t = \frac{y}{x}$, получим уравнение

$$-dt = 2x \operatorname{tg} t dx,$$

которое решается разделением переменных.

Такой метод решения называется методом выделения полных дифференциалов.

Решим полученное уравнение:

$$\operatorname{ctg} t dt = -2x dx \quad \Rightarrow \quad \ln |\sin t| = -x^2 + \ln |C|,$$

$$\sin t = C e^{-x^2}.$$

Делая обратную замену переменных, получим общий интеграл:

$$\sin \frac{y}{x} = C e^{-x^2}.$$

ПРИМЕР 61.5. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е: Данное уравнение соответствует типу $y'' = f(x)$, поэтому можно применить замену переменной $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и исходное уравнение переписывается в виде

$$p' = \frac{1}{x}.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$$p' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dp = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int dp = \int \frac{dx}{x};$$

$$p = \ln |x| + \ln C_0 \Rightarrow p = \ln(C_1 x).$$

Переходя к старой переменной y ($y' = p(x)$), решим уравнение $y' = \ln(C_1 x)$:

$$y' = \ln(C_1 x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln(C_1 x) \Rightarrow dy = \ln(C_1 x) dx$$

$$\int dy = \int \ln(C_1 x) dx \Rightarrow y = \int \ln(C_1 x) dx.$$

Последний интеграл возьмём по частям

$$y = \int \ln(C_1 x) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(C_1 x), \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x. \end{array} \right|$$

$$= x \cdot \ln(C_1 x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(C_1 x) - x + C_2 =$$

$$= x(\ln C_1 + \ln |x|) - x + C_2 = x \cdot \ln |x| + C \cdot x + C_2,$$

где $C = \ln C_1 - 1$.

Следовательно, общим решением данного уравнения является функция

$$y = x \ln |x| + Cx + C_2.$$

ПРИМЕР 61.6. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' = e^x y'^2.$$

Решение: Данное уравнение не содержит явным образом неизвестной функции, а содержит только её производные. Положив $y' = p(x)$, $y'' = p'$, для p получим уравнение Бернулли:

$$p' + 2p = e^x p^2. \quad (61.1)$$

Очевидно, уравнение (61.1) допускает решение $p = 0$, которое равносильно $y' = 0$, следовательно, имеем решение исходного уравнения $y = C$.

Разделив левую и правую части уравнения (61.1) на $p^2 \neq 0$ и положив $p^{-1} = z$, для z получим линейное уравнение первого порядка $z' - 2z = -e^{-x}$, общее решение которого имеет вид

$$z = e^{2x}(C_1 + e^{-x}).$$

Используя обратную замену $p = z^{-1}$, имеем

$$p = \frac{1}{e^x + C_1 e^{2x}}, \quad y = \int \frac{dx}{e^x + C_1 e^{2x}} + C_2.$$

Для вычисления этого интеграла сделаем подстановку

$$e^x = t, \quad d e^x = e^x dx = dt.$$

В результате подстановки получим

$$\int \frac{dx}{e^x + C_1 e^{2x}} = \int \frac{dt}{t^2(1 + C_1 t)}.$$

Рациональную дробь в последнем интеграле разложим на простейшие дроби, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{t^2(1 + C_1 t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1 + C_1 t}.$$

Приводя сумму простейших дробей к общему знаменателю и задавая значения t , например, $t = 0$, $t = 1$ и $t = 1/C_1$, найдем коэффициенты A , B , C : $A = -C_1$, $B = 1$ и $C = C_1^2$.

Тогда интеграл легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2(1 + C_1 t)} &= \int \left[\frac{1}{t^2} - \frac{C_1}{t} + \frac{C_1^2}{1 + C_1 t} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{t} - C_1 \ln |t| + C_1 \ln |1 + C_1 t| + C_2. \end{aligned}$$

Используя обратную подстановку $t = e^x$, получим решение исходного уравнения

$$y = -e^{-x} - C_1 x + C_1 \ln |1 + C_1 e^x| + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Решением уравнения является также функция $y = C = \text{const}$ ($p = 0$).

ПРИМЕР 61.7. Найти общее решение уравнения

$$1 + y'^2 = 2yy''.$$

Решение: В данном уравнении аргумент x присутствует неявно, только в виде переменной, по которой производится дифференцирование функции $y(x)$ и, следовательно, y' и y'' обозначают производные по x : $y' \equiv y'_x$ и $y'' \equiv y''_{xx}$. Поэтому для решения уравнения введем новую неизвестную функцию $p(y)$, полагая $y'_x = p(y)$; тогда получим $y''_{xx} = \frac{dp}{dy}p$. Подставляя эти выражения для y' и y'' в данное дифференциальное уравнение, получаем

$$1 + p^2 = 2yp \frac{dp}{dy}.$$

Это уравнение первого порядка является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, находим $\ln(1+p^2) = \ln|y| + \ln|C_0|$. Отсюда $1+p^2 = C_1y$ и $p = \pm\sqrt{C_1y-1}$.

Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1y-1}$ и, следовательно,

$$dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл

$$x + C_2 = \pm \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1y-1}, \quad \text{или} \quad (x + C_2)^2 = \frac{4}{C_1^2} (C_1y-1),$$

откуда находим общее решение

$$y = \frac{C_1^2(x + C_2)^2 + 4}{4C_1}.$$

ПРИМЕР 61.8. Решить уравнение

$$yy'' = y'(y' + 1).$$

Решение: Преобразуем данное уравнение к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись производными или полными дифференциалами некоторых выражений. Для этого поделим уравнение на $y(y' + 1)$. При этом, естественно, предполагаем, что $y \neq 0$, $(y' + 1) \neq 0$. Получим

$$\frac{y''}{y' + 1} = \frac{y'}{y}.$$

Заметим, что полученное уравнение можно записать в виде

$$(\ln(y' + 1))' = (\ln y)',$$

так что правая и левая части являются производными или, что то же самое, полными дифференциалами некоторых выражений. После интегрирования находим

$$\ln(y' + 1) = \ln y + \ln|C_1|,$$

и после потенцирования получим

$$y' + 1 = C_1y.$$

Полученный первый интеграл представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1 &\Rightarrow \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{dy}{y - \frac{1}{C_1}} = C_1 dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left| y - \frac{1}{C_1} \right| = C_1 x + \ln |C_2|.\end{aligned}$$

После потенцирования получаем общее решение в явном виде

$$y = \frac{1}{C_1} + C_2 e^{C_1 x}.$$

Осталось только проверить, являются ли решениями выражения, которые предполагались не равными нулю при преобразовании уравнения к полным производным: $y \neq 0$, $(y' + 1) \neq 0$.

Очевидно, что $y = 0$ является решением данного уравнения. Далее, из соотношения $y' + 1 = 0$ находим $y = -x + C_1$, что также является решением.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 61.9. Найти общее решение уравнения $(x + y + 2)dx + (x + 3y + 4)dy = 0$.

ПРИМЕР 61.10. Найти общее решение уравнения

$$\left(\frac{2y^2}{x} - \frac{3y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{3}{x} + 4y \ln x \right) dy = 0.$$

ПРИМЕР 61.11. Найти общее решение уравнения

$$(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0.$$

ПРИМЕР 61.12. Найти общее решение уравнения

$$(3x^2 + 2xy^3)dx + (2x^2y^2 - 2y^3)dy = 0.$$

ПРИМЕР 61.13. Найти общее решение уравнения (вначале найти интегрирующий множитель) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

ПРИМЕР 61.14. Найти общее решение уравнения (вначале найти интегрирующий множитель) $\left(\frac{2y}{x} - 3x^2 \right) dx + dy = 0$.

ПРИМЕР 61.15. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

ПРИМЕР 61.16. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{2}{\sqrt{x+9}}$.

ПРИМЕР 61.17. Найти частное решение уравнения $y'' = xe^{-x}$, при $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

ПРИМЕР 61.18. Найти частное решение уравнения $y'' = \sin^2 x \cos x$, при $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

ПРИМЕР 61.19. Найти общее решение уравнения $xy'' + y' = 0$.

ПРИМЕР 61.20. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' \operatorname{tg} 3x = 0$.

ПРИМЕР 61.21. Найти общее решение уравнения $(e^x + 2)y'' - e^x y' = 0$.

ПРИМЕР 61.22. Найти частное решение уравнения $xy'' - y' = x^2 e^x$, при $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

ПРИМЕР 61.23. Найти общее решение уравнения $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

ПРИМЕР 61.24. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'^2}{y+1}$.

ПРИМЕР 61.25. Найти общее решение уравнения $(y^2 + 4)y'' = 2yy'^2$.

ПРИМЕР 61.26. Найти частное решение уравнения $y'' = y'^2 - y$, при $y(1) = -\frac{1}{4}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$.

Лекция 62. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

62.1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.1. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \quad (62.1)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение принимает вид

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (62.2)$$

и называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка (или уравнением без правой части). Если же $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (62.1) называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением.

Уравнение (62.1) можно разрешить относительно старшей производной y'' , если $a_0(x) \neq 0$:

$$y'' = \frac{f(x) - a_1(x)y' - a_2(x)y}{a_0(x)}. \quad (62.3)$$

Так как это уравнение является частным случаем дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$, то для него справедлива теорема существования и единственности решения (теорема Коши), сформулированная в предыдущей лекции. Однако для линейного уравнения эта теорема может быть сформулирована проще.

Действительно, если коэффициенты уравнения $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и свободный член $f(x)$ непрерывны на некотором интервале (α, β) , причём коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, тогда правая часть уравнения (62.3) и её частные производные по y и y'

$$f(x, y, y') = \frac{f(x) - a_1(x)y' - a_2(x)y}{a_0(x)},$$

$$f'_y(x, y, y') = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \quad f'_{y'}(x, y, y') = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

являются непрерывными функциями при любых значениях x , принадлежащих интервалу (α, β) .

ТЕОРЕМА 62.1. (Теорема существования и единственности решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (теорема Коши)). Если коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и правая часть $f(x)$ линейного дифференциального уравнения (62.1) непрерывны на интервале (α, β) , причём коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, то каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$, где точка x_0 принадлежит интервалу (α, β) , существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

62.2. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.2. Выражение $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ называется линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

ТЕОРЕМА 62.2. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения (62.2), то их линейная комбинация $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ также является решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2 .

Доказательство. Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения, то

$$\begin{cases} a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) \equiv 0, \\ a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) \equiv 0. \end{cases} \quad (62.4)$$

Подставляя в уравнение (62.2) функцию $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ и принимая во внимание (62.4), будем иметь:

$$\begin{aligned} & a_0(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]'' + a_1(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]' + \\ & + a_2(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] \equiv a_0(x)[C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x)] + \\ & + a_1(x)[C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)] + a_2(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] \equiv \\ & \equiv C_1[a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)] + \\ & + C_2[a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)] \equiv \\ & \equiv C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

т.е. $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ является решением уравнения (62.2).

Следствие. Если функция $y = y_1(x)$ является частным решением линейного однородного уравнения (62.2), то произведение этой функции на любую постоянную $y = C_1y_1(x)$ также является решением однородного уравнения. Этот факт следует из теоремы 62.2, если положить в ней $C_2 = 0$.

Если мы каким-то образом нашли два решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, а, напомним, общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ дифференциального уравнения второго порядка по определению должно содержать две произвольные постоянные C_1 и C_2 , то возникает вопрос: не будет ли всегда решение $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ общим решением уравнения (62.2)?

Можно убедиться, что это не всегда справедливо. Например, частными решениями уравнения $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$, как легко проверить, являются $y_1 = x^2$, $y_2 = 3x^2$, $y_3 = x^3$ и т.д. Однако не любая линейная комбинация первых двух функций будет *общим* решением данного уравнения. Действительно, ни при каких начальных условиях нельзя получить частное решение $y_3 = x^3$ из линейной комбинации $Y = C_1 x^2 + C_2 \cdot 3x^2$.

Для ответа на поставленный вопрос, введем два следующих определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.3. Два решения линейного однородного уравнения (62.2) называются *линейно независимыми на отрезке $[a, b]$* , если их линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ тождественно равна нулю на этом отрезке только при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

При этом их отношение на отрезке $[a, b]$ не является постоянным:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$$

и невозможно линейно выразить одну функцию через другую.

В противном случае, т.е. когда существуют такие постоянные C_1 и C_2 , по крайней мере одна из которых не равна нулю, что $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, решения называются *линейно зависимыми*.

В этом случае одна из функций линейно выражается через другую

$$y_1(x) = \lambda y_2(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 62.1. Эти определения легко распространяются на случай n функций.

ПРИМЕР 62.1. Доказать, что функции x^2 и $x|x|$, где $x \in [-1, 1]$ — линейно независимы на отрезке $[-1, 1]$.

Р е ш е н и е: Доказать этот факт можно от противного. Предположим, что

$$C_1 x^2 + C_2 x|x| \equiv 0.$$

Тогда, подставляя в это тождество значения $x = 1$ и $x = -1$, получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$.

ПРИМЕР 62.2. На любом интервале линейно зависимой системой функций являются функции $\{\sin^2 x, \cos^2 x, 1\}$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

В дальнейшем мы используем некоторый определитель второго порядка, называемый определителем Вронского.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ заданы как функции от x , то определитель

$$W(x) \equiv W[y_1(x), y_2(x)] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (62.5)$$

называется определителем Вронского или вронскианом этих функций.

ТЕОРЕМА 62.3. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то их определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Доказательство. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы, то $y_2(x) = \lambda y_1(x)$ и

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \lambda y_1(x) \\ y_1'(x) & \lambda y_1'(x) \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} \equiv 0. \end{aligned}$$

Для произвольных функций, не являющихся решениями какого-либо однородного линейного уравнения (любого порядка), можно сформулировать следующее правило.

Либо $W(x) \neq 0$, тогда функции линейно независимы (это легко доказывается от противного), либо $W(x)$ тождественно равен нулю, тогда ничего определённого о линейной зависимости или независимости этих функций сказать нельзя.

Утверждение, что если $W(x) \equiv 0$, то функции линейно зависимы, вообще говоря, неверно. Покажем это на следующем примере. Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x|x|$, которые, как показано выше, линейно независимы на интервале $[-1, 1]$. Вычислим её определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & |x| + x \operatorname{sgn} x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2|x| + x^3 \operatorname{sgn} x - 2x^2|x| = x^3 \operatorname{sgn} x - x^2|x| \equiv 0.$$

Однако для решений линейного однородного дифференциального уравнения справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 62.4. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые на интервале (a, b) решения уравнения (62.2), то их определитель Вронского $W[y_1(x), y_2(x)]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует значение $x_0 \in (a, b)$, такое что $W(x_0) = 0$. Обозначим значения функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и их производных в точке x_0 следующим образом $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_1'(x_0) = y'_{10}$, и $y_2(x_0) = y_{20}$, $y_2'(x_0) = y'_{20}$ и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = 0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = 0. \end{cases} \quad (62.6)$$

В системе (62.6) величины C_1 , C_2 неизвестны. Так как $W(x_0) = 0$, то определитель этой системы равен нулю. Поэтому существует ненулевое решение однородной системы (62.6): $C_1 = \tilde{C}_1$, $C_2 = \tilde{C}_2$, такое что не все \tilde{C}_i равны нулю.

Составим функцию $\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x)$, используя в качестве постоянных это решение системы (62.6); по теореме 62.2 она является решением уравнения (62.2).

При $x = x_0$ получаем:

$$\tilde{y}(x_0) = 0, \quad \tilde{y}'(x_0) = 0. \quad (62.7)$$

Но по теореме существования и единственности 62.1 начальные условия (62.7) определяют *единственное* решение уравнения (62.2). Но таким решением, очевидно, является тривиальное (равное нулю всюду) решение $y(x) \equiv 0$, которое, очевидно, также удовлетворяет нулевым начальным условиям (62.7). Следовательно, построенное нами решение $\tilde{y}(x)$ должно совпасть с тривиальным

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0,$$

и, значит, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Вывод из теорем 62.3 и 62.4: Определитель Вронского, составленный для системы двух функций, являющихся решениями линейных однородных уравнений, либо тождественно равен нулю, либо не равен

нулю ни при каком $x \in (a, b)$, на котором коэффициенты уравнения (62.2) непрерывны и $a_0(x) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.5. *Фундаментальной системой называют любую систему частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, являющихся линейно независимыми на интервале (a, b) .*

Можно дать и другое определение фундаментальной системы, которое, вследствие теоремы 62.4, равносильно вышеприведённому.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.6. *Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка образуют фундаментальную систему решений на некотором интервале (a, b) , если ни в одной точке этого интервала определитель Вронского не равен нулю $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 62.2. *Очевидно, что всякое линейное однородное уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$. Однако это решение ни с одним другим частным решением не образует фундаментальной системы решений, так как в этом случае определитель Вронского тождественно равен нулю.*

ТЕОРЕМА 62.5. *(О структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ уравнения (62.2) образуют на интервале (a, b) фундаментальную систему решений, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (62.8)$$

Доказательство. На основании теоремы 62.2 функция (62.8) является решением уравнения (62.2) при любых значениях C_1 и C_2 . Чтобы убедиться, что это решение является общим, необходимо показать, что из него всегда можно найти единственное частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Подставляя начальные условия в выражения

$$\begin{cases} Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \\ Y'(x) = C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x), \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0). \end{cases}$$

Последние два равенства представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_1 и C_2 , причём определитель этой системы

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

является определителем Вронского для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при $x = x_0$. Так как по условию теоремы частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему частных решений на интервале (a, b) , которому принадлежит точка x_0 , то $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение:

$$C_{10} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}}{W(x_0)}, \quad C_{20} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W(x_0)}.$$

Таким образом, существует частное решение

$$Y(x) = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям, и притом единственное.

Можно показать, что если два линейных однородных уравнения вида (62.2) с одинаковыми коэффициентами $a_0(x)$ при y'' имеют общую фундаментальную систему, то они тождественны между собой, т.е. их коэффициенты совпадают. Таким образом, фундаментальная система решений вполне определяет линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным единице.

Действительно, пусть дана фундаментальная система решений $\{y_1(x), y_2(x)\}$ на интервале (a, b) . Построим дифференциальное уравнение, имеющее решения, совпадающие с данной системой функций.

Составим и приравняем к нулю следующий определитель третьего порядка, в котором y обозначает искомую функцию:

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y \\ y'_1(x) & y'_2(x) & y' \\ y''_1(x) & y''_2(x) & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель представляет собой определитель Вронского для трёх функций $y_1(x), y_2(x), y$.

Легко видеть, что при подстановке в последний столбец вместо y, y', y'' функций $y_1(x)$ или $y_2(x)$ и их соответствующих производных получается определитель с двумя равными столбцами, который равен нулю. Следовательно уравнение (62.9) имеет частные решения $y_1(x), y_2(x)$.

Раскрывая определитель (62.9) по элементам третьего столбца, начиная разложение определителя $W(x)$ с элемента в нижнем правом углу, найдем, что уравнение (62.9) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка для функции y :

$$y'' \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = 0. \quad (62.9)$$

Коэффициент при y'' равен $W[y_1(x), y_2(x)]$, который, поскольку $y_1(x), y_2(x)$ образуют фундаментальную систему, не равен нулю на интервале (a, b) . Если разделить обе части уравнения (62.9) на W , то мы получим линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным единице. Как было указано выше, такое уравнение однозначно определяется фундаментальной системой.

Если исходное уравнение имело вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

то после деления уравнения (62.9) на $W[y_1(x), y_2(x)]$ (коэффициент при y'') и сравнения коэффициентов этих уравнений получаем:

$$p(x) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W[y_1(x), y_2(x)]}. \quad (62.10)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что определитель в числителе в правой части равенства (62.10) есть производная от определителя Вронского $W[y_1(x), y_2(x)] \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ в знаменателе.

Таким образом, уравнение (62.10) следует понимать как дифференциальное уравнение для W , в котором функция $p(x)$ известна:

$$p(x) = - \frac{W'}{W},$$

из которого, разделяя переменные, последовательно получим

$$\int p(x)dx = - \int \frac{dW}{W}; \quad \Rightarrow \quad - \int p(x)dx + \ln |C| = \ln |W|,$$

откуда после потенцирования и определения постоянной $C = W(x_0)$ имеем

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}. \quad (62.11)$$

Формула (62.11) называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Покажем, как можно использовать формулу Остроградского-Лиувилля, если известно одно частное решение $y_1(x)$ уравнения второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

для нахождения второго частного решения $y_2(x)$, линейного независимого от первого.

Пусть $y_2(x)$ — любое решение, отличное от $y_1(x)$. Составляем $W[y_1(x), y_2(x)]$ и используем формулу Остроградского-Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx}.$$

Получаем для $y_2(x)$ линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель Вронского, получим:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx};$$

деля обе части на $y_1^2(x)$ и используя тот факт, что

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)} \equiv \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right)',$$

находим:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right) = \frac{1}{y_1^2(x)} C_1 e^{-\int p(x)dx},$$

откуда $y_2(x)/y_1(x)$ находится квадратурой

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2.$$

Поскольку мы ищем частное решение, положим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Окончательно получаем

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx. \quad (62.12)$$

Таким образом, если известно одно частное решение уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.

ПРИМЕР 62.3. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad (62.13)$$

если известно одно его частное решение $y_1 = x$.

Легко проверить, что уравнение (62.13) действительно имеет частное решение $y_1 = x$. Найдем теперь второе решение. В нашем случае $p(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ и формула (62.12) даёт:

$$\begin{aligned} y_2 &= x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = Cx \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \\ &= Cx \int \left(\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{dx}{1+x} \right) = \\ &= Cx \left[\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) + C_1 \right] = \tilde{C}_1 x + C \left(\frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Можно рассматривать полученное выражение как общее решение данного уравнения. Второе частное решение можно получить, взяв $\tilde{C}_1 = 0$ и $C = 1$:

$$y_2 = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$$

62.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь уравнение (62.2), в котором все коэффициенты являются постоянными величинами. Оказывается, в этом случае несложно найти его общее решение. Такие уравнения называются уравнениями с постоянными коэффициентами. Они имеют широкие приложения в технике.

Исследуем свойства решений уравнения

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

в котором коэффициенты a_0, a_1, a_2 постоянны и $a_0 \neq 0$. Разделив почленно это уравнение на a_0 и обозначив $a_1/a_0 = p$, $a_2/a_0 = q$, запишем его в виде

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (62.14)$$

Оказывается, если коэффициенты уравнения (62.14) являются действительными числами, то это уравнение всегда можно проинтегрировать в элементарных функциях, более того, интегрирование уравнения (62.14) сводится даже не к квадратурам, а к алгебраическим операциям.

В силу общих свойств линейных уравнений нам достаточно найти два частных решения, образующих фундаментальную систему. Выясним, какие элементарные функции могли бы обратить уравнение (62.14) в тождество.

Попробуем найти решение этого уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k — неизвестная постоянная. Дифференцируя эту функцию дважды ($y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$) и подставляя $y = e^{kx}$ и ее производные в уравнение (62.14), получим

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то после сокращения на e^{kx} , будем иметь:

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (62.15)$$

Это уравнение определяет значения k , при которых функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (62.14).

Полученное квадратное уравнение (62.15) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (62.14). Решение характеристического уравнения имеет два корня:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Если k — корень характеристического уравнения, то функция $y = e^{kx}$ — решение дифференциального уравнения (62.14). При решении характеристического уравнения возможны три случая:

- (1) корни уравнения k_1 и k_2 — различные действительные числа ($k_1 \neq k_2$);
- (2) корни уравнения равные действительные числа ($k_1 = k_2$);
- (3) корни уравнения комплексные числа.

Рассмотрим, какой вид имеет фундаментальная система решений в каждом из этих случаев.

(1) *Корни характеристического уравнения действительные и различные:* $k_1 \neq k_2$. В этом случае частными решениями будут функции

$y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Эти решения линейно независимые, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$$

Следовательно, они образуют фундаментальную систему решений. Тогда по теореме 62.5:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

ПРИМЕР 62.4. Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$k^2 - k - 6 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = -2.$$

Отсюда получаем фундаментальную систему частных решений:

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-2x},$$

а общее решение

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}. \quad (62.16)$$

(2) *Корни характеристического уравнения равные:* $k_1 = k_2$. В этом случае оба корня будут действительными. Так как мы искали решение в виде $y = e^{kx}$, то нами найдено только одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$. Покажем, что в этой ситуации второе частное решение $y_2(x)$, образующее вместе с первым фундаментальную систему решений, имеет вид $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Вначале проверим, что функция $y_2(x)$ действительно является решением уравнения (62.14). Дифференцируя функцию y_2 , находим

$$y_2' = (1 + k_1 x) \cdot e^{k_1 x}, \quad y_2'' = k_1(2 + k_1 x) \cdot e^{k_1 x}.$$

Подставим y_2, y_2' и y_2'' в дифференциальное уравнение (62.14):

$$k_1(2 + k_1 x)e^{k_1 x} + p(1 + k_1 x)e^{k_1 x} + qx e^{k_1 x} = 0,$$

или

$$[(k_1^2 + pk_1 + q)x + (2k_1 + p)]e^{k_1 x} = 0.$$

Так как k_1 — корень характеристического уравнения, то $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. Кроме того, так как корень кратный, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ или $2k_1 = -p$, т.е. $2k_1 + p = 0$ и оба выражения в круглых скобках в этом уравнении обращаются в нуль. Следовательно, $y_2'' + py_2' + qy_2 \equiv 0$ и функция $y_2(x) = xe^{k_1x}$ действительно является решением уравнения (62.14).

Найденные частные решения $y_1 = e^{k_1x}$ и $y_2 = xe^{k_1x}$ образуют фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы:

$$y_1/y_2 = e^{k_1x}/(xe^{k_1x}) = \frac{1}{x} \neq \text{const.}$$

Таким образом общее решение однородного линейного уравнения (62.14) в случае равенства корней характеристического уравнения $k_1 = k_2 = k$ имеет вид (см. теорему 62.5):

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} \cdot (C_1 + C_2 x). \quad (62.17)$$

Отметим, что при известном частном решении $y_1 = e^{kx}$ второе решение y_2 можно найти по формуле (62.12).

Действительно,

$$y_1 = e^{-px/2}, \quad y_2 = e^{-px/2} \int \frac{e^{-p \int dx}}{e^{-px}} dx = e^{kx} \int dx = x e^{kx}.$$

ПРИМЕР 62.5. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = -3$. В этом случае фундаментальная система частных решений запишется в виде: $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = x e^{-3x}$, а общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-3x}.$$

(3) *Корни характеристического уравнения комплексные.* Комплексные корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами являются сопряжёнными комплексными числами:

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i.$$

В этом случае частное решение уравнения (62.14), записывается следующим образом в виде комплексных функций, что мы отмечаем чертой сверху:

$$\bar{y}_1 = e^{k_1x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}; \quad \bar{y}_2 = e^{k_2x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}.$$

Применяя формулы Эйлера ($e^{it} = \cos t + i \sin t$, $e^{-it} = \cos t - i \sin t$), выражения для \bar{y}_1 и \bar{y}_2 можно переписать в виде :

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad \bar{y}_2 = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Эти решения являются комплексными. Для получения действительных частных решений рассмотрим новые функции

$$y_1 = \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \frac{1}{2}e^{\alpha x}[(\cos \beta x + i \sin \beta x) + (\cos \beta x - i \sin \beta x)] = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \frac{1}{2i}e^{\alpha x}[(\cos \beta x + i \sin \beta x) - (\cos \beta x - i \sin \beta x)] = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Функции y_1 и y_2 являются линейными комбинациями исходных частных решений \bar{y}_1 и \bar{y}_2 и, следовательно, сами являются решениями уравнения (62.14) в соответствии с теоремой 62.2.

Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему, так как они линейно независимы. Таким образом, в случае комплексных корней характеристического уравнения общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами записывается в виде:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

или

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

ПРИМЕР 62.6. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 10y = 0$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 10 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 3 + \sqrt{9 - 10} = 3 + i$ и $k_2 = 3 - \sqrt{9 - 10} = 3 - i$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения можно записать в виде:

$$y = e^{3x} \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Заклячая этот раздел, приведем таблицу формул общего решения уравнения (62.14) в зависимости от вида корней характеристического уравнения, использование которой может оказать существенную помощь при решении примеров.

Дифференциальное уравнение		$y'' + py' + qy = 0$	
Характеристическое уравнение		$k^2 + pk + q = 0$	
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2 \in R$	$k_1 = k_2 \in R$	$k_1 = \alpha + \beta i$ $k_2 = \alpha - \beta i$
Фундаментальная система решений	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = x e^{k_1 x}$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
Общее решение	$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$Y = e^{k_1 x} \cdot (C_1 + C_2 x)$	$Y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Практическое занятие 62. Линейные уравнения второго порядка

ПРИМЕР 62.1. Являются ли линейно независимыми функции $y_1 = x - 1$ и $y_2 = 2x$?

Решение: При ответе на этот вопрос можно использовать два подхода. Первый – найти отношение этих функций:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \neq \text{const.}$$

Следовательно, рассматриваемые функции линейно независимы.

Второй подход основан на вычислении определителя Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1) - 2x = -2 \neq 0.$$

Определитель не равен нулю, следовательно, функции линейно независимы.

ПРИМЕР 62.2. Являются ли линейно независимыми функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = 5e^{2x-1}$?

Решение: Используем метод определения линейной зависимости функций, основанный на вычислении определителя Вронского:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & 5e^{2x-1} \\ 2e^{2x} & 10e^{2x-1} \end{vmatrix} = \\ &= 10e^{2x} \cdot e^{2x-1} - 10e^{2x} \cdot e^{2x-1} \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно, данные функции линейно зависимы.

ПРИМЕР 62.3. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Р е ш е н и е: Поскольку данное уравнение относится к типу линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, решение его можно найти в соответствии с видом корней характеристического уравнения. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Его корни равны $k_1 = 3$ и $k_2 = 2$. Следовательно, $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = e^{2x}$ – частные решения исходного дифференциального уравнения. Вычисляя определитель Вронского, можно проверить, что эти два решения образует фундаментальную систему и, следовательно, их линейная комбинация с произвольными постоянными C_1 и C_2 является общим решением данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

ПРИМЕР 62.4. Найти частное решение уравнения $y'' - 3y' = 0$ при $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Р е ш е н и е: Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k = 0$$

и найдем его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 3$. Корни действительные и различные, следовательно, можно выписать два частных решения $y_1 = e^{0x} = 1$ и $y_2 = e^{3x}$, образующих фундаментальную систему. Общее решение дифференциального уравнения является их линейной комбинацией

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Найдем первую производную $y' = 3C_2 e^{3x}$ полученного решения и используем начальные условия $y(0) = 2$ и $y'(0) = 3$ для нахождения постоянных C_1 и C_2 :

$$y(0) = 1 \Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{3 \cdot 0} = C_1 + C_2 = 2,$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow y' = 3C_2 e^{3 \cdot 0} = 3C_2 = 3.$$

Из этих уравнений находим: $C_2 = 1$, а $C_1 = 1$. Таким образом, частное решение при заданных начальных условиях имеет вид:

$$y = e^{3x} + 1.$$

ПРИМЕР 62.5. Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение $k^2 + 8k + 16 = 0$ имеет два равных корня $k_1 = k_2 = k = -4$. В соответствии с теорией решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (см.таблицу) два частных решения имеют вид $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = xe^{-4x}$ и общее решение дифференциального уравнения можно записать как

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x} = e^{-4x} (C_1 + C_2 x).$$

ПРИМЕР 62.6. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 10 = 0$ имеет корни $k_1 = -1 + 3i$, $k_2 = -1 - 3i$. Корни комплексные сопряжённые, поэтому им соответствуют (см.таблицу) частные решения $y_1 = e^{-x} \cos 3x$ и $y_2 = e^{-x} \sin 3x$. Следовательно общим решением является их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 62.7. Являются ли функции $y_1 = 2x^3 + 1$, $y_2 = 2x^2 - 3$ линейно независимыми?

ПРИМЕР 62.8. Являются ли функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = 3 \cos x$ линейно независимыми?

ПРИМЕР 62.9. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 0$.

ПРИМЕР 62.10. Найти частное решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$ при $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

ПРИМЕР 62.11. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

ПРИМЕР 62.12. Найти общее решение уравнения $y'' - 16y = 0$.

ПРИМЕР 62.13. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 17y = 0$.

ПРИМЕР 62.14. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = 0$ при $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

ПРИМЕР 62.15. Найти общее решение уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Лекция 63. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Нахождение общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

63.1. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим общий случай линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (62.1):

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

когда правая часть уравнения не равна нулю ($f(x) \not\equiv 0$), а $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – непрерывные функции x .

Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 63.1. Если $\bar{y}(x)$ – некоторое частное решение линейного неоднородного уравнения (62.1), а $Y(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (62.2), то сумма $y(x)$ частного решения неоднородного уравнения $\bar{y}(x)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y(x) = \bar{y}(x) + Y(x) \tag{63.1}$$

является общим решением неоднородного дифференциального уравнения (62.1).

Доказательство. Сначала докажем, что функция (63.1) есть решение уравнения (62.1). Действительно, поскольку $\bar{y}(x)$ есть решение частного решения неоднородного уравнения (62.1), то

$$a_0(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x) \equiv f(x).$$

Аналогично, так как $Y(x)$ есть решение соответствующего однородного уравнения (62.2), то

$$a_0(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_2(x)Y(x) \equiv 0.$$

Подставим $y(x) = \bar{y}(x) + Y(x)$ в левую часть уравнения (62.1) и сгруппируем отдельно слагаемые, содержащие $\bar{y}(x)$ и $Y(x)$ и их производные. Получим

$$\begin{aligned} a_0(x)(\bar{y}(x) + Y(x))'' + a_1(x)(\bar{y}(x) + Y(x))' + a_2(x)(\bar{y}(x) + Y(x)) &\equiv \\ &\equiv [a_0(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x)] + \\ + [a_0(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_2(x)Y(x)] &\equiv f(x) + 0 \equiv f(x), \end{aligned}$$

т.е. функция $y(x) = \bar{y}(x) + Y(x)$ действительно есть решение неоднородного уравнения (62.1) и первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем, что функция (63.1) является *общим* решением, т.е. докажем, что из этого решения единственным образом всегда можно выделить любое частное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (63.2)$$

Из теоремы 62.5 о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка следует, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть два частных решения соответствующего однородного уравнения (62.2), образующие фундаментальную систему (их определитель Вронского не равен нулю), то общее решение однородного уравнения является их линейной комбинацией: $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. В таком случае формулу (63.1) можно переписать в виде:

$$y(x) = \bar{y}(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \quad (63.3)$$

Продифференцируем выражение (63.3):

$$y'(x) = \bar{y}'(x) + C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x). \quad (63.4)$$

Подставляя начальные условия (63.2) в (63.3) и (63.4), получим систему уравнений для C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} y_0 = \bar{y}_0(x_0) + C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0), \\ y'_0 = \bar{y}'_0(x_0) + C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 - \bar{y}_0(x_0), \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) = y'_0 - \bar{y}'_0(x_0). \end{cases} \quad (63.5)$$

Определитель системы (63.5) равен определителю Вронского в точке $x = x_0$: $W(x_0) \neq 0$, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений, следовательно система уравнений

(63.5) имеет единственное решение C_{10}, C_{20} . В силу теоремы существования и единственности решения 62.1 полученное частное решение $y(x) = \bar{y}(x) + C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x)$ совпадает с решением $y = \varphi(x)$, так как они удовлетворяют одним и тем же начальным условиям. Следовательно, решение (63.1) – общее. Таким образом, теорема доказана полностью.

63.2. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим общий метод нахождения решений линейных неоднородных уравнений, который называется методом вариации произвольных постоянных. Этот метод применяется для отыскания решения линейного неоднородного уравнения как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

ТЕОРЕМА 63.2. *Общее решение линейного неоднородного уравнения может быть найдено при помощи квадратур, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.*

Доказательство. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение вида (62.1)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (62.2). Тогда его общее решение имеет вид

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad (63.6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (62.1) в виде (63.6), полагая, что постоянные $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ – функции аргумента x (*варируя* произвольные постоянные). Таким образом, решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$\bar{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (63.7)$$

Для определения новых неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно иметь два уравнения. Одно из них можно получится из условия, что выражение (63.7) должно удовлетворять неоднородному уравнению (62.1), поскольку после подстановки функции (63.7) и её производных в уравнение (62.1) должно получиться тождество. Второе

уравнение можно задать достаточно произвольно. Будем задавать их так, чтобы выражения для производных функции (63.7) имели наиболее простой вид.

Продифференцируем выражение (63.7) по x , получим

$$\bar{y}'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x). \quad (63.8)$$

Введем следующее дополнительное условие: выберем неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ таким образом, чтобы члены, содержащие $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, в сумме обращались в нуль:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (63.9)$$

Условие (63.9) существенно упрощает выражение (63.8), которое принимает вид:

$$\bar{y}'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \quad (63.10)$$

Дифференцируя равенство (63.10) ещё раз, получим

$$\bar{y}''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \quad (63.11)$$

Подставляем выражение для $\bar{y}(x)$ (63.7), $\bar{y}'(x)$ (63.10) и $\bar{y}''(x)$ (63.11) в уравнение (62.1). Получаем

$$a_0(x)[C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)] + \\ + a_1(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + a_2(x)[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = f(x),$$

или, группируя слагаемые, содержащие $C_1(x)$, $C_2(x)$, и, отдельно, $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, имеем

$$[a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)]C_1(x) + \\ + [a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)]C_2(x) + \\ + a_0(x)[C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)] = f(x). \quad (63.12)$$

Так как $y_1(x)$ – решение однородного уравнения, то

$$a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) \equiv 0,$$

т.е. выражение в первой квадратной скобке тождественно равно нулю. Аналогично и выражение во второй скобке равно нулю, так как $y_2(x)$ также является решением однородного уравнения. Таким образом, равенство (63.12) принимает вид

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \quad (63.13)$$

Объединяя два уравнения (63.9) и (63.13), получаем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}, \end{cases} \quad (63.14)$$

которая является системой линейных алгебраических уравнений относительно искомых производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

Система (63.14) имеет единственное решение для $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, поскольку её определитель

$$\Delta(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$$

есть определитель Вронского для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, образующих фундаментальную систему решений.

Решив линейную систему (63.14), например, с помощью формулы Крамера, найдем, что

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{a_0(x)\Delta(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{a_0(x)\Delta(x)}.$$

Интегрируя эти выражения для производных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$, находим сами функции

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)dx}{a_0(x)\Delta(x)} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)dx}{a_0(x)\Delta(x)} + \tilde{C}_2, \quad (63.15)$$

где \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 – постоянные интегрирования.

Теперь осталось только подставить найденные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ (квадратуры (63.15)) в соотношение (63.7).

Таким образом, согласно теореме 63.1, общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} y(x) = \bar{y}(x) + Y(x) = & -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{a_0(x)\Delta(x)} dx + \\ & + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{a_0(x)\Delta(x)} dx + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \end{aligned} \quad (63.16)$$

где $\Delta(x)$ есть определитель Вронского $W[y_1(x), y_2(x)]$.

Доказательство теоремы, задающее алгоритм метода вариации произвольных постоянных и позволяющее найти общее решение линейного неоднородного уравнения в виде квадратур, закончено.

ПРИМЕР 63.1. Найти общее решение уравнения $xy'' - y' = x^2$.

Решение: Предполагая, что $x \neq 0$, запишем уравнение в равносильном виде $y'' - \frac{y'}{x} = x$. Соответствующее однородное уравнение $xy'' - y' = 0$ легко интегрируется:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln |y'|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln |y'| = \ln |x| + \ln |A| \Rightarrow$$

$$y' = Ax, \quad y = \frac{A}{2}x^2 + B.$$

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из функций $\{1; x^2\}$. Согласно методу вариации произвольных постоянных полагаем, что решение неоднородного уравнения имеет вид $y(x) = C_1(x) + C_2(x)x^2$.

Для определения C_1 и C_2 имеем систему уравнений, коэффициенты которой совпадают с элементами определителя Вронского для фундаментальной системы решений $\{1; x^2\}$:

$$\begin{cases} 1 \cdot \frac{dC_1}{dx} + x^2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ 0 \cdot \frac{dC_1}{dx} + 2x \frac{dC_2}{dx} = x, \end{cases}$$

откуда последовательно получаем

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2(x) = \frac{x}{2} + \tilde{C}_2 \Rightarrow \frac{dC_1}{dx} = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow C_1(x) = -\frac{x^3}{6} + \tilde{C}_1.$$

Подставляя полученные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для $y(x)$, находим общее решение

$$y = \frac{x^3}{3} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x^2.$$

Практическое занятие 63. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

ПРИМЕР 63.1. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Р е ш е н и е: Вначале найдем общее решение однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Запишем его характеристическое уравнение

$$k^2 + 4 = 0.$$

Корни характеристического уравнения соответственно равны $k_1 = 2i, k_2 = -2i$. Следовательно, в качестве фундаментальной системы решений можно взять $y_1(x) = \sin 2x, y_2(x) = \cos 2x$ и общее решение однородного уравнения принимает вид:

$$Y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных, решение исходного неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = C_1(x) \sin 2x + C_2(x) \cos 2x. \quad (63.1)$$

Определитель Вронского для фундаментальной системы решений $\{\sin 2x, \cos 2x\}$ равен

$$W[\sin 2x, \cos 2x] = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2 \cos 2x & -2 \sin 2x \end{vmatrix}.$$

Тогда система уравнений (63.14) для нахождения $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$, коэффициенты которой равны элементам определителя Вронского, а свободные члены в правой части равны соответственно нулю и правой части исходного уравнения, в данном случае записывается следующим образом:

$$\begin{cases} C'_1(x) \sin 2x + C'_2(x) \cos 2x = 0, \\ 2C'_1(x) \cos 2x - 2C'_2(x) \sin 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$ и интегрируя полученные выражения, находим:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2 \cos 2x & -2 \sin 2x \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$C_1(x) = - \int \frac{y_2(x)f(x) dx}{a_0(x)\Delta(x)} = - \int \frac{\cos 2x \cdot \frac{1}{\cos 2x}}{-2} dx = \frac{x}{2} + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x) dx}{a_0(x)\Delta(x)} = \int \frac{\sin 2x \cdot \frac{1}{\cos 2x}}{-2} dx = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + \tilde{C}_2.$$

Если нам нужно частное решение, постоянные интегрирования \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 можно опустить и, подставляя найденные выражения в равенство (63.1), получаем

$$\bar{y}(x) = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cos 2x.$$

Найдя частное решение и зная фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, на основании теоремы 63.1 о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения и формулы (63.3) получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \bar{y}(x) + Y(x) = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Заметим, что если бы мы не опустили постоянные интегрирования в полученных выше выражениях для $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а подставили бы их в равенство (63.1), то получили бы то же самое общее решение.

ПРИМЕР 63.2. Решить методом вариации произвольных постоянных уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Р е ш е н и е: Выпишем характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

и найдем его корни

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1.$$

Имеем общее решение линейного однородного уравнения

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Как и в предыдущем примере, будем искать частное решение \bar{y} неоднородного уравнения, считая C_1 и C_2 функциями от x : $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$:

$$\bar{y} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Напомним, что система уравнений для нахождения $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$ имеет коэффициенты, совпадающие с элементами определителя Вронского для фундаментальной системы решений e^x , xe^x , а свободные члены в её правой части равны соответственно нулю и правой части исходного уравнения, если коэффициент при y'' в нём равен единице. В данном случае эта система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0, \\ C'_1(x)e^x + C'_2(x)(x+1)e^x = \frac{e^x}{x}. \end{cases} \quad (63.2)$$

Для решения этой системы вовсе не обязательно использовать формулы Крамера или готовые формулы для $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$. Они громоздкие и их трудно запомнить.

Поступим проще. Из первого уравнения после сокращения на e^x находим $C'_2(x) = -\frac{C'_1(x)}{x}$ и после подстановки во второе уравнение и приведения подобных членов получим уравнения для $C'_1(x)$: $C'_1(x) = -1$ и, подставляя его в выражение для $C'_2(x)$, находим:

$$C'_1(x) = -1, \quad C'_2(x) = \frac{1}{x}.$$

Интегрируя эти выражения, получаем

$$C_1 = -x + C, \quad C_2 = \ln|x| + C.$$

Частное решение получим, опуская постоянные интегрирования

$$\bar{y} = -xe^x + (\ln|x|)xe^x.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + x \ln|x| e^x.$$

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 63.3. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

ПРИМЕР 63.4. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных $x^2 y'' - xy' = 3x^3$.

ПРИМЕР 63.5. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

ПРИМЕР 63.6. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

ПРИМЕР 63.7. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.

Лекция 64. Неоднородные линейные уравнения второго порядка

Метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов) для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

64.1. Метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов)

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения можно применить метод вариации произвольных постоянных, изложенный на предыдущей лекции. Этот метод применим, вообще говоря, к уравнениям с любой правой частью. Однако для уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых имеют специальный вид, существует более простой способ нахождения частного решения, который называется *методом подбора частного решения* (или методом неопределённых коэффициентов)

Метод состоит в том, что при нахождении решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (64.1)$$

правая часть которого в общем случае имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x), \quad (64.2)$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – заданные многочлены от x соответственно m -той и n -ой степеней, или правая часть есть сумма функций такого вида, частное решение уравнения (64.1) можно искать в форме

$$\bar{y} = x^r e^{\alpha x}(S_l(x) \cos \beta x + T_l(x) \sin \beta x). \quad (64.3)$$

Здесь α и β – те же постоянные, что и в уравнении (64.1), а $S_l(x)$ и $T_l(x)$ – многочлены от x степени l с неопределёнными коэффициентами A_k и B_k , $k = l, l-1, \dots, 1, 0$, причём l равно наибольшему из чисел m и n :

$$\begin{aligned} S_l(x) &= A_l x^l + A_{l-1} x^{l-1} + \dots + A_0, \\ T_l(x) &= B_l x^l + B_{l-1} x^{l-1} + \dots + B_0, \end{aligned}$$

а r равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в характеристическом уравнении $k^2 + pk + q = 0$ (если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует положить $r = 0$).

Необходимо подчеркнуть, что многочлены $S_l(x)$ и $T_l(x)$ должны быть *полными*, т.е. содержать все степени x от l до нуля, с различными неопределёнными коэффициентами в каждом из многочленов, и что при этом, даже если в выражение (64.2) для функции $f(x)$ входит только одна из функций $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, то в формуле (64.3) должны обязательно присутствовать оба слагаемых, содержащих $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме нескольких различных функций вида (64.2), то для отыскания решения такого уравнения можно использовать теорему наложения решений.

ТЕОРЕМА 64.1. (О наложении решений). Если $\bar{y}_1(x)$ – частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \quad (64.4)$$

а $\bar{y}_2(x)$ – частное решение уравнения с той же самой левой частью

$$y'' + py' + qy = f_2(x), \quad (64.5)$$

то сумма $\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ является частным решением уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \quad (64.6)$$

Доказательство. Подставив в левую часть уравнения (64.6) сумму $\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$, после преобразований и на основании равенств (64.4) и (64.5) получим:

$$y'' + py' + qy \equiv (\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x))'' + p(\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x))' + q(\bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)) \equiv \\ \equiv (\bar{y}_1''(x) + p\bar{y}_1'(x) + q\bar{y}_1(x)) + (\bar{y}_2''(x) + p\bar{y}_2'(x) + q\bar{y}_2(x)) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Этот вывод доказывает, что, действительно, $\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ есть решение уравнения (64.6).

Приведем несколько рецептов подбора формы частного решения. Рассмотрим несколько простейших ситуаций.

1) *Правая часть уравнения (64.1) – многочлен степени m :*

$$f(x) = P_m(x).$$

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = S_m(x)x^r,$$

где $S_m(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_m(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения, равных нулю.

2) *Правая часть уравнения (64.1) – произведение многочлена на показательную функцию:*

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m , а коэффициент α в показателе экспоненты – действительное число.

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = S_m(x)x^r e^{\alpha x},$$

где $S_m(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_m(x)$, но с неопределёнными коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения, равных α .

ЗАМЕЧАНИЕ 64.1. При $\alpha = 0$ имеем случай 1), так как функция $f(x) = e^{0x}P_m(x) \equiv P_m(x)$.

3) *Правая часть уравнения (64.1) – сумма тригонометрических функций*

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x,$$

где M , N и β – заданные числа.

В этом случае частное решение $\bar{y}(x)$ следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^r,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты, а r — число корней характеристического уравнения, равных βi .

Общий случай, когда правая часть уравнения (64.1) — функция вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены, а коэффициенты α и β — действительные числа, рассмотрен выше.

Некоторые частные случаи функции $f(x)$ в правой части уравнения (64.1), когда можно применить метод подбора частного решения, сведены в таблицу.

№ формулы	Вид правой части	Кратность корня $\alpha + \beta i$	Форма частного решения
(64.7)	$f(x) = P_n(x)$	$k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$, $r = 0$	$\bar{y} = Q_n(x)$
(64.8)	$\alpha = 0, \beta = 0$	$k_1 = 0$ или $k_2 = 0, r = 1$	$\bar{y} = Q_n(x) \cdot x$
(64.9)		$k_1 = k_2 = 0$, $r = 2$	$\bar{y} = Q_n(x) \cdot x^2$
(64.10)	$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ $\beta = 0, \alpha \neq 0$	$k_1 \neq \alpha$ и $k_2 \neq \alpha$, $r = 0$	$\bar{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$
(64.11)		$k_1 = \alpha$ или $k_2 = \alpha, r = 1$	$\bar{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} \cdot x$
(64.12)		$k_1 = k_2 = \alpha$, $r = 2$	$\bar{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} \cdot x^2$
(64.13)	$f(x) =$ $= P_n(x) \cos \beta x +$ $+ Q_m(x) \sin \beta x$	$k \neq \pm \beta i, r = 0$	$\bar{y} = U_l(x) \cos \beta x +$ $+ V_l(x) \sin \beta x$ $l = \max(n, m)$
(64.14)	$\alpha = 0, \beta \neq 0$	$k = \pm \beta i, r = 1$	$\bar{y} = x(U_l(x) \cos \beta x +$ $+ V_l(x) \sin \beta x),$ $l = \max(n, m)$
(64.15)	$f(x) =$ $= e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x +$ $+ Q_m(x) \sin \beta x)$	$k \neq \alpha \pm \beta i, r = 0$	$\bar{y} = e^{\alpha x}(U_l(x) \cos \beta x +$ $+ V_l(x) \sin \beta x)$ $l = \max(n, m)$
(64.16)	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	$k = \alpha \pm \beta i, r = 1$	$\bar{y} =$ $= x e^{\alpha x}(U_l(x) \cos \beta x +$ $+ V_l(x) \sin \beta x)$ $l = \max(n, m)$

ПРИМЕР 64.1. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' = 2x - 3$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$ имеет вид $k^2 + 4k = 0$ и корни $k_1 = 0$; $k_2 = -4$. Соответственно общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$Y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} = C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

Так как правая часть исходного уравнения $f(x) = 2x - 3$ соответствует общему виду правой части $f(x) = P_n(x)$, т.е. $k = \alpha + \beta i \equiv 0$, а один из корней равен нулю ($r = 1$), то частное решение неоднородного уравнения следует искать по формуле (64.8) в виде:

$$\bar{y} = Q_n(x) \cdot x = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx.$$

Подберем коэффициенты A и B таким образом, чтобы \bar{y} было решением исходного уравнения. Для этого найдем $\bar{y}' = 2Ax + B$ и $\bar{y}'' = 2A$ и подставим их в данное уравнение:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' = 2x - 3 &\Rightarrow 2A + 4(2Ax + B) \equiv 2x - 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8Ax + (2A + 4B) \equiv 2x - 3. \end{aligned}$$

Последнее равенство является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства должны быть равны. Вследствие этого получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 8A = 2, \\ 2A + 4B = -3, \end{cases}$$

из которой находим $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{7}{8}$. Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x,$$

а общее:

$$y = \bar{y} + Y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

ПРИМЕР 64.2. Найти общее решение уравнения $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение $2k^2 - k - 1 = 0$ однородного дифференциального уравнения $2y'' - y' - y = 0$ имеет корни

$k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так как правая часть исходного дифференциального уравнения $f(x) = 4xe^{2x}$ соответствует общему виду $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $n = 1$ и $\alpha = 2$, но ни один из корней характеристического уравнения не равен $\alpha = 2$, следовательно, $r = 0$, частное решение неоднородного уравнения следует искать по формуле (64.10) в виде:

$$\bar{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} = (Ax + B) \cdot e^{2x}.$$

Дифференцируя \bar{y} два раза и подставляя \bar{y}, \bar{y}' и \bar{y}'' в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} 2y'' - y' - y &= 4xe^{2x} \Rightarrow 2e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) - \\ &- e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) \equiv 4xe^{2x}. \end{aligned}$$

Сокращая на e^{2x} и приравнявая друг другу соответствующие коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} 5A = 4, \\ 7A + 5B = 0, \end{cases}$$

из которой находим $A = \frac{4}{5}, B = -\frac{28}{25}$.

Итак, частное решение неоднородного уравнения

$$\bar{y} = (Ax + B)e^{2x} = e^{2x} \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right),$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = \bar{y} + Y = e^{2x} \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right) + C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

ПРИМЕР 64.3. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}.$$

Решение: Выпишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -2.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = Y(x) + \bar{y}(x),$$

в котором $Y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ – общее решение линейного однородного уравнения (C_1, C_2 – произвольные постоянные).

Поскольку корень характеристического уравнения $k_{1,2} = -2$ имеет кратность равную двум и совпадает с показателем экспоненты в правой части неоднородного уравнения, то частное решение имеет вид $\bar{y}(x) = x^2(Ax + B)e^{-2x}$, где A и B – неопределённые коэффициенты. Подставив $y = \bar{y}(x)$ и его первую и вторую производные в уравнение, найдем искомые коэффициенты $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Отсюда получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-2x}.$$

ПРИМЕР 64.4. Решить уравнение $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$.

Решение: Выпишем характеристическое уравнение: $k^2 - 9 = 0$, решив которое, найдем корни: $k_{1,2} = \pm 3$.

Запишем теперь общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$Y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Так как правая часть исходного дифференциального уравнения $f(x) = e^{3x} \cos x$ соответствует общему виду $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$, а число $\alpha \pm \beta i = 3 \pm 1 \cdot i$ не является корнем характеристического уравнения, значит $r = 0$, и частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = e^{3x}(A \cos x + B \sin x).$$

Последовательно находя первую и вторую производные этого выражения

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= 3e^{3x}(A \cos x + B \sin x) + e^{3x}(-A \sin x + B \cos x) = \\ &= e^{3x}((3A + B) \cos x + (3B - A) \sin x), \\ \bar{y}'' &= e^{3x}((3A + B) \cos x + (3B - A) \sin x) + \\ &+ e^{3x}(-(3A + B) \sin x + (3B - A) \cos x) = \\ &= e^{3x}((9A + 3B + 3B - A) \cos x + (9B - 3A - 3A - B) \sin x) = \\ &= e^{3x}((8A + 6B) \cos x + (8B - 6A) \sin x) \end{aligned}$$

и подставляя \bar{y} и \bar{y}'' в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\begin{aligned} y'' - 9y &= e^{3x} \cos x \Rightarrow \\ e^{3x}((8A + 6B) \cos x + (8B - 6A) \sin x) - 9e^{3x}(A \cos x + B \sin x) &\equiv \\ &\equiv e^{3x} \cos x. \end{aligned}$$

После соответствующих преобразований и сокращения на e^{3x} приведем последнее тождество к виду:

$$(-A + 6B) \cos x + (-6A - B) \sin x \equiv \cos x.$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений относительно неизвестных A и B :

$$\begin{cases} -A + 6B = 1, \\ -6A - B = 0, \end{cases}$$

из которой найдем $A = -\frac{1}{37}$, $B = \frac{6}{37}$.

Итак, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x} \left(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x \right).$$

ПРИМЕР 64.5. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$.

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Отсюда общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Для определения частного решения неоднородного уравнения рассмотрим два вспомогательных уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad (64.17)$$

$$y'' - 5y' + 6y = x^2, \quad (64.18)$$

и найдем для каждого из них частные решения \bar{y}_1 и \bar{y}_2 . Частное решение уравнения (64.17) следует искать по формуле (64.10) в виде

$$\bar{y}_1 = A_1 e^x,$$

так как число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом $\alpha = 1$ в показателе экспоненты, равно нулю ($r = 0$).

Дифференцируя \bar{y}_1 два раза и подставляя \bar{y}_1 , \bar{y}'_1 и \bar{y}''_1 в уравнение (64.17), имеем

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \Rightarrow A_1 e^x - 5A_1 e^x + 6A_1 e^x \equiv e^x.$$

После сокращения выражения на e^x , получим $2A_1 = 1$, или $A_1 = \frac{1}{2}$, следовательно, $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}e^x$.

Частное решение уравнения (64.18) следует искать по формуле (64.7) в виде:

$$\bar{y}_2 = A_2 x^2 + B_2 x + C_2,$$

так как число корней характеристического уравнения, совпадающих с $\alpha = 0$, равно нулю ($r = 0$).

Дифференцируя \bar{y}_2 дважды и подставляя \bar{y}_2 , \bar{y}'_2 и \bar{y}''_2 в уравнение (64.18), имеем

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 \Rightarrow 2A_2 - 5(2A_2 x + B_2) + 6(A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \equiv x^2.$$

После очевидных преобразований получим

$$6A_2 x^2 + (6B_2 - 10A_2)x + (2A_2 - 5B_2 + 6C_2) = x^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений относительно неизвестных A_2 , B_2 и C_2 :

$$\begin{cases} 6A_2 = 1, \\ 6B_2 - 10A_2 = 0, \\ 2A_2 - 5B_2 + 6C_2 = 0, \end{cases}$$

из которой $A_2 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{5}{18}$, $C_2 = \frac{19}{108}$.

Следовательно,

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}.$$

На основании теоремы о наложении решений частное решение исходного дифференциального уравнения равно сумме двух найденных частных решений, т.е.

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}.$$

а общее решение:

$$y = \bar{y} + Y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Практическое занятие 64. Неоднородные линейные уравнения второго порядка

ПРИМЕР 64.1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Р е ш е н и е: Будем искать решение методом подбора частного решения. Прежде всего рассмотрим однородное уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 1 + i$ и $k_2 = 1 - i$, поэтому общее решение однородного уравнения (см. соответствующую таблицу решений) $Y = e^x \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = x^2$ многочлен второй степени, поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. Найдем $\bar{y}' = 2Ax + B$ и $\bar{y}'' = 2A$ и подставим вместе с \bar{y} в исходное дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2y' + 2y = x^2 \Rightarrow 2A - 2(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) \equiv x^2.$$

Сгруппируем слагаемые в левой части уравнения по степеням x :

$$2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2A - 2B + 2C) \equiv x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 4A = 0, \\ 2A - 2B + 2C = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = 1, \\ C = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2}(x + 1)^2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = \bar{y} + Y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

ПРИМЕР 64.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = (2x - 3)e^{-x}.$$

Решение: Опять воспользуемся методом подбора частного решения. Однородное уравнение имеет вид $y'' - 2y' - 3y = 0$. Корни его характеристического уравнения $k^2 - 2k - 3 = 0$ действительные и неравные друг другу числа $k_1 = -1, k_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения (см. соответствующую таблицу решений): $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Так как среди корней характеристического уравнения имеется только один корень, равный показателю $\alpha = -1$ в экспоненте в правой части исходного уравнения $k_1 = \alpha = -1$, то $r = 1$, и частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде:

$$\bar{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} \cdot x^r = (Ax + B) \cdot e^{-x} \cdot x = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}.$$

Находим

$$\bar{y}' = (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx)e^{-x} = (-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x},$$

$$\bar{y}'' = (-2Ax + (2A - B))e^{-x} - (-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x}.$$

Подставляя \bar{y}, \bar{y}' и \bar{y}'' в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' - 3y &= (2x - 3)e^{-x} \Rightarrow \\ &(-2Ax + (2A - B))e^{-x} - (-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x} - \\ &- 2(-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x} - 3(Ax^2 + Bx)e^{-x} \equiv (2x - 3)e^{-x}. \end{aligned}$$

После сокращения на множитель $e^{-x} \neq 0$ и группировки слагаемых в левой части уравнения по степеням x получим тождество:

$$0 \cdot x^2 - 8Ax + (2A - 4B) \equiv 2x - 3.$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях x , найдем:

$$\begin{cases} -8A = 2, \\ 2A - 4B = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{1}{4}, \\ B &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения найдем в виде:

$$\bar{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-x} = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x\right)e^{-x} = \frac{1}{8}(-2x^2 + 5x)e^{-x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения в этом случае запишется так:

$$y = \bar{y} + Y = \frac{1}{8}(-2x^2 + 5x)e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

ПРИМЕР 64.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x.$$

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$ для однородного дифференциального уравнения имеет два комплексных корня $k_1 = -2 + i$ и $k_2 = -2 - i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения можно записать в виде:

$$Y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

В соответствии с рассмотренной выше теорией, так как $\beta i = i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$ и частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде

$$\bar{y} = A \cos x + B \sin x.$$

Дифференцируя, находим $\bar{y}' = -A \sin x + B \cos x$,
 $\bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x$.

Подставляя \bar{y} , \bar{y}' и \bar{y}'' в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x &\Rightarrow -A \cos x - B \sin x + \\ &+ 4(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) \equiv 2 \cos x - \sin x. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, имеем:

$$(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x \equiv 2 \cos x - \sin x.$$

Последнее равенство является тождеством, следовательно, коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства должны быть равны:

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2, \\ 4B - 4A = -1, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{8}, \quad B = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y} = A \cos x + B \sin x = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$, а общее решение:

$$y = \bar{y} + Y = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x + e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

ПРИМЕР 64.4. Найти общее решение уравнения $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Р е ш е н и е: Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ однородного дифференциального уравнения имеет два корня $k_1 = i, k_2 = -i$, поэтому общее решение однородного уравнения $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Правую часть исходного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы двух функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x \cdot e^x + 2e^{-x}.$$

Для первой функции $f_1(x) = x \cdot e^x$ частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\bar{y}_1 = (Ax + B) \cdot e^x$, а для второй функции $f_2(x) = 2 \cdot e^{-x} \Rightarrow \bar{y}_2 = Ce^{-x}$.

Пользуясь принципом наложения решений, частное решение исходного уравнения, правая часть которого равна $f(x)$, следует искать как сумму частных решений, соответствующих отдельным слагаемым правой части.

Итак, будем искать решение в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}.$$

Найдем

$$\bar{y}' = Ae^x + (Ax + B)e^x - Ce^{-x} = (Ax + B + A)e^x - Ce^{-x},$$

$$\bar{y}'' = A \cdot e^x + (Ax + B + A)e^x + Ce^{-x} = (Ax + B + 2A)e^x + Ce^{-x}$$

и подставим \bar{y} , \bar{y}' и \bar{y}'' в исходное дифференциальное уравнение:

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x} \Rightarrow$$

$$(Ax + B + 2A)e^x + Ce^{-x} + (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}.$$

После элементарных преобразований будем иметь:

$$2A \cdot xe^x + (2A + 2B)e^x + 2Ce^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых выражениях в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + 2B = 0, \\ 2C = 2, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = 1.$$

С учётом найденных коэффициентов частное решение неоднородного уравнения запишется в виде:

$$\bar{y} = (Ax + B)e^x + Ce^{-x} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x + e^{-x} = \frac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = \bar{y} + Y = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

ПРИМЕР 64.5. Решить уравнение $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x$.

Р е ш е н и е: Выпишем характеристическое уравнение для однородного уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$: $k^2 + 6k + 10 = 0$. Находим его корни: $k_1 = -3 + 2i$, $k_2 = -3 - 2i$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Будем искать частное решение данного неоднородного уравнения \bar{y} в виде суммы частных решений $\bar{y} = y_1(x) + y_2(x)$ двух неоднородных уравнений

$$y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x}, \quad (64.1)$$

$$y'' + 6y' + 10y = -2e^{3x} \cos x, \quad (64.2)$$

тогда общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частных решений неоднородного уравнения:

$$y = Y(x) + y_1(x) + y_2(x).$$

Будем искать частное решение уравнения (64.1) в виде

$$y_1 = (Ax + B)e^{-3x}, \quad (64.3)$$

а частное решение уравнения (64.2) в виде

$$y_2 = e^{3x}(C \cos x + D \sin x). \quad (64.4)$$

Найдем производные функции (64.3)

$$y_1' = Ae^{-3x} - 3(Ax + B)e^{-3x}, \quad y_1'' = -3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 9(Ax + B)e^{-3x}.$$

Подставляя функцию (64.3) и её производные в уравнение (64.1)

$$\begin{aligned} -6Ae^{-3x} + 9(Ax + B)e^{-3x} + 6(Ae^{-3x} - 3(Ax + B)e^{-3x}) + \\ + 10(Ax + B)e^{-3x} \equiv 3xe^{-3x}, \end{aligned}$$

получим систему уравнений для коэффициентов A , B :

$$\begin{cases} 9A - 18A + 10A = 3, \\ -6A + 9B + 6A - 18B + 10B = 0, \end{cases}$$

откуда находим $A = 3$, $B = 0$, то есть

$$y_1(x) = 3xe^{-3x}.$$

Аналогично поступаем и для функции $y_2(x)$ (64.4). Найдем её производные

$$\begin{aligned} y_2' &= 3e^{3x}(C \cos x + D \sin x) + e^{3x}(-C \sin x + D \cos x), \\ y_2'' &= 9e^{3x}(C \cos x + D \sin x) + 3e^{3x}(-C \sin x + D \cos x) + \\ &\quad + 3e^{3x}(-C \sin x + D \cos x) - e^{3x}(C \cos x + D \sin x) \end{aligned}$$

и подставим в уравнение (64.2):

$$\begin{aligned} &9e^{3x}(C \cos x + D \sin x) + 6e^{3x}(-C \sin x + D \cos x) - \\ &- e^{3x}(C \cos x + D \sin x) + 18e^{3x}(C \cos x + D \sin x) + \\ &+ 6e^{3x}(-C \sin x + D \cos x) + 10e^{3x}(C \cos x + D \sin x) = -2e^{3x} \cos x. \end{aligned}$$

Получим систему уравнений для коэффициентов C , D :

$$\begin{cases} 36C + 12D = -2 \\ -12C + 36D = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $C = -\frac{1}{20}$, $D = -\frac{1}{60}$, то есть

$$y_2 = -e^{3x} \left(\frac{1}{20} \cos x + \frac{1}{60} \sin x \right).$$

Таким образом, имеем общее решение

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 3xe^{-3x} - e^{3x} \left(\frac{1}{20} \cos x + \frac{1}{60} \sin x \right),$$

где C_1 , C_2 – произвольные постоянные.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 64.6. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$.

ПРИМЕР 64.7. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{3x}$.

ПРИМЕР 64.8. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.

ПРИМЕР 64.9. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.

ПРИМЕР 64.10. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 4xe^x$.

ПРИМЕР 64.11. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 4 \sin x$.

ПРИМЕР 64.12. Найти общее решение уравнения
 $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

ПРИМЕР 64.13. Найти общее решение уравнения
 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

Лекция 65. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.

65.1. Дифференциальные уравнения высших порядков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.1. Дифференциальные уравнения высших порядков — это уравнения вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (65.1)$$

где функция F непрерывна по всем аргументам и зависит явно от $y^{(n)}$.

В частном случае дифференциальное уравнение n -го порядка может не содержать в явном виде $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, но обязательно содержит $y^{(n)}$.

Вблизи начальных значений $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}$ уравнение (65.1) должно удовлетворять условиям:

$$F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_{x=x_0, y=y_0, \dots, y^{(n)}=y_0^{(n)}} \neq 0,$$

тогда по теореме о неявной функции уравнение (65.1) можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (65.2)$$

Дифференциальное уравнение (65.2) называется уравнением, разрешённым относительно старшей производной.

Поскольку дифференциальные уравнения второго порядка являются частным случаем уравнений высшего порядка ($n = 2$), то основные определения и теоремы, рассматриваемые для случая уравнений второго порядка, дословно переносятся на случай уравнений высшего порядка.

ТЕОРЕМА 65.1. *(Существования и единственности решения.) Если в уравнении n -го порядка, разрешённом относительно старшей производной*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

правая часть $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и её частные производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям при $x = x_0$

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (65.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.2. *Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка – это такая n раз непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которая содержит n произвольных постоянных, удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных C_1, C_2, \dots, C_n и позволяет выделить любое частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (65.3) при $x = x_0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.3. *Соотношение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ называется общим интегралом уравнения (65.2), если любое частное решение уравнения может быть получено из этого соотношения.*

Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях C_1, C_2, \dots, C_n , называется частным решением. График частного решения называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Не всегда дифференциальное уравнение (65.1) можно проинтегрировать так, чтобы полученное соотношение содержало только x, y , и произвольные постоянные. Иногда удаётся проинтегрировать уравнение частично, так что полученное соотношение содержит некоторые производные искомой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.4. Соотношение $\psi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$, содержащее одну произвольную постоянную C_1 , называется первым интегралом уравнения (65.1) или (65.2), если после его дифференцирования по x с учётом того, что $y = y(x)$ и исключения постоянной C_1 из исходного соотношения $\psi = 0$ и его производной, мы получим исходное дифференциальное уравнение.

ПРИМЕР 65.1. Проверить, что уравнение $2yy'' = y'^2 + 1$ имеет первый интеграл вида $y'^2 = Cy - 1$.

Решение: Действительно, дифференцируя полученный первый интеграл по x , после сокращения на y' получим $C = 2y''$, что после подстановки в первый интеграл $y'^2 = Cy - 1$ даёт исходное уравнение.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение n -го порядка значит:

1) найти его общее решение (если начальные условия не заданы) или

2) найти частное решение при заданных начальных условиях.

Задача определения частного решения уравнения высшего порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, как и в случае уравнения второго порядка, называется задачей Коши:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \\ y|_{x=x_0} &= y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0. \end{aligned} \quad (65.4)$$

Задача определения частного решения уравнения высшего порядка на заданной области изменения $x \in [a; b]$, удовлетворяющего заданным значениям функции и её производных на границах исследуемой области, называется краевой задачей. Примером является задача нахождения статического прогиба $y(x)$ нагруженной струны с закрепленными концами

$$y''(x) = -f(x), a \leq x \leq b, y(a) = y(b) = 0,$$

где $f(x)$ – внешняя изгибающая нагрузка на единицу длины струны, делённая на упругость струны. Для уравнений более высокого порядка ($n > 2$) постановки краевых условий более разнообразны. При этом возможны случаи, когда часть условий задаётся во внутренних точках отрезка $[a; b]$. Эти условия называют внутренними краевыми условиями.

В общем случае решение дифференциальных уравнений высшего порядка представляет сложную практическую и теоретическую задачу. Рассмотрим несколько типов дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих относительно простые процедуры решения.

65.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим, в каких случаях возможно и как осуществляется понижение порядка дифференциального уравнения.

1. Если уравнение имеет вид

$$y^{(n)} = f(x), \quad (65.5)$$

то оно сводится к квадратурам с помощью подстановки $y^{(n-1)} = u(x)$, тогда $y^{(n)} = u'$ и уравнение (65.5) приводится к простейшему уравнению первого порядка $u' = f(x)$, которое имеет решение в квадратурах

$$u(x) = \int f(x) dx = F(x) + C_1,$$

где функция $F(x)$ — одна из первообразных от $f(x)$, а C_1 — постоянная интегрирования. Так как $u(x) = y^{(n-1)}$, то получаем уравнение

$$y^{(n-1)} = F(x) + C_1,$$

которое интегрируется так же, как уравнение (65.5).

Таким образом, в результате n -кратного последовательного интегрирования уравнения (65.5) получим

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

ПРИМЕР 65.2. Найти общее решение уравнения

$$y''' = x \ln x \quad (65.6)$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = -1.$$

Решение: Последовательным интегрированием находим

$$y'' = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1,$$

где интеграл $\int x \ln x \, dx$ берется по частям:

$$u = \ln x, \quad x \, dx = dv \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{2}x^2,$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1,$$

и аналогично

$$y' = \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{5x^3}{36} + C_1x + C_2, \quad (65.7)$$

$$y = \frac{x^4}{24} \ln x - \frac{13}{288}x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Итак, общее решение найдено. Подставляя в найденные выражения для y , y' , y'' начальные условия $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$, получим систему уравнений для постоянных C_1, C_2, C_3

$$\begin{cases} -\frac{13}{288} + \frac{1}{2}C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ -\frac{5}{36} + C_1 + C_2 = 0, \\ -\frac{1}{4} + C_1 = -1, \end{cases}$$

решая которую, получим $C_1 = -\frac{3}{4}$, $C_2 = \frac{8}{9}$, $C_3 = \frac{17}{32}$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{x^4}{24} \ln x - \frac{13}{288}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{17}{32}.$$

2. Если в уравнение не входит явно искомая функция y и, возможно, несколько её производных низшего порядка, то есть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв низшую из производных, входящих в уравнение, за новую неизвестную функцию $z(x)$, то есть сделав замену переменных $y^{(k)} = z(x)$. В результате получим уравнение $(n - k)$ -го порядка:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Если это уравнение интегрируется в квадратурах, так что

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

то, возвращаясь к переменной y , получим соответственно:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0.$$

Это уравнение вида (65.5), рассмотренного выше.

ПРИМЕР 65.3. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 2xy'' = 0.$$

Решение: Положив $y'' = u(x)$, $y''' = u'$, для u получим линейное однородное уравнение первого порядка $u' + 2xu = 0$, общее решение которого $u = C_1 e^{-x^2}$ легко находится методом разделения переменных. Используя указанную замену, имеем после интегрирования

$$y' = C_1 \int e^{-x^2} dx + C_2, \Rightarrow y = C_1 \int \left(\int e^{-x^2} dx \right) dx + C_2 x + C_3.$$

Проинтегрировав по частям, находим

$$y = C_1 \left(\frac{1}{2} e^{-x^2} + x \int e^{-x^2} dx \right) + C_2 x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

3. Если в уравнение не входит явно независимая переменная x , то есть уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую независимую переменную y , а за новую неизвестную функцию

$$y' = p(y). \quad (65.8)$$

Тогда по формуле для производной сложной функции имеем

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}; \quad (65.9)$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}. \quad (65.10)$$

Аналогично можно найти и производные более высоких порядков.

После подстановки выражений (65.8), (65.9) и (65.10) для y' , y'' , y''' и т.д. в данное дифференциальное уравнение получаем уравнение, порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения.

4. Порядок уравнения понижается, если удаётся преобразовать уравнение к такому виду, в котором обе его части являются полными производными по x от каких-нибудь функций.

ПРИМЕР 65.4. Прочитегризовать уравнение $yy'' = y'^2$.

Р е ш е н и е: Разделив обе части на yy' , получим $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$, откуда $(\ln y')' = (\ln y)'$. Это уравнение легко интегрируется: $\ln y' = \ln y + \ln C$, и после потенцирования получаем $y' = yC$. Порядок уравнения понижен.

65.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.5. Дифференциальное уравнение n -го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции y и всех её производных $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x). \quad (65.11)$$

В этом случае, если $a_0(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$ и функции $a_0(x), \dots, a_n(x)$, $F(x)$ непрерывны на (a, b) , то для равносильного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (65.12)$$

полученного из уравнения (65.11) почленным делением на $a_0(x)$, верна следующая

ТЕОРЕМА 65.2 (Существование и единственность решения). Если коэффициенты уравнения (65.12) $p_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ и правая часть $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то решение уравнения (65.12) существует во всех внутренних точках отрезка $[a, b]$ и единственно.

Если правая часть $f(x)$ линейного дифференциального уравнения (65.12) не равна тождественно нулю, то такое уравнение называется линейным неоднородным уравнением.

Если же правая часть уравнения $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным уравнением:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (65.13)$$

Линейное уравнение имеет следующие свойства:

- (1) Уравнение остаётся линейным при любой замене независимой переменной $x = \varphi(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ — n -кратно непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi'(\xi) \neq 0$. Это свойство следует из линейности производных.
- (2) Уравнение остаётся линейным при линейном преобразовании искомой функции $y = \beta(x)\eta + \gamma(x)$.

Введем понятия *линейной зависимости функций* и *линейной независимости*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.6. *Выражение $\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x)$, в котором $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ есть некоторые постоянные, называется линейной комбинацией функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.7. *Если существует $\{\alpha_i\} \neq 0$ такие, что для любого $x \in (a, b)$ верно тождество:*

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0,$$

то функции $\{\varphi_i(x)\}$ линейно зависимы.

Если же не существуют таких $\{\alpha_i\} \neq 0$, или, точнее, последнее тождество верно, только когда все $\{\alpha_i\} = 0$, — то $\{\varphi_i(x)\}$ линейно независимы.

ПРИМЕР 65.5. *Доказать, что функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы на интервале $(-\infty, +\infty)$.*

Решение: Докажем это от противного. Пусть

$$\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \alpha_nx^n \equiv 0.$$

Тогда мы получаем противоречие основной теореме алгебры, ведь $\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \alpha_nx^n$ есть многочлен n -ной степени, а он имеет не более n корней.

65.3.1. Определитель Вронского. Пусть имеются n функций, зависящих от x :

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

имеющих непрерывные производные до $(n - 1)$ -го порядка включительно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.8. *Определителем Вронского называется функциональный определитель вида*

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (65.14)$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 65.3. *Если функции $\{y_i(x)\}$ линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен нулю $W(x) \equiv 0$.*

ТЕОРЕМА 65.4. *Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ являются линейно независимыми (на интервале (a, b)) решениями уравнения (65.13), то их определитель Вронского $W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Эти теоремы доказываются также, как и случае двух функций и линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Вывод из теорем 65.3 и 65.4: Определитель Вронского, составленный для системы n функций, представляющих собой n решений линейных однородных уравнений, либо тождественно равен нулю, либо не равен нулю ни при каком $x \in (a, b)$, на котором $p_i(x) \in C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.9. *Фундаментальной системой решений называют любую систему n линейно независимых частных решений.*

Следствие теорем 65.3 и 65.4. Для того чтобы решения дифференциального уравнения n -го порядка были линейно независимы в всяком интервале (a, b) (образовывали фундаментальную систему решений) необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был не равен нулю на этом интервале.

ТЕОРЕМА 65.5. *(О структуре общего решения линейного однородного уравнения.) Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения n -го порядка (65.11), то его общее решение имеет вид:*

$$y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (65.15)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные постоянные.

Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка дословно совпадает с соответствующей теоремой 63.1 для уравнения второго порядка.

Как и в случае уравнений второго порядка, общее решение линейного неоднородного уравнения n -го порядка может быть найдено при помощи квадратур, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения. Это можно сделать с помощью метода вариации произвольных постоянных.

65.4. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65.10. *Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_0 y = f(x), \quad (65.16)$$

где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ — действительные числа, причём $a_n \neq 0$.

Вначале рассмотрим *линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами:*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0, \quad (65.17)$$

где $a_i = \text{const}$, $a_n \neq 0$.

В силу общих свойств линейных уравнений нам достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему. Выясним, какие элементарные функции могли бы обратить уравнение (65.17) в тождество.

С этой целью рассмотрим *характеристический многочлен*

$$L(\lambda) \equiv a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad (65.18)$$

который однозначно определяется уравнением (65.17), если мы ищем решение уравнения (65.17) в виде $y = e^{\lambda x}$. Корни (65.18) называются *собственными значениями*.

Рассмотрим возможные ситуации с корнями характеристического многочлена.

1) *Случай, когда характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет вещественные простые корни: $\lambda_k \neq \lambda_m$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.*

В этом случае функции $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^n$ образуют фундаментальную систему решений $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ и общее решение уравнения (65.17) имеет

вид

$$y = \sum_{k=1}^n C_k \cdot y_k(x) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{\lambda_k x},$$

где λ_k — корни характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (65.19)$$

2) Случай, когда характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет произвольные корни (кратные и комплексные).

Пусть множество корней имеет вид :

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{k_r} : \sum_{i=1}^r k_i = n,$$

где k_i — кратность корня λ_i .

Тогда функции

$$\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_r-1} e^{\lambda_r x}\} \quad (65.20)$$

являются решениями линейного однородного уравнения (65.17) и образуют фундаментальную систему.

Когда коэффициенты характеристического уравнения (65.19) действительные, то в этом случае его комплексные корни сопряжённые и имеют одинаковую кратность. Пары комплексно-сопряжённых корней $\alpha \pm \beta i$ соответствуют два комплекснозначных решения $e^{(\alpha \pm \beta i)x}$, из которых можно образовать два действительных решения $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Поэтому из системы комплекснозначных решений (65.20) можно перейти к вещественной системе решений:

$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \dots \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots$$

Эти $2k_1$ решений соответствуют комплексно-сопряжённым собственным значениям $\lambda_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i$ кратности k_1 . Аналогичные формулы справедливы для остальных собственных значений.

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами (65.17) следующий.

1) Составляем характеристическое уравнение

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

2) Находим n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения.

3) По корням характеристического уравнения находим n частных линейно независимых решений по следующим правилам:

- каждому простому действительному корню λ соответствует одно частное решение $y = e^{\lambda x}$;
- каждому кратному действительному корню λ_1 , имеющему кратность k_1 (корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k_1} = \lambda_1$), соответствуют k_1 линейно независимых частных решений $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$, \dots , $y_{k_1} = x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}$;
- каждой паре комплексных сопряжённых корней $\lambda_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i$ кратности один соответствуют два частных решения $y_1 = e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x$ и $y_2 = e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x$;
- каждой паре комплексных сопряжённых корней $\lambda_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i$ кратности k_1 соответствует $2k_1$ частных решений:

$$y_1 = e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, y_2 = x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \dots, y_{k_1} = x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \\ y_{k_1+1} = e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, y_{k_1+2} = x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots, y_{2k_1} = x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x.$$

Общее количество частных решений равно степени характеристического уравнения, т.е. порядку данного линейного дифференциального уравнения. Все эти решения линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений.

4) определив n линейно независимых частных решений y_1, y_2, \dots, y_n , общее решение исходного уравнения (65.17) запишем в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (65.21)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 65.6. Найти общее решение уравнения $y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0$.

Решение:

- запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0;$$

- разлагая левую часть характеристического уравнения на множители, находим корни:

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0, \quad (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 2i, \quad \lambda_5 = -2i.$$

- по корням $\lambda_{1,2,3,4,5}$ находим линейно независимые частные решения:

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = xe^{2x}, \quad y_3(x) = e^{-2x}, \quad y_4(x) = \cos 2x, \quad y_5(x) = \sin 2x;$$

- записываем общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в виде:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

Частное решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (65.16) можно определять с помощью рассмотренного выше метода вариации произвольных постоянных, однако, решения в некоторых конкретных случаях можно найти проще, используя метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов).

Правила составления формы частного решения неоднородного уравнения при этом остаются такими же, как сформулированные в лекции 61 правила для составления формы частного решения уравнения второго порядка.

ПРИМЕР 65.7. *Найти общее решение уравнения*
 $y^{IV} - y = 2x^3 + x + 1.$

Решение: Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i$. В соответствии с вышеизложенным алгоритмом общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Правая часть исходного неоднородного уравнения $2x^3 + x + 1$ является многочленом третьей степени (вид правой части $f(x) = P_n(x)$), ни один из корней характеристического уравнения не равен нулю, т.е. $r = 0$, и частное решение неоднородного уравнения следует искать в форме многочлена третьей степени с неопределёнными коэффициентами

$$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Дифференцируя \bar{y} четыре раза и подставляя полученное выражение в заданное уравнение, получим:

$$-Ax^3 - Bx^2 - Cx - D \equiv 2x^3 + x + 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x

$$-A = 2, \quad -B = 0, \quad -C = 1, \quad -D = 1,$$

находим A, B, C, D и получаем частное решение

$$\bar{y} = -2x^3 - x - 1.$$

В итоге, общий интеграл неоднородного уравнения в соответствии со структурой общего решения выглядит следующим образом:

$$y = \bar{y} + Y(x) = -2x^3 - x - 1 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Практическое занятие 65. Лине́йные уравнения высших порядков

ПРИМЕР 65.1. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{2}{x^3}$.

Р е ш е н и е: Найдем общее решение данного уравнения последовательным интегрированием:

$$\begin{aligned} y''' = \frac{2}{x^3} &\Rightarrow y'' = 2 \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{x^2} + C_1, \\ y' &= \int \left(-\frac{1}{x^2} + C_1 \right) dx = \frac{1}{x} + C_1 x + C_2, \\ y &= \int \left(\frac{1}{x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \ln x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Так как C_1 – произвольная постоянная, то решение можно записать так:

$$y = \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

ПРИМЕР 65.2. Найти частное решение уравнения

$$y''' = e^{-x} \quad \text{при} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Р е ш е н и е: Общее решение найдем непосредственным интегрированием

$$\begin{aligned} y''' = e^{-x} &\Rightarrow y'' = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1, \\ y' &= \int (-e^{-x} + C_1) dx = e^{-x} + C_1 x + C_2, \\ y &= \int (e^{-x} + C_1 x + C_2) dx = -e^{-x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Подставим начальные условия в найденное общее решение и его производные

$$y = -e^{-x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y(0) = -1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 1,$$

$$y' = e^{-x} + C_1 x + C_2 \Rightarrow y'(0) = 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1,$$

$$y'' = -e^{-x} + C_1 \Rightarrow y''(0) = -1 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1.$$

С учётом найденных постоянных интегрирования получим частное решение исходного уравнения

$$y = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1.$$

ПРИМЕР 65.3. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решение: Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 3-го порядка с постоянными коэффициентами:

- составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0;$$

- определяем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1;$$

- по этим корням находим линейно независимые частные решения:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x e^{-x}, \quad y_3 = e^x;$$

- записываем общее решение :

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

ПРИМЕР 65.4. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

Решение: Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 3-го порядка с постоянными коэффициентами:

- составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^3 = 0;$$

- вычисляем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \quad r = 3;$$

- по этим корням находим линейно независимые частные решения:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}, \quad y_3 = x^2e^{2x};$$

- записываем общее решение:

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} = \\ &= e^{2x}(C_1 + C_2x + C_3x^2). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 65.5. Найти общее решение уравнения $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

Р е ш е н и е: Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 4-го порядка с постоянными коэффициентами:

- выпишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0;$$

- находим корни характеристического уравнения, рассматривая его как биквадратное $a^2 + 4a + 3 = 0$, где $a = \lambda^2$, $\lambda = \pm\sqrt{a}$; дискриминант $D = 4 \Rightarrow a_1 = -1$, $a_2 = -3$. Отсюда, учитывая произведённую выше замену, находим:

$$\lambda_1 = -1 = i^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i,$$

$$\lambda^2 = -3 = 3i^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}i;$$

- по этим корням находим линейно независимые частные решения:

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad y_3 = \cos \sqrt{3}x, \quad y_4 = \sin \sqrt{3}x;$$

- записываем общее решение:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

ПРИМЕР 65.6. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = 5 \cos x$.

Р е ш е н и е: Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$ имеет четыре

корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$. Следовательно, общим решением однородного уравнения является функция:

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Правая часть исходного неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$, где $\beta i \equiv i$, и совпадает с $\lambda_3 = i$ ($r = 1$), следовательно, частное решение следует искать в виде:

$$\bar{y} = (A \cos x + B \sin x) \cdot x.$$

Дифференцируя \bar{y} четыре раза и подставляя функцию и производные в исходное дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

откуда $4A = 0$, $-4B = 5$, и, следовательно, $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$. Частным решением дифференциального уравнения является

$$\bar{y} = -\frac{5}{4}x \sin x,$$

а общим решением

$$y = \bar{y} + Y(x) = -\frac{5}{4}x \sin x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

ПРИМЕР 65.7. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x. \quad (65.1)$$

Решение: Для однородного уравнения выпишем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$, которое легко раскладывается на множители $\lambda(\lambda - 3)^2 = 0$ и имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = 3$ кратности два и простой корень $\lambda_3 = 0$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + C_3.$$

Правая часть уравнения (65.1) состоит из двух слагаемых; для первого из них xe^{3x} показатель в экспоненте $\gamma_1 \equiv \alpha_1 + \beta_1 i = 3$, а для второго $e^{3x} \cos 2x$: $\gamma_2 \equiv \alpha_2 + \beta_2 i = 3 + 2i$. Так как эти числа различны, то надо искать отдельно решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x},$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x.$$

В соответствии с теоремой о наложении решений частное решение исходного уравнения будет суммой частных решений этих двух уравнений.

Собственное значение $\lambda_{1,2} = 3$ совпадает с γ_1 и имеет кратность $r = 2$, поэтому частное решение первого уравнения имеет вид $y_1 = x^2(Ax + B)e^{3x}$. Выполняя дифференцирование и подставив в первое уравнение $y = y_1$, $y' = y'_1$, $y'' = y''_1$, $y''' = y'''_1$, после решения системы уравнений для коэффициентов A, B найдем

$$A = \frac{1}{18}, \quad B = -\frac{1}{18}.$$

Далее, число $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение второго уравнения имеет вид $y_2 = e^{3x}(C \cos 2x + D \sin 2x)$. Выполняя дифференцирование и подставив во второе уравнение $y = y_2$, $y' = y'_2$, $y'' = y''_2$, $y''' = y'''_2$, после решения системы уравнений для коэффициентов C, D найдем

$$C = -\frac{3}{52}, \quad D = -\frac{1}{26}.$$

Общее решение исходного уравнения равно

$$y = Y(x) + y_1 + y_2,$$

где

$$y_1 = x^2 \left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{18} \right) e^{3x},$$
$$y_2 = e^{3x} \left(-\frac{3}{52} \cos 2x - \frac{1}{26} \sin 2x \right).$$

Отсюда получаем общее решение исходного уравнения

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + C_3 + x^2 \left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{18} \right) e^{3x} + e^{3x} \left(-\frac{3}{52} \cos 2x - \frac{1}{26} \sin 2x \right).$$

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 65.8. Найти частное решение уравнения

$$y^{IV} = \cos^2 x \text{ при } y(0) = \frac{1}{32}, y'(0) = 0, y''(0) = \frac{1}{8}, y'''(0) = 0.$$

ПРИМЕР 65.9. Найти общее решение уравнения

$$y''' = 24x + 6.$$

ПРИМЕР 65.10. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 8y = 0.$$

ПРИМЕР 65.11. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - y = 0.$$

ПРИМЕР 65.12. Найти общее решение уравнения

$$y^V - 10y''' + 9y' = 0.$$

ПРИМЕР 65.13. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

ПРИМЕР 65.14. Найти общее решение уравнения

$$y^V - y^{IV} - y''' + y'' = 0.$$

ПРИМЕР 65.15. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$$

ПРИМЕР 65.16. Найти общее решение уравнения

$$y''' + y' = \cos 2x.$$

ПРИМЕР 65.17. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3.$$

ПРИМЕР 65.18. Найти общее решение уравнения

$$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Лекция 66. Приложения дифференциальных уравнений

Практические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, описывающие колебательный процесс.

66.1. Некоторые практические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Решение многих практических задач часто приводит к отысканию неизвестной функции на основании уравнения (или уравнений), содержащих независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции, т.е. к решению дифференциальных уравнений. На первой лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям мы уже кратко рассмотрели задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (задачи о распаде радия и о движении лодки). В последующих лекциях мы рассмотрим теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые методы их решения. В данной лекции рассмотрим более подробно приложения, приводящие к задачам на составление и решение обыкновенных дифференциальных уравнений различных типов.

ПРИМЕР 66.1. *Сосуд объёмом 20 литров содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 литров азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота? (При решении задачи считать, что втекающий азот вследствие перемешивания распределяется по объёму сосуда равномерно.)*

Решение: Примем за независимую переменную время t , а за искомую функцию $V(t)$ – объем азота в сосуде (в литрах). Тогда за промежуток времени Δt количество азота в сосуде изменится на $\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$. С другой стороны, за время Δt в сосуд попадёт $0,1\Delta t$ литров азота, через то же время в сосуде окажется $V(t) + \alpha(t)$ литров азота, то есть один литр сосуда содержит $\frac{V(t) + \alpha(t)}{20}$ литров азота, а вытечет за это время $0,1 \frac{V(t) + \alpha(t)}{20} \Delta t$ литров азота (функция $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$). Таким образом, за время Δt содержание азота в сосуде изменится на $\Delta V = 0,1\Delta t - 0,1 \frac{V(t) + \alpha(t)}{20} \Delta t$ литров.

Перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$dV = 0,1 dt - \frac{V}{200} dt.$$

Решая это уравнение, получим функцию

$$V = Ce^{-\frac{t}{200}} + 20.$$

Теперь, используя условие, что в момент времени $t = 0$ в сосуде находилось $V = 20 \cdot 0,8 = 16$ литров азота, вычислим константу C :

$$16 = C + 20,$$

$$C = -4.$$

Таким образом, мы получили уравнение зависимости объёма азота в сосуде от времени:

$$V(t) = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}}.$$

Теперь, используя это уравнение, можем вычислить время, через которое в сосуде окажется 99% азота, так как 99% азота составляют $V = 20 \cdot 0,99 = 19,8$ л. Подставив это значение в выражение для $V(t)$, вычислим t :

$$19,8 = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}}, \quad 4e^{-\frac{t}{200}} = 0,2, \quad e^{-\frac{t}{200}} = 0,05.$$

Потенцируя, находим

$$t = -200 \cdot \ln 0,05 = -2,99 \cdot (-200) = 598 \text{ с.}$$

Полученное время есть искомое время заполнения сосуда азотом на 99%.

ПРИМЕР 66.2. Составить уравнение кривой, обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение: Пусть $y = f(x)$ – искомое уравнение кривой, а $M(x, y)$ – некоторая точка, лежащая на кривой. Для определённости предположим, что кривая расположена в первой четверти (рис. 12).

По условию задачи $|BM| = |MA|$, а, следовательно, их проекции на ось Ox также равны: $|OP| = |PA| = x$. Из рис. 12 видно, что

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{x} \implies \operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{x}.$$

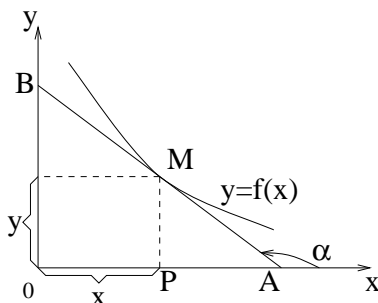


Рис. 12. Кривая, на которой отрезок касательной делится пополам в точке касания

Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha$ есть угловой коэффициент касательной, который в точке $M(x, y)$ равен y' , получаем дифференциальное уравнение искомой кривой:

$$y' = -\frac{y}{x},$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, получим:

$$\begin{aligned} y' = -\frac{y}{x} &\implies \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \implies \\ &\implies \ln |y| = -\ln |x| + \ln |C| \implies y = \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Это – уравнение семейства гипербол. Легко видеть, что их ветви, лежащие не только в первой четверти, но и в других четвертях, также будут решениями задачи.

ПРИМЕР 66.3. *Задача о второй космической скорости. Определить наименьшую скорость, с которой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение: Обозначим массу Земли и массу тела соответственно через M и m . По закону тяготения Ньютона сила F притяжения, действующая на тело m будет равна:

$$F = k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

где r – расстояние между центром Земли и центром тяжести брошенного тела, k – гравитационная постоянная $\left(k = 6,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2}\right)$.

По второму закону Ньютона произведение массы тела на ускорение равно сумме сил, действующих на тело $ma = F$, следовательно уравнение движения тела с массой m имеет вид:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}. \quad (66.1)$$

Знак минус в уравнении отражает тот факт, что ускорение тела отрицательно.

Полученное дифференциальное уравнение относится к дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающим понижение порядка. Решим это уравнение при следующих начальных условиях:

$$r = R \quad \text{и} \quad \frac{dr}{dt} = V_0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где R – радиус Земли ($R = 63 \cdot 10^7$ см), V_0 – скорость тела в момент бросания.

Введем обозначения, которые позволят понизить порядок уравнения:

$$\frac{dr}{dt} = V(r), \quad \text{тогда} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = V \frac{dV}{dr},$$

где V – скорость движения тела. Подставляя эти выражения в (66.1), получим уравнение:

$$V \frac{dV}{dr} = -k \frac{M}{r^2}, \quad (66.2)$$

которое является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$$V dV = -kM \frac{dr}{r^2} \implies \int V dV = -kM \int \frac{dr}{r^2} \implies \frac{V^2}{2} = \frac{kM}{r} + C_1.$$

Из начальных условий $R(0) = R$, $V(0) = V_0$ находим C_1 :

$$\frac{V_0^2}{2} = \frac{kM}{R} + C_1 \implies C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{V_0^2}{2}.$$

Таким образом, закон изменения скорости в зависимости от расстояния r при заданных начальных условиях примет вид:

$$\frac{V^2}{2} = \frac{kM}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{V_0^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{V^2}{2} = \frac{kM}{r} + \left(\frac{V_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right).$$

Тело должно двигаться так, чтобы скорость всегда была положительной ($V^2/2 > 0$). Так как величина $\frac{kM}{r}$ при возрастании r стремится к нулю, то условие $V^2/2 > 0$ может выполняться только в случае

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \quad \text{или} \quad V_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Следовательно минимально необходимая скорость, с которой следует бросить тело так, чтобы оно не вернулось на Землю, определяется равенством:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}. \quad (66.3)$$

На поверхности Земли при $r = R$ ускорение силы тяжести равно $g = 981 \text{ см/с}^2$. Из уравнения (66.2) получаем, что по абсолютной величине ускорение силы тяжести равно

$$\left| \frac{d^2 r}{dt^2} \right| = g = k \frac{M}{R^2},$$

откуда $M = \frac{gR^2}{k}$.

Подставляя значение M в формулу (66.3), получаем: $V_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} = \sqrt{\frac{2kgR^2}{Rk}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^5 \frac{\text{см}}{\text{с}} = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$

66.2. Приложение линейных дифференциальных уравнений второго порядка к изучению механических и электрических колебаний

Рассмотрим следующую задачу. Пусть материальная точка (груз) массы m , находящаяся на конце пружины, движется по вертикальной прямой. Требуется определить закон движения груза.

Предположим, что в положении равновесия вес груза уравновешивается упругой силой пружины. Совместим начало координат с положением равновесия груза, а ось Oy направим вертикально вниз по прямой, вдоль которой движется груз (рис. 13).

Положение груза в произвольный момент времени t определяется отклонением y груза от начала координат (см. рис. 13). Для нахождения закона движения груза надо определить отклонение груза y от положения равновесия как функцию времени t .

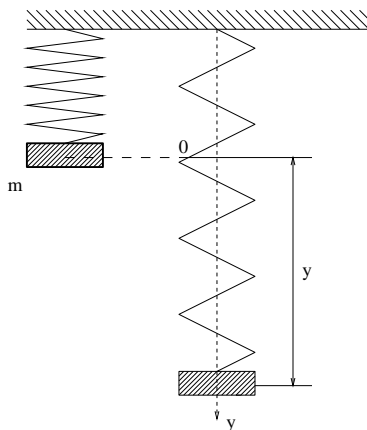


Рис. 13. Колебания груза, подвешенного на пружине.

На тело действуют следующие силы:

1) Восстанавливающая сила \mathbf{F}_1 , стремящаяся вернуть груз в положение равновесия. Сила \mathbf{F}_1 направлена вдоль оси Oy , её проекция на эту ось пропорциональна отклонению груза от положения равновесия: $F_{1y} = -ky$. Число k , $k > 0$ связано с упругостью пружины. Знак «минус» в выражении проекции силы F_{1y} указывает на то, что восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную деформации пружины.

2) Сила сопротивления среды \mathbf{F}_2 , в которой находится пружина с грузом, направлена противоположно вектору скорости движения груза. Величина силы \mathbf{F}_2 , как показывает опыт, пропорциональна скорости v груза. Поэтому проекция силы \mathbf{F}_2 на ось Oy запишется в виде $F_{2y} = -\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, где $\lambda > 0$.

Силой веса груза пренебрегаем, так как она уравновешена упругой силой пружины, что учтено выбором системы координат (начальное положение $y = 0$). Весом пружины и её энергией движения также пренебрегаем.

Для составления дифференциального уравнения движения груза воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}. \quad (66.4)$$

Здесь \mathbf{a} — вектор ускорения и $\sum \mathbf{F}$ — сумма сил, действующих на материальную точку.

В нашем случае на материальную точку (груз) действуют две силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , направленные вдоль оси Oy . Проецируя векторы, стоящие в обеих частях равенства (66.4), на ось Oy и замечая, что проекция вектора ускорения \mathbf{a} на ось Oy равна $\frac{d^2y}{dt^2}$, получаем искомое дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt}$$

или

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = 0. \quad (66.5)$$

Уравнение (66.5) является уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и называется *уравнением свободных колебаний*.

Если на груз, помимо сил упомянутых выше, действует внешняя «возмущающая» сила, направленная вдоль оси Oy , величина которой $F(t)$ есть заданная функция времени t , то уравнение (66.5) принимает вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = F(t) \quad (66.6)$$

и называется *уравнением вынужденных колебаний*.

Разделив обе части уравнения (66.6) на m и введя обозначения

$$\frac{\lambda}{m} = 2b, \quad \frac{k}{m} = \omega^2, \quad \frac{F(t)}{m} = f(t),$$

получим уравнение вынужденных колебаний в следующей окончательной форме:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t). \quad (66.7)$$

Уравнение (66.7) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения.

1. Пусть отсутствуют сопротивление среды ($b = 0$) и внешняя возмущающая сила ($f(t) \equiv 0$). В этом случае уравнение (66.7) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (66.8)$$

Уравнение (66.8) является уравнением свободных колебаний груза при отсутствии сопротивления среды. Его характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm \omega i$ и общее решение уравнения (66.8) запишется в виде

$$Y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (66.9)$$

Вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 введем новые произвольные постоянные $N > 0$ и φ (амплитуда и фаза колебаний), связанные с C_1 и C_2 соотношениями

$$C_1 = N \sin \varphi, \quad C_2 = N \cos \varphi.$$

Тогда амплитуда колебаний N и фаза φ выражаются через C_1 и C_2 по формулам:

$$N = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в равенство (66.9), получим

$$Y(t) = N \sin \varphi \cos \omega t + N \cos \varphi \sin \omega t = N \sin(\omega t + \varphi).$$

Итак, общее решение уравнения (66.8) можно представить в виде

$$Y(t) = N \sin(\omega t + \varphi).$$

Эта формула показывает, что груз совершает периодические движения, которые называются *гармоническими колебаниями*. Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, N — амплитуда колебаний, φ — начальная фаза колебаний, величина ω называется *собственной частотой колебаний*.

2. Пусть теперь имеет место сопротивление среды ($b \neq 0$), но по-прежнему $f(t) \equiv 0$, т.е. внешняя сила равна нулю. В этом случае уравнение (66.7) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (66.10)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 2bk + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$.

Рассмотрим практически наиболее интересный случай малого сопротивления, когда $b < \omega$. В этом случае корни являются комплексными: $k_{1,2} = -b + \tilde{\omega}i$, где $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2}$. Общее решение уравнения (66.10) имеет вид

$$Y(t) = e^{-bt}(C_1 \cos \tilde{\omega}t + C_2 \sin \tilde{\omega}t) = Ne^{-bt} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi),$$

где $C_1 = N \sin \varphi$, $C_2 = N \cos \varphi$. Отсюда видно, что груз совершает *затухающие* колебания с амплитудой $Ne^{-bt} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 14).

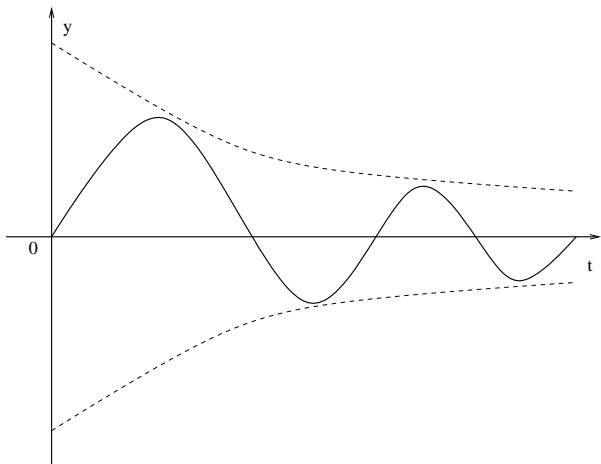


Рис. 14. График затухающих колебаний

Заметим, что при $b > \omega$ корни характеристические действительные и различные. Тогда решение уравнения (66.10) имеет вид

$$Y(t) = C_1 e^{(-b + \sqrt{b - \omega^2})t} + C_2 e^{(-b - \sqrt{b - \omega^2})t}.$$

В этом случае груз, не совершая колебаний, приближается к положению равновесия ($Y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Такое же движение происходит в частном случае $b = \omega$, когда

$$Y(t) = C_1 e^{-bt} + C_2 t e^{-bt}.$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда сопротивление среды отсутствует ($b = 0$), но на груз действует внешняя периодическая сила $f(t) = a \sin \mu t$. Уравнение движения (66.7) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = a \sin \mu t. \quad (66.11)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, есть сумма частного решения $\bar{y}(t)$ неоднородного уравнения (66.11) и общего решения $Y(t)$ соответствующего однородного уравнения (66.8)

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Общее решение уравнения (66.8) было найдено раньше; оно имеет вид

$$Y(t) = N \sin(\omega t + \varphi).$$

Найдем теперь частное решение уравнения (66.11).

Допустим сначала, что частота μ внешней периодической силы отлична от собственной частоты колебаний ω . Так как в этом случае μi не является корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то частное решение \bar{y} следует искать в виде

$$\bar{y}(t) = A \sin \mu t + B \cos \mu t.$$

Дифференцируя \bar{y} дважды, найдем $\bar{y}''(t) = -\mu^2(A \sin \mu t + B \cos \mu t)$ и после подстановки выражений для $\bar{y}(t)$ и $\bar{y}''(t)$ в уравнение (66.11) получим уравнение для коэффициентов A и B :

$$-\mu^2(A \sin \mu t + B \cos \mu t) + \omega^2 A \sin \mu t + \omega^2 B \cos \mu t = a \sin \mu t,$$

откуда найдем $A = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2}$, $B = 0$. Таким образом, частное решение уравнения (66.11) имеет вид

$$\bar{y}(t) = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu t,$$

а общее решение этого уравнения

$$y(t) = \bar{y}(t) + Y(t) = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu t + N \sin(\omega t + \varphi). \quad (66.12)$$

Из соотношения (66.12) видно, что если частота μ внешней возмущающей силы близка к собственной частоте колебаний пружины ω , то разность $\omega^2 - \mu^2$ близка к нулю и амплитуда колебаний $\frac{a}{\omega^2 - \mu^2}$ резко возрастает. При $\omega = \mu$ пользоваться формулой (66.12) нельзя.

Так как при этом $\mu i = \omega i$ является корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то частное решение уравнения (66.11) следует искать в виде

$$\bar{y}(t) = (A \sin \mu t + B \cos \mu t)t.$$

Подставляя $\bar{y}(t)$ и

$$\bar{y}''(t) = 2(\mu A \cos \mu t - \mu B \sin \mu t) + \mu t(-A \sin \mu t - B \cos \mu t)$$

в уравнение (66.11) и учитывая, что $\mu = \omega$, получим уравнение для коэффициентов A и B :

$$\begin{aligned} 2\mu A \cos \mu t - 2\mu B \sin \mu t + \mu^2 t(-A \sin \mu t - B \cos \mu t) + \\ + \mu^2 t(A \sin \mu t + B \cos \mu t) = a \sin \mu t, \end{aligned}$$

откуда получим $A = 0$, $B = -\frac{a}{2\omega}$. Поэтому частное решение $\bar{y}(t)$ имеет вид

$$\bar{y} = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t,$$

а общее решение уравнения (66.11) запишется следующим образом:

$$y(t) = Y(t) + \bar{y}(t) = N \sin(\omega t + \varphi) - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t.$$

Наличие множителя t во втором члене указывает на то, что амплитуда колебания линейно (неограниченно) растет со временем. График функции $-\frac{at}{2\omega} \cos \omega t$ изображен на рис. 15. Говорят, что в этом случае имеет место *резонанс*. Итак, резонанс при колебательном движении наступает, если частота собственных колебаний совпадает с частотой внешней вынуждающей силы.

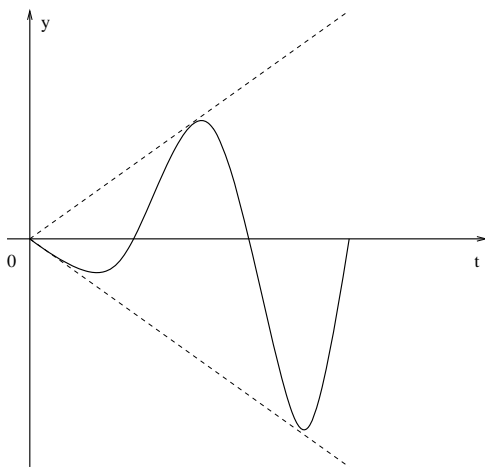


Рис. 15. Резонансные колебания

К линейным дифференциальным уравнениям второго порядка приводят также явления, связанные с изменением силы тока в электрической цепи.

Рассмотрим теперь простейшую электрическую цепь, состоящую из омического сопротивления R , индуктивности L , емкости C , к которой подключен источник электродвижущей силы, изменяющейся с течением времени по заданному закону $U = U(t)$ (см. рис. 16).

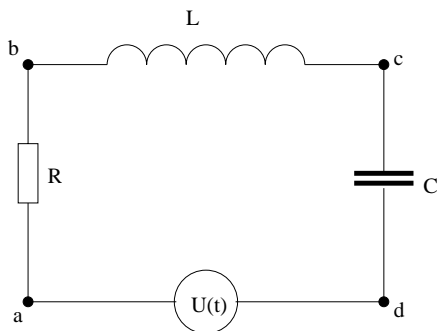


Рис. 16. Простейшая электрическая цепь

Найдем зависимость электрического тока в цепи от времени $I = I(t)$. Пусть U — падение напряжения на некотором участке цепи. Тогда из первого закона Кирхгофа следует, что в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений равна электродвижущей силе:

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = U(t).$$

Из физики известно, что

$$U_{ab} = RI(t) \quad (\text{закон Ома}),$$

$$U_{bc} = L \frac{dI}{dt}, \quad U_{cd} = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt.$$

Поэтому

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = U(t).$$

Дифференцируя по t обе части последнего равенства, получим

$$R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = U'(t)$$

или

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = U'(t).$$

Таким образом, искомая сила тока I в цепи является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если внешняя электродвижущая сила U постоянна (в частности, равна нулю), то $U' = 0$ и мы приходим к линейному дифференциальному однородному уравнению

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{I}{LC} = 0.$$

Практическое занятие 66. Приложения дифференциальных уравнений

ПРИМЕР 66.1. *За какое время вытечет вся вода из вертикального цилиндрического бака диаметром $2R = 1,8$ м и высотой $H = 2,45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ см? При решении задачи принять, что вода вытекает из бака со скоростью, равной $k\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ м/с² – ускорение силы тяжести, h – высота уровня воды над отверстием, а k – некоторый безразмерный эмпирический коэффициент, равный для воды 0,6.*

Решение: Примем за независимую переменную t – время вытекания воды из бака, а за искомую функцию $h(t)$ – высоту уровня воды, оставшейся в баке, которая зависит от времени вытекания воды (рис. 17). Тогда $\Delta V = Sh = Sv \Delta t$ – объем воды, вытекающей из бака за время Δt , где S – площадь отверстия, из которого вытекает вода, равная $S = r^2\pi v(t)$, а $v = v(t)$ – скорость вытекания воды из бака, зависящая от высоты воды, оставшейся в баке ($v = 0,6\sqrt{2gh}$).

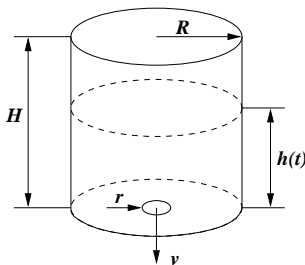


Рис. 17. Иллюстрация к задаче о вытекании воды из бака

С другой стороны, изменение объёма воды, вытекающей из бака за время Δt , может быть определено по понижению уровня. Оно равняется $\Delta V = \pi R^2 \Delta h$. Используя обе формулы для ΔV и учитывая, что уровень воды в баке со временем понижается ($\Delta h < 0$), получим соответствующее уравнение для конечных малых приращений Δh и Δt

$$\pi R^2 \Delta h = -\pi r^2 \cdot 0,6 \sqrt{2gh} \Delta t.$$

Сокращая на π и переходя к пределу в данной формуле при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$R^2 dh = -0,6 r^2 \sqrt{2gh} dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим соотношение, из которого можно найти искомую функцию $h = h(t)$:

$$2\sqrt{h} = -0,6 \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} t + C.$$

Постоянную C найдем из условия, что $h = H$ при $t = 0$. Подставив t и h в предыдущую функцию, получим C :

$$C = 2\sqrt{H},$$

тогда функция, определяющая неявно зависимость h от t , будет выглядеть следующим образом:

$$\sqrt{h} - \sqrt{H} = -0,6 \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{r^2}{R^2} t \quad (66.1)$$

или, после несложных преобразований, получаем явную зависимость $h = h(t)$:

$$h = \left(\sqrt{H} - 0,6 \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{r^2}{R^2} t \right)^2.$$

Для нахождения полного времени t_k истечения воды из бака необходимо разрешить соотношение (66.1) относительно времени t и в полученной формуле положить $h = 0$. Получим

$$t_k = \frac{R^2}{0,6 r^2} \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H} - \sqrt{h} \right) \Big|_{h=0}. \quad (66.2)$$

Теперь, подставляя в полученное выражение (66.2) конкретные значения из условий задачи: $R = 0,9$ м, $H = 2,45$ м, $r = 0,03$ м, $g = 9,8$ м/с², можно найти требуемое значение времени:

$$t_k = \frac{0,9^2}{0,6(0,03)^2} \sqrt{\frac{2}{9,8}} \sqrt{2,45} \text{ с} \approx 1006 \text{ с} \approx 16,7 \text{ мин.}$$

ПРИМЕР 66.2. После выключения двигателя лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 2 м/с, через 4 с её скорость стала равна 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до полной остановки?

Решение: Пусть $v = v(t)$ – скорость лодки в момент времени t . Тогда $v(0) = 2$. Согласно второму закону Ньютона, $m \frac{dv}{dt} = F(t)$, где $F(t)$ – сила, действующая на лодку, и m – масса лодки. По условию задачи сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки: $F(t) = -kv(t)$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности, а знак минус означает, что сила направлена против движения. Сила тяжести, действующая на лодку, уравновешивается силой Архимеда, обе этих силы перпендикулярны поверхности воды, поэтому дифференциальное уравнение движения лодки имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных и интегрирования получим

$$m \frac{dv}{v} = -k dt \implies m \ln |v| = -kt + \ln |C|$$

и, следовательно, общее решение имеет вид

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Согласно начальному условию, $v(0) = 2$, поэтому $C = 2$ и

$$v(t) = 2e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Из того факта, что скорость лодки известна через 4 секунды:

$$v(4) = 1, \text{ можно определить величину } \frac{k}{m} : 1 = 2e^{-4\frac{k}{m}}, \text{ откуда}$$

$$\frac{k}{m} = \frac{\ln 2}{4}.$$

Таким образом, скорость лодки $V(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$. Время T , через которое скорость лодки станет равной 0,25 м/с, находим из уравнения

$0,25 = 2^{1-\frac{T}{4}}$, откуда $2^{-2} = 2^{1-\frac{T}{4}}$, $-2 = 1 - \frac{T}{4}$, следовательно $T = 12$ с. Длину пути, пройденного лодкой, вычислим по формуле

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t 2^{1-\frac{t}{4}} dt = \frac{8}{\ln 2} \left(1 - 2^{-\frac{t}{4}}\right).$$

Отсюда видно, что лодка может пройти путь (за бесконечное время!), который не превосходит $\frac{8}{\ln 2} \simeq 11,5$ м.

ПРИМЕР 66.3. *Парашиютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. (Ускорение силы тяжести g считать равным 10 м/с².)*

Р е ш е н и е: Примем за независимую переменную t – время падения парашютиста, а за искомую функцию $v(t)$ – скорость парашютиста. Тогда силу сопротивления воздуха F_{drag} запишем следующим образом:

$$F_{drag} = kv^2(t),$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Теперь запишем сумму сил, которые действуют на парашютиста при падении в проекции на вертикальную ось:

$$ma = mg - F_{drag},$$

где a – ускорение парашютиста.

Учитывая, что ускорение $a = \frac{dv}{dt}$, получим дифференциальное уравнение, связывающее скорость парашютиста v и время t

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Обозначим для удобства $\frac{k}{m} = \eta$. Получим

$$\frac{1}{\eta} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\eta} g - v^2.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, решая его, получим скорость парашютиста как функцию времени:

$$-\frac{1}{\eta} \frac{dv}{\left(v^2 - \frac{1}{\eta}g\right)} = dt;$$

$$t = -\frac{1}{\eta} \int \frac{dv}{\left(v^2 - \frac{1}{\eta}g\right)}.$$

Проинтегрировав данное равенство и выразив из найденного таким образом уравнения функцию $v(t)$, получим:

$$v = \sqrt{\frac{g}{\eta}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\eta g}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\eta g}t}}.$$

Теперь, используя эту функцию, определим постоянную η . Предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Это означает, что при $t \rightarrow +\infty$ скорость $v(t)$ будет стремиться к 50 м/с. Тогда, вычислив предел полученной выше функции при $t \rightarrow +\infty$, можно определить η :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{g}{\eta}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\eta g}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\eta g}t}} = \sqrt{\frac{g}{\eta}},$$

следовательно

$$50 = \sqrt{\frac{g}{\eta}}, \quad \frac{\eta}{g} = \frac{1}{2500}, \quad \eta = \frac{g}{2500}.$$

Подставляя полученное значение параметра η в функцию $v(t)$, получим окончательно:

$$v = 50 \frac{1 - e^{-\frac{g}{25}t}}{1 + e^{-\frac{g}{25}t}},$$

или

$$v = 50 \frac{1 - e^{-0,4t}}{1 + e^{-0,4t}} \equiv 50 \frac{e^{0,2t} - e^{-0,2t}}{e^{0,2t} + e^{-0,2t}}.$$

Используя тот факт, что производная от пути, пройденного материальной точкой, равна её скорости, получим дифференциальное уравнение для нахождения расстояния от точки прыжка как функции времени:

$$\frac{ds}{dt} = 50 \frac{e^{0,2t} - e^{-0,2t}}{e^{0,2t} + e^{-0,2t}},$$

откуда зависимость $s = s(t)$ находится квадратурой:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t 50 \frac{e^{0,2t} - e^{-0,2t}}{e^{0,2t} + e^{-0,2t}} dt = \\ &= 250 \ln(0,5(e^{0,2t} + e^{-0,2t})) \Big|_0^t = 250 \ln(0,5(e^{0,2t} + e^{-0,2t})). \end{aligned}$$

Поскольку расстояние, которое парашютист пролетел до раскрытия парашюта, равно 1000 м, а $e^t + e^{-t} \approx e^t$ при достаточно больших t , получим следующее уравнение для нахождения времени, которое он падал до раскрытия парашюта:

$$\begin{aligned} 250 \ln(0,5(e^{0,2t} + e^{-0,2t})) &= 1000; \\ e^{0,2t} + e^{-0,2t} &= 2e^4 \Rightarrow e^{0,2t} \approx 2e^4 \Rightarrow 0,2t \approx 4 + \ln 2; \\ t &\approx 20 + 5 \cdot 0,7 = 23,5 \text{ сек.} \end{aligned}$$

ПРИМЕР 66.4. Найти формулу зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Решение: Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которой параллельна направлению падающих лучей. Пусть эта ось совпадает с осью Ox . Начало координат поместим в точку, в которой собираются отраженные лучи. Падающий луч обозначим через AM , а отраженный – через MO (рис. 18).

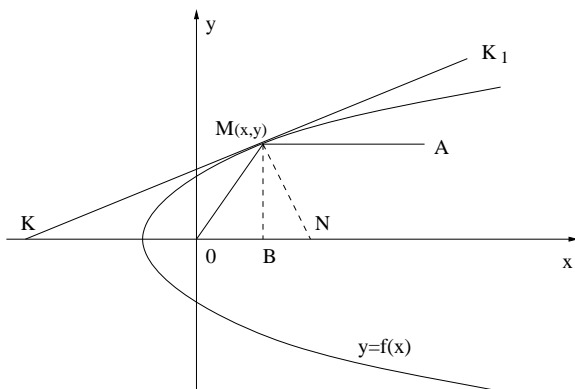


Рис. 18. Иллюстрация к задаче о зеркале

Кривая $y = f(x)$ при вращении вокруг оси x образует искомую поверхность, поэтому для решения поставленной задачи необходимо определить уравнение этой кривой.

Проведем к кривой $y = f(x)$ касательную KK_1 и нормаль MN в точке касания. Из условия задачи следует, что, так как угол падения равен углу отражения, а линия AM параллельна оси Ox , $\angle OKM = \angle AMK_1 = \angle OMK = \alpha$. Следовательно, треугольник OKM – равнобедренный с вершиной O , отсюда $|OM| = |OK|$. Из прямоугольного треугольника OMB следует, что $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (гипотенуза), а $|OK|$ можно найти из уравнения касательной

$$Y - y = y'(X - x).$$

Полагая, что $Y = 0$ (точка пересечения касательной с осью Ox), получим $X = x - \frac{y}{y'}$, откуда

$$|X| = |OK| = -X = -x + \frac{y}{y'}.$$

Приравнивая значения OM и OK , получим дифференциальное уравнение

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'}, \quad \text{или} \quad y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

решение которого даст ответ на поставленный в задаче вопрос.

Это уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, так как можно показать, что $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \frac{y/x}{1 + \sqrt{1 + (y/x)^2}} \equiv f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (66.3)$$

Однако в рассматриваемом случае целесообразно разрешить уравнение (66.3) относительно x , т.е. записать его в виде:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = f\left(\frac{x}{y}\right). \quad (66.4)$$

Для интегрирования уравнения (66.4) введем подстановку $t = \frac{x}{y}$, откуда $x = ty$, $x' = t'y + t$, и подставим новую переменную в уравнение

$$t'y + t = t + \sqrt{t^2 + 1} \implies t'y = \sqrt{t^2 + 1}.$$

Последнее уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{dy}{y} \implies \ln|y| = \ln|t + \sqrt{t^2+1}| + \ln C$$

или $y = C(t + \sqrt{1+t^2})$.

Возвращаясь к первоначальной переменной $\left(t = \frac{x}{y}\right)$, получим

$$y = C \left(\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \right).$$

После упрощения находим решение задачи в виде:

$$\frac{y^2}{C} = x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Перенесем x налево и возведем в квадрат левую и правую части:

$$\frac{y^4}{C^2} - \frac{2y^2x}{C} + x^2 = x^2 + y^2$$

и произведем необходимые сокращения и преобразования:

$$y^2 \left(\frac{y^2}{C^2} - \frac{2x}{C} \right) = y^2 \implies y^2 = 2Cx + C^2 \implies y^2 = 2C \left(x + \frac{C}{2} \right).$$

Последнее уравнение является уравнением параболы, у которой параметр равен C , вершина лежит в точке $\left(-\frac{C}{2}, 0\right)$, а фокус находится в начале координат. Следовательно, зеркало, отвечающее требованию условий рассматриваемой задачи, имеет форму параболоида вращения.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 66.5. Тело охладилось за 10 мин от 100°C до 60°C . Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°C . Когда тело остынет до 25°C ? (Принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.)

ПРИМЕР 66.6. Футбольный мяч весом $0,4$ кг брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $0,48$ г при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся

результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха? (Считать $g = 10$ м/с.)

ПРИМЕР 66.7. Воронка имеет форму конуса радиусом $R = 6$ см и высотой $H = 10$ см, обращённого вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметром 0,5 см, сделанное в вершине конуса? (При решении задачи принять, что вода вытекает со скоростью, равной $0,6\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ м/с² – ускорение силы тяжести, а h – высота уровня воды над отверстием.)

ПРИМЕР 66.8. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 1 м поглощается $1/4$ первоначального светового потока. Какая часть светового потока дойдет до глубины h ? До глубины 4 м?

ПРИМЕР 66.9. В прямолинейной трубе радиусом R течёт жидкость (течение ламинарное). Из гидравлики известно, что скорость течения v каждого слоя жидкости пропорциональна гидравлическому напору p (перепад давления на единичной длине трубы), плотности жидкости ρ и обратно пропорциональна вязкости жидкости μ , причём изменение скорости поперек трубы пропорционально расстоянию от оси трубы и скорость течения убывает с увеличением расстояния от оси. На стенке трубы скорость жидкости равна нулю. Найти v как функцию расстояния r соответствующего слоя жидкости от оси трубы.

ПРИМЕР 66.10. Найти уравнение кривых, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

ПРИМЕР 66.11. Найти уравнение кривых, обладающих следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведёнными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

ПРИМЕР 66.12. Найти уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

ПРИМЕР 66.13. Найти уравнение кривой, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

Понятие о системах дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Теорема существования и единственности. Метод исключения неизвестных. Метод интегрируемых комбинаций. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (67.1)$$

Число n называется *порядком* системы (67.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 67.2. Решением нормальной системы дифференциальных уравнений (67.1) будем называть систему функций

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \quad (67.2)$$

которая обращает все уравнения системы в тождества.

Задача Коши для системы (67.1) состоит в нахождении решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0,$$

где x_0, y_1^0, \dots, y_n^0 – заданные числа (начальные данные).

Уравнения

$$y_i = y_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (67.3)$$

определяют в пространстве (x, y_1, \dots, y_n) линию, которая называется *интегральной линией системы*. Вместо того, чтобы говорить, что $y_i(x_0) = y_i^0, i = 1, \dots, n$, будем говорить, что линия (67.3) или решение (67.2) проходит через точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$.

Геометрически решение системы можно истолковать так же, как решение одного дифференциального уравнения: интегральная линия в каждой точке касается поля направлений, которое задаёт система (67.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 67.3. Система функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_m)$, $i = 1, \dots, n$, называется *общим решением системы (67.1) в области G* , если, выбирая надлежащим образом постоянные C_1, \dots, C_m , мы можем получить любое решение, принадлежащее этой области. Обычно $m = n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 67.4. Система соотношений $\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, называется *интегралом системы (67.1)*, если определяемая ими линия является интегральной линией для этой системы.

Система соотношений $\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n, C_1, \dots, C_m) = 0$, где $i = 1, \dots, n$, называется *общим интегралом системы (67.1)*, если выбором C_1, \dots, C_m можно получить любую интегральную кривую системы (67.1).

В качестве примера канонической системы приведем систему дифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки массы m в пространстве:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \end{cases} \quad (67.4)$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – переменные координаты точки, скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{a} которой равны

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}, \quad (67.5)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k}. \quad (67.6)$$

В правой части уравнений системы (67.4) стоят проекции на оси координат силы $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$, под действием которой материальная точка движется. В общем случае сила является функцией времени, координат точки и её скорости.

Таким образом система дифференциальных уравнений (67.4), описывающих нестационарное (переменное по времени) пространственное движение материальной точки массой m представляет собой систему трёх дифференциальных уравнений второго порядка относительно трёх искомых функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Система (67.4) преобразуется к нормальной, если ввести новые функции $u(t) = \frac{dx}{dt}$, $v(t) = \frac{dy}{dt}$, $w(t) = \frac{dz}{dt}$. Тогда $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dt}$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt}$, и система уравнений (67.4) запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \frac{1}{m} F_x(t, x, y, z, u, v, w), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F_y(t, x, y, z, u, v, w), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{m} F_z(t, x, y, z, u, v, w), \\ \frac{dx}{dt} = u(t), \\ \frac{dy}{dt} = v(t), \\ \frac{dz}{dt} = w(t). \end{array} \right. \quad (67.7)$$

Для нормальной системы дифференциальных уравнений (67.1) теорема Коши (существования и единственности решения) формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 67.1. Если правые части уравнений системы (67.1), т.е. функции $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, а также их частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ непрерывны по всем переменным x, y_1, \dots, y_n в некоторой области G , то, каковы бы ни были начальные значения $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$, принадлежащие области G , существует единственное решение системы $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, удовлетворяющее этим начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

Рассмотрим некоторые методы решений систем дифференциальных уравнений.

67.2. Метод исключения неизвестных

В некоторых случаях нормальную систему из n дифференциальных уравнений удаётся свести к одному уравнению n -го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Этого можно достигнуть, дифференцируя одно из уравнений системы и исключая все неизвестных, кроме одного.

Этот метод называется методом исключения неизвестных.

ПРИМЕР 67.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2y}. \end{cases}$$

Решение: Дифференцируя обе части первого из данных уравнений, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y \frac{dy}{dt} + \cos t. \quad (67.8)$$

Из второго уравнения находим $2y \frac{dy}{dt} = x$, поэтому уравнение (67.8) можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = \cos t. \quad (67.9)$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения: $\lambda^2 - 1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $X(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем методом неопределённых коэффициентов в виде $\bar{x} = A \cos t + B \sin t$. Дифференцируя это выражение дважды и подставляя в уравнение (67.9), находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, откуда получаем частное решение $\bar{x} = -\frac{1}{2} \cos t$.

Таким образом, общее решение уравнения (67.9) имеем вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t.$$

Из первого уравнения системы находим

$$y^2 = \frac{dx}{dt} - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$$

Таким образом, имеем решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t, \\ y = \pm \sqrt{C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - y, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = z - x. \end{cases}$$

Решение: Дифференцируя обе части первого уравнения, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt}.$$

Отсюда, в силу последних двух уравнений системы, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Решаем это уравнение как линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. После составления характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ и нахождения его корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ получаем общее решение

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Из третьего уравнения системы имеем

$$\frac{dz}{dt} - z = -x \text{ или}$$

$$\frac{dz}{dt} - z = -C_1 \cos t - C_2 \sin t.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dz}{dt} - z = 0 \text{ есть}$$

$$z = C_3 e^t.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом неопределённых коэффициентов в виде

$$\bar{z} = A \cos t + B \sin t.$$

Для коэффициентов A и B получаем систему уравнений

$$\begin{cases} B - A = -C_1, \\ -B - A = -C_2. \end{cases}$$

Из этой системы $A = \frac{C_1 + C_2}{2}$, $B = \frac{C_2 - C_1}{2}$. Таким образом,

$$z = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \cos t + \frac{1}{2}(C_2 - C_1) \sin t + C_3 e^t.$$

Из первого уравнения системы находим

$$y = z - \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(C_1 - C_2) \cos t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \sin t + C_3 e^t.$$

Таким образом, имеем решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \frac{1}{2}(C_1 - C_2) \cos t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \sin t + C_3 e^t, \\ z = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \cos t + \frac{1}{2}(C_2 - C_1) \sin t + C_3 e^t. \end{cases}$$

67.3. Метод интегрируемых комбинаций

Системы дифференциальных уравнений можно решать не только методом исключения неизвестных, в котором система сводится к уравнению более высокого порядка, но также подбирая такие комбинации уравнений, которые легко могут быть проинтегрированы. При этом мы остаемся в рамках уравнений первого порядка. Если удаётся найти n независимых первых интегралов, то они определяют решение системы. Отметим, что если некоторые первые интегралы найдены, то их можно использовать при поиске следующих первых интегралов.

ПРИМЕР 67.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t}, \end{cases} \quad t > 0.$$

Решение: Сложив почленно данные уравнения, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(x + y) = -\frac{1}{t}(x + y),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{d(x + y)}{x + y} = -\frac{dt}{t},$$

интегрируя которое и потенцируя полученное выражение, имеем первый интеграл исходной системы

$$x + y = \frac{C_1}{t}.$$

Для нахождения ещё одного первого интеграла вычтем почленно второе уравнение из первого. Имеем

$$\frac{d}{dt}(x - y) = \frac{1}{t}(x - y),$$

откуда после разделения переменных и потенцирования находим

$$x - y = C_2 t.$$

Из системы полученных первых интегралов

$$\begin{cases} x + y = \frac{C_1}{t}, \\ x - y = C_2 t \end{cases}$$

искомые функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ могут быть найдены в явном виде:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{t} + C_2 t \right), \\ y = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{t} - C_2 t \right). \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$$

Решение: Умножив обе части первого уравнения на y , а второго на $-x$ и сложив почленно полученные уравнения, имеем

$$y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = \frac{xy}{t} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(xy) = \frac{xy}{t}.$$

Отсюда после разделения переменных, интегрирования и потенцирования получаем

$$xy = C_1 t. \tag{67.10}$$

Последнее уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n -го порядка относительно переменной λ и называется характеристическим уравнением для системы (67.12). (Левая часть этого уравнения есть многочлен степени n по переменной λ .) С учётом кратности, это уравнение имеет n корней: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые являются собственными значениями матрицы A . В матричном виде характеристическое уравнение (67.16) можно записать так:

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E – единичная матрица n -го порядка, а система (67.15) запишется в виде

$$(A - \lambda E) \cdot \mathbf{b} = 0,$$

где $\mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – собственный вектор матрицы A (собственным вектором матрицы A называется вектор \mathbf{b} , удовлетворяющий уравнению $A\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$).

Предположим, что все корни характеристического уравнения (67.16), т.е. собственные значения матрицы A , действительные и различные, тогда каждому собственному значению соответствует свой собственный вектор, причём эти собственные векторы линейно независимы. Например, собственному значению λ_k соответствует вектор $(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{nk})$, где $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае система дифференциальных уравнений имеет n линейно независимых частных решений вида:

1-е решение $\vec{y}_1(x)$, соответствующее корню $\lambda = \lambda_1$, состоит из n функций:

$$y_{11} = \alpha_{11}e^{\lambda_1 x}, y_{21} = \alpha_{21}e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{n1} = \alpha_{n1}e^{\lambda_1 x};$$

2-е решение $\vec{y}_2(x)$, соответствующее корню $\lambda = \lambda_2$, состоит из n функций:

$$y_{12} = \alpha_{12}e^{\lambda_2 x}, y_{22} = \alpha_{22}e^{\lambda_2 x}, \dots, y_{n2} = \alpha_{n2}e^{\lambda_2 x};$$

.....

n -е решение $\vec{y}_n(x)$, соответствующее корню $\lambda = \lambda_n$, состоит из n функций:

$$y_{1n} = \alpha_{1n}e^{\lambda_n x}, y_{2n} = \alpha_{2n}e^{\lambda_n x}, \dots, y_{nn} = \alpha_{nn}e^{\lambda_n x}.$$

образующие собственный вектор, нужно искать из системы

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (4 - \lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases} \quad (67.19)$$

куда нужно подставить $\lambda = \lambda_1 = 1$, после чего, в силу того, что определитель системы равен нулю, она сводится к одному уравнению

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

так что одно из чисел α_1, α_2 можно выбрать произвольно. Положив $\alpha_1 = 1$, получим $\alpha_2 = -1$. Поэтому собственному значению $\lambda = 1$ соответствует частное решение

$$y_1(x) = e^x, \quad z_1(x) = -e^x.$$

Аналогично, подставив в систему (67.19) второе собственное значение $\lambda = \lambda_2 = 2$, найдем вторую пару чисел $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -3$, образующих собственный вектор, соответствующий этому собственному значению. Отсюда получим второе частное решение

$$y_2(x) = 2e^{2x}, \quad z_2(x) = -3e^{2x}.$$

С учётом общей формулы (67.17) общее решение данной системы уравнений запишем в виде:

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \\ z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}. \end{cases}$$

Аналогично находятся решения линейных систем, у которых матрицы коэффициентов имеют кратные или комплексные собственные значения. Они будут рассмотрены на конкретных примерах на практических занятиях.

Практическое занятие 67. Системы дифференциальных уравнений

ПРИМЕР 67.1. Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (67.1)$$

Р е ш е н и е: Продифференцировав первое уравнение, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

или, подставив $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Решая полученное уравнение второго порядка с помощью характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ и вычисляя его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, находим решение этого уравнения: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Продифференцировав это выражение, из первого уравнения системы (67.1) находим $y = C_1 \cos t - C_2 \sin t$. Общее решение системы (67.1) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \\ y = C_1 \cos t - C_2 \sin t. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Из первого уравнения после дифференцирования имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

или с учётом второго уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0.$$

Отсюда, решая полученное уравнение второго порядка с помощью характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ и вычисляя собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1$, находим решение этого уравнения:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Продифференцировав это выражение, из первого уравнения системы находим

$$y = \frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Подставляя найденные функции $x(t)$, $y(t)$ в третье уравнение системы, получим уравнение для z

$$\frac{dz}{dt} - z = 2C_1 t e^t.$$

Решая это линейное уравнение первого порядка методом вариации произвольной постоянной, находим

$$z = C_3 e^t + 2C_1 t e^t.$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \\ z = C_3 e^t + 2C_1 t e^t. \end{cases} \quad (67.2)$$

ПРИМЕР 67.3. Решить систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2x + 3y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2x + 3y}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е:

Разделим первое уравнение системы на второе, получим первую интегрируемую комбинацию и найдем первый интеграл:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |x| = \ln |y| + \ln |C_1| \Rightarrow x = C_1 y.$$

Умножим первое уравнение системы на два и сложим с вторым уравнением, умноженным на три. Получим вторую интегрируемую комбинацию и найдем ещё один первый интеграл:

$$\begin{aligned} 2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} &= \frac{2x}{2x + 3y} + \frac{3y}{2x + 3y} \Leftrightarrow 2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(2x + 3y) = dt \Rightarrow 2x + 3y = t + C_2. \end{aligned}$$

Из системы первых интегралов

$$\begin{cases} x = C_1 y, \\ 2x + 3y = t + C_2, \end{cases}$$

находим общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{C_1(t + C_2)}{2C_1 + 3}, \\ y = \frac{t + C_2}{2C_1 + 3}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t, \\ \frac{dz}{dt} = x + z + t. \end{cases}$$

Решение: Вычитая почленно из второго уравнения третье, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(y - z) = y - z,$$

которое интегрируется разделением переменных

$$\ln |y - z| = t + \ln |C_1|,$$

откуда после потенцирования получаем

$$y - z = C_1 e^t.$$

С учётом этого соотношения, которое представляет собой первый интеграл исходной системы, из первого уравнения системы непосредственным интегрированием находим

$$x = C_1 e^t + C_2.$$

Подставим найденное выражение $x = x(t)$ во второе уравнение системы. Получим уравнение для y :

$$\frac{dy}{dt} = y + C_2 + C_1 e^t + t.$$

Решая это линейное уравнение методом неопределённых коэффициентов, находим

$$y = (C_1 t + C_3)e^t - t - 1 - C_2.$$

Тогда из первого уравнения системы, поставляя найденные выражения для x и y , получим

$$z = y - \frac{dx}{dt} = (C_1 t + C_3 - C_1)e^t - 1 - C_2.$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C, \\ y = (C_1 t + C_3)e^t - t - 1 - C_2, \\ z = (C_1 t + C_3 - C_1)e^t - 1 - C_2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.5. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z. \end{cases}$$

Решение: В данной системе, которая соответствует общему случаю системы (67.11), коэффициенты матрицы при неизвестных $a_{11} = 5$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 3$, а искомые функции обозначены $y_1 = y$, $y_2 = z$. Характеристическое уравнение (67.16)

$$\begin{vmatrix} (5 - \lambda) & -1 \\ 1 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda_{1,2} = 4$ кратности 2.

Решение данной системы будем искать методом неопределённых коэффициентов. Также как в случае линейного уравнения второго порядка, кратному корню $\lambda_{1,2} = 4$ соответствует решение

$$y_1 \equiv y(x) = e^{4x}(A_1 x + A_2), \quad y_2 \equiv z(x) = e^{4x}(B_1 x + B_2).$$

Продифференцируем выражения для $y(x)$ и $z(x)$

$$\frac{dy}{dx} = A_1 e^{4x} + 4(A_1 x + A_2)e^{4x}, \quad \frac{dz}{dx} = B_1 e^{4x} + 4(B_1 x + B_2)e^{4x},$$

и подставим $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, y и z в исходную систему уравнений. После сокращения на $e^{4x} \neq 0$ имеем тождества

$$\begin{cases} A_1 + 4(A_1x + A_2) \equiv 5(A_1x + A_2) - (B_1x + B_2), \\ B_1 + 4(B_1x + B_2) \equiv A_1x + A_2 + 3(B_1x + B_2). \end{cases}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левых и правых частях этих тождеств, получим две системы уравнений для A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{cases} 4A_1 = 5A_1 - B_1, \\ 4B_1 = A_1 + 3B_1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A_1 + 4A_2 = 5A_2 - B_2, \\ B_1 + 4B_2 = A_2 + 3B_2. \end{cases}$$

Из первой системы следует, что $A_1 = B_1$, а из второй получим $A_2 - B_2 = A_1$. Полагая $A_1 = C_1$, а $A_2 = C_2$, найдем $B_1 = C_1$, $B_2 = A_2 - A_1 = C_2 - C_1$. Следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y = e^{4x}(C_1x + C_2), \\ z = e^{4x}(C_1x + C_2 - C_1). \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.6. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

Решение: В данной системе, которая соответствует общему случаю системы (67.11), коэффициенты матрицы при неизвестных $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, а искомые функции обозначены $y_1 = y$, $y_2 = z$. Характеристическое уравнение (67.16)

$$\begin{vmatrix} (2 - \lambda) & -1 \\ 1 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.

Найдем комплексное решение вида

$$y = \alpha_1 e^{(2+i)x}, \quad z = \alpha_2 e^{(2+i)x},$$

соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 2 + i$.

В соответствии с уравнением (67.15), коэффициенты α_1, α_2 , образующие собственный вектор, нужно искать из системы

$$\begin{cases} (2 - \lambda)\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (2 - \lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

куда нужно подставить $\lambda = \lambda_1 = 2 + i$, после чего, в силу того, что определитель системы равен нулю, она сводится к одному уравнению

$$-i\alpha_1 - \alpha_2 = 0,$$

поэтому одно из чисел α_1, α_2 можно выбрать произвольно. Положив $\alpha_1 = 1$, получим $\alpha_2 = -i$. Поэтому собственному значению $\lambda = \lambda_1 = 2 + i$ соответствует частное решение

$$\begin{cases} y(x) = e^{(2+i)x} \equiv e^{2x}(\cos x + i \sin x), \\ z(x) = -ie^{(2+i)x} \equiv e^{2x}(\sin x - i \cos x). \end{cases}$$

Отсюда, отделяя вещественные и мнимые части полученных решений, что соответствует переходу от этих решений к их линейной комбинации, которая, в силу теоремы 62.2, также является решением, получаем два линейно независимых вещественных частных решения

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \cos x, \\ z_1(x) = e^{2x} \sin x, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2(x) = e^{2x} \sin x, \\ z_2(x) = -e^{2x} \cos x. \end{cases}$$

Общим решением системы будет линейная комбинация полученных вещественных частных решений с произвольными коэффициентами

$$\begin{cases} y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x). \end{cases}$$

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 67.7. Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.8. Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 2e^t - x. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.9. Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.10. Решить систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x+y}. \end{cases}$$

Указания: 1) Сложить два уравнения. 2) Разделить первое уравнение на второе.

ПРИМЕР 67.11. Решить систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y, \\ \frac{dz}{dt} = x^2 + z. \end{cases}$$

Указания: 1) Сложить первое и третье уравнения и вычесть второе. 2) Подставить найденный первый интеграл в первое уравнение. 3) Подставить найденное решение для x во второе уравнение.

ПРИМЕР 67.12. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.13. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.14. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.15. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 67.16. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases}$$

Примерный типовый вариант контрольной работы

ПРИМЕР 67.17. Найти общее решение уравнения $(1 + y^2)dx + xydy = 0$.

ПРИМЕР 67.18. Найти общее решение уравнения $2x^2y' = x^2 + y^2$.

ПРИМЕР 67.19. Найти частное решение уравнения $x^2 + xy' = y$, $y(1) = 0$.

ПРИМЕР 67.20. Найти общее решение уравнения $x(3x + y^2) + y(x^2 + 3y)y' = 0$.

ПРИМЕР 67.21. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

ПРИМЕР 67.22. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(3; 1)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy .

ПРИМЕР 67.23. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

Решение примеров типового варианта контрольной работы

ПРИМЕР 67.17.

Решение: Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$\frac{ydy}{1 + y^2} = -\frac{dx}{x},$$

и преобразуем дифференциалы. Имеем

$$\frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2} = -2\frac{dx}{x}.$$

После интегрирования

$$\ln |1 + y^2| = -2 \ln |x| + \ln |C|$$

и потенцирования получим общее решение.

Ответ: $1 + y^2 = \frac{C}{x^2}$.

ПРИМЕР 67.18.

Р е ш е н и е: Это уравнение является однородным, так как множитель при y' и правая часть – однородные функции (многочлены второй степени).

Разрешим уравнение относительно производной $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$, откуда получаем

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Сделаем подстановку $\frac{y}{x} = t$ или $y = tx$, откуда $y' = t'x + t$. Подставим новую переменную в уравнение, проведем разделение переменных и проинтегрируем

$$\begin{aligned} t'x + t &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow x \frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - 2t + 1}{2} \equiv \frac{(t-1)^2}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dt}{(t-1)^2} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2} = \int \frac{dx}{2x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|C| \Rightarrow \frac{1}{t-1} = \ln \frac{C}{\sqrt{x}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t-1 = \frac{1}{\ln \frac{C}{\sqrt{x}}} \Rightarrow t = \frac{1}{\ln \frac{C}{\sqrt{x}}} + 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln \frac{C}{\sqrt{x}}} + 1. \end{aligned}$$

Ответ: $y = x \left(1 + \frac{1}{\ln \frac{C}{\sqrt{x}}} \right).$

ПРИМЕР 67.19.

Р е ш е н и е: Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением. Перепишем уравнение в виде $y' - \frac{y}{x} = -x$. Вначале находим решение однородного уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = Cx.$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $y = z(x)x$, тогда $y' = z'(x)x + z(x)$. Подставим эти выражения в исходное уравнение

$$\begin{aligned} z'(x)x + z(x) - \frac{z(x)x}{x} &= -x \Rightarrow z'(x) = -1 \Rightarrow dz(x) = -dx \Rightarrow \\ z(x) &= -x + C_0. \end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$y = z(x)x = (-x + C_0)x.$$

Из начального условия $y(1) = 0$ имеем уравнение для C_0 :

$$0 = (-1 + C_0), \text{ откуда получаем } C_0 = 1.$$

Ответ: частное решение $y = (1 - x)x$ или $y = x - x^2$.

ПРИМЕР 67.20.

Р е ш е н и е: Данное уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными, оно нелинейное и неоднородное. Покажем, что его можно преобразовать к такому виду, что оно будет уравнением в полных дифференциалах.

Перепишем уравнение в виде $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где в нашем случае $P(x, y) = 3x^2 + xy^2$, $Q(x, y) = x^2y + 3y^2$, т.е. уравнение имеет вид

$$(3x^2 + xy^2)dx + (x^2y + 3y^2)dy = 0,$$

тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$, т.е. преобразованное уравнение

является уравнением в полных дифференциалах, так что $(3x^2 + xy^2)dx + (x^2y + 3y^2)dy = dU(x, y)$. Найдем функцию $U(x, y)$ из тех соображений, что множители при дифференциалах dx и dy есть частные производные по соответствующим переменным:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + xy^2 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + 3y^2.$$

Из первого из этих соотношений имеем

$$U(x, y) = \int (3x^2 + xy^2) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя это выражение по y и приравнявая найденную производную коэффициенту $(x^2y + 3y^2)$ при dy в исходном уравнении, получим

$$\begin{aligned} U'_y(x, y) &\equiv x^2y + \varphi'(y) \Rightarrow x^2y + \varphi'(y) = x^2y + 3y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 \Rightarrow U(x, y) = x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + y^3. \end{aligned}$$

Приравнявая полученное выражение для $U(x, y)$ произвольной постоянной, после умножения на два окончательно будем иметь:

$$\text{Ответ: } 2x^3 + x^2y^2 + 2y^3 = C.$$

ПРИМЕР 67.21.

Решение: Данное уравнение является линейным однородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow$,

$$\Rightarrow \lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -2.$$

Общее решение: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$. Для нахождения частного решения найдем производную общего решения $y' = -2C_2 e^{-2x}$. Из начальных условий получим систему уравнений для C_1 и C_2 , решая которую находим

$$\left. \begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \\ y'(0) = 2 &\Rightarrow 2 = -2C_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow C_2 = -1; C_1 = 1.$$

Ответ: $y = 1 - e^{-2x}$.

ПРИМЕР 67.22.

Решение: Сделаем чертеж (см. рис. 19). Из чертежа и условия задачи следует, что $AB = BM$, тогда $AO = OC$; $AC = 2x$; $MC = y$; $y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MC}{AC} = \frac{y}{2x}$.

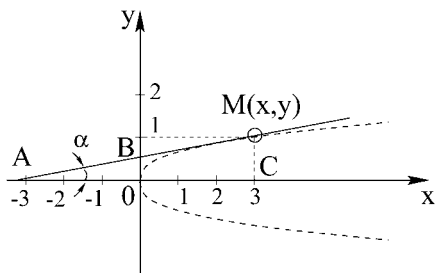


Рис. 19. Иллюстрация к примеру 67.22

Решим дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow y = c\sqrt{x}$.

Так как кривая должна проходить через точку $(3; 1)$, то $1 = c\sqrt{3} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ ($x = 3y^2$ – парабола с осью Ox).

ПРИМЕР 67.23.

Р е ш е н и е: Данное уравнение является дифференциальным линейным неоднородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения имеет вид $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, откуда $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$ и следовательно общее решение однородного уравнения $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$. Среди корней характеристического нет комплексных вида $\pm i$, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде: $\bar{y} = A \cos x + B \sin x$.

Найдем $\bar{y}' = -A \sin x + B \cos x$, $\bar{y}'' = -A \sin x - B \cos x$. Подставим \bar{y} , \bar{y}' , \bar{y}'' в исходное уравнение

$$-A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \sin x.$$

После группировки слагаемых имеем

$$(-A - 3B + 2A) \cos x + (-B + 3A + 2B) \sin x = \sin x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях уравнения

$$\begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{10}; \quad A = \frac{3}{10}.$$

Следовательно $\bar{y} = \frac{1}{10} (3 \cos x + \sin x)$.

Ответ: $y = \bar{y} + Y = 0,1(3 \cos x + \sin x) + C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 67.17. Найти общее решение уравнения $e^{-y}(1 + y') = 1$.

ПРИМЕР 67.18. Найти общее решение уравнения $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$.

ПРИМЕР 67.19. Найти общее решение уравнения $xy' - 2y = 2x^4$.

ПРИМЕР 67.20. Найти частное решение уравнения $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{(y^2 - 3x^2)dy}{y^4} = 0$, $y(1) = 1$.

ПРИМЕР 67.21. Найти частное решение уравнения $2(y')^2 = y''(y - 1)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

ПРИМЕР 67.22. Найти линию y которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, равна квадрату ординаты точки касания.

ПРИМЕР 67.23. Найти общее решение уравнения $y'' - y' = e^{2x} \cos x$.

Лекция 68. Приближённые решения дифференциальных уравнений

Приближённые методы решения дифференциальных уравнений. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. Функции Бесселя. Конечно-разностные аппроксимации производных. Сеточные методы решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты. Численные методы решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом прогонки.

68.1. Приближённые методы решения дифференциальных уравнений

Условно методы решения дифференциальных уравнений можно разделить на графические, точные (или аналитические), приближённые и численные.

Графические методы используют геометрические построения. В частности, одним из них является метод изоклин, рассмотренный выше. Эти методы позволяют найти качественную структуру решения.

С некоторыми аналитическими методами решения дифференциальных уравнений мы уже познакомились. Они использовались для нахождения решений уравнений с разделяющимися переменными, однородных и линейных уравнений, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах – во всех этих случаях нам удалось получить решение в виде формул путём аналитических преобразований. Для некоторых типов уравнений высших порядков так же удаётся получить решение аналитическими методами. Однако классы уравнений, для

которых разработаны методы получения точных аналитических решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Другим недостатком является то, что понять структуру и качественный вид общего решения зачастую бывает достаточно сложно, даже при наличии точного решения.

ПРИМЕР 68.1. Уравнение

$$y' = \frac{y - x}{y + x} \quad (68.1)$$

является однородным уравнением первого порядка и имеет общий интеграл

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 + x^2) + \arctg \frac{y}{x} = C. \quad (68.2)$$

Однако для того, чтобы составить таблицу значений $y(x)$, надо численно решить трансцендентное уравнение (68.2), что несколько не проще, как будет показано далее, чем непосредственно численно проинтегрировать исходное дифференциальное уравнение (68.1). Понять структуру решения этого уравнения можно, например, применяя метод изоклин, который, несмотря на то что он является приближённым методом, позволяет достаточно наглядно выявить качественные особенности решения. Интегральные кривые исходного уравнения (68.1) представляют собой логарифмические спирали, наматывающиеся на начало координат (рис. 20). В полярных координатах (r, φ) общее решение (68.2) можно представить в виде $r = Ce^\varphi$.

Приближённые методы используют различные упрощения самих уравнений путём обоснованного отбрасывания некоторых содержащихся в них членов, а также специальным выбором классов искомых функций, например, в некоторых инженерных задачах удаётся представить решение в виде суммы двух составляющих, первое из которых определяет основное решение, а второе – малая добавка, которой можно пренебречь. На этом основаны различные методы линеаризации.

В приближённых методах широко используется разложение решения в ряд по некоторому малому параметру, содержащемуся в данной задаче. Решение получается как предел $y(x)$ некоторой последовательности $u_n(x)$ при $n \rightarrow +\infty$, причём $u_n(x)$ выражаются через элементарные функции или через квадратуры от них. Если ограничиться конечным числом n , то получим приближённое аналитическое выражение для искомого решения $y(x)$. Примером может служить метод разложения решения в обобщённый степенной ряд, который будет рассмотрен

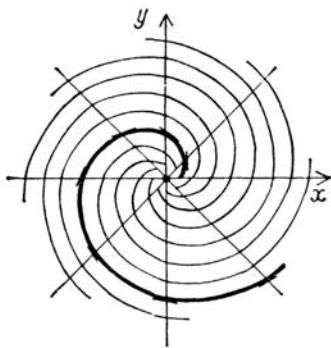


Рис. 20. Интегральные кривые уравнения (68.1)

в дальнейшем. Однако эти методы удобны, только когда большую часть промежуточных выкладок удаётся сделать точно (например, найти явные выражения для коэффициентов ряда). Это выполнимо лишь в случае сравнительно простых задач (таких, как линейные), что сильно сужает область применения приближённых методов.

Численные методы решения дифференциальных уравнений – это алгоритмы вычисления приближённых, а иногда и точных, значений искомого решения $y(x)$ на некоторой выбранной сетке значений аргумента $D_h : \{x_n\}$ (решение при этом получается в виде таблицы, т.е. дискретно). Численные методы не позволяют найти общего решения, с помощью этих методов можно найти частное решение, например, решение задачи Коши или краевой задачи. Это основной недостаток численных методов. Зато эти методы применимы к очень широким классам уравнений и всем типам задач для них. Наибольшее распространение численные методы получили с развитием вычислительной техники.

Численные методы можно применять к корректно поставленным (регуляризованным) задачам. Более того, требуется *хорошая обусловленность* задачи, то есть малое изменение начальных условий должно приводить к достаточно малому изменению интегральных кривых. Если это условие не выполнено, т.е. задача *плохо обусловлена*, то небольшие изменения начальных условий или небольшие погрешности численного метода могут сильно исказить решение.

В качестве примера плохой обусловленности рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} y' = y - x, & 0 \leq x \leq 100, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Общее решение содержит одну произвольную постоянную:

$$y_{\text{общ}} = 1 + x + Ce^x.$$

Из начального условия $y(0) = 1$ следует, что $C = 0$, так что получаем $y(100) = 101$. Однако даже небольшая погрешность в начальном условии $\tilde{y}(0) = 1,000001$ даёт значение $C = 10^{-6}$, откуда находим $\tilde{y}(100) = 2,7 \cdot 10^{37}$, т.е. решение изменилось очень сильно.

68.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Во многих случаях приближённое решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде степенного ряда, сходящегося на определённом интервале. Коэффициенты этого ряда можно найти методом, основанным на применении ряда Тейлора (лекции 19, формула (19.13)). Этот метод пригоден для приближённого определения частного решения дифференциальных уравнений любого порядка (задача Коши):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (68.3)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0. \quad (68.4)$$

Подставляя заданные начальные условия в дифференциальное уравнение, получим соотношение

$$F(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0, y^{(n)}_0) = 0,$$

из которого можно определить значение n -ой производной в точке $x = x_0$:

$$y^{(n)}_0 = f(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0). \quad (68.5)$$

Дифференцируя уравнение (68.3), получим уравнение, которое, помимо $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, будет содержать производную $(n+1)$ -го порядка $y^{(n+1)}$:

$$F_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0. \quad (68.6)$$

Подставляя в (68.6) значения начальных условий (68.4) и значение $y_0^{(n)}$ из (68.5), получим уравнение

$$F_1(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}) = 0,$$

из которого можно найти значение $n + 1$ -ой производной в точке $x = x_0$: $y^{(n+1)}(x_0) = y_0^{(n+1)}$.

Продолжая этот процесс дальше, можно найти значения всех производных высших порядков в точке $x = x_0$.

Решение $y = y(x)$ исходного дифференциального уравнения (68.3) можно представить в виде ряда (ряда Тейлора):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \frac{x - x_0}{1!} + y''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + y^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots \quad (68.7)$$

Подставив в уравнение (68.7) значения производных в точке x_0 из начальных условий и полученные из описанных выше преобразований, найдем приближённое частное решение исходного дифференциального уравнения в виде:

$$y(x) = y_0 + y'_0 \frac{x - x_0}{1!} + y''_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + y_0^{(n)} \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \dots, \quad (68.8)$$

точность которого зависит от условий сходимости полученного степенного ряда и количества членов ряда, учитываемых при расчётах.

ПРИМЕР 68.2. Решить задачу Коши методом интегрирования с помощью рядов (записать первые семь членов ряда)

$$\begin{cases} y'' = 2xy' + 4y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (68.9)$$

Р е ш е н и е: Найдем последовательным дифференцированием исходного дифференциального уравнения все производные до седьмого порядка включительно, при этом каждый раз подставляя значения найденных в точке x_0 предыдущих производных.

Из (68.9) следует $y'' = 2xy' + 4y \Rightarrow y''_0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0$.

Дифференцируя (68.9), получаем

$$y''' = 2y' + 2xy'' + 4y' = 6y' + 2xy'' \Rightarrow y'''_0 = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 6. \quad (68.10)$$

Дифференцируя (68.10), получаем

$$y^{IV} = 6y'' + 2y'' + 2xy''' = 8y'' + 2xy''' \Rightarrow y^{IV}_0 = 8 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 6 = 0. \quad (68.11)$$

Дифференцируя (68.11), получаем

$$y^V = 8y''' + 2y''' + 2xy^{IV} = 10y''' + 2xy^{IV} \Rightarrow y_0^V = 10 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 60. \quad (68.12)$$

Аналогично можно найти $y_0^{VI} = 0$, $y_0^{VII} = 840$ и т.д.

Поскольку в рассматриваемом случае $x_0 = 0$, получаем разложение решения в ряд Маклорена:

$$y = \frac{1}{1!}x + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{60}{5!}x^5 + \frac{840}{7!}x^7 + \dots$$

или окончательно

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots$$

В некоторых случаях можно искать решение в виде степенного ряда с неопределёнными коэффициентами $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Неопределённые коэффициенты C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) могут быть найдены путём подстановки ряда в исходное дифференциальное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома $(x - x_0)$ в левой и правой частях полученного равенства.

Проиллюстрируем нахождение решения в виде степенного ряда методом неопределённых коэффициентов на следующем важном уравнении, которое называется *уравнением Бесселя нулевого порядка*.

ПРИМЕР 1. *Найти общее решение уравнения Бесселя нулевого порядка:*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0. \quad (68.13)$$

Отметим, что при $x = 0$ уравнение Бесселя имеет особенность и при $x = 0$ теорема существования и единственности неприменима.

Решение будем искать с помощью степенных рядов:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots$$

Продифференцируем этот ряд почленно. Получим следующие выражения для производных:

$$\begin{aligned} y' &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots \\ y'' &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots + (n-1)nc_nx^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение (68.13):

$$\begin{aligned} & (2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots + (n-1)nc_nx^{n-2} + \dots) + \\ & + \frac{1}{x}(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots) + \\ & + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при всех степенях x , получим систему уравнений для определения c_0, c_1, c_2, \dots

Начнём с члена содержащего $\frac{1}{x}$. Коэффициентом при нём служит c_1 , поэтому $c_1 = 0$, так как в правой части членов с $\frac{1}{x}$ нет. Отсюда видно, что решение в виде ряда существует, только если $c_1 = y' \big|_{x=0} = 0$ и поэтому задавать y' произвольно при $x = 0$ нельзя.

Выпишем коэффициенты при нечётных степенях: x, x^3, x^5 и т.д.:

$$2 \cdot 3c_3 + 3c_3 + c_1 = 0,$$

$$4 \cdot 5c_5 + 5c_5 + c_3 = 0,$$

$$6 \cdot 7c_7 + 5c_7 + c_5 = 0.$$

Так как $c_1 = 0$, то для всех коэффициентов с нечётными индексами получим

$$c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \quad \dots, \quad c_{2k+1} = 0.$$

Перейдем к нахождению коэффициентов с чётными индексами. Для этого рассмотрим коэффициенты при x^0, x^2, x^4, \dots

$$2 \cdot c_2 + 2c_2 + c_0 = 0,$$

$$3 \cdot 4c_4 + 4c_4 + c_2 = 0,$$

$$5 \cdot 6c_6 + 4c_6 + c_4 = 0.$$

Напишем рекуррентную формулу:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

или:

$$(n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0.$$

Выразим все коэффициенты через c_0 :

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}; \quad c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \cdot 4^2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2}; \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2};$$

$$c_{2n} = (-1)^n = \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} = (-1)^n \frac{c_0}{2^n (n!)^2}.$$

Таким образом, решение уравнения Бесселя нулевого порядка имеет вид:

$$y(x) = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \dots \right) = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (68.14)$$

Полагая в (68.14) $c_0 = 1$, получим функцию $y_1(x) = J_0(x)$, которая называется *функцией Бесселя первого рода нулевого порядка*. Она представляет собой частное решение уравнения Бесселя нулевого порядка (68.13), удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$.

При помощи признака Даламбера можно показать, что ряд (68.14) сходится при любом x .

Функции Бесселя играют важную роль в уравнениях математической физики.

68.3. Конечно-разностные аппроксимации производных

В методах Эйлера и Рунге-Кутты, применяемых для численного решения задачи Коши, используется переход от непрерывной области изменения независимой переменной к некоторой дискретной области. В дискретной области решение определяется в отдельных точках исследуемой области, называемых узлами. Совокупность всех узлов, в которых ищутся значения искомой функции, называется сеткой. Таким образом, решение задачи ищется не в виде непрерывной функции $y(x)$, а в виде таблицы значений решения y_i , определённых в узлах сетки $D_h : \{x_i\}$.

Для приближённого вычисления таблицы значений y_i при решении дифференциальных уравнений, прежде всего необходимо рассмотреть вопрос о замене производных функции их дискретными аналогами, так называемыми конечными разностями. Для этой цели воспользуемся формулой Тейлора, согласно которой функция $y(x)$, непрерывная и дифференцируемая в некоторой точке x , может быть представлена в окрестности этой точки следующим образом:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \frac{y'(x)}{1!} \Delta x + \frac{y''(x)}{2!} \Delta x^2 + \frac{y'''(x)}{3!} \Delta x^3 + \dots + \\ + \frac{y^{(k)}(\xi_1)}{k!} \Delta x^k, \quad (68.15)$$

$$y(x - \Delta x) = y(x) - \frac{y'(x)}{1!}\Delta x + \frac{y''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{y'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots + (-1)^k \frac{y^{(k)}(\xi_2)}{k!}\Delta x^k, \quad (68.16)$$

где ξ_1 и ξ_2 – некоторые точки, принадлежащие отрезкам $(x, x + \Delta x)$ и $(x - \Delta x, x)$, соответственно.

Из уравнения (68.15) можно найти

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = y'(x) + O(\Delta x), \quad (68.17)$$

а из уравнения (68.16)

$$\frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} = y'(x) + O(\Delta x), \quad (68.18)$$

где $O(\Delta x)$ – погрешность аппроксимации, равная сумме отброшенных членов.

Из соотношений (68.17) и (68.18) получаются конечно-разностные аппроксимации первой производной

$$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (68.19)$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (68.20)$$

которые называются соответственно правосторонней (68.19) и левосторонней (68.20) разностными производными.

Из формул (68.19) и (68.18) видно, что производная $y'(x)$ аппроксимируется с помощью левосторонних и правосторонних разностей с точностью до величины порядка Δx .

Если же из соотношения (68.15) вычесть (68.16) и разделить полученное выражение на $2\Delta x$, то после преобразований можно получить так называемые центрально-разностные производные

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} = y'(x) + O((\Delta x)^2) \quad (68.21)$$

или

$$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2), \quad (68.22)$$

аппроксимирующие первую производную $y'(x)$ с точностью до величины порядка $(\Delta x)^2$.

Аппроксимацию второй производной $y''(x)$ можно получить, если сложить выражения (68.15) и (68.16) и разделить полученное выражение на $(\Delta x)^2$

$$\frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} = y''(x) + O((\Delta x)^2), \quad (68.23)$$

или

$$y''(x) = \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2). \quad (68.24)$$

В этом случае имеем аппроксимацию второго порядка точности $O((\Delta x)^2)$.

Подставив выражения для производных через конечные разности в дифференциальное уравнение, начальные или краевые условия, мы получим аппроксимацию дифференциальной задачи её конечно-разностным аналогом. При этом можно определить порядок точности, с которым дифференциальная задача заменяется разностной.

68.4. Численное решение дифференциального уравнения. Метод Эйлера

Идея метода Эйлера заключается в том, что интегральная кривая, являющаяся графиком частного решения, приближённо заменяется ломаной, поэтому метод Эйлера часто называют методом ломаных. В практических вычислениях он применяется очень редко из-за невысокой точности. Однако на его примере удобно пояснить способы построения и исследования численных методов.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x_0 \leq x \leq x_n, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (68.25)$$

т.е. на сегменте $x_0 \leq x \leq x_n$ требуется приближённо построить интегральную кривую $y = \varphi(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0) .

Разобьём сегмент точками деления

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n$$

на n равных частей длиной $\Delta x = (x_n - x_0)/n$ (рис.21).

Величина Δx называется шагом разбиения. Пользуясь условиями задачи Коши (68.25), вычислим в начальной точке (x_0, y_0) искомой интегральной кривой угловой коэффициент ее касательной $y'(x_0) =$

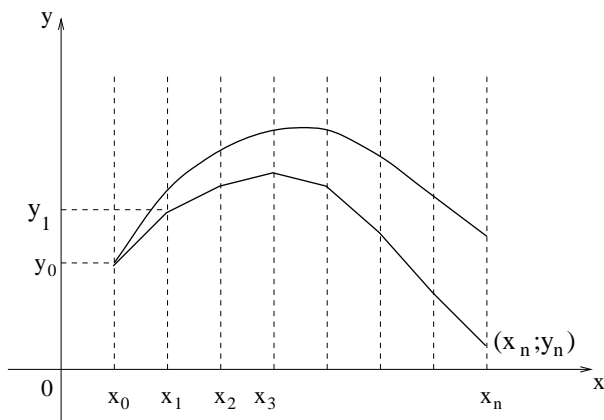


Рис. 21. Приближённая интегральная кривая построенная по методу Эйлера

$f(x_0, y_0)$. Тогда уравнение касательной в точке (x_0, y_0) запишется в виде:

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Заменяя на сегменте (x_0, x_1) искомую интегральную кривую $y = \varphi(x)$ отрезком этой касательной (рис.21), найдем приближённое значение решения y_1 в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0),$$

или, так как $x_1 - x_0 = \Delta x$,

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x.$$

Подставив значения x_1 и y_1 в правую часть уравнения (68.25), найдем

$$y'(x_1) = f(x_1, y_1).$$

На сегменте (x_1, x_2) заменим приближённо интегральную кривую $y = \varphi(x)$ отрезком касательной, проходящей через точку (x_1, y_1) и имеющей угловой коэффициент $k = y'(x_1) = f(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) \quad \text{или} \quad y = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1).$$

Полагая в уравнении этой прямой $x = x_2$, найдем приближённое значение искомого решения $y = \varphi(x)$ в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \quad \text{или} \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательно приближённые значения решения $y = \varphi(x)$ в точках x_3, x_4, \dots, x_n . При этом значение аргумента x_{i+1} и функции y_{i+1} в точке x_{i+1} вычисляются через значение функции и её производной в точке x_i по формулам:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta x, \\ y_{i+1} &= y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1). \end{aligned} \tag{68.26}$$

Таким образом, мы получим приближённые значения искомого решения в точках $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ и приближённо построим интегральную кривую в виде ломаной (рис. 21). С учётом допускаемых погрешностей (реальная интегральная кривая на интервале заменяется касательной) приближённое решение отличается от точного.

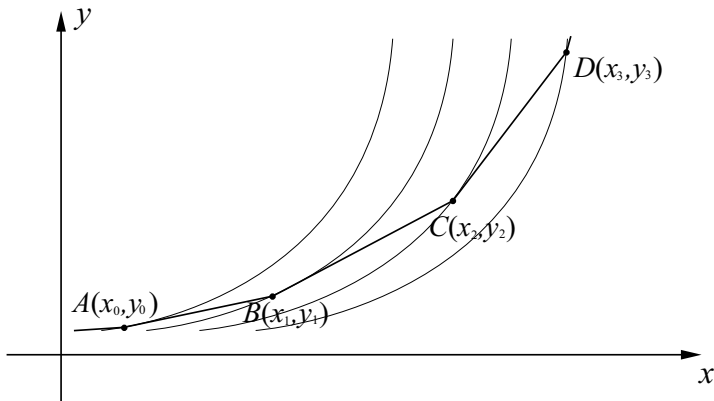


Рис. 22. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Геометрическая интерпретация этой схемы дана на рис. 22, где изображено поле интегральных кривых уравнения (68.25). Вместо движения по интегральной кривой, мы движемся по касательной к ней на конечном отрезке длиной Δx . На каждом шаге мы заново находим наклон касательной, т.е. касательную проводим каждый раз не к исходной интегральной кривой, а к той, которая проходит через

точку, полученную на текущем шаге. Следовательно, траектория движения будет ломаной линией $ABCD\dots$, образованной из касательных к полю интегральных кривых данного дифференциального уравнения (рис. 22).

Метод Эйлера является простейшим из методов приближённого интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Недостатком этого метода является малая точность. Очевидно, что ошибка которая получается при замене интегральной кривой ломаной, зависит от числа точек разбиения сегмента (x_0, x_n) .

Можно показать, что ошибка при вычислении ординат y_i пропорциональна $(\Delta x)^2$. Для этого разложим искомое решение $y = \varphi(x)$ в ряд Тейлора в окрестности узлов $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков:

$$y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + y'(x_i)\Delta x + O((\Delta x)^2). \quad (68.27)$$

Для простоты обычно принимают $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x = \text{const}$:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x + O((\Delta x)^2). \quad (68.28)$$

Полученная формула отличается от формулы (68.26) метода Эйлера на величину порядка $O((\Delta x)^2)$. Таким образом суммарная погрешность при использовании метода Эйлера будет равна $n \cdot O((\Delta x)^2)$. Если учесть, что

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{L}{n} \text{ и, следовательно, } n = \frac{L}{\Delta x},$$

то суммарная погрешность будет равна

$$n \cdot O((\Delta x)^2) = \frac{L}{\Delta x} \cdot O((\Delta x)^2) = L \cdot O(\Delta x).$$

Следовательно метод Эйлера имеет первый порядок точности.

ПРИМЕР 68.3. Методом Эйлера на сегменте $(1, 2)$ найти решение дифференциального уравнения $y' = y^2 - x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$. Шаг разбиения сегмента принять равным $\Delta x = 0,1$.

Решение: Вычисление значений решения $y = \varphi(x)$ осуществляем по формуле (68.26). Результаты вычислений записываем в таблице с точностью до четвёртого знака после запятой. Приближённые значения функции y_i находятся в третьем столбце.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)\Delta x$
0	1,0	1	0	0
1	1,1	1	-0,21	-0,021
2	1,2	0,979	-0,4816	-0,0482
3	1,3	0,9308	-0,8236	-0,0824
4	1,4	0,8484	-1,2402	-0,1240
5	1,5	0,7244	-1,7252	-0,1725
6	1,6	0,5519	-2,2554	-0,2255
7	1,7	0,3264	-2,7835	-0,2784
8	1,8	0,0480	-3,2377	-0,3238
9	1,9	-0,2758	-3,5339	-0,3534
10	2,0	-0,6292		

68.5. Метод Рунге-Кутта

Ошибка, которую содержит приближённое решение, полученное по методу Эйлера, может быть уменьшена при уменьшении шага Δx , но это приводит к значительному увеличению числа узлов n и росту вычислительной ошибки. Поэтому на практике чаще используются методы, имеющие более высокий порядок точности. Наиболее распространёнными являются различные варианты метода Рунге-Кутта.

Покажем идею метода Рунге-Кутта на примере построения семейства схем второго порядка точности. В качестве исходного выражения возьмём ряд Тейлора, удерживая в нём член $O((\Delta x)^2)$, порядок которого равен предполагаемому порядку точности схемы.

Разложим решение задачи Коши (68.25) по формуле Тейлора на сегменте $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta x + y''_i \frac{\Delta x^2}{2} + \dots, \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i = \text{const.} \quad (68.29)$$

где введены обозначения $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, $y'_i = y'(x_i)$, $y''_i = y''(x_i)$.

Стоящие в правой части производные можно найти, дифференцируя уравнение (68.25) требуемое число раз:

$$y' = f(x, y), \quad y'' = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots \quad (68.30)$$

Чтобы избежать этого трудоемкого процесса вычисления производных, заменим вторую производную разностью

$$y'' = \frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (68.31)$$

выбирая значения \tilde{x}, \tilde{y} и Δx соответствующим образом, чтобы обеспечить максимальную точность. Возьмём, например, $\tilde{x} = x_i + \gamma\Delta x$, $\tilde{y} = y_i + \delta\Delta x$.

После такой замены третий член в выражении (68.29) можно формально объединить со вторым, приводя (68.29) к виду:

$$y_{i+1} = y_i + [\beta f(x_i, y_i) + \alpha f(x_i + \gamma\Delta x, y_i + \delta\Delta x)]\Delta x. \quad (68.32)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – неизвестные параметры, которые следует определить из условия, чтобы выражение (68.32) аппроксимировало задачу (68.25) с возможно более высоким порядком точности.

Рассматривая правую часть (68.32) как функцию от шага Δx , разложим второе слагаемое в квадратных скобках, имеющее коэффициент α , в ряд по степеням шага Δx :

$$f(x_i + \gamma\Delta x, y_i + \delta\Delta x) = f(x_i, y_i) + \left(\gamma \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \delta \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right) \Delta x + \dots$$

тогда после подстановки этого выражения в (68.32) получим

$$y_{i+1} = y_i + (\alpha + \beta) \underbrace{f(x_i, y_i)}_{y'} \Delta x + \alpha \underbrace{(\gamma f'_x(x_i, y_i) + \delta f'_y(x_i, y_i))}_{1/2[f'_x + \gamma f'_y]} \Delta x^2 + \dots \quad (68.33)$$

Выберем параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ так, чтобы это разложение было возможно более близко к ряду (68.29). Используя выражения (68.29), (68.30), (68.33) можно правильно описать два первых члена формулы Тейлора, если положить:

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha\delta = \frac{1}{2}f(x_i, y_i). \quad (68.34)$$

Таким образом, для четырёх неизвестных параметров получено только три уравнения. Один параметр остаётся свободным. Выражая

из (68.34) через α все остальные параметры

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha, \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \\ \delta = \frac{f(x_i, y_i)}{2\alpha}, \end{cases}$$

и подставляя их в (68.32), получим однопараметрическое семейство двучленных схем Рунге-Кутты.

$$y_{i+1} = y_i + \left[(1 - \alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2\alpha}, y_i + \frac{\Delta x}{2\alpha}f(x_i, y_i)\right) \right] \Delta x, \quad (68.35)$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Выбрать параметр α так, чтобы схема (68.35) правильно передавала третий член формулы Тейлора (68.29), невозможно.

Погрешность этой схемы исследуется так же, как это сделано в случае метода Эйлера. При этом нетрудно доказать, что решение, полученное по схеме Рунге-Кутты (68.35), сходиться к точному решению с погрешностью $O((\Delta x)^2)$, т.е. двучленная схема Рунге-Кутты имеет второй порядок точности.

Формула (68.35) имеет неплохую точность и нередко используется в численных расчётах. При вычислениях обычно полагают $\alpha = 1$ или $\alpha = \frac{1}{2}$. В первом случае получается схема особенно простого вида:

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x \cdot f(x_i, y_i)\right) \Delta x. \quad (68.36)$$

Её геометрический смысл поясняется на рис. 23.

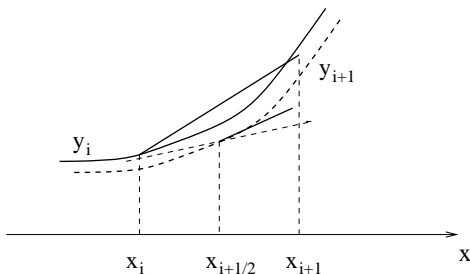


Рис. 23. Схема Рунге-Кутты при $\alpha = 1$

Вычисления соответствуют следующим геометрическим движениям:

- (1) Сначала делаем половинный шаг по схеме Эйлера и находим координаты «полущелой» точки

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{\Delta x}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{\Delta x}{2} \quad (\text{пунктирная касательная}).$$

В найденной точке определяем наклон интегральной кривой

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{сплошная касательная}).$$

- (2) По этому значению $y'_{i+\frac{1}{2}}$ определяем приращение функции на целом шаге

$$y_{i+1} = y_i + y'_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \quad (\text{линия, параллельная второй касательной}).$$

Каждое из этих движений происходит по методу Эйлера.

Геометрическая интерпретация второго случая ($\alpha = \frac{1}{2}$) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \left[f(x_i, y_i) + f\left(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i)\right) \right] \Delta x. \quad (68.37)$$

изображена на рис. 24.

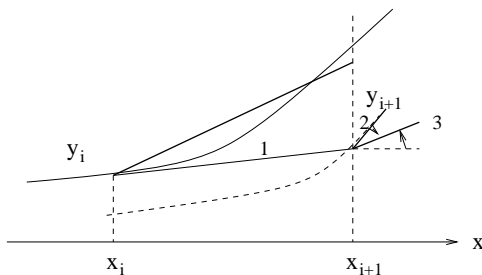


Рис. 24. Схема Рунге-Кутты при $\alpha = 1/2$

- (1) По этой схеме первоначально грубо вычисляем по формуле Эйлера значение функции

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x \quad (\text{прямая 1})$$

при $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ и наклон интегральной кривой

$$\bar{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) \quad (\text{прямая 2})$$

в новой точке.

- (2) Находим средний наклон на шаге как полусумму начального и предсказанного конечного значений наклона

$$y'_{i+1/2} = \frac{y'_i + \bar{y}'_{i+1}}{2} \quad (\text{прямая 3})$$

и по нему определяем значение y_{i+1} по формуле (68.37).

Схемы такого типа нередко называют «предиктор-корректор».

Методом Рунге-Кутты можно строить схемы различного порядка точности. Наиболее часто используются схемы четвёртого порядка точности. Приведем здесь без вывода одну из таких схем, которая реализована в большинстве стандартных программ ЭВМ:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x, \\ k_1 &= f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + k_1 \frac{\Delta x}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + k_2 \frac{\Delta x}{2}\right), \quad k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + k_3 \Delta x). \end{aligned} \quad (68.38)$$

В схеме (68.38) правую часть дифференциального уравнения на каждом шаге необходимо вычислять в четырёх точках. Однако большая точность схемы (погрешность вычисления $O((\Delta x)^4)$) позволяет вести расчёты с большим шагом и уменьшить объем вычислений.

Все представленные схемы Рунге-Кутты имеют ряд важных достоинств:

- они имеют высокую точность;
- они являются явными, т.е. значение y_{i+1} вычисляется по ранее найденным значениям за определённое число действий по явным формулам;
- они допускают расчёт с переменным шагом, поэтому можно уменьшать шаг там, где функция быстро меняется и увеличивать его в обратном случае.
- не нужны предварительные расчёты. Все вычисления проводятся по одним и тем же формулам.

В практических расчётах для оценки точности используют повторный расчёт. Сначала проводят расчёт с шагом h , затем с шагом $h/2$ и погрешность решения с шагом $h/2$ оценивают по формуле:

$$|[y]_n - u^{(h/2)}| \approx |u^{(h)} - u^{(h/2)}| \cdot \frac{1}{2^p - 1},$$

где p есть порядок аппроксимации.

Приведем сравнительную оценку рассматриваемых методов на конкретном примере, имеющем точное решение.

ПРИМЕР 68.4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' = \frac{xy}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Очевидно, что данная задача может быть решена точно, так как исходное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение $y = Ce^{x^2/4}$. Из начального условия $y(0) = 1$ находим частное решение задачи $y = e^{x^2/4}$.

В таблице для сравнения с точным решением представлены результаты вычислений с шагом $\Delta x = 0,1$ по различным схемам. Результаты решения задачи 68.4 получены с точностью до четвёртого знака после запятой.

1	2	3	4	5	6	7
		Метод Эйлера	Метод Рунге- Кутта 2-й по- рядок $\alpha = 1$	Метод Рунге- Кутта 2-й по- рядок $\alpha = 0,5$	Метод Рунге- Кутта 4-й по- рядок	Точное решение $y = e^{x^2/4}$
i	x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
0	0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,1	1,0000	1,0025	1,0025	1,0025	1,0025
2	0,2	1,0050	1,0100	1,0100	1,0100	1,0100
3	0,3	1,0151	1,0227	1,0227	1,0227	1,0227
4	0,4	1,0303	1,0407	1,0408	1,0408	1,0408
5	0,5	1,0509	1,0644	1,0645	1,0645	1,0645
6	0,6	1,0772	1,0940	1,0942	1,0942	1,0942
7	0,7	1,1095	1,1301	1,1303	1,1303	1,1303
8	0,8	1,1483	1,1732	1,1735	1,1735	1,1735
9	0,9	1,1942	1,2241	1,2244	1,2245	1,2244
10	1,0	1,2479	1,2836	1,2839	1,2841	1,2840

68.6. Численные методы решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений

Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений находится по тем же самым формулам, что и для одного уравнения, если система записана в векторной форме.

68.6.1. *Метод Эйлера.* Рассмотрим решение методом Эйлера простейшей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями, заданными при $x = x_0$ (задача Коши):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z), \\ y|_{x=x_0} = y_0, \\ z|_{x=x_0} = z_0. \end{cases} \quad (68.39)$$

Введем следующие обозначения

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{y}|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} y|_{x=x_0} \\ z|_{x=x_0} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (68.40)$$

Тогда система и начальные условия запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}), \\ \vec{y}|_{x=x_0} = \vec{y}_0, \end{cases} \quad (68.41)$$

который полностью совпадает с задачей Коши (68.25) с заменой скалярных функций на вектор-функции.

В частности, формулы Эйлера (68.26) для одного уравнения сохраняют свой вид для системы (68.41) с заменой скалярных функций на вектор-функции

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ \vec{y}_{i+1} &= \vec{y}_i + h\vec{f}(x_i, \vec{y}_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (68.42)$$

где $h = \Delta x$.

Заметим, что уравнения высших порядков всегда могут быть сведены к системе уравнений первого порядка. Например, задача Коши

для уравнения второго порядка

$$\begin{cases} y'' = \psi(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (68.43)$$

сводится к задаче (68.39) с помощью замены переменной $y' = z$:

$$\begin{cases} y' = z \equiv \varphi(x, y, z), \\ z' = \psi(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0 \equiv y'_0. \end{cases} \quad (68.44)$$

Система (68.44) является частным случаем системы (68.39) при $\varphi(x, y, z) \equiv z$.

Алгоритм численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений методом Эйлера полностью совпадает с алгоритмом решения для одного уравнения.

Вычисления производят по формулам (68.42), которые в развернутом виде запишутся следующим образом

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h\psi(x_i, y_i, z_i). \end{cases} \quad (68.45)$$

68.6.2. Методы Рунге-Кутты для системы. Схемы Рунге-Кутты легко распространяются на случай систем дифференциальных уравнений, как и в случае метода Эйлера, при помощи формальной замены y и $f(x, y)$ на \vec{y} и $\vec{f}(x, \vec{y})$ соответственно.

Для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (68.39) покомпонентная запись схемы Рунге-Кутта четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6} h (q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4), \end{aligned} \quad (68.46)$$

где

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \varphi(x_i, y_i, z_i), & q_1 &= \psi(x_i, y_i, z_i), \\
 k_2 &= \varphi\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hq_1\right), \\
 q_2 &= \psi\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hq_1\right), \\
 k_3 &= \varphi\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hq_2\right), \\
 q_3 &= \psi\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hq_2\right), \\
 k_4 &= \varphi(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hq_3), \\
 q_4 &= \psi(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hq_3).
 \end{aligned} \tag{68.47}$$

Именно эта схема (разумеется, записанная для системы произвольного числа уравнений) лежит в основе большинства стандартных программ численного решения задачи Коши на ЭВМ.

68.7. Решение краевой задачи методом прогонки

Постановка краевой задачи

Требуется найти функцию $y = f(x)$, которая на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x) \tag{68.48}$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = \gamma_a, \\ \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) = \gamma_b. \end{cases} \tag{68.49}$$

Будем предполагать, что все функции, входящие в уравнение (68.48) и граничные условия (68.49), непрерывны, а искомая функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Граничные условия (68.49) являются универсальными. Для различных комбинаций коэффициентов $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a$ и β_b можно получить различные типы граничных условий, которые соответствуют различным постановкам физических задач, описываемым уравнением (68.48) и граничными условиями (68.49). Например, при $\alpha_a = \alpha_b = 0$ и $\beta_a = \beta_b = 1$ получаем граничные условия, в которых заданы значения искомой функции на границе отрезка: $y(a) = \gamma_a, y(b) = \gamma_b$. В случае, если $\alpha_a = \alpha_b = 1$ и $\beta_a = \beta_b = 0$, получаем граничные условия, в которых на

границе отрезка заданы значения производной от искомой функции $y'(a) = \gamma_a, y'(b) = \gamma_b$.

68.8. Метод прогонки

Поставленную задачу (68.48), (68.49) удаётся решить в аналитическом виде только для некоторого достаточно узкого класса функций $p(x)$, $q(x)$ и $F(x)$. В подавляющем большинстве практических задач для решения поставленной задачи используются численные методы. Для решения краевой задачи наиболее эффективным является метод прогонки.

Для построения численного алгоритма введем на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку узлов $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Для простоты выберем сетку с постоянным шагом, т.е. будем считать, что расстояние между соседними узлами (шаг сетки) равно $h = \frac{b-a}{n}$. Координаты i -го узла сетки определяются по формулам $x_i = a + i \cdot h, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Для краткости записей формул будем обозначать значения функций в узлах сетки именем функции с индексом, равным номеру узла. Например, $F(x_i)$ будем обозначать F_i ; $p(x_i) - p_i$, и так далее.

Перейдем теперь от дифференциальной задачи (68.48), (68.49), определённой в каждой точке отрезка $[a, b]$ (таких точек бесконечно много, они образуют континуум – несчётное множество), к конечно-разностной задаче, определённой на конечном (дискретном) множестве точек, являющихся узлами сетки ($n + 1$ точка). При переходе от непрерывной задачи (68.48), (68.49) к конечно-разностной (дискретной) необходимо заменить производные искомой функции $y(x)$, входящие в дифференциальную задачу (68.48), (68.49) при помощи конечно-разностных производных (68.22) и (68.24) для дифференциального уравнения (68.48) и формул (68.19), (68.20) для граничных условий (68.49). Отметим, что точность этих формул различная: формулы (68.22) и (68.24) имеют второй порядок точности, а формулы (68.19), (68.20) – первый порядок точности. В этих формулах следует положить $x = x_i, \Delta x = h$, так что $y(x) = y(x_i) = y_i, y(x + \Delta x) = y(x_i + h) = y(x_{i+1}) = y_{i+1}$ и $y(x - \Delta x) = y(x_i - h) = y(x_{i-1}) = y_{i-1}$. Эти обозначения используются в следующих конечно-разностных уравнениях.

После подстановки приведённых конечно-разностных производных в формулы (68.48), (68.49) для каждой узловой точки, получаем систему $(n + 1)$ -го порядка с $(n + 1)$ -им неизвестным значением

искомой функции в узловых точках: y_0, y_1, \dots, y_n .

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_a \frac{y_1 - y_0}{h} & + \beta_a y_0 & = \gamma_a, \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} & + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} & + q_i y_i = F_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \alpha_b \frac{y_n - y_{n-1}}{h} & + \beta_b y_n & = \gamma_b. \end{array} \right. \quad (68.50)$$

После приведения подобных слагаемых получаем:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\beta_a h - \alpha_a) y_0 & + \alpha_a y_1 & = \gamma_a h, \\ (2 - p_i h) y_{i-1} & + (2h^2 q_i - 4) y_i & + (2 + p_i h) y_{i+1} = 2h^2 F_i, \\ & & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ -\alpha_b y_{n-1} & + (\beta_b h + \alpha_b) y_n & = \gamma_b h. \end{array} \right. \quad (68.51)$$

Для краткости дальнейшего изложения обозначим

$$\begin{aligned} b_0 &= \beta_a h - \alpha_a, & c_0 &= \alpha_a, & f_0 &= \gamma_a h, \\ a_i &= 2 - p_i h, & b_i &= 2h^2 q_i - 4, & c_i &= 2 + p_i h, & f_i &= 2h^2 F_i, \\ & & & & & & i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ a_n &= -\alpha_b, & b_n &= \beta_b h + \alpha_b, & f_n &= \gamma_b h, \end{aligned} \quad (68.52)$$

где i меняется от 1 до $n-1$. С учётом (68.52) систему (68.51) можно переписать в стандартном виде:

$$\left\{ \begin{array}{llll} & b_0 y_0 & + c_0 y_1 & = f_0, \\ a_1 y_0 & + b_1 y_1 & + c_1 y_2 & = f_1, \\ a_2 y_1 & + b_2 y_2 & + c_2 y_3 & = f_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_{n-1} y_{n-2} & + b_{n-1} y_{n-1} & + c_{n-1} y_n & = f_{n-1}, \\ a_n y_{n-1} & + b_n y_n & & = f_n. \end{array} \right. \quad (68.53)$$

Эту систему можно решить, используя метод Гаусса, трудоёмкость которого $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций. Однако нетрудно заметить, что матрица системы (68.53) является редкозаполненной, а именно “трехдиагональной”. В этой матрице все элементы, кроме элементов,

стоящих на главной диагонали (b_0, b_1, \dots, b_n) (в системе (68.53) главной диагонали соответствует второй столбец), и элементов, стоящих на диагоналях ниже (a_0, a_1, \dots, a_n) и выше (c_0, c_1, \dots, c_n) главной диагонали (им соответствуют первый и третий столбцы соответственно), равны нулю. Поэтому, во-первых, в памяти ЭВМ имеет смысл хранить только эти три одномерных массива. Во-вторых, необходимо разработать метод, учитывающий упрощённую структуру матрицы системы (68.53). Такой метод был предложен И.М. Гельфандом и О.В. Локуциевским в 1952 году на одном из семинаров в Математическом институте им В.А. Стеклова, когда в связи с развитием численных методов возникла острая необходимость в экономичных приемах решения таких систем. Он был назван методом прогонки, что связано с остроумным использованием структуры системы (68.53). В методе прогонки, как мы сейчас увидим, граничное условие на левом конце отрезка $[a, b]$ «перегоняется» на правый конец. Этот метод является одним из вариантов метода исключения Гаусса, однако за счёт использования разреженности трехдиагональной матрицы системы (68.53) метод прогонки гораздо эффективнее.

Можно доказать, что решение системы (68.53) существует и является устойчивым при уменьшении шага сетки h . При малом значении h диагональные элементы системы (68.53) являются преобладающими, т.е. $|b_i| > |a_i| + |c_i|$. Поэтому данная система имеет решение для любых непрерывных на отрезке $[a, b]$, функций $p(x)$, $q(x)$ и $F(x)$.

Алгоритм решения системы (68.53), учитывающий трехдиагональную структуру системы состоит в следующем. Будем искать связь между двумя соседними значениями неизвестных, предполагая, что y_i линейно выражается через последующее значение y_{i+1} в виде:

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (68.54)$$

Будем предполагать, что формула (68.54) верна также и для граничных точек. Для того, чтобы выполнялось граничное условие на левом конце отрезка $[a, b]$ (первое уравнение в системе (68.53)) в соответствующей формуле

$$y_0 = L_0 y_1 + K_0 \quad (68.55)$$

достаточно положить

$$L_0 = -\frac{c_0}{b_0}, \quad K_0 = \frac{f_0}{b_0}, \quad (68.56)$$

так что значения L_0 и K_0 определяются граничными условиями.

Подстановка выражения (68.55) в уравнение $a_1y_0 + b_1y_1 + c_1y_2 = f_1$, соответствующее номеру $i = 1$ в системе (68.53), приводит к уравнению

$$a_1(L_0y_1 + K_0) + b_1y_1 + c_1y_2 = f_1, \quad (68.57)$$

которое позволяет выразить y_1 через y_2 :

$$y_1 = \frac{-c_1}{b_1 + a_1L_0} y_2 + \frac{f_1 - a_1K_0}{b_1 + a_1L_0}.$$

Запишем это соотношение в виде:

$$y_1 = L_1y_2 + K_1, \quad (68.58)$$

где L_1 и K_1 могут быть вычислены по известным значениям коэффициентов L_0 и K_0 и a_1 , b_1 , c_1 , f_1 по формулам

$$L_1 = \frac{-c_1}{b_1 + a_1L_0}, \quad K_1 = \frac{f_1 - a_1K_0}{b_1 + a_1L_0}.$$

Аналогично, подставив соотношение (68.58) в следующее уравнение $a_1y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 = f_2$, соответствующего номеру $i = 2$ в системе (68.53), получим

$$a_2(L_1y_2 + K_1) + b_2y_2 + c_2y_3 = f_2,$$

что позволяет выразить y_2 через y_3 :

$$y_2 = L_2y_3 + K_2,$$

где

$$L_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2L_1}, \quad K_2 = \frac{f_2 - a_2K_1}{b_2 + a_2L_1}.$$

Подобным же образом, исключая y_2 из последующего уравнения, выразим y_3 через y_4 и т.д.

Таким образом, подставляя $y_{i-1} = L_{i-1}y_n + K_{i-1}$ в уравнение системы (68.53) с номером i , получим аналогичное соотношение между y_i и y_{i+1}

$$y_i = \frac{-c_i}{b_i + a_iL_{i-1}} y_{i+1} + \frac{f_i - a_iK_{i-1}}{b_i + a_iL_{i-1}}.$$

Сравнивая полученные формулы, найдем, что y_i и y_{i+1} связаны между собой соотношением (68.54)

$$y_i = L_iy_{i+1} + K_i,$$

в котором коэффициенты L_i и K_i выражаются через известные значения коэффициентов a_i , b_i , c_i , f_i и L_{i-1} , K_{i-1} по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} L_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i L_{i-1}}, \\ K_i = \frac{f_i - a_i K_{i-1}}{b_i + a_i L_{i-1}}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (68.59)$$

и могут быть вычислены, поскольку L_0 и K_0 известны, они находятся по формулам (68.56). Коэффициенты L_i и K_i называются прогоночными коэффициентами, а алгоритм, позволяющий вычислить эти коэффициенты, называется прямым ходом метода прогонки.

Найдем теперь значение решения в правой граничной точке y_n . Выпишем последние два уравнения системы, полученной после применения прямого хода в методе прогонки. Для этого используем соотношение (68.54), в котором положим $i = n-1$, и последнее уравнение системы (68.53):

$$\begin{cases} y_{n-1} &= L_{n-1}y_n + K_{n-1}, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n &= f_n. \end{cases} \quad (68.60)$$

Подставляя y_{n-1} из первого уравнения системы (68.60) во второе уравнение, получим

$$a_n L_{n-1} y_n + a_n K_{n-1} + b_n y_n = f_n,$$

откуда

$$y_n = \frac{f_n - a_n K_{n-1}}{b_n + a_n L_{n-1}}.$$

Правая часть этого выражения равна прогоночному коэффициенту K_n , причём его значение соответствует выражению (68.59) с заменой i на n . Таким образом, решение в правой граничной точке выражается формулой:

$$y_n = K_n. \quad (68.61)$$

Теперь, зная все прогоночные коэффициенты и значение y_n , по рекуррентным формулам (68.54) можно последовательно получить решение во всех узловых точках сетки, начиная с y_{n-1} и до y_0 . Эта часть алгоритма называется обратным ходом метода прогонки.

Приведем краткий алгоритм решения краевой задачи (68.48), (68.49) методом прогонки.

1) Вычисление коэффициентов массивов a, b, c и f по формулам (68.52).

Замечание. Можно не вводить массивы для коэффициентов матрицы системы (68.53), а подсчитывать их непосредственно в цикле при вычислении прогоночных коэффициентов (68.59). Однако, для упрощения алгоритма решения задачи, вычислим эти коэффициенты отдельно.

Прямой ход метода прогонки.

2) $i = 0$. Вычисление прогоночных коэффициентов L_0 и K_0 по формулам (68.56).

3) $i = i + 1$. Вычисление прогоночных коэффициентов L_i и K_i по формулам (68.59).

4) Если $i < n$, то перейти на шаг 2.

Обратный ход метода прогонки.

5) $y_n = K_n$.

6) $i = i - 1$. Вычислить y_i по формуле (68.54).

7) Если $i > 0$, то перейти на шаг 6.

8) Построение графика полученной сеточной функции.

Оценим трудоемкость метода прогонки. На прямом ходе метода прогонки вычисляются прогоночные коэффициенты по формулам (68.56), (68.59). С учётом того, что коэффициенты имеют общий знаменатель, для их вычисления необходимо $6n$ арифметических операций. На обратном ходе необходимо выполнить ещё $2n$ арифметических операций. Итого, трудоемкость метода прогонки равна $8n$. Таким образом, метод прогонки в $n^2/12$ раз быстрее, чем метод Гаусса.

ПРИМЕР 68.5. *Найти методом прогонки приближённое решение уравнения $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$, удовлетворяющее граничным условиям $y(1) = 2,5$, $y(2) = 4$.*

Р е ш е н и е: Здесь $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^2}$, $F(x) = x$, $y_a = 2,5$, $y_b = 4$.

Положим $n = 10$. Тогда $h = \frac{1-0}{10} = 0,1$. Записываем в приведённую ниже таблицу (столбец 2) числа: $x_0 = 1$, $x_1 = 1+0,1 = 1,1$, $x_2 = 1,2, \dots$, $x_{10} = 2$.

Прямой ход: Вычисляем α_i , β_i , γ_i при $i = 1, 2, \dots, 9$ и заполняем столбцы 3, 4, 5.

Затем по формулам (5) вычисляем a_i , b_i , c_i , f_i , ($i = 1, 2, \dots, 9$) и заполняем столбцы 7, 8, 9.

Так например, при $i = 2$, $a_2 = 2 - h\alpha_2 = 2 - 0,1(-1,667) = 2,167$.

Наконец, по формуле (8) вычисляем L_i , K_i и заполняем столбцы 10 и 11.

Обратный ход: По формуле (7) вычисляем y_9 , принимая во внимание, что: $y_{10} = y_b = 4$, $L_9 = 0,855$, $K_9 = 0,388$,

$$y_9 = L_9 \cdot y_{10} + K_9 = 0,855 \cdot 4 + 0,388 = 3,808.$$

Записываем это значение в предпоследнюю строку 12 столбца. Затем вычисляем $y_8 = L_8 \cdot y_9 + K_8$ и так далее, пока не дойдем до

$$y_1 = L_1 \cdot y_2 + K_1 = 0,458 \cdot 2,769 + 1,370 = 2,638.$$

Таблица 68.1

i	x_i	α_i	β_i	γ_i	a_i	b_i	c_i	f_i	L_i	K_i	y_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1,0	-	-	-	-	-	-	-	0	2,500	2,500
1	1,1	-1,818	1,653	1,1	2,182	-3,967	1,818	0,022	0,458	1,370	2,638
2	1,2	-1,667	1,389	1,2	2,167	-3,972	1,833	0,024	0,615	0,988	2,769
3	1,3	-1,538	1,183	1,3	2,154	-3,976	1,846	0,026	0,696	0,793	2,896
4	1,4	-1,429	1,020	1,4	2,143	-3,980	1,857	0,028	0,745	0,672	3,022
5	1,5	-1,333	0,889	1,5	2,133	-3,982	1,867	0,030	0,780	0,586	3,155
6	1,6	-1,250	0,781	1,6	2,125	-3,984	1,875	0,032	0,806	0,521	3,294
7	1,7	-1,176	0,692	1,7	2,118	-3,986	1,882	0,034	0,826	0,469	3,470
8	1,8	-1,111	0,617	1,8	2,111	-3,988	1,889	0,036	0,842	0,427	3,633
9	1,9	-1,053	0,554	1,9	2,105	-3,989	1,894	0,038	0,855	0,388	3,808
10	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4,000

Метод прогонки разработан для линейных уравнений. Если уравнения нелинейные, решение ищется с помощью различных итерационных методов.

Практическое занятие 68. Решение задачи Коши численными методами

68.9. Основные понятия

Во всех классических учебниках особое внимание уделяется аналитическим методам решения дифференциальных уравнений. При этом уже для уравнений первого порядка имеются только несколько типов уравнений, решаемых аналитически. При решении подавляющего большинства практических задач данные методы неприменимы вследствие сложности дифференциальных уравнений и дополнительных условий. Поэтому для решения практических задач применяются численные методы при помощи которых на ЭВМ получают конечное число данных на базе которых можно получить значение искомой функции в любой точке области исследования. Для реализации алгоритма численных методов необходимо разработать компьютерную программу, которую можно реализовать, либо используя один из алгоритмических языков программирования: Visual Basic, Паскаль, Фортран, С, Руби и т. д. либо применить современные компьютерные пакеты ориентированные на решение математических задач: MathLab, MathCad, Maxima, Matematica и т.д. В такие пакеты встроены основные численные методы в виде функций, которые достаточно просто использовать. В данной работе выбор сделан в пользу коммерческого пакета MathCad [4, 17] и свободного пакета Maxima [5]. Некоторые методы реализованы в рамках табличного калькулятора Excel с использованием алгоритмического языка Visual Basic for Application [6].

MathCad является универсальным математическим пакетом работающий под управлением операционной системы Windows и позволяет решать большое количество сложных математических задач. Пакет Mathcad разработан с учётом интересов простого пользователя. Реализован интуитивно понятный интерфейс в котором основной упор сделан на наглядность программы и результатов, а также на простоту работы пользователя пакета. Для работы с Mathcad достаточно базовых навыков пользователя Windows. Пакет Mathcad предназначен для решения практических задач, поэтому в него встроены численные методы решения задачи Коши и краевой задачи. Аналитическое решение дифференциальных задач при помощи пакета получить нельзя.

Математический пакет Maxima ориентирован на те же задачи, что и MathCad, но является свободным программным продуктом и работает под управлением любой из двух операционных систем (ОС):

Windows и Linux. Большинство математических задач, особенно учебных, можно решить в рамках бесплатного пакета Maxima под управлением бесплатной ОС Linux. Пакет Maxima предназначен для решения дифференциальных задач как аналитическими, так и численными методами.

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0. \quad (68.1)$$

В качестве тестовой задачи для изучения методов решения дифференциальных задач в рамках пакетов MathCad и Maxima, выберем несложную задачу Коши, имеющую аналитическое решение.

ПРИМЕР 68.1. Решить задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = 0,5e^xy^2, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1. \quad (68.2)$$

Решение: Это легко интегрирующее уравнение с разделяющимися переменными. Общее решение получается следующим образом:

Разделяем переменные $\frac{2dy}{y^2} = e^x dx$ и после интегрирования обеих частей уравнения, получаем: $\frac{-2}{y} = e^x + c$. Записываем полученное общее решение в явном виде $y = \frac{-2}{e^x + c}$. Подставляя дополнительное условие $y(0) = 1$, получаем теоретическое решение поставленной задачи Коши

$$y = \frac{2}{3 - e^x}. \quad (68.3)$$

Найдем значение полученного теоретического решения в правой точке границы области решения

$$y(1) = \frac{2}{3 - e} = 7,09929356.$$

68.10. Решение дифференциальных задач аналитическими методами при помощи пакета Maxima

В пакете Maxima встроены несколько функций, решающих обыкновенные дифференциальные уравнения теоретическими методами. Функция *ode2(eqv, y, x)* получает общее решение дифференциального уравнения (eqv) первого или второго порядка. Функция *ic1(sol, x0, y0)*

на базе общего решения уравнения первого порядка sol , полученного функцией $ode2(eqv, y, x)$, находит частное решение задачи Коши для уравнения первого порядка. Функция $ic2(sol, x0, y0, y0')$ на базе общего решения уравнения второго порядка sol , полученного функцией $ode2(eqv, y, x)$, находит частное решение задачи Коши для уравнения второго порядка. Функция $bc2(sol, x1, y1, x2, y2)$ на базе общего решения уравнения второго порядка sol , полученного функцией $ode2(eqv, y, x)$, находит частное решение для краевой задачи. Функция $desolve(eqn, x)$ предназначена для определения общего решения одного дифференциального уравнения. При помощи этой же функции можно решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, но в этом случае вызов функции оформляется в виде: $desolve([eqn_1, \dots, eqn_n], [x_1, \dots, x_n])$.

ПРИМЕР 68.2. Рассмотрим решение задачи Коши (68.2) при помощи функций $ode2$ и $ic1$.

Р е ш е н и е:

Напишем Махима-программу, решающую данную задачу.

Напоминание. В строку с именем (`%in`) записывается вводимая команда, а в строке (`%on`) программа выводит результат вычисления.

/ Начало программы. */*

/ Получаем общее решение дифференциального уравнения. */*

```
(%i1) ode2('diff(y, x)=1/2*exp(x)*y^2, y, x);
```

```
(%o1) -2/y=%e^x+%c
```

/ Получили общее решения дифференциального уравнения первого порядка, содержащее произвольную константу %c. Подставляем начальные условия и получаем решение задачи Коши. */*

```
(%i2) ic1(%o1, x=0, y=1);
```

```
(%o2) -2/y=%e^x-3
```

/ Конец программы. */*

Ответ можно записать в явном виде: $y = \frac{2}{e^x - 3}$.

Полученный при помощи компьютерного пакета ответ совпадает с ответом, полученным выше (68.3).

Замечание. При написании программ на Махима и MathCad комментариях, поясняющие текущие команды, мы будем выделять курсивом и заключать в скобки */* ... */*. При написании своих программ их можно пропускать.

ПРИМЕР 68.3. Решить задачу Коши для уравнения второго порядка:

$$y'' - 4y' + 3y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (68.4)$$

Р е ш е н и е:

Maxima-программа аналитического решения данной программы состоит всего из двух команд. Первая команда получает общее решение уравнения второго порядка (68.4), которое содержит две произвольные константы %k1 и %k2. Вторая команда находит эти произвольные константы, подставляя заданные дополнительные условия и при помощи функции ratsimp упрощает полученное решение. Символ %, используемый в качестве первого аргумента функции ic1, подставляет в аргумент результат вывода последней команды.

```
(%i1) ode2('diff(y, x, 2) - 4*'diff(y, x)+3*y=exp(x), y, x);
```

```
(%o1) y = %k1%e3x -  $\frac{(2x+1)e^x}{4}$  + %k2%ex
```

```
(%i2) ratsimp(ic2(%, x=0, y=0, 'diff(y, x)=1));
```

```
(%o2) y = (3e3x - (2x+3)ex)/4.
```

Ответ: $y = (3e^{3x} - (2x+3)e^x)/4$.

ПРИМЕР 68.4. Решить краевую задачу:

$$y'' - 4y' + x^2 = 2e^x, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 10.$$

Р е ш е н и е: Генерируем вызов функции ode2 для получения общего решения дифференциального уравнения второго порядка.

```
(%i1) ode2('diff(y,x,2)-4*'diff(y,x)+x^2=2*exp(x), y, x);
```

```
(%o1) y = %k1%e4x -  $\frac{256%e^x - 32x^3 - 24x^2 - 12x - 3}{384}$  + %k2
```

Получили общее решение дифференциального второго порядка, содержащее две произвольные постоянные %k1 и %k2. Вызываем функцию bc2 которая находит произвольные постоянные по известным краевым условиям. Первым аргументом этой функции %o1 является результат работы команды %i1.

```
(%i2) bc2(%o1, x=0, y=0, x=2, y=10);
```

$$(\%o2) \ y = \frac{(32e^2 + 401)e^{4x}}{48e^8 - 48} + \frac{253e^8 - 256e^2 - 3461}{384e^8 - 384} - \frac{256e^x - 32x^3 - 24x^2 - 12x - 3}{384}$$

68.11. Решение задачи Коши численными методами

68.11.1. *Метод Эйлера.* Напомним формулу Эйлера (68.26) с постоянным шагом h для решения задачи Коши и применим её для численного решения примера 68.1

$$y_0 = y_0, \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (68.5)$$

где N – число разбиений отрезка $[a, b]$ на подынтервалы постоянной длины h .

Алгоритм решения задачи Коши методом Эйлера достаточно простой.

1) Устанавливаем постоянный шаг разбиения $h = \frac{b-a}{N}$, и вычисляем координаты узловых точек $x_i = a + h \cdot i$;
 $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

2) Задаём начальные данные. $i = 0$; $y_0 = y_0$.

3) Вычисляем численное значение искомой функции y в $i + 1$ -ой узловой точке: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

4) Переходим к следующей узловой точке: $i = i + 1$.

5) Если $i < N$, то перейти на пункт 2.

6) Вывод решения задачи Коши в узловых точках и построение графика искомой функции по точкам.

Представим теперь программу, реализующую данный алгоритм в рамках пакета MathCad и Maxima. Для наглядности, программы снабжены комментариями, которые можно опустить при написании программы. Комментарии заключены в операторные скобки `/* */` и выделены курсивом. Для отладки программы выберем небольшое значение числа отрезков, $N = 5$.

MathCad-программа.

/ Начало MathCad-программы.*/*

/ Начальные данные. Команда присваивания := вводится одним символом :. Верхний индекс вводится символом ^, а выход из режима ввода верхнего индекса осуществляется вводом символов пробела. Для ввода операции умножения используется символ *. Дробь вводится следующим образом: набирается числитель, затем до тех пор пока не выделится весь числитель, нажимаем символ пробела, затем вводим символ / и вводим знаменатель и снова нажимаем нужное число раз символ пробела.*/*

$$a := 0 \quad b := 1 \quad y_0 := 1 \quad N := 5 \quad h := \frac{b-a}{N}$$

$$f(x, y) := \frac{e^x \cdot y^2}{2}$$

/ Создание ранжированных векторов i и j, предназначенных для организации циклов. Символ .. вводится при помощи символа ; */*

$$i := 0..N \quad j := 0..N-1$$

/ Вычисление координат узловых точек. Для перехода к нижнему индексу нажимаем символ [, вводим индекс и нажимаем символ пробела.*/*

$$x_i := a + h \cdot i$$

/ Цикл последовательного вычисления значений искомой функции y(x) в узловых точках. */*

$$y_0 := y_0 \quad y_{j+1} := y_j + h \cdot f(x_j, y_j)$$

/ В одну строку выводим вектор решений. Для транспонирования вектора подаём команду Ctrl+1.*/*

$$y^T = (1 \quad 1.1 \quad 1.248 \quad 1.48 \quad 1.879 \quad 2.665)$$

/ Конец MathCad-программы.*/*

Чтобы построить график полученного решения подаём команду *Shift+2* и вместо маркера слева вводим название функции *y*, а на месте маркера внизу вводим название аргумента функции *x*.

Maxima-программа

/ Начало Maxima-программы.*/*

/ Очищаем ранее описанные переменные и команды. Устанавливаем численный режим вычислений.*/*

`(%i1) kill(all)$ numer:true$`

/ Задаём начальные данные и правую часть уравнения.*/*

`(%i3) a:0$ b:1$ y0:1$ N:5$ h:(b-a)/N$`

$$f(x, y) := 0.5 \cdot \exp(x) \cdot y^2;$$

/ Создаём вектора x и y, предназначенные для хранения координат узловых точек сетки и вектора решения в этих точках.*/*

`(%i9) array(x,N)$ array(y,N)$`

/ Вычисляем координат узловых точек.*/*

`(%i11) for i:0 while i<=N do x[i]:a+h*i;`

/ Цикл последовательного вычисления значений искомой функции в узловых точках.*/*

`(%i12) y[0]:y0; for i:0 while i<N do(
y[i+1]:y[i]+h*f(x[i],y[i]));`

/ Вывод вектора решений. Устанавливаем количество символов в выводе результатов.*/*

```
(%i14) fpprintprec : 4$
```

/ Создаём список для построения графика.*/*

```
(%i15) xy:makelist([x[k],y[k]],k,0,N);
```

```
(%o15) [[0, 1], [0.2, 1.1], [0.4 1.248],  
        [0.6, 1.48], [0.8, 1.879], [1.0, 2.665]]
```

/ Строим график полученного решения.*/*

```
(%i16) wxplot2d([[discrete,xy],2/(3-exp(x))],[x,0,1],  
                [style,[linespoints,4,1,5], [lines,2,3]],  
                [legend,"E","YT"],  
                [gnuplot_preamble, "set grid;"]);
```

/ Конец Maxima-программы.*/*

На рис. 25 представлены графики решения задачи методом Эйлера при $N=5$ (E) и теоретическое решение (YT).

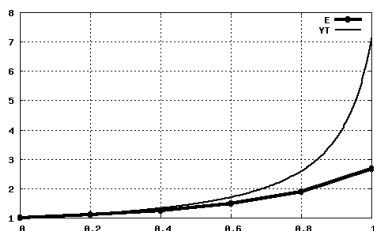


Рис. 25. Решения задачи Коши примера 68.1 методом Эйлера.

После отладки программы на малом значении параметра N можно увеличить его значения до $N = 100$. Для этого в строке (% i3) изменяем значение переменной N

```
(%i3) a:0$ b:1$ y0:1$ N:100$ h:(b - a)/N$  
f(x,y):=0.5*exp(x)*y^2;
```

и подаём команду *Перевычислить ввод (Ctrl+R)*. Данную команду повторяем для всех строк программы.

Естественно, результаты обеих программ совпадают. Погрешность полученного решения накапливается на каждом интервале и принимает максимальное значение при $x = 1$. Сравнивая полученное численное решение при $N = 5$ с точным решением, получаем достаточно

большую погрешность 4.434. При $N = 100$ погрешность уменьшается до 0,991, а при $N = 1000$ – до 0,123. На рис. 26 приведены три графика полученного решения методом Эйлера при $N=5, 100$ и 1000 .

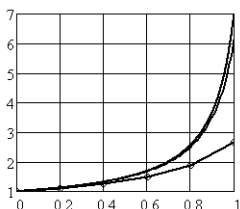


Рис. 26. Решения задачи Коши примера 68.1 методом Эйлера при $N=5, 100$ и 1000

68.11.2. *Метод Рунге-Кутты второго порядка.* Метод Рунге-Кутты второго порядка точности описывается формулой (68.35).

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_{i+1} = y_i + \left((1 - \alpha)f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha}f(x_i, y_i)\right) \right) h, \\ i = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (68.6)$$

Параметр α в данной формуле изменяется в диапазоне от 0 до 1 и задаёт скорость сходимости численного решения. Этот параметр необходимо подбирать для каждой конкретной задачи. Как показали численные исследования для задачи Коши (68.2) при малых значениях числа разбиений N , наиболее оптимальным значением для параметра α является значение 0,25. Программа данного метода отличается от метода Эйлера только немного более сложной формулой. В методе Рунге-Кутты второго порядка необходимо на каждой итерации два раза вычислять значение правой части дифференциального уравнения (68.1). В программах для этих значений введем переменные $k1$ и $k2$.

Приведем только фрагмент программы, реализующий формулу Рунге-Кутты второго порядка, т.к. вся остальная часть программы полностью совпадает.

В MathCad-программе, вместо строки

$y_0 := y0 \quad y_{j+1} := y_j + h \cdot i$
необходимо ввести следующий блок команд:

$$\alpha := 0.25 \quad y_0 := y0$$

$$y_{j+1} := \begin{cases} k1 \leftarrow f(x_j, y_j) \\ k2 \leftarrow f(x_j + \frac{h}{2 \cdot \alpha}, y_j + \frac{h}{2 \cdot \alpha} \cdot k1) \\ y_j + [(1 - \alpha) \cdot k1 + \alpha \cdot k2] \cdot h \end{cases}$$

/ Выводим вектор решений в узловых точках.*/*

$$y^T = (1 \quad 1.129 \quad 1.34 \quad 1.736 \quad 2.695 \quad 6.823)$$

Напоминание. Для ввода блока операторов в одной команде несколько раз используется команда *Add Line* из панели программирования, или вводится символ], а для ввода команды локального присваивания \leftarrow используем символ {.

В Maxima-программе также необходимо изменить строку

```
(%i12) y[0]:y0; for i:0 while i<N do(
      y[i+1]:y[i]+h*f(x[i],y[i]);
```

на следующий блок команд:

```
(%i12) alpha:0.25; y[0]:y0;
      for i:0 while i<N do (
          k1:f(x[i],y[i]), d:h/(2*alpha),
          k2:f(x[i]+d,y[i]+d*k1),
          y[i+1]:y[i]+((1-alpha)*k1+alpha*k2)*h
      );
```

Этот фрагмент программы нужно вводить с использованием команды многострочного ввода.

Здесь также используется оператор цикла, но в теле цикла находятся четыре оператора присваивания значений переменным $k1, k2, d$ и $y[i+1]$. Круглыми скобками эти операторы объединены в один блок. Выведем результаты работы программы в виде списка и графика.

```
(%i16) xy:makelist([x[k],y[k]],k,0,N);
(%o16) [[0, 1], [0.2, 1.129],[0.4 1.34], [0.6, 1.736],
        [0.8, 2.695], [1.0, 6.823]]
(%i17) wxplot2d([discrete,xy],[style,[line,2,1]],
        [legend,"R2"],[gnuplot_preamble,"set grid;"],
        [xlabel,"x"],[ylabel,"Y2"]);
```

Погрешность полученного решения при $N=5$ равна 0,277, при $N=100 - 0,009$ и при $N=1000 - 0,0001$. Таким образом, метод Рунге-Кутта второго порядка значительно точнее метода Эйлера, хотя алгоритм решения такого же уровня сложности, только на каждом шаге необходимо вычислять значение правой части в двух точках.

68.11.3. *Метод Рунге-Кутта четвёртого порядка.* На практике для решения задачи Коши чаще всего применяют метод Рунге-Кутта четвёртого порядка точности (68.38)

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4), \\ i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (68.7)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), & k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_2). \end{aligned} \quad (68.8)$$

В данном методе на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ правая часть уравнения (68.1) вычисляется в четырёх различных точках. Вычислительная программа имеет такой же вид, как и для метода Рунге-Кутта второго порядка. Поэтому сохраняем программу для метода Рунге-Кутта под новым названием и изменяем только блок, программирующий формулу Рунге-Кутта 4-го порядка.

$$y_0 := y_0 \quad y_{j+1} := \begin{cases} k1 \leftarrow f(x_j, y_j) \\ k2 \leftarrow f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} \cdot k1\right) \\ k3 \leftarrow f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} \cdot k2\right) \\ k4 \leftarrow f(x_j + h, y_j + h) \cdot k3 \\ y_j + \frac{h}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot (k2 + k3) + k4) \end{cases}$$

/ Выводим вектор решений в узловых точках. */*

$$y^T = (1 \quad 1.124 \quad 1.326 \quad 1.698 \quad 2.581 \quad 6.857)$$

В Матхима-программе производим следующие изменения:

```
(%i12) y[0]:y0;
      for i:0 while i<N do (
```

```

        k1:f(x[i], y[i]), d:h/2,
        k2:f(x[i]+d, y[i]+d*k1),
        k3:f(x[i]+d, y[i]+d*k2),
        k4:f(x[i]+h, y[i]+h*k3),
        y[i+1]:y[i]+(k1+2*(k2+k3)+k4)*h/6
    );
(%i15) xy:makelist([x[k], y[k]], k, 0, N);
(%o15) [[0, 1], [0.2, 1.124], [0.4, 1.326], [0.6, 1.698],
        [0.8, 2.581], [1.0, 6.857]]
(%i16) wxplot2d([discrete, xy], [style, [line, 2, 1]],
        [legend, "RK4"], [gnuplot_preamble, "set grid;"],
        [xlabel, "x"], [ylabel, "Y4"]);

```

Погрешность полученного решения при $N=5$ равна 0,242, при $N=100 - 0,000006$ и при $N=1000 - 6 \cdot 10^{-10}$. Таким образом, метод Рунге-Кутты четвёртого порядка значительно точнее других методов при одинаковом уровне сложности алгоритмов.

Приведем теперь без комментариев программу, решающую задачу Коши всеми тремя методами.

MathCad-программа

$$a := 0 \quad b := 1 \quad y_0 := 1 \quad N := 5 \quad h := \frac{b-a}{h}$$

$$f(x, y) := \frac{e^x \cdot y^2}{2}$$

$$i := 0..N \quad j := 0..N-1$$

$$x_i := a + h \cdot i$$

$$y_0 := y_0 \quad y_{j+1} := y_j + h \cdot i \quad yE := y$$

$$\alpha := 0.25 \quad y_0 := y_0$$

$$y_0 := y_0 \quad y_{j+1} := \begin{cases} k1 \leftarrow f(x_j, y_j) \\ k2 \leftarrow f(x_j + \frac{h}{2 \cdot \alpha}, y_j + \frac{h}{2 \cdot \alpha} \cdot k1) \\ y_j + [(1 - \alpha) \cdot k1 + \alpha \cdot k2] \end{cases}$$

$$yR2 := y$$

$$y_0 := y_0 \quad y_{j+1} := \begin{cases} k1 \leftarrow f(x_j, y_j) \\ k2 \leftarrow f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} \cdot k1) \\ k3 \leftarrow f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} \cdot k2) \\ k4 \leftarrow f(x_j + h, y_j + h \cdot k1) \\ y_j + \frac{h}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot (k2 + k3) + k4) \end{cases}$$

$yR4 := y$

Mathia-программа

```
(%i1) numer:true$
(%i2) a:0$ b:1$ y0:1$ N:5$ h:(b-a)/N;
      f(x,y):=0.5*exp(x)*y^2;
(%i8) array(x, N)$ array(yE, N)$ array(y2, N)$
      array(y4, N)$
(%i12) for i:0 while i<=N do (x[i]:a+h*i);
(%i13) yE[0]:y0; for i:0 while i<N do
      ( yE[i+1]:yE[i]+h*f(x[i],yE[i]));
(%i15) alpha:0.5$ y2[0]:y0;
(%i17) for i:0 while i<N do (
      k1:f(x[i],y2[i]), d:h/(2*alpha),
      k2:f(x[i]+d,y2[i]+d*k1),
      y2[i+1]:y2[i]+((1-alpha)*k1+alpha*k2)*h
    );
(%i18) y4[0]:y0;
      for i:0 while i<N do (
      k1:f(x[i],y4[i]), d:h/2,
      k2:f(x[i]+d, y4[i]+d*k1),
      k3:f(x[i]+d, y4[i]+d*k2),
      k4:f(x[i]+h, y4[i]+h*k3),
      y4[i+1]:y4[i]+(k1+2*(k2+k3)+k4)*h/6
    );
(%i20) fpprintprec:4 $
(%i21) xyE:makelist([x[k], yE[k]], k, 0, N);
(%i22) xy2:makelist([x[k], y2[k]], k, 0, N);
(%i23) xy4:makelist([x[k], y4[k]], k, 0, N);
(%i24) wxplot2d([[discrete, xyE], [discrete, xy2],
      [discrete, xy4], 2/(3-exp(x))], [x 0 1],
```

```
[style [linespoints,1,1,1],[linespoints,2,2,2],
[linespoints,3,3,3], [line,4,2]], [legend,"YE",
"Y2", "Y4", "YT"], [gnuplot_preamble,"set grid;"],
[xlabel,"x"], [ylabel,"YE,Y2,Y4,YT"]];
```

На рис. 27 на одной диаграмме представлены графики решений для всех трёх методов при $N = 5$ и график теоретического решения. Из графиков видно, что при переходе на следующий интервал ошибки накапливаются, при этом метод Рунге-Кутты четвёртого порядка (Y4), уже при таком малом значении N , даёт приемлемый результат. Метод Рунге-Кутты второго порядка (Y2) и метод Эйлера (YE) отслеживают тенденцию изменения теоретического решения, но дают большую погрешность.

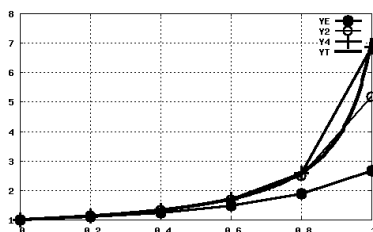


Рис. 27. Решения задачи Коши тремя методами при $N=5$

На рис. 28 представлены графики решения задачи Коши (5.2) всеми тремя методами при $N = 20$. Как видно из графиков, результаты, полученные по методу Рунге-Кутты второго и четвёртого порядков, совпадают с теоретическим решением, а метод Эйлера требует увеличения числа N .

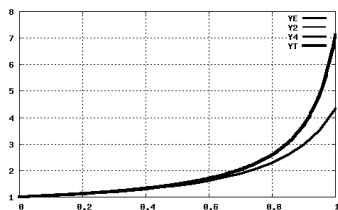


Рис. 28. Решения задачи Коши тремя методами при $N=20$

Самостоятельная работа

Решить задачу Коши (68.1) методом Эйлера и Рунге-Кутты второго и четвёртого порядков точности для приведённых ниже уравнений и начальных данных. На одной диаграмме построить решения для трёх методов. Провести исследование сходимости решений для значений параметра $N : N = 10, N = 100$ и $N = 1000$.

N	Дифференциальное уравнение	$[a; b]$	Дополн. условие
1	$y' + xy \sin 5x = e^{0,1x}$	$[0; 4]$	$y(0)=1$
2	$y' + x^{1,5}y = x^2 \sin 2x$	$[1; 3]$	$y(1)=1$
3	$y' + y^4 = 1 - x$	$[0; 1]$	$y(0)=0$
4	$2y' - y \operatorname{tg} 0,2x = xy^2$	$[0; 1]$	$y(0)=1$
5	$y' + e^{0,1x}y = \sin(xy)$	$[0; 10]$	$y(0)=1$
6	$y' + xy \cos 3x = e^{0,3x}$	$[0; 4]$	$y(0)=2$
7	$y' + x^y = \sin 2x$	$[1; 3]$	$y(1)=1$
8	$y' + x^y = e^{0,2x^2}$	$[1; 3]$	$y(1)=3$
9	$y' + 3x^{0,2y} = y \sin 5x$	$[0; 2]$	$y(0)=2$
10	$y' + y^4 \ln(x^2 + 5) = 1 - x^5y$	$[0; 2,5]$	$y(0)=3$
11	$y' + 3x^2y^3 = \sin 3x$	$[0; 5]$	$y(0)=0$
12	$y' + \lg y^3 = x^2y$	$[-1; 2]$	$y(-1)=15$
13	$y' + \lg y^2 = \sqrt{y} \cos x$	$[0; 10]$	$y(0)=10$
14	$y' + y^3 \ln(x^2 + 5) = x - x^4y$	$[0; 2]$	$y(0)=2$
15	$y' + \lg y^3 = y \sin x^2$	$[-1; 2]$	$y(-1)=20$
16	$y' + \sqrt{\lg y} = \sqrt{y} \sin x$	$[0; 10]$	$y(0)=10$
17	$y' - ye^x = \sqrt{y^3} \sin(x^2 + 1)$	$[0; 5]$	$y(0)=10$
18	$y' + x\sqrt[3]{y} = y \sin(x^2 + 1)$	$[0; 2]$	$y(0)=10$
19	$y' + x^4\sqrt[4]{y^5} = y \sin(x + 5)$	$[1; 2]$	$y(1)=15$
20	$y' + \sqrt[3]{x^7}y = y \cos^2(0,2x + 5)$	$[1; 4]$	$y(1)=15$
21	$y' + \sqrt[3]{x^4}y = \ln x + y^2e^{-2x}$	$[1; 3]$	$y(1)=2$
22	$y' + \sqrt[3]{x^4}y = x^2 \ln x + ye^{-x}$	$[1; 8]$	$y(1)=20$
23	$y' + \sqrt[5]{y^3} \sin x = y \sin(x^2 + 1)$	$[0; 5]$	$y(0)=10$
24	$y' + \sqrt[5]{y^3} \sin x = ye^{-\sqrt{x}}$	$[0; 20]$	$y(0)=10$
25	$y'y' - \sqrt[5]{y^3} \cos x = ye^{-\sqrt{2x}}$	$[0; 12]$	$y(0)=15$
26	$y' + y\sqrt[3]{x} = e^y \cos^3 2x$	$[1; 10]$	$y(1)=2$
27	$y' + y\sqrt[3]{x^2} = y^3 \cos^3 2x + \sin x$	$[1; 10]$	$y(1)=2$
28	$y' + y\sqrt[3]{x^2} = \cos 2x \cdot \ln x$	$[1; 9]$	$y(1)=2$
29	$y' + y\sqrt[3]{x^2} = y^2 \ln x \cdot \sin x^2 + \sin 2x$	$[1; 10]$	$y(1)=3$
30	$y' + xy \cos 4x^2 = e^{0,1x}$	$[0; 4]$	$y(0)=1$

68.12. Решение задачи Коши при помощи встроенных функций

Решение задачи Коши является стандартной задачей, несложной с вычислительной точки зрения. Естественно, что во все математические пакеты, включая Mathcad и Maxima, встроены несколько функций, реализующих численное решение задачи Коши.

68.12.1. *MathCad-функции.* Наиболее удобным способом решения задачи Коши является вычислительный блок Given ... Odesolve. Этот блок реализует метод Рунге-Кутты четвёртого порядка и имеет следующий общий вид:

Given

Уравнения и начальные данные задачи Коши.

y=odesolve(x,b,[N])

Здесь *Given* ключевое слово, указывающее на начало блока вычислений. Вместо уравнений и начальных данных необходимо задать в математическом виде дифференциальное уравнение n -го порядка или систему n уравнений первого порядка, представленных в нормальной форме. Вместо начальных данных необходимо задать n уравнений, определяющих значение искомой функции $y(x)$ или её производных в начальной точке a . b – правая граница области, на которой ищется решение задачи Коши. Необязательный параметр N определяет количество интервалов, на которые разбивается отрезок при решении задачи методом Рунге-Кутты.

Рассмотрим решение задачи (68.2) при помощи рассматриваемого вычислительного блока.

```
/*Начало программы.*/
given    $y'(x) = \frac{e^x \cdot y(x)^2}{2}$     $y(0) = 1$ 
y:=odesolve(x, 1, 100)
x:=0,0.1..1 /*Напоминание. Двоеточие вводится одним символом; */
x=


|   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|


y=


|   |      |      |      |      |      |     |      |      |     |     |
|---|------|------|------|------|------|-----|------|------|-----|-----|
| 1 | 1.06 | 1.12 | 1.21 | 1.33 | 1.48 | 1.7 | 2.03 | 2.58 | 3.7 | 7.1 |
|---|------|------|------|------|------|-----|------|------|-----|-----|


/*Конец программы.*/
```

В первой строке данной программы получено решение задачи в виде функции $y(x)$, которое можно использовать для решения других задач. Для ввода символа производной можно использовать комбинацию клавиш *Ctrl+F7*. Для задания второй производной необходимо

набрать эту комбинацию повторно. Символ \equiv , используемый как равенство при определении уравнения, необходимо вводить при помощи комбинации двух клавиш $Ctrl+\equiv$. Можно построить график полученного решения, подав команду $Shift+2$, и вместо маркера на диаграмме слева ввести $y(x)$.

Выведем таблицу со значениями функции. Во второй строке задана таблица переменной x . Далее выведены полученные значения таблиц x и значений искомой функции y в соответствующих узловых точках, заданных таблицей x . Сравнивая полученное решение $y(1) = 7.099$ в вычислительном блоке **Given ... Odesolve** с результатом, полученным по методу Рунге-Кутты при $N = 100$, мы видим их полное совпадение. Читателям предлагается провести такое же сравнение для своих вариантов заданий.

Рассмотрим решение более сложной задачи о вынужденных колебаниях под воздействием внешней периодической возмущающей силы убывающей со временем амплитуды и сопротивления среды пропорциональной скорости колебания. Эта задача Коши описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка.

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega^2 y(t) = ae^{-0.01t} \sin \mu t, \quad t \in [0; T], \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Напишем программу для решения поставленной задачи.

*/*Начало программы.**

$\omega := 0.1 \quad \mu := 0.2 \quad a := 10 \quad b := 2 \quad T := 4000$

Given

$$y''(t) + 2 \cdot b \cdot y'(t) + \omega^2 \cdot y(t) \equiv a \cdot e^{-0.01 \cdot t} \cdot \sin(\mu \cdot t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

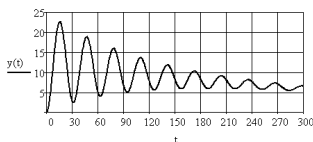
$$y := \text{Odesolve}(t, T)$$

$$y(T) = 0.001$$

*/*Конец программы.**

В качестве значений для параметров поставленной задачи выбраны некоторые произвольные числа. Можно исследовать поведения решения задачи Коши от каждого из этих параметров. Из графика 29 полученной функции $y(t)$ видно, что вначале происходит затухание колебательных движений, при этом амплитуда колебательных движений со временем уменьшается, а затем при больших значениях t искомой функции стремится к нулю. $y(T) = 0.001$.

Рассмотрим пример решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи вычислительного блока **Given ... Odesolve**.

Рис. 29. Решения задачи Коши тремя методами при $N=20$

Пусть дана нормальная система трёх дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z), \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0, \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \quad t \in [t_0, T].$$

Программа для решения данной задачи на Mathcad с использованием вычислительного блока Given/ ... Odesolve выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{lll} f1(t) := \dots & f2(t) := \dots & f3(t) := \dots \\ x0 := \dots & y0 := \dots & z0 := \dots \\ t0 := \dots & T := \dots & \\ \text{Given} & & \\ f1(t) = 0 & f2(t) = 0 & f3(t) = 0 \\ x(t0) = x0 & y(t0) = y0 & z(t0) = z0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Odesolve} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t, T \right)$$

Вместо многоточий необходимо поставить конкретные значения правых частей функций или переменных величин. В результате мы получаем решение в виде вектор-функции.

В качестве конкретного примера рассмотрим решение предыдущей задачи о колебаниях в виде системы двух уравнений первого порядка.

Для этого введем две функции: $y1(t) = y(t)$ – перемещение материальной точки, и $y2(t) = y'(t)$ – скорости этой же точки. Получаем систему двух уравнений в нормализованном виде

$$\begin{cases} y1'(t) = y2(t) \\ y2'(t) + 2by2(t) + \omega^2 y1(t) = ae^{-0.01t} \sin \mu t, \quad t \in [0; T], \\ y1(0) = 0, \quad y2(0) = 0. \end{cases}$$

В этом случае программа будет иметь следующий вид:

*/*Начало программы.**

$\omega := 0.1 \quad \mu := 0.2 \quad a := 10 \quad b := 2 \quad T := 4000$

Given

$y1'(t) = y2(t)$

$y2'(t) + 2 \cdot y2(t) + \omega^2 \cdot y1(t) = a \cdot e^{-0.01 \cdot t} \cdot \sin(\mu \cdot t)$

$y1(0) = 0 \quad y2(0) = 0$

$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left(\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}, t, T \right)$

*/*Конец программы.**

Можно вывести графики для перемещений $y1(t)$ и скоростей $y2(t)$ точки в зависимости от времени. График перемещения совпадает с предыдущим решением.

Кроме вычислительного блока Given ... Odesolve, в Mathcad встроены ещё три функции, которые позволяют решать задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

1) $Y := rkfixed(y0, a, b, N, F)$ – функция, решающая задачу Коши для уравнений первого порядка или систем n уравнений первого порядка, записанных в нормальном виде. Решение осуществляется методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

2) $Y := Rkadapt(y0, a, b, N, F)$ – такая же функция как и $rkfixed$, только решение производится с переменным шагом.

3) $Y := Bulstoer(y0, a, b, N, D)$ – решение задачи Коши для уравнений первого порядка или систем n уравнений первого порядка, записанных в нормальном виде. Решение осуществляется методом Булирша-Штера.

Аргументы данных функций означают:

$y0$ – вектор начальных значений искомой функции в точке a .

a – левая граница области.

b – правая граница области.

N – число разбиений отрезка $[a, b]$.

F – векторная функция, задающая правые части нормализованного уравнения или системы уравнений. Количество строк векторной функции совпадает с количеством уравнений.

Y – матрица, в нулевом столбце которой находятся координаты абсцисс, а в последующих столбцах выводится затабулированное решение задачи Коши. Так, для уравнения первого порядка матрица Y содержит два столбца, для системы двух уравнений первого порядка – три столбца, и так далее.

В качестве примера использования функции `rkfixed` и `Rkadapt` рассмотрим решение задачи Коши (68.2).

$$f(x, y) := \frac{e^x \cdot y^2}{2} \quad y := 1 \quad Y := rkfixed(y, 0, 1, 5, f)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1.124 & 1.326 & 1.698 & 2.581 & 6.857 \end{pmatrix}$$

$$Y := Rkadapt(y, 0, 1, 5, f)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1.124 & 1.326 & 1.698 & 2.582 & 7.097 \end{pmatrix}$$

Сравнивая результаты работы функций `rkfixed` и `Rkadapt` с теоретическими результатами (68.3), $y(1) = \frac{2}{3 - e} = 7,09929356$, мы видим, что вторая функция даёт более точные результаты. Кроме перечисленных функций, в Mathcad встроено ещё более десяти функций, направленных на решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Список всех функций с небольшим объёмом справочной информации можно посмотреть, нажав на кнопку $f(x)$ или `Insert/Function`. Без подробных комментариев, рассмотрим ещё две функции, предназначенные для решения неустойчивых задач Коши или, так называемых «жёстких» обыкновенных дифференциальных уравнений.

1) $Y := stiffb(y0, a, b, N, F, J)$ – решение жёстких систем методом Булирша-Штера.

2) $Y := stiffr(y0, a, b, N, F, J)$ – решение жёстких систем методом Розенброка. Последним параметром данных функций является матрица $J(t, y)$, составленная из якобиана (левые столбцы) и вектора производных по x (правый столбец). Примеры решения жёстких систем выходят за рамки курса математики для инженерных специальностей.

68.12.2. *Maxima-функции.* В Maxima встроена функция `rk`, реализующая решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в нормальной форме.

(68.9)

С начальными данными

$$(68.10)$$

Для решения поставленной задачи необходимо вначале при помощи функции **load** загрузить библиотеку программ **dynamics**, а затем вызвать функцию **rk**, решающую задачу Коши (68.9, 68.10) методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности. Общий вид функции **rk**: **rk**($[f_1, f_2, \dots, f_n], [y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}], [x, x_0, x_{end}, step]$), где в первых квадратных скобках через запятую записываются правые части системы, во вторых скобках - имена искомых функций, а в третьих скобках - значения искомых функций при $x = x_0$, в четвертых скобках - имя переменной, являющейся аргументом искомых функций, начальное значение $x = x_0$, конечное значение x_{end} и шаг аргумента $step$. В качестве простейшего примера решения задачи Коши численным методом при помощи встроенной функции **rk**, ещё один раз приведем решение задания (68.2).

/* Загружаем библиотеку dynamics. */

```
(%i1) load("dynamics")$
```

/ Устанавливаем количество знаков в результатах.*/*

```
(%i2) fpprintprec:4$
```

/ Вызываем функцию, решающую задачу Коши. Результат помещаем в список r.*/*

```
(%i3) r:rk(0.5*exp(x)*y^2, y, 1, [x, 0, 1, 0.2]);
```

/ Автоматически выводится список решения.*/*

(%03) $[[0, 1], [0.2, 1.124], [0.4, 1.326], [0.6, 1.698],$
 $[0.8, 2.581], [1.0, 6.857]]$

/ Строим график решения.*/*

```
(%i4) wxplot2d([discrete,r ], [x,0,1],
               [gnuplot_preamble, "set grid;"]);
```

Решение, полученное при помощи встроенной функции `rk`, полностью совпадает с решением, полученным ранее нами с использованием программирования по методу Рунге-Кутты 4-го порядка. В качестве примера использования функции `rk` для решения уравнений высших порядков, рассмотрим ещё раз решения задачи Коши для уравнения второго порядка 68.4.

ПРИМЕР 68.5. *Решить задачу Коши:*

$$y'' - 4y' + 3y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Р е ш е н и е:

Напомним теоретическое решение, полученное ранее:

$$y = (3e^{3x} - (2x + 3)e^x)/4.$$

Запишем данное уравнение в виде нормализованной системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = 4u - 3y + e^x. \end{cases}$$

```
(%i1) kill(all)$
```

```
(%i1) load("dynamics")$
```

```
(%i2) fpprintprec:4$
```

```
/* Вызываем функцию rk для решения нормализованной системы двух
уравнений, правые части которых приведены в первом списке, с двумя
неизвестными функциями [y, u], начальные значения которых [0,
1], а аргумент функций x изменяется от 0 до 1 с шагом 0,1. Результатом
выполнения этой функции будет список r, состоящий из 11
элементов типа [x, y, u].*/
```

```
(%i3) r : rk([u, 4*u- 3*y+ exp(x)], [y, u],
[0, 1], [x, 0, 1, 0.1]);
```

```
/* yt - Теоретическое решение.*/
```

```
(%i4) yt(x) := (3*exp(3*x) - (2*x+3)*exp(x))/4;
```

```
/* Создаем список, состоящий из 11 элементов типа [x, y], необходимый
для построения графика искомой функции y.*/
```

```
(%i5) y : makelist([r[k][1], r[k][2]], k, 1, 11);
```

```
/* Строим два графика на одной диаграмме. y - решение, полученное
численным методом Рунге-Кутты с использованием функции rk. yt
- теоретическое решение.*/
```

```
(%i6) wxplot2d([[discrete, y], yt], [x, 0, 1],
[style, [lines ,2, 5], [lines,2,1]]),
```

```
[gnuplot_preamble,"set grid;"],  
[legend,"y","yt"]);
```

Из графика 30 видно, что решение, полученное с использованием функции `rk`, полностью совпадает с теоретическим решением.

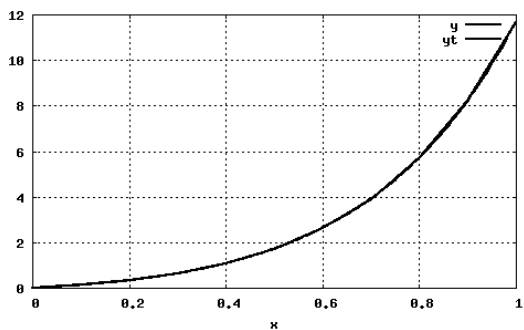


Рис. 30. Решения задачи Коши с использованием функции `rk`

Самостоятельная работа

Решить задачу Коши для заданного уравнения и начальных условий.

№ Вар.	Дифференциальное уравнение	[a, b]	Начальные условия	
1	$y'' - y' + x^2 y = \sin x$	[0, 3]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 1$
2	$y'' + 2y' + 2^{10 \sin x} = 0$	[0, 2]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 1$
3	$y'' - x^2 y' = x^4 y + xy$	[0; 1, 5]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 2$
4	$y'' + 2xy' - y = 0$	[0, 5]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 1$
5	$y'' + x^3 y = y'$	[0, 3]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 1$
6	$y'' + 0, 2y' + xy = 0, 3$	[0, 5]	$y'(0) = 4$	$y(0) = 2$
7	$y'' - x^2 y = y'$	[0; 3]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 1$
8	$y'' + x^2 y = y'$	[0, 8]	$y'(0) = 0$	$y(0) = -1$
9	$y'' - 0, 1xy' + xy = 0$	[0, 10]	$y'(0) = 0$	$y(0) = -1$
10	$y'' + y' - xy = 0$	[0, 5]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 3$
11	$y'' - 0, 3y' = 1$	[0, 5]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 3$
12	$xy'' - 0, 3y' + x = 0$	[1, 4]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 2$
13	$y'' - 2xy = x$	[1, 4]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 1$
14	$y'' - xy' = x^2$	[2, 3]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 3$
15	$y'' - x^2 y' = x^2 y$	[0, 2]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 0$
16	$y'' - x^2 y' + 4y = x^2$	[0, 3]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 1$
17	$y' + 0, 5x^4 y'' = x^2$	[1, 2]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 1$
18	$y'' - 0, 1y' + e^x y = 0$	[-2, 4]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 2$
19	$y'' + (x + 1)y' = x$	[-1, 3]	$y'(0) = 6$	$y(0) = 1$
20	$y'' + (x + x^2)y' = x$	[0, 2]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 3$
21	$y'' - (x + x^2)y' = 0$	[0, 1]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 2$
22	$y'' - y' + x^3 y = 0$	[0, 2]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 1$
23	$y'' + e^{3x} y = x^2$	[0, 2]	$y'(0) = 0$	$y(0) = -1$
24	$y'' + 0, 2e^{-2x} y = \cos x$	[0, 10]	$y'(0) = 0$	$y(0) = -1$
25	$y'' + x^2 y' = \cos 2x$	[0, 6]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 3$
26	$y'' + \cos x \cdot y' = x^2$	[0, 4]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 3$
27	$y'' + \cos x \cdot y = x$	[0, 4]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 3$
28	$y'' + \sin^2 x \cdot y + y' = 0$	[0, 5]	$y'(0) = 0$	$y(0) = 3$
29	$y'' + \sin^3 x \cdot y = y'$	[0, 3]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 2$
30	$y'' + (2x + 3)y' = 3^x x^2$	[0, 4]	$y'(0) = 1$	$y(0) = 1$

68.13. Решение краевой задачи

Рассмотрим решение краевой задачи (68.48), (68.49) для уравнения второго порядка методом прогонки, описанным в разделе 68.6.2, в рамках компьютерных пакетов MathCad и Maxima.

Для проверки работоспособности разработанных программ рассмотрим тестовую краевую задачу, имеющую аналитическое решение

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) + y'(0) = 1, \\ y'(1) = 2e^2. \end{cases}$$

Уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение поставленной задачи можно легко получить:

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{3}{7} \right) e^{2x}.$$

В данной задаче $p(x) = -4$, $q(x) = 4$, $F(x) = e^{2x}$, $\alpha_a = 1$, $\beta_a = 1$, $\alpha_b = 1$, $\beta_b = 0$, $\gamma_a = 1$, $\gamma_b = 2e^2$.

Приведем программу с достаточным числом комментариев, заключенных в прямоугольные блоки. При написании программы комментарии можно пропустить.

Вычислительная программа на MathCad.

```
/*Начало программы.*/
/*Коэффициенты, задающие краевые граничные условия.*/
αa := 1 αb := 1 βa := 1 βb := 0 γa := 1 γb := 2 · e2
/*Функции, задающие уравнение y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x).*/
p(x) := -4 q(x) := 4 F(x) := e2·x
/*Параметры сетки.*/
a := 0 b := 1 n := 10 h :=  $\frac{b-a}{n}$ 
/*Ранжированные вектора, используемые для организации циклов.*/
i := 0..n j := 1..n k := n - 1..0
/*Вычисление вектора узловых координат сетки.*/
xi := a + h · i
/*Вычисление векторов a, b, c и f, являющихся коэффициентами системы линейных алгебраических уравнений (68.52).*/
ai := 2 - p(xi) · h bi := 2 · h2 · q(xi) - 4 ci := 2 + p(xi) · h
```

$$f_i := 2 \cdot h^2 \cdot F(x_i) \quad b_0 := \beta a \cdot h - \alpha a \quad c_0 := \alpha a$$

$$f_0 := \gamma a \cdot h \quad a_n := -\alpha b \quad b_n := \beta b \cdot h + \alpha b \quad f_n := \gamma b \cdot h$$

*/*Прямой ход метода прогонки.*/*

*/*Вычисление прогоночных коэффициентов.*/*

$$L_0 := -\frac{c_0}{b_0}, \quad K_0 := \frac{f_0}{b_0}$$

$$L_j := \frac{-c_j}{a_j \cdot L_{j-1} + b_j}, \quad K_j := \frac{f_j - a_j \cdot K_{j-1}}{a_j \cdot L_{j-1} + b_j}$$

*/*Обратный ход метода прогонки.*/*

$$y_n := K_n \quad y_k := L_k \cdot y_{k+1} + K_k$$

*/*Теоретическое решение.*/*

$$yt(t) := \left(0.5 \cdot t^2 - \frac{2}{7} \cdot t + \frac{3}{7}\right) \cdot e^{2 \cdot t}$$

*/*Конец программы.*/*

Вычислительная Махима-программа

*/*Начало программы.*/*

(%i1) numer:true\$

*/*Коэффициенты, задающие краевые граничные условия.*/*

(%i2) aa:1\$ ab:1\$ ba:1\$ bb:0\$ ga:1\$ gb:2*\$e^2\$

*/*Функции, задающие уравнение.*/*

%i8) f(x):=exp(2*x)\$ p(x):=-4\$ q(x):=4\$

*/*Параметры сетки.*/*

(%i11) a:0\$ b:1\$ N:10\$ h:(b-a)/N\$

*/*Создание векторов, используемых для хранения данных.*/*

(%i15) array(X,N)\$ array(Y,N)\$

*/*Вектора для хранения коэффициентов трехдиагональной ленточной системы.*/*

(%i17) array(A,N)\$ array(B,N)\$ array(C,N)\$ array(F,N)\$

*/*Массивы для хранения прогоночных коэффициентов.*/*

(%i21) array(L,N)\$ array(K,N)\$

*/*Вычисление вектора узловых координат.*/*

(%i23) for i:0 while i<=N do X[i]:a+h*i;

*/*Вычисление векторов a, b, c и f, являющихся коэффициентами системы линейных алгебраических уравнений (68.52).*/*

(%i24) for i:0 while i<=N do (

A[i]:2 - p(X[i])*h,

```

        B[i]:2*h^2*q(X[i])-4,
        C[i]:2 + p(X[i])*h,
        F[i]:2*h^2*f(X[i])
    );
(%i25) B[0]:ba*h - aa; C[0]:aa; F[0]:ga*h;
(%i28) A[N]: -ab; B[N]:bb*h + ab; F[N]:gb*h;
/*Вычисление прогоночных коэффициентов. (Прямой ход метода
прогонки.)*/
(%i31) L[0]: -C[0]/B[0]; K[0]:F[0]/B[0];
(%i33) for i:1 while i<=N do (
        s : A[i]*L[i-1] + B[i],
        L[i] : -C[i]/s,
        K[i] : (F[i] - A[i]*K[i-1])/s
    );
/*Обратный ход метода прогонки.*/
(%i34) Y[N]:K[N];
(%i35) for i:N-1 step -1 while i>=0 do
        Y[i] : L[i]*Y[i+1] + K[i];
/*Теоретическое решение.*/
(%i36) yt(x):=(0.5*x^2 - 2/7*x + 3/7)*exp(2*x);
(%i37) xy : makelist([X[i], Y[i]], i, 0, N);
/*Команда для вывода графика решения по методу прогонки Y и тео-
ретического решения YT.*/
(%i38) wxplot2d([[discrete, xy], yt(x)],
    [x,0,1],[style,[linespoints,1,1,1],[line,4,2]],
    [legend,"Y","YT"],[gnuplot_preamble,"set grid;"],
    [xlabel,"x"], [ylabel,"Y,YT"]]);
/*Конец программы.*/

```

Для сравнения результатов, полученных по программе с теоретическими результатами, построим графики аналитического и численного решений. Численное решение получено при достаточно грубой сетке $N = 10$. Следует отметить, что уже при $N = 40$ графики совпадают. При решении практических задач необходимо удваивать значение параметра N до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{i \in [0, N]} |y_{2i}^N - y_i^{N/2}| < \varepsilon,$$

где ε – точность решения.

Самостоятельная работа

Методом прогонки решить краевую задачу для заданного уравнения второго порядка.

N	Дифференциальное уравнение	$[a, b]$	Граничные условия	
			$x = a$	$x = b$
1	$y'' + \ln x \cdot y' + \sin x \cdot y = x \operatorname{tg} 0, 2x$	$[1, 4]$	$y' + 3y = 1$	$y = 0$
2	$y'' + \sqrt{x^2 + 2} \cdot y' + 2^{-x}y = \sin^2 x$	$[-1; 2]$	$y' = 1$	$y = 1$
3	$y'' + (5x - 1)y' - \sqrt[3]{x^4 + 4} \cdot y = x^4$	$[1; 5]$	$y' + 3y = 1$	$y' = -2$
4	$y'' + 3 \cos^2 x \cdot y' - 4^x y = x^4 \sin x$	$[-3; 3]$	$y' = 1$	$y = 5$
5	$y'' - x \operatorname{tg} 0, 5x \cdot y' + x^4 y = x$	$[0; 2]$	$y' + 2y = 0$	$y = 5$
6	$y'' - 3^x \cdot y' + (2x^2 + 1)y = xe^x$	$[-2; 2]$	$y' - 2y = 20$	$y' = 1$
7	$y'' + \operatorname{ctg} 0, 5x \cdot y' - x^4 y = x \lg x$	$[1; 2]$	$y' + 5y = 10$	$y = 100$
8	$y'' - \lg^2(4x^2 + 3)y' + x \sin^2 x \cdot y = x^2$	$[0; 4]$	$y = 10$	$y = 100$
9	$y'' + \arcsin 0, 1x \cdot y' - y \cdot x = x^2$	$[-2; 2]$	$y' + 3y = 10$	$y' = 10$
10	$y'' - \log_4(x^2 + 3)y' + x^2 y = 4^x$	$[-2; 2]$	$y' + y = -9$	$y' = 10$
11	$y'' + x\sqrt{x^4 + 1} \cdot y' - 3^{0,5x}y = e^{-x}$	$[-1; 8]$	$y = 0$	$y' = -5$
12	$y'' + 2^x \cdot y' - \lg(x^2 + 1) \cdot y = e^{2x}$	$[0; 3]$	$y' + y = 0$	$y = 0$
13	$y'' - \arcsin 0, 1x \cdot y' - y = 2x^2$	$[-2; 3]$	$y' + y = -2$	$y = 10$
14	$y'' - \log_2(x^2 + 4) \cdot y' + 2^x y = x^2$	$[-1; 4]$	$y' + 2y = 0$	$y' = -1$
15	$y'' + (3x^2 + 4)y' + e^{2x}y = 2 \cos^2 x$	$[0; 2]$	$y' = -10$	$y = 10$
16	$y'' + \lg x \cdot y' + \sin^2 x \cdot y = x^2 \operatorname{tg} 0, 1x$	$[1; 4]$	$y' + 2y = 1$	$y = -2$
17	$y'' + \sqrt[4]{x^2 + 2} \cdot y' + 3^{0,1x}y = \cos^4 x$	$[-1; 2]$	$y' = -10$	$y = -3$
18	$y'' + 5x^2 y' - \sqrt[3]{x^4 + 4} + 4y = \lg^2 x$	$[1; 10]$	$y = -10$	$y' = 2$
19	$y'' - x^2 \operatorname{tg} 0, 5x \cdot y' - (x^4 + x)y = x^4$	$[0; 2]$	$y = 10$	$y' = 9$
20	$y'' + x \log_2(x^2 + 3)y' - 4x^3 y = x$	$[-1; 3]$	$y' = 1$	$y = 1$
21	$y'' - x3^{0,5x}y' + 4xy = x^4 + \sin^2 x$	$[-3; 4]$	$y' - 3y = 1$	$y = 0$
22	$y'' + \log_2(x^2 \cos x + 1)y' + x^4 y = 1$	$[-2; 2]$	$y = 10$	$y' = 10$
23	$y'' - \lg^2(5x^2 + 1) \cdot y' + x^2 \cdot y = x^4$	$[1; 4]$	$y = 2$	$y' = -2$
24	$y'' + \arcsin^2(0, 2x^2) \cdot y' - 0, 1x^2 y = x$	$[-2; 2]$	$y' + 4y = 1$	$y = -2$
25	$y'' - \log_5(x^2 + 4) \cdot y' + x^2 y = 3 + 2^x$	$[-1; 3]$	$y' + 2y = 2$	$y' = -3$
26	$y'' + \sqrt[3]{3x^2 + 4} \cdot y' + \sqrt{4x + 6} \cdot y = x^2$	$[-1; 3]$	$y' = -1$	$y = 2$
27	$y'' + x\sqrt{x^2 + 7} \cdot y' + (x^2 + 7) \cdot y = x^2$	$[2; 3]$	$y' + 3y = 3$	$y = 2$
28	$y'' - x^4 y' + 2^x y = \lg^2(x^2 + 2x + 7)$	$[-2; 4]$	$y = 10$	$y' = -2$
29	$y'' + (3x^2 + 1)y' + e^x y = 3 \sin^2 x$	$[0; 4]$	$y' + 2y = -1$	$y = 0$
30	$y'' + (4x^2 + 3)y' + (2^x + x)y = xe^x$	$[-1; 2]$	$y' - y = 1$	$y = -2$

ГЛАВА XI

Дифференциальные уравнения в частных производных

Лекция 69. Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Решение дифференциальных уравнений первого порядка. Основные понятия и определения. Решение квазилинейных уравнений первого порядка. Задача Коши. Смешанная задача. Уравнение переноса

69.1. Основные понятия

При исследовании многих физических процессов часто приходится решать дифференциальные уравнения. Они могут включать как обыкновенные, так и частные производные в зависимости от того, является подлежащая определению величина функцией одного или нескольких аргументов. Глава X второй части настоящего учебного пособия посвящена решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной главе мы будем, в основном, рассматривать дифференциальные уравнения с частными производными, которые нашли широкое применение при рассмотрении различного рода физических процессов. Такие уравнения принято называть уравнениями математической физики. Приведем несколько примеров дифференциальных уравнений с частными производными:

$$z \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = (x - y)z; \quad (69.1)$$

$$xz \frac{\partial U}{\partial x} = yU^2; \quad z \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = z; \quad (69.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} = yz; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad (69.3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^3 = 0; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z^2; \quad (69.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial y \partial z^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 = z^3; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (69.5)$$

Решением уравнения в частных производных называется функция, которая при подстановке её и всех её производных в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

В уравнениях (69.1)–(69.5), написанных слева, неизвестная функция U зависит от аргументов x, y, z : $U = U(x, y, z)$; в представленных справа уравнениях (69.1)–(69.5) неизвестная функция z зависит от аргументов x и y : $z = z(x, y)$.

Порядком уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных от неизвестной функции.

Уравнения (69.1), (69.2), (69.3) — первого порядка, уравнения (69.4) — второго порядка, а уравнения (69.5) — третьего порядка.

Уравнение называется *линейным*, если его левая и правая части линейно зависят¹ от неизвестной функции и её производных.

В приведённых примерах уравнения (69.1) являются линейными.

Уравнение называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно старших производных неизвестной функции, а коэффициенты при них, вообще говоря, зависят от искомой функции или производных низшего порядка.

Любое линейное уравнение будет, очевидно, и квазилинейным. Однако квазилинейные уравнения в общем случае не являются линейными. Например, уравнения (69.2), (69.4) являются квазилинейными, не будучи линейными.

Рассмотрим несколько простейших примеров.

ПРИМЕР 69.1. Проверить, является ли функция

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2} \text{ решением уравнения } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

¹Зависимость $f\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots\right)$ называется линейной относительно функции U и её частных производных, если она имеет следующий вид:

$$f\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots\right) = a_1(x, y, z) \cdot U + a_2(x, y, z) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + a_3(x, y, z) \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \dots,$$

где коэффициенты $a_i(x, y, z)$ не зависят от функции U и её производных.

Р е ш е н и е: Найдем частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Поскольку полученная частная производная не равна нулю тождественно (при всех x и y), данная функция не является решением уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Если решение уравнения является неявной функцией, оно называется *интегралом уравнения с частными производными*.

ПРИМЕР 69.2. Проверить, является ли функция $z = z(x, y)$, заданная неявно: $xz - \ln(yz) = 1$, интегралом уравнения:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Р е ш е н и е: Напомним, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, определяются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{при} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0. \quad (69.6)$$

В данном примере: $F(x, y, z) = xz - \ln(yz) - 1$, поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x - \frac{y}{yz}} = \frac{z^2}{1 - xz}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-\frac{z}{yz}}{x - \frac{y}{yz}} = \frac{z}{y(xz - 1)}.$$

Подставляя полученные производные в левую часть проверяемого равенства, получаем:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{z^2}{1 - xz} + z \frac{z}{y(xz - 1)} = 0,$$

т. е. данная функция является интегралом приведённого уравнения.

В исключительных случаях простейшие уравнения в частных производных можно решить *непосредственным интегрированием*. При

этом необходимо учитывать, что общее решение уравнений в частных производных будет зависеть уже от произвольных функций, а не от произвольных постоянных, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Это видно из рассмотрения уравнений, содержащих лишь частные производные по одному из аргументов:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= f(x, y, z) \Rightarrow U = \int f(x, y, z) dx + F(y, z); \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= f(x, y, z) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \int f(x, y, z) dx + F(y, z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow U = \int \left(\int f(x, y, z) dx \right) dx + F(y, z)x + \Phi(y, z).\end{aligned}$$

Здесь малой буквой f обозначается заданная функция, а большими F и Φ — произвольные функции. Следовательно, общее решение уравнения в частных производных 1-го порядка должно содержать одну произвольную функцию, 2-го — две и т.д.

ПРИМЕР 69.3. Решить уравнение $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$.

Р е ш е н и е:

Последовательно интегрируя уравнение по переменным x и y , получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \int 0 \cdot dx + \Phi_1(y) = \Phi_1(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow U = \int \Phi_1(y) dy + F(x) = \Phi(y) + F(x).\end{aligned}$$

Таким образом, решением данного уравнения будет функция: $U(x, y) = \Phi(y) + F(x)$, где F и Φ произвольные функции одной переменной. Нетрудно проверить это и непосредственно:

$$U(x, y) = \Phi(y) + F(x) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \Phi'(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi'(y)) = 0.$$

Таким образом, *общее решение* дифференциальных уравнений в частных производных определяется с точностью до произвольных функций, а следовательно, содержит в себе бесчисленное множество решений. Чтобы выделить какое-либо одно из решений, надо поставить *дополнительные условия*. Этими условиями, как правило, являются так называемые начальные или граничные условия.

Совокупность дифференциальных уравнений и поставленных дополнительных условий назовем *дифференциальной задачей*. При этом дополнительные условия должны соответствовать типу уравнений и

их малые изменения должны вызывать соответственно малые изменения решения задачи во всей области, где оно ищется, то есть решение задачи должно *непрерывно зависеть от дополнительных условий*. Дифференциальная задача, имеющая единственное решение, непрерывно зависящее от дополнительных условий, называется *корректно поставленной*. Мы будем рассматривать в качестве примеров только корректно поставленные задачи. Исследование корректности само по себе представляет важную и сложную задачу, выходящую за рамки данной работы.

Итак, для нахождения единственного решения конкретной дифференциальной задачи необходимо определить произвольные функции, входящие в общее решение из заданных дополнительных условий. В случаях, когда общее решение найти невозможно, решение конкретной дифференциальной задачи ищется с помощью численных методов.

69.2. Общее и частное решение квазилинейных уравнений первого порядка

Квазилинейным уравнением первого порядка или уравнением первого порядка, линейным относительно производных, называется уравнение вида:

$$a_1(x_1, \dots, x_n, U) \frac{\partial U}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, U) \frac{\partial U}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, U). \quad (69.7)$$

Покажем, что общее решение этого уравнения может быть получено с помощью некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Причём в случае двух переменных этот процесс решения имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть некоторая искомая функция $z = z(x, y)$ зависит от двух аргументов. В этом случае уравнение (69.7) примет вид:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (69.8)$$

Функции P , Q , R считаем непрерывными в рассматриваемой области и не равными нулю одновременно. Рассмотрим векторное поле с координатами P , Q , R :

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \quad (69.9)$$

Напоминание: При изучении функций нескольких переменных (лекция 58) было установлено, что векторные линии этого поля, т.е. линии, касательные к которым в каждой точке имеют направление вектора \vec{F} , определяются из условия коллинеарности вектора

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k},$$

касательного к этим линиям, и вектора поля \vec{F} :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (69.10)$$

Поверхности, составленные из векторных линий, называются векторными поверхностями или векторными трубками (см. рис. 31).

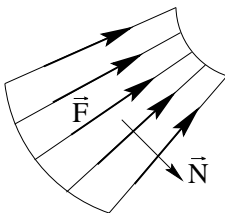


Рис. 31. Векторные трубки

Векторная поверхность определяется тем, что её вектор нормали \vec{N} в любой точке ортогонален вектору поля \vec{F} . Условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{N} \cdot \vec{F} = 0.$$

Если векторная поверхность задаётся уравнением $z = f(x, y)$, то, как известно, вектор нормали имеет координаты:

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$; а следовательно, $\vec{N} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} - \vec{k}$ и условие $\vec{F} \cdot \vec{N} = 0$ принимает вид:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} - R(x, y, z) = 0,$$

т.е. $z = f(x, y)$ удовлетворяет уравнению (69.8).

Таким образом, геометрически решение квазилинейного уравнения (69.8) означает нахождение уравнения семейства векторных поверхностей поля (69.9), задаваемого коэффициентами исходного уравнения. Эти поверхности называются *интегральными поверхностями* уравнения (69.8).

Так как векторные поверхности могут быть составлены из векторных линий, то правило решения уравнения (69.8) состоит в следующем:

- (1) Составляем систему (69.10) обыкновенных дифференциальных уравнений векторных линий, называемую *характеристической системой*.
- (2) Находим два независимых первых интеграла² этой системы:

$$\psi_1(x, y, z) = C_1, \quad \psi_2(x, y, z) = C_2, \quad (69.11)$$

называемых *уравнениями характеристик* системы (69.10). Это есть двухпараметрическое семейство уравнений векторных линий.

- (3) Выделяем произвольным образом однопараметрическое семейство, устанавливая произвольную зависимость между параметрами C_1 и C_2 : $\Phi(C_1, C_2) = 0$, где Φ — произвольная функция двух переменных.
- (4) Исключая из этой зависимости параметры C_1 и C_2 , получаем искомое уравнение семейства векторных поверхностей:

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0. \quad (69.12)$$

Таким образом найден *общий интеграл* исходного уравнения, зависящий от одной произвольной функции Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 69.1. Если векторная поверхность $z = f(x, y)$ задается в неявном виде уравнением $U(x, y, z) = 0$, то вектор нормали имеет следующие координаты: $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ и условие $\vec{F} \cdot \vec{N} = 0$ принимает вид:

$$P(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (69.13)$$

²Напомним, что первым интегралом системы дифференциальных уравнений (69.10) называется её решение, заданное в виде неявной функции.

Используя формулы (69.6), уравнение (69.8) легко привести к уравнению (69.13). Следовательно, приведённое правило позволяет также интегрировать линейные однородные уравнения (69.13).

ПРИМЕР 69.4. Решить уравнение $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$, где a, b, c — постоянные.

Решение: Составляем характеристическую систему (69.10):

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Выбираем два независимых дифференциальных уравнения

$$bdx = ady \quad \text{и} \quad cdx = adz.$$

Интегрируя, получаем, что первые интегралы, т.е. уравнения характеристик, имеют вид:

$$bx - ay = C_1 \quad \text{и} \quad az - cx = C_2.$$

Общий интеграл исходного уравнения получается в виде $\Phi(bx - ay, az - cx) = 0$, где Φ — произвольная функция.

В разрешённом относительно z виде общий интеграл будет иметь вид: $z = \frac{cx}{a} + \varphi(bx - ay)$, где φ — произвольная функция.

Однако интегрируемая комбинация дифференциальных уравнений легко находится не во всех примерах. Иногда следует воспользоваться известным свойством пропорций.

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = t$, то при любых k_1, k_2, \dots, k_n будет

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = t.$$

ПРИМЕР 69.5. Решить уравнение: $(z+y-x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Решение: Составляем характеристическую систему:

$$\frac{dx}{z+y-x} = \frac{dy}{z+x-y} = \frac{dz}{z}.$$

Две интегрируемые комбинации получаются следующим образом:

$$\frac{dx + dy}{2z} = \frac{dz}{z} \Rightarrow d(x+y) = 2dz \Rightarrow x+y = 2z + C_1 \Rightarrow x+y-2z =$$

$$= C_1 \Rightarrow \frac{-dx + dy}{2(x-y)} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = -2 \frac{dz}{z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|x-y| = -2 \ln|z| + \ln C_2 \Rightarrow (x-y)z^2 = C_2.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$\Phi(x+y-2z, (x-y)z^2) = 0.$$

Для определения частного решения уравнения (69.8) необходимо задать дополнительные условия в виде:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \quad (69.14)$$

Уравнения (69.14) определяют линию в пространстве, являющуюся пересечением поверхностей, задаваемых этими уравнениями.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (69.8), удовлетворяющего условиям (69.14), называется задачей Коши.

Геометрически решение уравнения (69.8) вместе с условиями (69.14) означает нахождение векторной поверхности, проходящей через линию, определяемую уравнениями (69.14). В этом случае после составления системы (69.10) и нахождения характеристик (69.11) из системы уравнений (69.11) и (69.14):

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y, z) = C_1, \\ \Psi_2(x, y, z) = C_2, \\ \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (69.15)$$

исключаем переменные x, y, z и находим зависимость между C_1 и C_2 : $\Phi_0(C_1, C_2) = 0$.

Здесь Φ_0 — конкретная (не произвольная) функция. Частное решение уравнений (69.8), удовлетворяющее условиям (69.14), получится после исключения постоянных C_1 и C_2 с помощью первых интегралов (69.11):

$$\Phi_0(\Psi_1(x, y, z), \Psi_2(x, y, z)) = 0. \quad (69.16)$$

Для задачи Коши справедлива следующая теорема существования и единственности:

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности заданной кривой $\Phi_1(x, y, z) = 0, \Phi_2(x, y, z) = 0$, если эта кривая имеет непрерывно вращающуюся касательную и нигде не касается характеристик. Интегральная поверхность (решение задачи Коши) образуется из характеристик, пересекающих заданную кривую.

ПРИМЕР 69.6. Найти решение уравнения $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, удовлетворяющее условиям: $x = 0$, $z = y^2$. (Решить задачу Коши.)

Р е ш е н и е: Составляем характеристическую систему:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \\ dz = 0. \end{cases}$$

Интегрируя, находим уравнения характеристик

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1, \\ z = C_2. \end{cases}$$

Добавляем к этим двум уравнениям два заданных дополнительных условия

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1, \\ z = C_2, \\ x = 0, \\ z = y^2. \end{cases}$$

Последовательно исключаем из этой системы уравнений переменные x , y и z получаем одно уравнение $C_1 = C_2$. Следовательно: $z = x^2 + y^2$.

Таким образом, искомая векторная поверхность является параболоидом. Подставляя полученное решение в заданное дифференциальное уравнение и дополнительные условия, легко проверить правильность решения задачи.

ПРИМЕР 69.7. Найти решение уравнения $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$, удовлетворяющее условиям: $x = 0$, $z = f(y)$.

Р е ш е н и е: В примере 69.4 были найдены первые интегралы $bx - ay = C_1$ и $az - cx = C_2$. Добавляем к этим двум уравнениям два дополнительных условия $x = 0$, $z = f(y)$ получаем систему четырёх уравнений с пятью неизвестными. Исключая из полученной системы

три переменные x, y, z , получим одну зависимость между переменными C_1 и C_2 , $af(-C_1/a) = C_2$. Подставляя в эту зависимость значения C_1 и C_2 , получаем $af\left(\frac{ay - bx}{a}\right) = az - cx$.

Откуда решение данной задачи в явном виде:

$$z = \frac{c}{a}x + f\left(y - \frac{b}{a}x\right),$$

где f — заданная функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 69.2. Задача решения уравнения (69.8) при дополнительных условиях (69.14) станет неопределённой, если заданная линия является характеристикой уравнения (69.8) или касается характеристик.

Если требуется найти векторную поверхность, проходящую через линию, заданную параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t), \quad (69.17)$$

то зависимость $\Phi_0(C_1, C_2) = 0$ определяется подстановкой (69.17) в (69.11) и исключением параметра t из получившейся системы.

ПРИМЕР 69.8. Найти интегральную поверхность уравнения $\frac{z}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, проходящую через линию: $x = t, y = t, z = (2t^2 - 1)^{1/2}$.

Решение:

$$\frac{xdx}{z} = \frac{-ydy}{z} = \frac{dz}{1} \Rightarrow \frac{xdx}{z} = -\frac{ydy}{z} \quad \text{и} \quad -\frac{ydy}{z} = \frac{dz}{1}.$$

Интегрируя, получаем уравнения характеристик:

$$x^2 + y^2 = C_1 \quad \text{и} \quad y^2 + z^2 = C_2.$$

Подставив вместо x, y, z их выражения через t , получим:

$$t^2 + t^2 = C_1 \quad \text{и} \quad t^2 + (2t^2 - 1) = C_2.$$

Выразим t^2 из первого и второго уравнений:

$$t^2 = \frac{1}{2}C_1, \quad t^2 = \frac{1}{3}(C_2 + 1).$$

Приравнявая, получаем зависимость между C_1 и C_2 :

$$\frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{3}(C_2 + 1).$$

Откуда на основании уравнений характеристик получаем частное решение исходного уравнения:

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{3}(y^2 + z^2 + 1) \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z^2 = 1.$$

Интегральной поверхностью является однополостный гиперболоид.

Квазилинейное дифференциальное уравнение (69.8) относится к так называемым уравнениям *эволюционного типа*. В уравнениях этого типа может быть выделено направление, в котором происходит развитие процесса.

В задачах естествознания такую роль часто играет время, поэтому перепишем уравнение (69.8) в виде:

$$P(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial t} + Q(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = R(t, x, u). \quad (69.18)$$

В этом уравнении переменные означают: t — время, x — пространственную переменную, u — искомую функцию.

Дополнительные условия, ставящиеся для нахождения решения конкретной задачи, описываемой уравнением (69.18), разделяются на *начальные* и *краевые (граничные)*.

Начальные условия состоят в задании в какой-либо момент времени, чаще всего при $t = 0$, значений искомой функции.

Краевые (граничные) условия заключаются в том, что указываются значения этой функции на какой-либо границе области, в которой ищется решение дифференциальной задачи. Задача, в которой заданы только начальные условия называется *задачей Коши*. Если задаются и начальные, и краевые условия, то соответствующая дифференциальная задача называется *смешанной*.

Рассмотрим однородное уравнение с постоянными коэффициентами $P = a > 0$, $Q = b > 0$, $R = 0$:

$$a \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (69.19)$$

Из примера 69.7 имеем, что решение этого уравнения представляет собой бегущую вправо со скоростью $V = \frac{b}{a}$ волну³:

$$u = f\left(x - \frac{b}{a}t\right). \quad (69.20)$$

На основании (69.20) можно утверждать, что корректно поставленными задачами для уравнения (69.19) являются:

ЗАДАЧА I. *Задача Коши* или задача только с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (69.21)$$

ЗАДАЧА II. *Смешанная задача Коши*, включающая начальные условия:

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad 0 \leq x < +\infty; \quad (69.22)$$

и граничные условия

$$u(t, 0) = f_0(x), \quad t > 0. \quad (69.23)$$

Из рис. 32,а видно, что в задаче Коши значения искомой функции в верхней полуплоскости $t > 0$ определяются как решение уравнения (69.19) при заданных значениях функции u на оси x . В смешанной задаче (рис. 32, б) значения искомой функции в первом квадранте ($t > 0, x > 0$) определяются как решение уравнения (69.19), удовлетворяющее начальным условиям на оси x и граничным на оси t .

Наклонными линиями на рисунках изображены характеристики $x - (b/a)t = C = \text{const}$. Как видно из решения (69.20), на характеристике значение функции u сохраняется постоянным и равным соответствующему значению u на оси x или оси t . Таким образом, начальные данные, заданные на отрезке $[x_0, x_1]$, или смешанные данные, заданные на отрезках $[0, x_1]$ и $[0, t_0]$, сносятся вдоль характеристик в область D , в которой ищется решение. Если в задаче Коши вне отрезка $[x_0, x_1]$, а в смешанной задаче вне отрезков $[0, x_1]$ и $[0, t_0]$ функции $\varphi(x) = 0$ и $\psi(t) = 0$, то в области D в первой задаче функция u также будет равна 0 выше характеристики $x - (b/a)t = x_0$ и ниже характеристики

³ Действительно, график функции $f\left(x - \frac{b}{a}t\right)$ получается из графика функции $f(x)$ сдвигом его вправо на величину $\frac{b}{a}t$, т.е. перемещением его вправо со скоростью $\frac{b}{a}$.

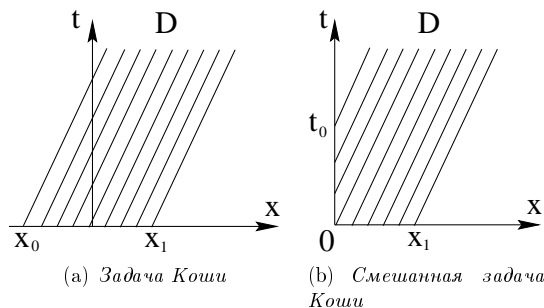


Рис. 32. Характеристики задачи Коши

$x - (b/a)t = x_1$, а во второй задаче соответственно выше характеристики $x - (b/a)t = -(b/a)t_0$ и ниже характеристики $x - (b/a)t = x_1$.

Если же уравнение (69.18) является неоднородным с постоянными коэффициентами

$$a \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = c, \quad (69.24)$$

то из примера 69.7 имеем решение

$$u = \frac{c}{a}t + f\left(x - \frac{b}{a}t\right),$$

то есть на характеристике $x - (b/a)t = \text{const}$ остаётся постоянной величина $u - (c/a)t$, а сама функция u меняется.

Уравнение (69.18) в физике принято называть квазилинейным *уравнением переноса*. Уравнение переноса описывает различные процессы, связанные с распространением частиц в веществе.

Практическое занятие 69. Решение уравнений первого порядка

Разберите решение примеров, приведённых в лекции 68, и выполните самостоятельную работу.

Самостоятельная работа

Проверьте, является ли данная (написана слева) функция решением уравнения (написано справа):

ПРИМЕР 69.1. $z = y \ln(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

ПРИМЕР 69.2. $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

ПРИМЕР 69.3. $u = \cos(x - y) + \ln(x + y)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

ПРИМЕР 69.4. $u = \arcsin(x + ay)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial x}$.

ПРИМЕР 69.5. $u = e^t \sin x$; $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

ПРИМЕР 69.6. $u = \cos(xy) + y^2$; $u''_{xx} + u'_y + y^2 u = y^4$.

Проверьте, является ли функция $z = z(x, y)$, заданная неявно (написана слева), интегралом дифференциального уравнения (написанного справа).

ПРИМЕР 69.7. $z^2 x - yz + x^2 = 0$; $z''_{xy}(2xz - y) + 2xz'_x z'_y + 2zz'_y = z'_x$.

ПРИМЕР 69.8. $\frac{z}{y} - \frac{x}{z} = 1$; $z''_{xy} - z'_x + z'_y = 1$.

Решите уравнения методом непосредственного интегрирования.

ПРИМЕР 69.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x}{y}$.

ПРИМЕР 69.10. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 1$.

ПРИМЕР 69.11. $y \frac{\partial u}{\partial x} = x + y$.

ПРИМЕР 69.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2}{1 + y^2}.$

ПРИМЕР 69.13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y}{1 + y^2}.$

ПРИМЕР 69.14. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}.$

ПРИМЕР 69.15. $\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial z} = xze^{xy}.$

Лекция 70. Метод сеток

Введение в метод сеток. Основные понятия и определения. Решение уравнений первого порядка методом сеток. Примеры конечно-разностных схем для решения задачи Коши и смешанной задачи уравнения переноса

70.1. Введение в метод сеток

Нахождение решения дифференциальных задач для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка, описанное в предыдущем параграфе, при произвольных коэффициентах $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ возможно лишь в исключительных случаях. Наиболее же общим методом является непосредственное решение этих задач с помощью численного метода, основанного на замене дифференциального уравнения конечно-разностными уравнениями. Указанный метод получил название *метода конечных разностей* или *метода сеток*. Хотя данный метод применим и к общему квазилинейному уравнению (69.18) и даже к нелинейным уравнениям, изложение его проведем на примере уравнения с постоянными коэффициентами (69.24).

Метод сеток содержит два основных этапа.

Во-первых, область D непрерывного изменения аргументов t, x , в которой ищется решение дифференциальной задачи, заменяется конечным или бесконечным дискретным множеством точек, так называемых *узлов*. Совокупность всех узлов называется *сеткой*. Таким образом, вместо функции u , зависящей от непрерывно меняющихся

аргументов t, x , рассматривается функция, определённая в дискретных значениях t^n, x_m , определяющих узел сетки. Такие функции называются *сеточными*.

Отметим, что для временной переменной t , описывающей эволюцию процесса, в отличие от пространственной переменной x , принята верхняя индексация.

Во-вторых, производные, входящие в дифференциальные уравнения, и дополнительные условия заменяются их разностными приближениями или аппроксимациями. В итоге вместо дифференциальных уравнений получаются алгебраические, или так называемые разностные уравнения, а в целом вместо дифференциальной задачи — разностная задача.

Разностной задачей, или *разностной схемой* дифференциальной задачи, принято называть совокупность алгебраических уравнений, заменяющих дифференциальные уравнения и дополнительные условия. Количество этих уравнений определяется числом выбранных узлов сетки.

Решение дифференциальной задачи для уравнения (69.24) ищется в непрерывной области D , представляющей собой в случае задачи Коши верхнюю полуплоскость (см. рис. 32,а) и в случае смешанной задачи, первый квадрант (см. рис. 32,б). Как уже отмечалось, в методе сеток область непрерывного значения аргументов D , в которой ищется решение дифференциальной задачи, заменяется дискретным множеством узлов (*сеткой*). Будем рассматривать лишь прямоугольную сетку, узлы которой образуются при пересечении прямых, параллельных координатным осям. Расстояние между соседними узлами вдоль этих прямых назовем *шагом* по соответствующей переменной и будем считать постоянным для всей сетки. Обозначим шаг по x буквой h , шаг по t обозначим τ .

Таким образом, в рассматриваемых нами областях координаты узлов задаются в виде: $t^n = n \cdot \tau$, $x_m = m \cdot h$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Значение функции $u(t, x)$ в некотором узле (n, m) обозначим $u(t^n, x_m) = u(n\tau, mh) = u_m^n$.

Если рассматривается конечная по какой-либо переменной область D , соответствующие индексы n и m принимают на границах значения $n = 0$, $n = N$ и $m = 0$, $m = M$. Совокупность узлов, соответствующих какому-либо фиксированному n или m , назовем *слоем*. Будем всегда считать, что $\tau = \tau(h)$ есть такая функция, что $\tau \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

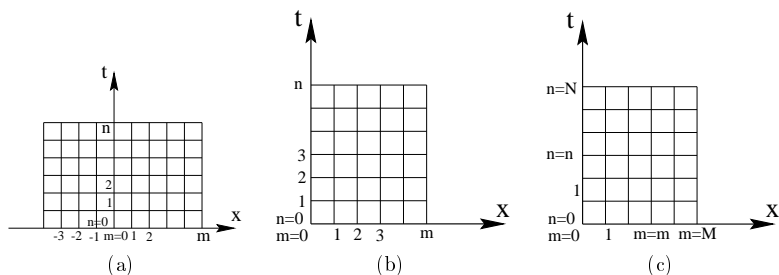


Рис. 33. Примеры сеток

В большинстве случаев $\tau = rh$, где r наперед заданная постоянная величина, называемая параметром сетки. Следовательно, введённые нами сетки (рис. 33) будут определяться одним параметром h ; обозначим их D_h .

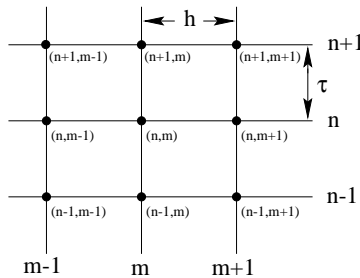
Искомые значения решения дифференциальной задачи $u(t, x)$ в узлах сетки D_h определяют сеточную функцию $[u]_h$, для приближённого вычисления которой дифференциальная задача заменяется разностной. Прежде всего рассмотрим вопрос об аппроксимации производных. Поскольку в рассматриваемое нами уравнение (69.24) входят лишь частные производные 1-го порядка, будем рассматривать аппроксимацию производных на фиксированном слое. В этом случае аппроксимация частных производных проводится по аналогии с производными функции одной переменной.

Для аппроксимации производных в каком-то узле (n, m) нужно использовать значения функции и в соседних узлах с другими индексами. Эти аппроксимации можно проводить различным образом. Рассмотрим лишь простейшие, в которых используются ближайшие узлы, окружающие точку (n, m) (рис. 34).

Будем использовать в дальнейшем следующие аппроксимации производных в узле (n, m)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + O(\tau), \quad (70.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^n = \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} + O(\tau), \quad (70.2)$$

Рис. 34. Окрестность узла сетки (t^n, x_m)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + O(\tau^2), \quad (70.3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + O(h), \quad (70.4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + O(h), \quad (70.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + O(h^2), \quad (70.6)$$

вытекающие из определения частных производных [I, (38.1)]

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau}; \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h}.$$

Значения функции в соседних с рассматриваемой точкой узлах можно определить по формуле Тейлора для функции двух переменных следующим образом :

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1} &= u_m^n + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n \tau + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^n \tau^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_m^n \tau^3 + O(\tau^4), \\
u_m^{n-1} &= u_m^n - \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^n \tau + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_m^n \tau^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_m^n \tau^3 + O(\tau^4), \\
u_{m+1}^n &= u_m^n + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n h + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n h^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n h^3 + O(h^4), \\
u_{m-1}^n &= u_m^n - \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^n h + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_m^n h^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_m^n h^3 + O(h^4).
\end{aligned} \tag{70.7}$$

Подобно тому, как это делалось для обычных производных (см. (68.15) – (68.24)), с помощью операций сложения и вычитания из формул (70.7) можно получить приведённые в (70.1)–(70.6) оценки погрешностей, возникающих при замене производных конечно-разностными соотношениями.

Разностные отношения, стоящие справа в формулах (70.1) и (70.4), называются точно так же, как и в случае аппроксимации обычных производных односторонними правыми разностными производными (или производными вперед), в формулах (70.2) и (70.5) — левыми разностными производными (или производными назад), в формулах (70.3) и (70.6) — центральными (двусторонними) разностными производными.

Пренебрегая ошибками в аппроксимации производных их конечно-разностными аналогами и заменяя последними в каждом узле сетки производные, входящие в дифференциальную задачу, получим вместо неё соответствующую разностную задачу, или разностную схему.

70.2. Задача Коши

Рассмотрим три различные конечно-разностные схемы для решения задачи Коши уравнения переноса (69.23 с начальными условиями 69.20).

1) Используем формулы (70.1) и (70.4):

$$\begin{cases} a \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + b \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = C, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ n = 0, 1, 2, \dots \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (70.8)$$

Обычно множество узловых точек с верхним индексом « $n+1$ » принято называть верхним, а с « n » — нижним временными слоями. Поскольку в (70.8) входит значение u лишь в одном узле верхнего слоя, оно явно выражается через значения функции на нижнем слое:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{b\tau}{ah}(u_{m+1}^n - u_m^n) + \frac{C\tau}{a}, \quad \begin{matrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \quad (70.9)$$

Такая схема называется явной. При известных значениях u в узлах нулевого слоя $u_m^0 = \varphi_0(x_m)$. Эта формула позволяет последовательно получить значения искомой функции в узлах на первом, втором и последующих слоях.

Совокупность узлов, используемых в разностном уравнении, заменяющем дифференциальное, принято называть *шаблоном*. В соответствии с числом используемых узлов шаблон может быть «двухточечным», «трехточечным», «четырёхточечным» и т.д. По названию шаблона и разностная схема соответственно может быть «двухточечная», «трехточечная», «четырёхточечная» и т.д. Количество слоев по t в шаблоне определяет ещё одно название (и соответственно шаблона): «двухслойная», «трехслойная» и т.д.

При аппроксимации производных в (70.8) использовались точки (n, m) , $(n, m + 1)$, $(n + 1, m)$, изображенные на рис. 35,а, в соответствии с которыми, используемый в явной двухслойной, трёхточечной разностной схеме (70.8) шаблон может быть назван «правым явным уголком».

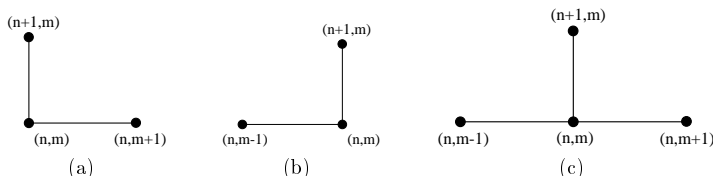


Рис. 35. Явные шаблоны конечно-разностных схем

2) Аппроксимируя уравнения (69.24) по формулам (70.1) и (70.5), получим:

$$\begin{cases} a \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + b \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = C, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (70.10)$$

Шаблон для этой также явной двухслойной, трёхточечной разностной схемы изображен на рис. 35,а и может быть назван «левым явным уголком».

3) Если в задаче I для аппроксимации производной $(\partial u / \partial x)_m^n$ взять «центральную» разность $(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) / (2h)$, т.е. воспользоваться формулой (70.6), получим следующую разностную схему, использующую двухслойный четырёхточечный шаблон, изображенный на рис. 35,с:

$$\begin{cases} a \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + b \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = C, & m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots, \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), & m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (70.11)$$

Если использовать для аппроксимации производной $(\partial u / \partial t)_m^n$ центральную разностную производную (70.3), получим трёхслойные разностные схемы, для расчёта по которым необходимо знать значения искомой функции на двух первоначальных временных слоях. У нас же функция известна на одном (нулевом) слое. Существуют приемы определения функции и на первом слое, однако мы их и, следовательно, трёхслойные схемы в этом разделе рассматривать не будем.

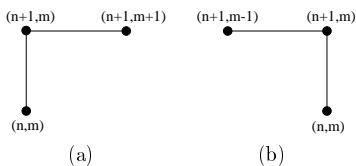


Рис. 36. Неявные шаблоны конечно-разностных схем

70.3. Смешанная задача

В этой задаче определяем начальные условия на нулевом временном слое и граничные условия на нулевом слое по x . Для её решения наряду с явными схемами (70.8–70.11) могут быть использованы ещё следующие две схемы.

4) Аппроксимируя производные в узле $n+1, m$ по формулам (70.1) и (70.4), получим

$$\begin{cases} a \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + b \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = C, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), & m = 0, 1, 2, \dots \\ u_0^n = f_0(n\tau), & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (70.12)$$

5) Используя аппроксимацию производных по формулам (70.1) и (70.5), получим

$$\begin{cases} a \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + b \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = C, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 0, 1, 2, \dots \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), & m = 0, 1, 2, \dots \\ u_0^n = f_0(n\tau), & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (70.13)$$

Здесь в отличие от явных схем (70.8–70.11) используются шаблоны (рис. 36), в которых на верхнем слое имеется не одна, а две точки и значения функции u в каждой из них не могут быть выражены только через значения u на нижнем слое. Такие схемы называются *неявными*. Шаблоны, приведённые на рис. 36, могут быть соответственно названы: “правый неявный угол” и “левый неявный угол”.

Хотя формально схемы (70.12) и (70.13) неявные, фактически при расчёте смешанной задачи Коши они ведут себя как явные.

Действительно, выразим u_{m+1}^{n+1} из (70.12):

$$u_{m+1}^{n+1} = u_m^{n+1} - \frac{ha}{b\tau}(u_m^{n+1} - u_m^n) + \frac{Ch}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя вместо номера временного слоя n значение 0, получаем формулу для вычисления значений искомой функции u на первом временном слое через решение на нулевом слое, которое определяется из начальных условий.

$$u_{m+1}^1 = u_m^1 - \frac{ha}{b\tau}(u_m^1 - u_m^0) + \frac{Ch}{b}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Затем аналогично рассчитываются значения u в узлах второго слоя и т.д.

Подобным же образом приводится решение задачи и по схеме «левый неявный уголок» (70.13).

К неявной схеме, использующей центральную разностную производную по x , относится все то, что было сказано о трёхслойной явной разностной схеме.

Практическое занятие 70. Квазилинейные дифференциальные уравнения

Решение всех типовых примеров данной темы подробно разобрано в лекции 69.

Самостоятельная работа

Найдите общий интеграл квазилинейного уравнения первого порядка:

ПРИМЕР 70.1. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$

ПРИМЕР 70.2. $y \frac{\partial u}{\partial y} - x \frac{\partial u}{\partial x} = -u.$

ПРИМЕР 70.3. $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ue^x.$

ПРИМЕР 70.4. $(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2.$

ПРИМЕР 70.5. $(x + y) \frac{\partial u}{\partial x} - (x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = ux + uy.$

ПРИМЕР 70.6. $(x + y) \frac{\partial u}{\partial y} + (x - y) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Найдите решение уравнения (написанного слева), удовлетворяющее указанным условиям (написанным справа):

ПРИМЕР 70.7. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $\begin{cases} z = 2x, \\ y = 1, \end{cases}$

ПРИМЕР 70.8. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $\begin{cases} z = x^2, \\ y = 1. \end{cases}$

ПРИМЕР 70.9. $y \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy;$ $\begin{cases} z = 0, 5y^2, \\ x = 1. \end{cases}$

ПРИМЕР 70.10. $yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy;$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$

ПРИМЕР 70.11. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = 2;$ $\begin{cases} y = z^2, \\ x = 1. \end{cases}$

ПРИМЕР 70.12. $x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y;$ $\begin{cases} y = 2z, \\ x + 2y = z. \end{cases}$

Решить уравнение переноса:

ПРИМЕР 70.13. $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - t) \frac{\partial u}{\partial t} = 2x;$ $u(x, 0) = x^2 - e^{2x}.$

ПРИМЕР 70.14. $\frac{1}{t-x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2x};$ $u(x, 0) = \ln x.$

Лекция 71. Дифференциальные и разностные операторы

Понятие о дифференциальных и разностных операторах. Сравнение сеточных функций. Сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной. Устойчивость разностных схем. Исследование устойчивости разностных схем. Условие Куранта, Фридрихса, Леви. Условие Неймана

71.1. Понятие о дифференциальных и разностных операторах. Сравнение сеточных функций

Будем записывать дифференциальные задачи в символическом операторном виде

$$Lu = f, \quad (71.1)$$

где L — заданный дифференциальный оператор, применяемый к функции u , а f — заданная правая часть, не содержащая u . Запись (71.1) включает в себя как дифференциальное уравнение, так и дополнительные условия. Для примера отметим, что в смешанной задаче Коши II под оператором L и правой частью f подразумеваются следующие выражения :

$$Lu = \begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x}, & 0 \leq x \leq +\infty, \quad 0 \leq t \leq +\infty, \\ u(0, x), & 0 \leq x < +\infty, \\ u(t, 0), & 0 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} c, \\ \varphi_0(x), & 0 \leq x < +\infty, \\ f_0(t), & 0 \leq t \leq +\infty. \end{cases}$$

В задаче Коши I в Lu и f отсутствует последняя строка и x меняется в интервале $(-\infty, +\infty)$.

По аналогии с записью (71.1) дифференциальной задачи можно и составленные для нее разностные задачи записать в символическом операторном виде

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}. \quad (71.2)$$

Здесь L_h означает символический разностный оператор, примененный к искомой сеточной функции $u^{(h)}$, $f^{(h)}$ — правая часть, не

содержащая $u^{(h)}$. Индексы h в (71.2) означают, что входящие в (71.2) выражения зависят от h .

В качестве примера приведем выражения для левой и правой частей операторного уравнения (71.2) для схемы (70.12):

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} a \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + b \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h}, & \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \\ u_m^0, & m = 0, 1, 2, \dots \\ u_0^n, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (71.3)$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} C \\ \varphi_0(mh), & m = 0, 1, 2, \dots \\ f_0(n\tau), & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Соответственно можно найти выражения для $L_h u^{(h)}$ и $f^{(h)}$ и для всех остальных рассмотренных разностных схем.

Рассмотрим теперь вопрос о сравнении сеточных функций. Пусть имеется некоторая сеточная функция $f^{(h)}$, принимающая на заданном множестве узлов (t^n, x_m) дискретные значения $f^{(h)}(t^n, x_m)$. Напомним, что мы пишем у функции f один индекс h , поскольку мы условились считать, что шаг по второй переменной $\tau = \tau(h)$, а следовательно, сетка D_h и заданные на ней сеточные функции в итоге определяются одним параметром h . Для того чтобы сравнить эту функцию с другой сеточной функцией $\varphi^{(h)}$, заданной на том же множестве узлов, нужно определить, как это сделать, по каким признакам проводить сравнение. Естественно, что способов сравнения может быть много.

Мы всегда будем проводить такое сравнение по точной верхней грани. Точной верхней гранью $\sup_{n,m} |f_h(t^n, x_m)|$ сеточной функции $f^{(h)}$ называется наибольшее значение модуля этой функции, взятого по всем узлам сетки. Введем для $\sup_{n,m} |f_h(t^n, x_m)|$ сокращённое обозначение

$$\|f^{(h)}\| = \sup_{n,m} |f_h(t^n, x_m)|. \quad (71.4)$$

Таким образом, мерой отклонения двух сеточных функций $f^{(h)}$ и $\varphi^{(h)}$ друг от друга является величина

$$\|f^{(h)} - \varphi^{(h)}\| = \sup_{n,m} |f_h(t^n, x_m) - \varphi_h(t^n, x_m)|.$$

Величина $\|f^{(h)}\|$ является обобщением абсолютной величины числа и, как можно проверить удовлетворяет соотношениям:

$\|f^{(h)} + \varphi^{(h)}\| \leq \|f^{(h)}\| + \|\varphi^{(h)}\|$, $\|\lambda f^{(h)}\| = |\lambda| \cdot \|f^{(h)}\|$, где λ — действительное число.

71.2. Сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 71.1. Решение $u^{(h)}$ разностной задачи (71.2) сходится при сгущении сетки к решению $[u]_h$ соответствующей дифференциальной задачи (71.1) с порядком h^k , если

$$\|[u]_h - u^{(h)}\| \leq ch^k, \quad c > 0, \quad k > 0. \quad (71.5)$$

При этом говорят, что разностная схема имеет k -ый порядок точности. Очевидно, что при $h \rightarrow 0$ (а на основании определения функции $\tau = \tau(h)$ и $\tau \rightarrow 0$) величина $\|[u]_h - u^{(h)}\| \rightarrow 0$, т.е. значения решения разностной задачи $u^{(h)}$ во всех узлах сетки D_h , стремятся к соответствующим значениям решения дифференциальной задачи $[u]_h$.

Как мы уже отмечали, сходимость является основным требованием, предъявляемым к разностным схемам. Естественно, что только используя для решения задачи (71.1) сходящиеся разностные схемы, можно получить при малых h и, соответственно, τ решение этой задачи с необходимой точностью. Непосредственное исследование сходимости является чрезвычайно трудной задачей и может быть проведено лишь в специально подобранных случаях, однако, как показывается в теории разностных схем, эту задачу можно свести к двум более простым, а именно к установлению аппроксимации дифференциальной задачи разностной и исследованию устойчивости последней.

Предположим, что разностная задача (71.2) имеет единственное решение $u^{(h)}$. В общем случае при подстановке в (71.2) значений сеточной функции $[u]_h$, соответствующих значениям точного решения дифференциальной задачи в узлах сетки, мы не получим тождества, поскольку $[u]_h$ лишь в исключительных случаях может совпасть с $u^{(h)}$. Уравнение (71.2) при подстановке в него $[u]_h$ будет удовлетворяться приближённо с точностью до некоторой величины $\delta f^{(h)}$, называемой ошибкой аппроксимации, или невязкой

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}. \quad (71.6)$$

Если невязка $\delta f^{(h)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, говорят, что разностная схема (71.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (71.1) на ее решении u .

Рассмотрим теперь разностную задачу (71.2) и внесём в неё какое-либо малое возмущение. Если при этом решение возмущённой разностной задачи будет незначительно отличаться от решения невозмущённой задачи, разностная схема (71.2) является устойчивой относительно малых возмущений. В теории разностных схем доказывается теорема, что если разностная задача аппроксимирует дифференциальную, а используемая разностная схема устойчива, то решение такой разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи. Таким образом, в этом случае из аппроксимации, т.е. условия

$$\delta f^{(h)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0,$$

следует сходимость $u^{(h)} \rightarrow [u]_h$ при $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$.

Итак, чтобы построить разностную схему (71.2), решение которой сходится к решению соответствующей дифференциальной задачи (71.1), нужно, чтобы, во-первых, она аппроксимировала (71.1) и, во-вторых, была устойчивой.

Приведённое предложение является содержанием основной теоремы теории разностных схем, более точно сформулированной в параграфе 68.12.2.

Рассмотрим теперь, как определяется величина невязки и дадим более точный смысл понятию аппроксимации.

71.3. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной

Дифференциальные задачи включают в себя как непосредственно дифференциальное уравнение, так и дополнительные условия. Мы заменили эти задачи конечно-разностными, при этом для каждой из задач делались различные замены. Чем же отличаются рассмотренные разностные схемы, составленные нами для одной и той же задачи? Во-первых, точностью, с которой конечно-разностная задача заменяет (приближает, аппроксимирует) дифференциальную задачу. Установить точность этого приближения можно оценив ошибку аппроксимации $\delta f^{(h)}$, входящую в (71.6). Это можно легко сделать на основании оценок аппроксимации производных в формулах (70.1–70.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 71.2. Разностная задача (71.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (71.1) на решении u с порядком h^k , если невязка $\delta f^{(h)}$ удовлетворяет соотношению

$$||\delta f^{(h)}|| \leq ch^k, \quad (71.7)$$

где $k > 0$, $c > 0$ и не зависит от h .

Напомним, что шаг по второй переменной $\tau = \tau(h)$ так что при $h \rightarrow 0$ $\tau \rightarrow 0$. Из (71.7) очевидно, что $\|\delta f^{(h)}\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Выясним, например, каков будет порядок аппроксимации разностной схемы (70.8) на решении u дифференциальной задачи Коши. В начальное условие производные не входят, следовательно, невязка определяется только различием между дифференциальным и разностным уравнением. Подставляя решение дифференциального уравнения $[u]$ в разностное уравнение (70.8) и учитывая (70.7), получим

$$a \left(\frac{\partial [u]}{\partial t} \right)_m^n + b \left(\frac{\partial [u]}{\partial x} \right)_m^n = C + O(\tau) + O(h).$$

Поскольку $[u]$ является точным решением (69.23), следовательно,

$$a \left(\frac{\partial [u]}{\partial t} \right)_m^n + b \left(\frac{\partial [u]}{\partial x} \right)_m^n = C.$$

Таким образом, разностное уравнение удовлетворяется с точностью $O(\tau) + O(h)$, т.е. решение дифференциальной задачи Коши $[u]$ удовлетворяет разностной схеме (70.8) с невязкой

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} O(\tau) + O(h) \\ 0 \end{cases}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение в рассматриваемой нами схеме приближённого решения задачи Коши аппроксимируется с первым порядком по h и по τ . А поскольку начальные условия выполняются точно, то и вся дифференциальная задача Коши аппроксимируется разностной схемой (70.8) с первым порядком по h и по τ . Все сказанное о погрешности аппроксимации полностью относится и к схеме (70.10), однако в дальнейшем мы увидим, что между этими схемами имеется принципиальное отличие. Определив подобным же образом невязку, возникающую при замене задачи Коши схемой (70.11), получим, что эта схема аппроксимирует рассматриваемую дифференциальную задачу с первым порядком по τ и вторым по h . В неявных схемах (70.12), (70.13) ошибки аппроксимации очевидно имеют тот же порядок, что и в явных (70.8), (70.10).

Итак, мы определили порядок аппроксимации всех введённых схем. Для этого было достаточно провести соответствующие оценки по формуле Тейлора всех ошибок, возникающих из-за замены производных их разностными аналогами, и определить слагаемое в задаче, имеющее наименьший порядок аппроксимации, который и определяет

порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой в целом. Гораздо сложнее обстоит вопрос с исследованием устойчивости разностных схем, к которому мы теперь переходим.

71.4. Устойчивость разностных схем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 71.3. Разностная схема (71.2) называется устойчивой, если существуют положительные числа h_0 и δ , такие что при любом $h < h_0$ и любом $\|\varepsilon^{(h)}\| < \delta$ разностная задача

$$L_h w^{(h)} = \delta f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}, \quad (71.8)$$

полученная из задачи (71.2) добавлением к правой части возмущения $\varepsilon^{(h)}$, имеет единственное решение $w^{(h)}$, отклоняющееся от решения $u^{(h)}$ невозмущённой задачи (71.2) на сеточную функцию $w^{(h)} - u^{(h)}$, удовлетворяющую оценке

$$\|w^{(h)} - u^{(h)}\| \leq C_1 \|\varepsilon^{(h)}\|, \quad (71.9)$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от h .

Это определение означает, что малое возмущение правой части задачи (71.2) приводит к малому возмущению решения $u^{(h)}$.

В теории разностных схем, как мы уже отмечали, доказывається следующая теорема: Если разностная схема (71.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (71.1) на решении u с порядком h^k и устойчива, то решение разностной задачи $u^{(h)}$ сходится с тем же порядком к решению $[u]_h$ дифференциальной задачи u

$$\|[u]_h - u^{(h)}\| \leq C \cdot C_1 h^k, \quad (71.10)$$

где C и C_1 — числа, входящие в соотношения (71.5) и (71.9).

Из этой теоремы следует также сделанный ранее вывод, что для того, чтобы установить, будет ли решение, полученное по используемой разностной схеме, сходиться к точному решению дифференциальной задачи, нужно установить, во-первых, является ли разностная схема аппроксимирующей u , во-вторых, исследовать её на устойчивость. Определить порядок аппроксимации, как мы видели, несложно. Рассмотрим теперь, как можно исследовать схему на устойчивость, т.е. проверить, как она реагирует на малые возмущения, вносимые в её правую часть $f^{(h)}$.

Разностная задача, записанная в символическом виде (71.2), включает в себя разностную аппроксимацию дифференциального уравнения и дополнительных условий. Под возмущением правой части $\varepsilon^{(h)}$ можно понимать любые малые возмущения, возникающие в каком-либо узле сетки в процессе решения задачи. Эти возмущения могут быть вызваны так называемыми ошибками округления. Действительно, любой расчёт, в том числе и на самом современном компьютере, ведется с конечным числом значащих цифр. При этом последняя из значащих цифр округляется. И следовательно, система (71.2) в любом узле сетки удовлетворяется неточно. Вызванные ошибками округления неточности могут быть приняты за возмущение $\varepsilon^{(h)}$ правой части разностной схемы (71.2). При этом неважно, где возникают ошибки, в правой части разностных уравнений или в коэффициентах оператора $L_h w^{(h)}$. Они всегда могут быть условно снесены в правую часть и включены в $\varepsilon^{(h)}$.

Таким образом, для того, чтобы определить, является ли устойчивой разностная схема, необходимо внести возмущение в процессе решения задачи и посмотреть, остаётся ли $u^{(h)}$ ограниченным или неограниченно возрастает с уменьшением шага h . В первом случае схема является нечувствительной к малым возмущениям и, следовательно, устойчивой, во втором — неустойчивой. Такое исследование, естественно, всегда может быть проведено экспериментально на машине. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений при решении рассматриваемых дифференциальных уравнений в частных производных мы имеем двумерную сетку D_h , и устойчивость схемы определяется не только количеством используемых узлов и последовательностью их включения в расчёт, но и их взаимным расположением, т.е. соотношением шагов сетки τ и h .

71.5. Исследование устойчивости разностных схем.

Условие Куранта, Фридрихса, Леви. Условие Неймана

В теории разностных схем существует необходимое условие устойчивости разностной схемы, называемое *условием Куранта, Фридрихса, Леви (КФЛ)*, заключающееся в следующем:

Для того чтобы аппроксимирующая разностная схема была устойчивой, а следовательно, её решение сходилось к решению соответствующей дифференциальной задачи, необходимо, чтобы область зависимости для разностной схемы охватывала область зависимости для дифференциального уравнения.

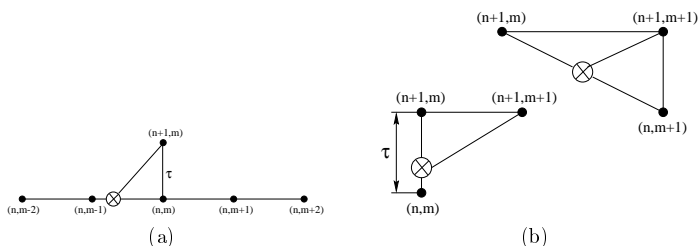


Рис. 37. Условие КФЛ

Поясним это условие на примере.

Ранее было получено общее решение линейного уравнения с постоянными переменными (69.24) в виде бегущей волны $u - (c/a)t = f(x - (b/a)t)$, согласно которому величина $u - (c/a)t$ сохраняется вдоль характеристики $x - (b/a)t = \text{const}$. И, следовательно, решение задачи в какой-либо точке (t^{n+1}, x_m) $n + 1$ -го слоя определяется значением величины $u - (c/a)t$ в той точке предыдущего слоя \otimes , через которую проходит характеристика, приходящая в рассматриваемую точку $n + 1$ -го слоя (рис. 37) (область зависимости для дифференциального уравнения). В явной схеме (70.8) решение в точке (t^{n+1}, x_m) определяется его значениями в точках (n, m) и $(n, m + 1)$ (область зависимости разностной схемы), что противоречит общему решению, и условие КФЛ не выполняется, а следовательно, схема «правый явный уголок» для уравнения (69.23) абсолютно неустойчива.

Из рис. 37,а видно, что для схемы «левый явный уголок» (70.10), если $h \leq (b/a)\tau$, то точка \otimes располагается между точками $(n, m - 1)$ и (n, m) и, следовательно, в противном случае при $h < (b/a)\tau$ схема неустойчива, так как условие КФЛ при этом не выполняется, точка \otimes , из которой приходит информация в $(n + 1, m)$, находится вне отрезка $[(n, m - 1); (n, m)]$. То же самое справедливо и для явной схемы с центральной разностью (70.11).

Рассмотрим теперь неявные разностные схемы (70.12) и (70.13), используемые для решения смешанной задачи Коши. Из рис. 37,б видно, что условие КФЛ для схемы «правый неявный уголок» (70.12) выполняется, если $h < (b/a)\tau$, и, следовательно, при $h > (b/a)\tau$ схема неустойчива. В схеме «левый неявный уголок» (70.13) точка \otimes при

любых соотношениях шагов τ/h и любых b/a находится между участвующими в расчёте точками $(n+1, m)$ и $(n, m+1)$, и, следовательно, условие КФЛ выполняется.

Разностные схемы, в которых условия КФЛ не выполняются, неустойчивы и не могут использоваться для получения решения задачи с необходимой точностью. Однако это условие является лишь необходимым, но не достаточным. Схемы, для которых условие КФЛ выполнено, могут оказаться и неустойчивыми.

Конечно, проверка схемы на устойчивость может быть проведена экспериментально после написания программы расчёта. Для этого необходимо в процессе решения задачи внести возмущение и проверить, остаётся ли оно ограниченным или неограниченно возрастает. В первом случае схема является нечувствительной к малым возмущениям и, следовательно, устойчивой, во втором — неустойчивой. Если используемая схема неустойчива, с уменьшением шага решение не будет сходиться и, как правило, будет носить колебательный характер с быстродействующей амплитудой, что приведет к так называемому переполнению значения переменных и автоматическому аварийному завершению (авосту) работы программы. Естественно, что желательно быть убеждённым заранее в устойчивости выбранной схемы до составления программы расчёта на компьютере, чтобы не тратить зря время на её составление, если используемая схема окажется неустойчивой.

Мы уже рассмотрели одно условие, позволяющее отсеивать непригодные схемы, — это условие КФЛ. Рассмотрим ещё одно так называемое условие Неймана, которое является необходимым и достаточным условием устойчивости схемы по отношению к возмущениям специального вида. И если схема оказывается неустойчивой по отношению к таким возмущениям, то она, очевидно, неустойчива и к возмущениям более общего вида, которые включают в себя данные возмущения. Разностные уравнения (70.8–70.13) являются неоднородными, а возмущение решения будет удовлетворять однородному уравнению. Действительно, если подставить вместо u_m^n в уравнения (70.8–70.13) $u_m^n + \delta u_m^n$, то поскольку u_m^n удовлетворяет уравнениям (70.8–70.13), возмущения будут удовлетворять однородным разностным уравнениям: для схемы “правый явный угол” (70.8)

$$a \frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} + b \frac{\delta u_{m+1}^n - \delta u_m^n}{h} = 0, \quad (71.11)$$

для схемы “левый явный уголок” (70.10)

$$a \frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} + b \frac{\delta u_m^n - \delta u_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (71.12)$$

для явной схемы с центральной разностью по x (70.11)

$$a \frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} + b \frac{\delta u_{m+1}^n - \delta u_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad (71.13)$$

для схемы «правый неявный уголок» (70.12)

$$a \frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} + b \frac{\delta u_{m+1}^{n+1} - \delta u_m^{n+1}}{h} = 0, \quad (71.14)$$

и, наконец, для схемы «левый явный уголок» (70.13)

$$a \frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} + b \frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_{m-1}^{n+1}}{h} = 0. \quad (71.15)$$

Зададимся возмущением специального вида

$$\delta u_m^n = \lambda^n \cdot e^{i\omega m h}, \quad (71.16)$$

где i — мнимая единица, ω — частота возмущения, λ — в общем случае комплексное число.

Очевидно, что на нулевом временном слое ($n = 0$) возмущение, определяемое формулой (71.16), является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой, равной по модулю единице:

$$\delta u_m^0 = \lambda^0 e^{i\omega m h} = \cos \omega x_m + i \sin \omega x_m. \quad (71.17)$$

Таким образом, рассматривается задача Коши с начальными данными (71.17). Подставляя (71.16) в какое-либо уравнение для возмущений (71.11–71.15), получим для определения амплитуды λ так называемое характеристическое уравнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 71.4. Разностная схема называется устойчивой по отношению к возмущениям специального вида (71.16), если при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ решение характеристического уравнения остаётся ограниченным по модулю, т.е.

$$|\lambda^n| \leq N, \quad (71.18)$$

где N — заданное число.

Равносильное (71.18) неравенство

$$|\lambda| \leq 1 + c\tau, \quad (71.19)$$

где c — постоянная, и называется условием Неймана.

Действительно, из (71.19) следует:

$$|\lambda^n| \leq (1 + c\tau)^{T/\tau} \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} (1 + c\tau)^{T/\tau} = e^{cT} \leq N$$

для любого времени $t = n\tau = T$.

Геометрически условие устойчивости Неймана означает, что множество значений λ , определяемых характеристическим уравнением для любого ω , на комплексной плоскости λ должно принадлежать кругу единичного радиуса с центром в начале координат $\lambda = 0$.

Проведем с помощью условия Неймана исследование устойчивости рассмотренных нами схем. При этом, как правило, будем считать $\tau = rh$, $r = \text{const}$.

Схема (70.8) — «правый явный угол».

Подставив (71.16) в уравнение возмущений (71.11) и сократив затем на $\lambda^n \cdot e^{i\omega mh}$, получим характеристическое соотношение для λ :

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} + b \frac{e^{i\omega h} - 1}{h} = 0.$$

Откуда при $\tau = rh$

$$\lambda(\omega) = 1 + \frac{b}{a}(r - re^{i\omega h}). \quad (71.20)$$

На комплексной плоскости λ рис. (38,а), точка, определяемая формулой (71.20), при изменении ω пробегает окружность радиуса $(b/a)r$ с центром в точке $\lambda = 1 + (b/a)r$ (пунктир) и ни при каких r не принадлежит кругу единичного радиуса. Условие Неймана не выполняется ни при каких r и, следовательно, схема (70.8) является абсолютно неустойчивой. И хотя, как мы установили ранее, она аппроксимирует дифференциальное уравнение (69.23) с первым порядком по h и τ , решение, сходящееся к решению дифференциальной задачи Коши, по этой схеме не может быть получено ни при каком соотношении шагов $r = \tau/h$. Кстати, как мы видим, для этой схемы не выполняется и необходимое условие КФЛ.

Схема (70.10) — «левый явный угол».

Подставив (71.16) в (71.12), получим характеристическое уравнение для этой схемы:

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} + b \frac{1 - e^{-i\omega h}}{h} = 0,$$

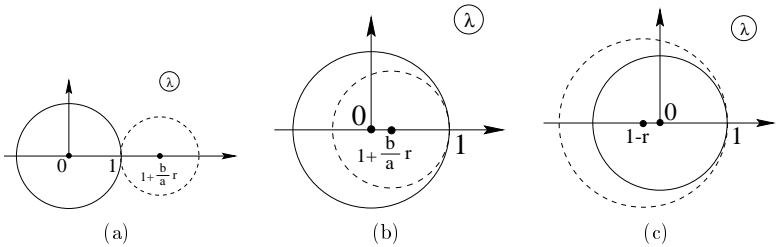


Рис. 38. Иллюстрация неустойчивости схемы «правый явный уголок» и устойчивости схемы «левый явный уголок»

решением которого при $\tau = rh$ будет

$$\lambda = 1 - \frac{b}{a}(r + re^{-i\omega h}). \quad (71.21)$$

На комплексной плоскости λ точка, определяемая формулой (71.21), при изменении ω пробегает окружность радиуса r с центром в точке: $\lambda = 1 - (b/a)r$. Очевидно, что условие Неймана (71.16) выполняется, если $(b/a)r \leq 1$, $\tau \leq (a/b)h$, (рис. 38,b), и не выполняется, если $(b/a)r > 1$, $\tau > (a/b)h$, (рис. 38,c).

Таким образом, схема (70.10) устойчива при соотношении шагов $r = (\tau/h) \leq (a/b)$ и неустойчива при $r = (\tau/h) > (a/b)$. Те же условия устойчивости этой схемы были и условно по КФЛ.

Явная схема (70.11) с центральной разностью по x .

Подставив (71.16) в (71.13) получим характеристическое уравнение для этой схемы:

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} + b \frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h} = 0,$$

или, поскольку $e^{i\omega h} - e^{-i\omega h} = 2i \sin \omega h$, (лекция 33 формула (33.23))

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} + b \frac{i}{h} \sin \omega h = 0.$$

Из этого уравнения имеем

$$\lambda = 1 - i \frac{\tau b}{ha} \sin \omega h. \quad (71.22)$$

При $(\tau/h) = r$ модуль комплексной величины λ равен:

$$|\lambda| = \sqrt{1 + r^2 \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \omega h} > 1. \quad (71.23)$$

Следовательно, для схемы (70.11) условие Неймана не выполняется ни при каком r , схема неустойчива при любом соотношении шагов $(\tau/h) = r = \text{const}$, хотя необходимое условие КФЛ выполнялось при $(\tau/h) \leq (a/b)$. Однако, если при $h \rightarrow 0$ шаг по времени изменяется пропорционально h^2 , так что $\tau = rh^2$ и, следовательно, самая далекая от $\lambda = 0$ точка (71.22) при $\omega h = \pi/2$ имеет модуль:

$$|\lambda|_{\omega h = \pi/2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau b}{ha}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} r \tau} \leq 1 + \frac{rb^2}{2a^2} \tau. \quad (71.24)$$

В (71.24) для $\sqrt{1 + (b^2/a^2) r \tau}$ мы взяли лишь два члена разложения этой функции в ряд по степеням τ . Из (71.24) видно, что условие Неймана (71.16) для схемы (70.11) оказывается выполненным при соотношении шагов:

$$\frac{\tau}{h^2} = r.$$

Это условие является более жёстким, чем $\tau/h = r$, условием на размер шага по времени τ по сравнению с шагом по пространству h . В расчётах по этой схеме для получения необходимой точности требуется использовать очень маленький шаг по времени, что, естественно, требует большого суммарного времени для решения задачи.

Перейдем теперь к рассмотрению устойчивости неявных схем.

Схема (70.12) — «правый неявный угол».

После подстановки (71.16) в (71.14) и упрощений получаем характеристическое уравнение для этой схемы

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} + b \frac{\lambda(e^{i\omega h} - 1)}{h} = 0.$$

Откуда при $\tau = rh$

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}r + \frac{b}{a}r e^{i\omega h}}.$$

После преобразований найдем, что

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4r \frac{b}{a} \left(\frac{b}{a}r - 1\right) \sin^2 \frac{\omega h}{2}}}.$$

При $(b/a)r < 1$ или $\tau < (a/b)h$ условие Неймана не выполнено, при $(b/a)r \geq 1$ или $\tau \geq (a/b)h$ — выполнено. То же самое мы имеем из условия КФЛ для этой схемы.

Схема (70.13) — «левый неявный уголок».

Характеристическое уравнение для этой схемы (после подстановки (71.16) в (71.15) и упрощений) будет

$$a \frac{\lambda - 1}{\tau} + b \frac{\lambda(1 - e^{-i\omega h})}{h} = 0.$$

Откуда

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}r - \frac{b}{a}re^{-i\omega h}}. \quad (71.25)$$

Схема абсолютно устойчива, так как

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + 2r\frac{b}{a}\sin^2\frac{\omega h}{2}\right)^2 + r^2\frac{b^2}{a^2}\sin^2\omega h}} \leq 1.$$

при любом r .

Аналогичный вывод мы имеем и по условию КФЛ.

Таким образом, рассмотрены все введённые разностные схемы для линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. С точки зрения устойчивости более предпочтительными оказались неявные схемы. В последующих разделах мы увидим, что это справедливо и для других уравнений математической физики.

Если задача нелинейная, то прежде всего проводится линеаризация, т.е. рассматриваются малые возмущения решения. В этом случае, если отбросить малые величины высших порядков, получим линейную задачу с переменными коэффициентами. Здесь обычно пользуются так называемым «принципом замораживания коэффициентов», согласно которому переменные коэффициенты сеточных уравнений заменяются их значениями в какой-либо произвольной фиксированной точке, принадлежащей расчётной области. Здесь надо рассматривать всю совокупность уравнений с постоянными коэффициентами, соответствующими различным точкам расчётной области. Если в задачу входят и краевые условия, то прежде всего рассматривают задачу без них, т.е. задачу Коши.

В результате исследование схемы производится с помощью так называемого «принципа снижения уровня сложности», который заключается в следующем: для того чтобы схема хорошо работала на каком либо уровне сложности, необходимо, чтобы она хорошо работала и на

менее сложном уровне. Задачей самого простейшего уровня сложности очевидно является задача Коши для линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Таким образом, исследованные схемы для простейших задач, описываемых линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, могут быть использованы и для более сложных задач математической физики, описываемых уравнениями первого порядка в частных производных. Разумеется, что особое внимание исследованию свойств схемы должно уделяться при создании и использовании новых разностных схем. Однако и все те, кто использует уже известные разностные схемы решения дифференциальных задач, должны быть в какой-то степени знакомы с такими чрезвычайно важными понятиями теории разностных схем как аппроксимация, устойчивость, сходимость, чтобы суметь разобраться в полученных результатах расчёта и правильно оценить их точность.

Практическое занятие 71. Решение задач переноса методом сеток

71.6. Вычислительная программа — решение методом сеток задач переноса

При решении дифференциальных уравнений в частных производных методом сеток необходимо проделывать огромное количество арифметических операций, причём для получения более точного результата необходимо уменьшать значения шага сетки h , увеличивая при этом объем вычислений. Для получения приемлемого результата необходимо использовать ЭВМ. Для современных ЭВМ существует большое количество программных комплексов, решающих задачи подобного рода. Для решения задач переноса можно выбрать любой язык программирования и в рамках этого языка разработать пакет программ, реализующий приведённые конечно-разностные схемы и выполняющий графическую визуализацию полученного решения. К таким языкам программирования относятся: QBasic, Fortran, Pascal, C++, Java, Visual Basic, Ruby и т.д. При разработке таких пакетов основную трудоемкость составляет графическая часть пакета. Кроме того, существует другой путь — применить специализированный стандартный пакет, имеющий встроенный графический интерфейс. В

нашем курсе для решения дифференциальных задач мы будем использовать наиболее удобные, с точки зрения авторов, пакеты Excel, Maxima и MathCad. Предполагается, что читатели уже знакомы с этими пакетами. Для повторения или изучения работы в них предлагаются следующие учебные пособия [4, 5, 12, 17].

Продemonстрируем методы решения уравнения переноса с использованием пакетов Excel, Maxima и MathCad. Для этого рассмотрим задачу переноса, имеющую аналитическое решение.

ПРИМЕР 71.1. *Найти решение уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (2e^t - x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (71.1)$$

удовлетворяющее условию $u(x, 0) = x$.

Р е ш е н и е: Составим характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2e^t - x} = \frac{du}{0}$$

и находим два независимых первых интеграла этой системы. Для этого выбираем два независимых дифференциальных уравнения, интегрируя которые и получим первые интегралы системы:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{dt}{1} = \frac{du}{0} &\Rightarrow du = 0 \Rightarrow u = C_1; \\ b) \quad \frac{dt}{1} = \frac{dx}{2e^t - x} &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2e^t - x; \\ \frac{dx}{dt} + x &= 2e^t. \end{aligned} \quad (71.2)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Чтобы его решить, сначала надо решить однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt$$

$$\ln x - \ln C = -t \Rightarrow \ln \frac{x}{C} = -t \Rightarrow x = Ce^{-t}.$$

Теперь в полученном общем решении $x = x(t)$ однородного уравнения заменим произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(t)$ («метод вариации произвольной постоянной»). Затем выражение,

полученное для x , подставим в исходное линейное уравнение (71.2) и найдем функцию $C(t)$:

$$x = C(t)e^{-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + C(t)e^{-t} = \frac{dC(t)}{dt}e^{-t}.$$

Подставим это выражение в уравнение (71.2):

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt}e^{-t} - C(t)e^{-t} &= 2e^t - C(t)e^{-t} \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = 2e^t \Rightarrow dC(t) = 2e^{2t}dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow C(t) = e^{2t} + C_2 \Rightarrow x = (e^{2t} + C_2)e^{-t} \Rightarrow x = e^t + C_2e^{-t}. \end{aligned}$$

Откуда получаем первый интеграл $xe^t - e^{2t} = C_2$.

Далее, исключая u, x, t из системы первых интегралов $C_1 = u$, $C_2 = xe^t - e^{2t}$ и начальных условий $t = 0$, $u = x$, находим: $C_1 = C_2 + 1$. Следовательно, решение данного уравнения имеет вид:

$$u(x, t) = xe^t - e^{2t} + 1. \quad (71.3)$$

71.7. Решение задачи переноса в рамках табличного процессора Excel

Предполагается, что читатель уже знаком с основами использования табличного процессора Excel. В качестве примера воспользуемся задачей 71.1. Для решения методом сеток выберем шаблон (70.10) «левый явный уголок». Подставим в уравнение (70.10) $a = 1$, $b = 2 \cdot e^t - x$, $C = 0$.

$$u_m^{n+1} = u_m^n + (2 \cdot e^t - x) \cdot \frac{\tau}{h} \cdot (u_{m-1}^n - u_m^n).$$

Начальные условия примут вид: $u_m^0 = x_m$. Ограничимся решением задачи на области $x \in [0, 1]$. Для решения поставленной задачи входим в текстовый процессор Excel. Переименуем любой рабочий лист на «Уравнение переноса». Для этого дважды щелкаем на названии рабочего листа и пишем новое имя. Все дальнейшие действия производим на данном рабочем листе. В первой строке (ячейка A1) пишем заглавие работы. В ячейки A2 и C2 записываем текст h и τ , комментируя записываемые значения в ячейки B2 и D2. В ячейках B2 и D2 записываем значения параметров сетки h и τ . Именуем эти ячейки. Для этого щелкаем по ячейке B2 и переходим в поле «имя» (это поле в левом верхнем углу окна, где отображается адрес текущей ячейки), пишем вместо адреса ячейки имя переменной h или τ и нажимаем клавишу «Enter». Заполняем теперь третью строку. В

ячейку $A3$ записываем текст $t \backslash x$. Далее получаем массив абсцисс x_m . Для этого в ячейку $B3$ пишем число 0. В $C3$ пишем формулу $=h$. В ячейку $D3$ формулу $=C3 + h$. Эту формулу продолжаем (применяем метод автозаполнения) до ячейки $L3$. Для продолжения формулы необходимо щелкнуть по ячейке $D3$ и встать курсором мыши в правый нижний угол ячейки. При этом курсор изменяет вид на символ $+$. Нажимаем на левую кнопку мыши и тянем её вправо до ячейки $L3$. Массив координат узлов по пространственной координате x готов. Для заполнения массива координат узлов по временной координате t проделаем аналогичные действия. В ячейку $A4$ пишем 0. В ячейку $A5$ - формулу $=tau$. В ячейку $A6$ - формулу $=A5 + tau$ и продолжаем её до ячейки $A14$. В ячейках $B4$ и $L4$, получаем начальные условия. Для этого в ячейки $B4$ пишем формулу $=B3$ и продолжаем её до ячейки $L4$. Теперь займемся получением решения на $n + 1$ временном слое при $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Для получения решения уравнения переноса на левом крае границы области, для аппроксимации производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ необходимо использовать правую конечную разность.

$$u_0^{n+1} = u_0^n + (2 \cdot e^t - x) \cdot \frac{\tau}{h} \cdot (u_0^n - u_1^n).$$

В ячейку $B5$ вводим следующую формулу: $=B4 + (2 * EXP(\$A5) - B\$3) * tau/h * (B4 - C4)$ и продолжаем её вниз до ячейки $A14$. Для получения решения во внутренних точках сетки в ячейку $C5$ вводим следующую формулу: $=C4 + (2 * EXP(\$A5) - C\$3) * tau/h * (B4 - C4)$ и продолжаем её влево до ячейки $L5$. Затем отпускаем мышку и снова продолжаем всю строку вниз до ячейки $L14$. Решение во всех узлах сетки получено.

Теперь займемся построением графиков функций $U(t, x)$ при фиксированных значениях временной координаты t . Т.е. графиков функций одной переменной $U = U(x, t^n)$, $n = 0, 1, \dots, 10$. Одиннадцать графиков на одной диаграмме не смотрятся, поэтому построим графики решения через один временной слой. Для этого скроем решения на нечётных временных слоях. Выделяем нечётные строки с пятой до тринадцатой, в которых находится решение в нечётных временных слоях. Для выделения этих строк необходимо нажать клавишу $Ctrl$ и, не отпуская её, нажать левую кнопку мыши на номерах выделяемых строк. Затем, находясь на любой выделенной строке, нажать правую кнопку мыши и в возникшем контекстном меню (зависящем

от предыдущих действий) выбрать пункт **Скрыть**. При этом отмеченные строки превращаются в невидимые. Для выделения нужных строк можно применить фильтрацию данных при помощи простого или усиленного фильтра.

Теперь займемся построением графиков. Выделяем область данных $B3 : L14$. Для этого щелкаем по ячейке $B3$, переходим на ячейку $L14$, нажимаем клавишу Shift и, удерживая ее, нажимаем левую кнопку мыши. Область $B3 : L14$ выделяется. На панели инструментов нажимаем значок **Мастер диаграмм** и в возникшем меню шага 1 из поля тип выбираем **Точечная** и дважды щелкаем мышью на виде диаграммы: **Точечная диаграмма, со значениями, соединёнными отрезками**. В появившемся диалоговом окне шага 2 в поле **Ряды в:** нажимаем мышкой переключатель в строках. Переходим на закладку **Ряд** и последовательно в поле **Имя** изменяем имена рядов Ряд1, Ряд3, Ряд5, Ряд7, Ряд9 на: $t = 0$; $t = 0, 2$; $t = 0, 4$; $t = 0, 6$; $t = 0, 8$; $t = 1, 0$. Для этого мышкой выделяем старое название графика, например Ряд1, переходим мышкой в поле **Имя** и там пишем новое название – $t = 0$. После изменения всех имен переходим к следующему шагу мастера диаграмм, нажимая мышкой на кнопку **Далее**. На третьем шаге мастера диаграмм заполняем поля **Название диаграммы**: Решение задачи переноса; **Ось X** : X ; **Ось Y** : U . Переходим к закладке **линии сетки** и устанавливаем флажки **Основные линии на оси Oх** и **Oу**. Теперь можно нажать командную кнопку **Готово**.

Диаграмму можно редактировать. Для любого элемента диаграммы можно вызвать контекстное меню, нажав правую кнопку мыши и подводя курсор мыши к данному элементу, либо дважды щелкнуть левой кнопкой мыши по выбранному элементу диаграммы. Переместим курсор мыши к оси Ox . Пишется контекстная подсказка: **Ось X (категорий)**. Вызываем контекстное меню, нажав правую кнопку мыши, и в возникшем меню выбираем пункт **Формат Оси**. Нажимаем закладку **Шкала** и изменяем поля: **Максимальное значение** на 1,0; **Цена основных делений** на 0,25. Аналогично редактируем ось OY , устанавливаем поля **Минимальное значение** на -6 ; **Максимальное значение** на 1; **цена основных делений** на 1. Теперь, находясь на области построения диаграммы, вызываем контекстное меню и выбираем пункт **Формат области построения** и в поле **Цвет** выбираем белый цвет. Подведя курсор к любому графику, можно изменить цвет линии, толщину линии, вид и цвет маркера и т.д.

Теперь сравним полученные численные результаты с теоретическими результатами. Для этого вычислим теоретические значения функции u при $t = 1$. В ячейку B17 вводим формулу: $=B3*EXP(\$A\$14) - EXP(2* \$A\$14) + 1$ и продолжаем её до ячейки L17. На рис. 71.1 представлена таблица с полученными результатами решения задачи 71.3. Сравнивая численное решение при $t = 1$ с теоретическим, можно отметить, что точность численных значений удовлетворительная.

Таблица 71.1

Решение задачи переноса методом сеток											
h	0,1	τ	0,1								
$t \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	-0,22	-0,11	0	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88
0,2	-0,49	-0,37	-0,25	-0,13	-0,01	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72
0,3	-0,82	-0,68	-0,55	-0,42	-0,28	-0,15	-0,02	0,12	0,25	0,38	0,52
0,4	-1,21	-1,07	-0,92	-0,77	-0,63	-0,48	-0,34	-0,19	-0,04	0,10	0,25
0,5	-1,70	-1,54	-1,37	-1,21	-1,05	-0,89	-0,73	-0,57	-0,41	-0,25	-0,09
0,6	-2,28	-2,11	-1,93	-1,75	-1,57	-1,40	-1,22	-1,04	-0,87	-0,69	-0,51
0,7	-3,00	-2,80	-2,61	-2,41	-2,22	-2,02	-1,83	-1,63	-1,44	-1,24	-1,05
0,8	-3,86	-3,65	-3,44	-3,22	-3,01	-2,79	-2,58	-2,36	-2,15	-1,93	-1,72
0,9	-4,92	-4,68	-4,45	-4,21	-3,98	-3,74	-3,50	-3,27	-3,03	-2,80	-2,56
1,0	-6,20	-5,94	-5,68	-5,42	-5,16	-4,90	-4,64	-4,38	-4,13	-3,87	-3,61
Теоретическое решение задачи переноса при $t = 1$											
	-6,39	-6,12	-5,85	-5,57	-5,30	-5,03	-4,76	-4,49	-4,21	-3,94	-3,67

Для получения более высокой точности нужно уменьшить шаг сетки. Уменьшим в десять раз параметры сетки h и τ . Для этого удаляем построенную диаграмму и изменяем содержимое ячеек B2 и D2 на 0,01. При этом производится автоматический пересчёт результатов для новой сетки на области $x \in [0, 0.1], t \in [0, 0.1]$. Выделяем область L3 : L14 и продолжаем её вправо до столбца CX. При этом в ячейке CX3 получается значение пространственной координаты $x = 1$. Выделяем область A14 : CX14 и продолжаем её до строки 104. В результате в нижней части таблицы получаем бесконечные значения искомой функции. Решение «развалилось». Ранее было показано, что

данная конечно-разностная схема устойчива при $r = \frac{\tau}{h} \leq \frac{a}{b}$. На области решения минимальное значение $\frac{a}{b} = \frac{1}{2e^t - x}$ достигается при $t = 1$ и $x = 0$. При этом $\frac{a}{b} = \frac{1}{2e^2} \simeq 0,184$. Следовательно, конечно-разностная схема будет устойчивой, если $\tau < 0,184h$. В ячейку D2 запишем значение $\tau = 0,0015$. Продолжаем последнюю строку до 671. Сравнивая решение в 671 строке с теоретическим решением, – видим идеальное совпадение. Для построения графиков решения только на шести временных слоях, необходимо скрыть все строки, кроме шести строк: 4, 137, 271, 404, 538 и 671. Кроме того, необходимо скрыть ещё и не нужные для построения графиков столбцы. Для выделения множества подряд стоящих строк или столбцов, необходимо выделить первую строку (столбец) из непрерывной области, подойти при помощи бегунка к последней строке (столбцу), нажать кнопку Shift и удерживая её нажать левую клавишу мыши на последней строке (столбце).

Таким образом, для получения приемлемого результата и построения графиков полученного решения необходимо проделать большой объем работы. Для многократного решения данной задачи такой метод не подходит. Для автоматизации процесса решения, необходимо использовать программирование.

71.8. Решение задачи переноса с использованием Visual Basic for Application

Прежде напишем подпрограмму для построения графиков. Для получения основных команд по построению графиков воспользуемся мастером диаграмм. Для этого выделяем область с данными для построения графиков. Войдем в меню **Сервис** и вызовем команду **Макрос/Начать запись**. В возникшем диалоговом окне необходимо записать имя макроса, например **ПостроитьГрафики**, и нажать кнопку **Ок**. После этого все поданные команды записываются в макрос **ПостроитьГрафики**. После проведения всех манипуляций по построению графика, необходимо нажать на кнопку **Остановить**. Для написания универсальной программы по построению графика необходимо отредактировать полученную подпрограмму. Для того чтобы изменить подпрограмму, необходимо нажать клавиши **Alt + F8**, выбрать подпрограмму **ПостроитьГрафики** и отредактировать её. Ниже представлен текст разработанной программы.

Программа снабжена достаточным объёмом комментариев. Подавляющее большинство команд подпрограммы автоматически включено в мастер диаграмм.

```
'ngr - количество графиков на одной диаграмме
'NPr - количество точек вывода на одном графике
'NameSh - имя рабочего листа для получения результатов
'NameDiagr - название диаграммы
'minx - минимальное значение координаты x
'maxx - максимальное значение координаты x
'miny - минимальное значение координаты y
'maxy - максимальное значение координаты y
Sub ПостроитьГрафики(ngr As Integer, NPr As Integer, _
    NameSh As String, NameDiagr As String, minx As Double, _
    maxx As Double, miny As Double, maxy As Double)
    Dim s As String, k As Integer, alph As String
    Dim t As Integer, t1 As Integer
    'Нумерация столбцов
    alph = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
    'Область данных для графиков
    t = NPr + 2 'Номер последнего столбца данных
    'Если количество столбцов, в которых находятся данные > 26,
    'то t1 задаёт номер первой буквы в названии последнего
    'столбца данных
    t1 = (t - 2) \ 26
    If t1 > 0 Then s = Mid(alph, t1, 1) Else s = ""
    s = "b1:" + s + Mid(alph, ((t - 1) Mod 26) + 1, 1) + _
        Trim(Str(ngr + 1))
    Charts.Add 'Добавить диаграмму
    'Задаётся тип диаграммы x-y точечная; точки соединены
    'прямыми линиями; Маркеры точек не отображать
    ActiveChart.ChartType = xlXYScatterLinesNoMarkers
    'Указывает область расположения данных для диаграммы
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Worksheets(NameSh).Range(s), _
        PlotBy:=xlRows
    'Где построить диаграмму? (На рабочем листе с именем NameSh)
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:=NameSh
    ' Формат оси абсцисс
    With ActiveChart.Axes(xlCategory) 'Параметры оси Oх
        .HasMajorGridlines = True 'Рисовать сетку
```

```

        .MaximumScale = maxx      'Максимальное значение
        .MinimumScale = minx      'Минимальное значение
        .MajorUnit = (maxx - minx) / 5 'Шаг сетки
End With
' Формат оси значений функций
With ActiveChart.Axes(xlValue)
    .HasMajorGridlines = True 'Рисовать сетку
    .MaximumScale = maxy      'Максимальное значение
    .MinimumScale = miny      'Минимальное значение
    .MajorUnit = (maxy - miny) / 5 'Шаг сетки
End With
'Формат области построения диаграммы
ActiveChart.PlotArea.Select
With Selection.Interior
    .ColorIndex = 2           'Цвет фона
    .PatternColorIndex = 1
    .Pattern = xlSolid
End With
'Имя графиков
' ActiveChart.SeriesCollection.NewSeries
For k = 1 To ngr
    ' Имя легенды графика
    s = "=" + NameSh + "!R" + Trim(Str(k + 1)) + "C1"
    ActiveChart.SeriesCollection(k).Name = s
    'Толщина линий
    ActiveChart.SeriesCollection(k).Border.Weight = xlThick
Next k
'Заглавие диаграммы
ActiveChart.HasTitle = True
ActiveChart.ChartTitle.Characters.Text = NameDiagr
End Sub

```

Теперь напомним программу для автоматического получения решения и вызова подпрограммы построения графика. В качестве тестовой задачи возьмём тот же пример и ту же конечно-разностную схему. Алгоритм решения данной задачи такой же, как и для получения решения уравнения переноса в рамках табличного процессора Excel без использования программирования. Только все манипуляции со строками массива U проводятся автоматически программой.

Конечно-разностная схема уравнения переноса двухслойная. Поэтому в программе вводятся два массива y — для хранения решения на текущем, n -ом временном слое и $ynp1$ — для хранения результатов на $n + 1$ -ом временном слое. На рабочий лист выводим только данные, необходимые для построения графиков решения на временных слоях с шагом вывода τ_{Pr} . По оси Ox выводим элементы массива $ynp1$ через MPr точек. После получения результатов в виде данных на рабочем листе вызываем разработанную ранее подпрограмму построения графиков решения на фиксированных временных слоях. Значение фактических параметров, соответствующих максимальному и минимальному значениям решения, вводится вручную после получения в первый раз решения уравнения теплопроводности. Студентам самостоятельно предлагается включить операторы для автоматического определения этих значений.

Sub УравнениеПереноса()

Dim x() As Double, y() As Double, ynp1() As Double

Dim h As Double, tau As Double, r As Double, a As Double

Dim L As Double

Dim hPr As Double, tauPr As Double, Tmax As Double

Dim nn As Long, mm As Long, MPr As Long

Dim n As Long, m As Long, ngr As Integer

Dim t As Double, rr As Double, q1 As Double, r1 As Double

' Исходные данные для задачи

L = 1 ' Это длина области, на которой решается краевая задача

Tmax = 1 ' Верхняя граница временной координаты

h = 0.025 ' Это шаг по пространственной координате

r = 0.1 ' Параметр сетки

tau = r * h ' Это шаг по временной координате

' Это шаг для вывода значений сеточной функции по координате x

hPr = 0.1

tauPr = 0.2 ' Это шаг вывода графиков по временной координате

' Через столько точек выводить результаты по оси Ox

MPr = CLng(hPr / h) mm = CLng(L / h)

' Количество ячеек сетки по оси Ox

nn = CLng(Tmax / tau) ' Количество ячеек сетки по оси Ot

' Создание динамических массивов, используемых в программе

ReDim x(mm), y(mm), ynp1(mm)

For m = 0 To mm

 x(m) = h * m ' Абсциссы узловых точек

```

'Подстановка начальных условий
y(m) = x(m)
Next m
' Имя рабочего листа для вывода результатов и графиков
Dim NameSh As String NameSh = "УравнПереноса"
Worksheets(NameSh).Select
Cells.Clear 'Очистить рабочий лист
Cells(1, 1) = "t\x" Cells(2,1) = "t=0"
ngr = 1 'Номер текущего графика
'Вывод решения на нулевом временном слое
For m = 0 To mm Step MPr
    Cells(1, m \ MPr + 2) = CDBl(Format(x(m), "#0.00"))
    Cells(ngr + 1, m \ MPr + 2) = CDBl(Format(y(m), "#0.00"))
    'Выделить цветом ячейки с координатами массива x
    Cells(1, m \ MPr + 2).Interior.Color = RGB(220, 90, 220)
Next m 'Обход по временным слоям с 1-го по nn
For n = 1 To nn
    t = tau * n 'Значение временной координаты
    For m = 0 To mm
        If Abs(FunA(x(m), t)) < 1E-16 Then
            MsgBox "Коэффициент a=0"
            Exit Sub
        End If
        q1 = FunB(x(m), t) * r / FunA(x(m), t)
        r1 = FunC(x(m), t) * tau / FunA(x(m), t)
        If m > 0 Then
            ynp1(m) = y(m) - q1 * (y(m) - y(m - 1)) + r1
        Else
            ynp1(0) = y(0) - q1 * (y(1) - y(0)) + r1
        End If
    Next m
    'Переписать полученное решение на n+1-ом временном слое
    'в массив y для использования на следующем временном слое
    For m = 0 To mm
        y(m) = ynp1(m)
    Next m
    'Записать решение на данном временном слое с шагом tauPr
    'в строки рабочего листа
    If Abs((ngr) * tauPr - t) < tau / 10 Then

```

```

    ngr = ngr + 1
    Cells(ngr + 1, 1) = "t=" + Format(t, "#0.00")
    For m = 0 To mm Step MPr
        Cells(ngr+1,m\MPr+2) = CDBl(Format(y(m), "#0.00"))
    Next m
End If
Next n 'Выделить цветом область вывода заглавия графиков
Range("a1:a" + Trim(Str(ngr + 1))).Interior.Color = _
    RGB(220, 90, 220)
Dim NameDiagr As String 'Название диаграммы
NameDiagr = "Уравнение переноса. Неявная схема"
Call ПостроитьГрафики(ngr, CInt(mm / MPr), NameSh, _
    NameDiagr, 0, 1, -8, 2)
End Sub
'Функции для вычисления коэффициентов A, B и C
'дифференциального уравнения первого порядка
Function FunA(x As Double, t As Double) As Double
    FunA = 1
End Function
Function FunB(x As Double, t As Double) As Double
    FunB = 2 * Exp(t) - x
End Function
Function FunC(x As Double, t As Double) As Double
    FunC = 0
End Function
Sub ГраничныеУсловияПереноса(ynp1() As Double, _
    t As Double)
    ynp1(0) = 0
End Sub

```

В Таблице 71.2 и на рис. 39 представлены результаты полученного решения. Значение функции искомой $u(t, x)$ на последнем временном слое при $t = 1$ совпадает с теоретическим решением, представленным в Табл. 71.1.

Таблица 71.2

Уравнение переноса. Неявная схема

$t \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,2	-0,49	-0,37	-0,25	-0,13	0	0,12	0,24	0,36	0,49	0,61	0,73
0,4	-1,23	-1,08	-0,93	-0,78	-0,63	-0,48	-0,33	-0,18	-0,03	0,12	0,27
0,6	-2,32	-2,14	-1,95	-1,77	-1,59	-1,41	-1,23	-1,04	-0,86	-0,68	-0,50
0,8	-3,95	-3,73	-3,51	-3,28	-3,06	-2,84	-2,62	-2,39	-2,17	-1,95	-1,73
1,0	-6,38	-6,11	-5,84	-5,57	-5,30	-5,03	-4,75	-4,48	-4,21	-3,94	-3,67

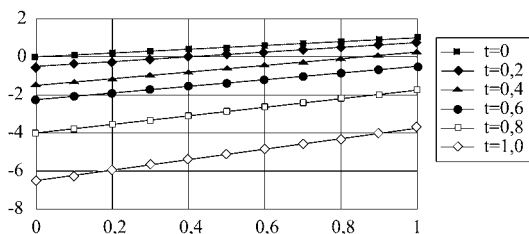


Рис. 39. Решение задачи переноса методом сеток

71.9. Решение задачи переноса в рамках программного комплекса MathCad

Предполагается, что читатель уже знаком с основами работы в пакете MathCad. Представленные в учебном пособии программы получены с использованием пакета MathCad 2000 [4]. Для получения решения уравнения переноса средствами пакета математического процессора MathCad необходимо применять программирование на встроенном в пакет алгоритмическом языке. Для примера рассмотрим решение задачи, представленной в предыдущем подразделе с использованием алгоритмического языка Visual Basic. Все обозначения математических параметров и алгоритмы задач в MathCad-программе полностью совпадают с программами на Visual Basic. Учитывая это, в программе подробные комментарии отсутствуют. В первой части программы, по аналогии с VB-программой, присваиваются начальные данные параметрам задачи. Функция $FunB(x, t)$ равна коэффициенту при $\frac{\partial U}{\partial x}$. Для читателей, которые редко используют пакет

MathCad, напомним некоторые наиболее необходимые сведения. При использовании программирования в MathCad рекомендуется отключить опцию **Automatic Calculation**, находящуюся в пункте меню Math. При этом после написания программы необходимо подать команду **Вычислить**, нажав клавишу **F9**. Для кодирования оператора присваивания $:=$ вне блока программирования необходимо нажать клавишу **Двоеточие**. При написании программы в MathCad, для записи блока операторов, используется вертикальная линия. Для создания и расширения вертикальной линии необходимо подать команду **Add Line**, которая подаётся нажатием на соответствующую кнопку на панели инструментов **Programming**. Эту команду можно ввести, используя «горячую» клавишу **]** (закрывающаяся квадратная скобка). Для ввода оператора цикла **for** необходимо мышкой нажать на кнопку **for** или одновременно нажать комбинацию из трёх клавиш **Ctrl + Shift + '**. Затем в области чёрных маркеров оператора **for** ввести имя параметра цикла (первый маркер), начальное значение, шаг и конечное значение параметра цикла (второй маркер на первой строке). Если шаг параметра цикла равен 1, то его можно опустить. Шаг параметра цикла указывается после запятой. Для указания конечного значения необходимо нажать клавишу **;** и указать конечное значение. Вместо точки с запятой MathCad автоматически проставляет две точки. Если тело цикла состоит из нескольких операторов, необходимо расширить блок тела цикла. Для этого необходимо перейти мышкой на маркер второй строки оператора **for** и подать необходимое количество раз команду **Add Line**. Для написания оператора присваивания внутри программного блока необходимо использовать команду \leftarrow или «горячую» клавишу **{**. Для написания нижних индексов используется клавиша **[**. Решение задачи переноса на MathCad реализовано в виде функции **Perenos**. Для ввода функции необходимо написать её заглавие, нажать двоеточие и несколько раз клавишу **]**. В последней строке написать переменную **U**, значение которой возвращает функция. Функция возвращает двумерный массив **U**, в котором хранятся полученные значения сеточной функции только в узлах вывода. Этот массив необходим для построения графиков решения на разных временных слоях.

После ввода данной программы необходимо подать команду **Вычислить (F9)**. Если при этом возникают ошибки, MathCad выделяет строки, в которых возникла ошибка, красным цветом. Их необходимо исправить и снова нажать клавишу **F9**. После отладки программы

можно посмотреть полученные результаты в виде таблицы. Для этого необходимо ввести команду: $\mathbf{U} = \mathbf{F9}$. Полученную таблицу можно полностью посмотреть, расширяя область таблицы вниз и вправо, или при помощи передвижения бегунков снизу и справа. Для построения графиков временных слоев необходимо ещё задать массив абсцисс x_m . Для этого вводим следующую последовательность нажатия клавиш: $\mathbf{m} : 0 ; \mathbf{MhPr}$. Это мы указываем, что индекс m изменяется от 0 до переменной $MhPr$. Далее вычисляем значения узлов сетки: $\mathbf{x} [\mathbf{m} < \text{Пробел} > : \mathbf{m} * \mathbf{hPr}$. Теперь можно строить графики. Для построения графика при помощи «горячих» клавиш $\mathbf{Ctrl} + \mathbf{2}$, вызываем мастер построения одномерных графиков. В возникшей прямоугольной области на месте нижнего маркера вводим \mathbf{x} . Затем переходим к левому маркеру и вводим следующую комбинацию клавиш: $\mathbf{U} \mathbf{Ctrl} + \mathbf{6} \mathbf{0} < \text{пробел} >$. Это мы ввели информацию для построения графика, значения ординат которого находятся в нулевом столбце матрицы U . При этом MathCad отобразит символ $U^{<0>}$, означающий нулевой столбец матрицы U . Для одновременного построения нескольких графиков необходимо далее ввести запятую и ввести ту же последовательность клавиш для первого и последующих столбцов матрицы U . Для этого вместо цифры 0 ставим номер другого столбца.

Ниже приведена программа решения задачи переноса средствами математического процессора MathCad. По аналогии с программой, написанной на алгоритмическом языке Visual Basic, данная программа снабжена комментариями. При введении программы комментарии, записанные в скобках $/ * \dots * /$, можно не вводить.

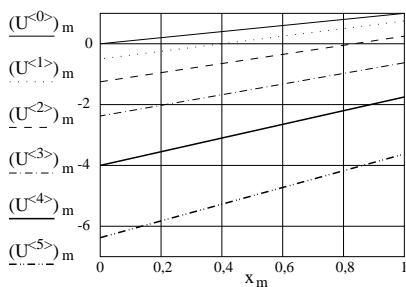


Рис. 40. Решение задачи переноса MathCad

$$\begin{aligned}
 L &:= 1 \quad a := 1 \quad T_{max} := 1 \quad r := 0.5 \quad M := 20 \\
 h &:= \frac{L}{M} \quad \tau := r \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad N := \frac{T_{max}}{\tau} \\
 \tau Pr &:= 0.2 \quad hPr := 0.1 \\
 MPr &:= \frac{hPr}{h} \quad FunB(x, t) := 2 \cdot e^t - x
 \end{aligned}$$

```

U := for m ∈ 0..M
|   xm ← m · h /*Пространственные координаты сетки*/
|   ym ← xm /*Начальные условия*/
k ← 0
ngr ← 1
for m ∈ 0, MPr..M /*Запомнить решения на нулевом слое*/
|   Uk,0 ← ym /*В нулевом столбце матрицы U*/
|   k ← k + 1
for n ∈ 1..N /*Цикл по временным слоям от 1-го до N-го*/
|   t ← n · τ /*Значение временной координаты */
|   ' /*Решение на левом крае при x=0*/
|   ynp10 ← y0 +  $\frac{FunB(x_0, t) \cdot \tau}{h} \cdot (y_0 - y_1)$ 
|   /*Решение во внутренних точках временного слоя*/
|   for m ∈ 1..M
|       ynp1m ← ym +  $\frac{FunB(x_m, t) \cdot \tau}{h} \cdot (y_{m-1} - y_m)$ 
|   /* Запомнить решение на полученном слое в массиве y*/
|   y ← ynp1
|   /*Если tкратно параметру τPr, то запомнить решение в U*/
|   if |ngr · τPr - t| < 0.1 · τ
|       k ← 0
|       for m ∈ 0, MPr..M
|           Uk,ngr ← ym
|           k ← k + 1
|       ngr ← ngr + 1
U

```

$$MhPr = \frac{M}{MPr} \quad m := 0..MhPr \quad x_m := m \cdot hPr$$

Далее на одной диаграмме строим графики решений для шести временных слоев, значения которых записаны в двумерном массиве

U. На рис. 40 представлены графики решения, полученного после выполнения приведённой выше программы.

71.10. Решение задачи переноса с использованием пакета Maxima

В качестве примера решим ту же задачу Коши 71.1, которую решали с использованием коммерческих пакетов MathCad и Visual Basic. Структура программ, обозначения переменных и результаты работы программ в рамках всех трёх пакетов идентичны, поэтому приводим Maxima-программу без подробных комментариев и печати выводной информации.

```
(%i1) numer:true$ L:1$ a:1$ Tmax:1$ r:0.5$ M:20$
(%i7) h:L/M; tau:r*(h/a)^2; N:fix(Tmax/tau+0.5);
(%i10) tauPr:0.2$ FunB(x,t):=2*exp(t)-x;
/* Создаем используемые в программе массивы.*/
(%i12) array(x,M)$ array(y,M)$ array(ynp1,M)$ array(U,5,M)$
/*ngr - номер графика. x - массив координат узловых точек по Oх.
y - решение на текущем временном слое.*/
(%i16) ngr:1;
      for m:0 while m<=M do(
          x[m]:m*h,
/* Начальные условия при t = 0. */
          y[m]:x[m],

/* Сохраняем решение на нулевом временном слое в нулевом столбце
таблицы U для построения графика.*/
          U[0,m]:y[m]
      );
(%i18) fpprintprec:4;listarray(x);
/* Обход по временным слоям. t - время на текущем временном
слое.*/
(%i20) for n:2 while n<=N do (
      t:n*tau,

/* Граничные условия на левом крае.*/
      ynp1[0]:y[0]+(FunB(x[0],t)*tau)/h*(y[0]-y[1]),
```

```
/* Решение во внутренних точках текущего временного слоя.*/  
    for m:1 while m<=M do (  
        ynp1[m]:y[m]+(FunB(x[m],t)*tau)/h*(y[m-1]-y[m]),  
  
/* Готовимся к вычислению решения на следующем временном слое.*/  
    for m:0 while m<=M do (y[m]:ynp1[m]),  
  
/* Сохраняем решение на текущем временном слое в столбце ngr  
таблицы U для построения графика.*/  
        if abs(ngr*tauPr-t)<0.1*tau then (  
            for m:0 while m<=M do(U[ngr,m]:y[m]),  
            ngr:ngr+1  
        )  
    );  
  
/* Генерируем 6 списков G0, G1, ..., G5 для построения графиков.*/  
(%i21) G0:makelist([x[m],U[0,m]],m,0,M);  
        G1:makelist([x[m],U[1,m]],m,0,M);  
        G2:makelist([x[m],U[2,m]],m,0,M);  
        G3:makelist([x[m],U[3,m]],m,0,M);  
        G4:makelist([x[m],U[4,m]],m,0,M);  
        G5:makelist([x[m],U[5,m]],m,0,M);  
  
/* На одной диаграмме строим графики сохранённых решений на 6  
временных слоях  $t = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$ */  
(%i27) wxplot2d([[discrete,G0],[discrete,G1],  
    [discrete,G2],[discrete,G3],[discrete,G4],  
    [discrete,G5]], [style,[lines,4,1],[lines,2,2],  
    [lines,4,3],[lines,2,4],[lines,4,5],  
    [lines,2,6]], [gnuplot_preamble,"set grid"],  
    [legend, "t=0.0", "t=0.2", "t=0.4", "t=0.6",  
    "t=0.8", "t=1.0"] );
```

Лекция 72. Дифференциальные уравнения второго порядка

Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведение линейных уравнений второго порядка к каноническому виду. Уравнение гиперболического типа. Уравнение параболического типа. Уравнение эллиптического типа. Постановка дифференциальных задач для уравнений второго порядка

72.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$ следующий:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y) = 0. \quad (72.1)$$

В основе классификации таких уравнений лежит их преобразование с помощью замены переменных. Введем вместо независимых переменных x и y новые переменные ξ и η , связанные соотношением:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad (72.2)$$

Предполагаем, что система (72.2) однозначно разрешима относительно x и y , а функции дифференцируемы нужное число раз. Выберем функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ так, чтобы в новых переменных уравнение (72.1) приняло наиболее простой вид. Для этого выразим производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ через $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ и подставим их в уравнение (72.1). В соответствии с правилом дифференцирования сложных функций получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$\begin{aligned}
+ \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Учащимся предлагается самостоятельно получить формулы для U''_{yy} и U''_{xy} :

$$\begin{aligned}
U''_{yy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}; \\
U''_{xy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (72.1), получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left\{ A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\} + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left\{ A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
&+ F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{72.3}$$

Это уравнение примет наиболее простой вид, если коэффициенты при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ равны нулю, т.е. если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в (72.2) являются решениями следующего дифференциального уравнения первого порядка в частных производных:

$$A(x, y)(z'_x)^2 + 2B(x, y)z'_x z'_y + C(x, y)(z'_y)^2 = 0. \tag{72.4}$$

Можно показать, что решение этого уравнения сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

ТЕОРЕМА 72.1. Для того чтобы функция $z = \varphi(x, y)$ была решением уравнения (72.4) в некоторой области G , необходимо и достаточно, чтобы соотношение $\varphi(x, y) = C$ было общим интегралом обыкновенного дифференциального уравнения:

$$A(x, y)(dy)^2 - 2B(x, y)dxdy + C(x, y)(dx)^2 = 0. \quad (72.5)$$

Докажем только необходимость. Таким образом, дано: $z = \varphi(x, y)$ — решение уравнения (72.4). Доказать: $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (72.5). Перепишем уравнение (72.5), разделив обе его части на $(dx)^2$:

$$A(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B(x, y)\frac{dy}{dx} + C(x, y) = 0. \quad (72.6)$$

Подставим в левую часть этого уравнения выражение для $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} / \frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

$$A\left(-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\right) + C = \frac{A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = 0,$$

так как по условию $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет (72.4), и поэтому числитель равен нулю. Следовательно, $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (72.5)

Уравнение (72.5) (или равносильное ему 72.6) называется *характеристическим уравнением для исходного уравнения* (72.1); оно является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Записав его в виде (72.6) и разрешив относительно dy/dx , получим два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(B(x, y) + \sqrt{B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y)} \right) / A(x, y); \\ \frac{dy}{dx} &= \left(B(x, y) - \sqrt{B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y)} \right) / A(x, y). \end{aligned} \quad (72.7)$$

Общие интегралы уравнений (72.7) $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ называется *уравнениями характеристик*, а кривые, описываемые этими уравнениями, — *характеристиками уравнения* (72.1).

Возможны 3 случая:

1. $B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) > 0$ в области D . Тогда уравнения (72.7) различны, их интегралы вещественны и не совпадают, уравнение (72.1) имеет два различных семейства действительных характеристик и называется *уравнением гиперболического типа*.

2. $B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) < 0$ в области D . Уравнения (72.7) различны, их интегралы не совпадают, но являются комплексными, уравнение (72.1) имеет два различных семейства комплексных характеристик и называется *уравнением эллиптического типа*.

3. $B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) = 0$ в области D . Уравнения (72.7) совпадают, уравнение (72.1) имеет одно семейство действительных характеристик и называется *уравнением параболического типа*.

ПРИМЕР 72.1. *Определить тип уравнений:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение: Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ запишем в виде: $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Для него $A = a^2$, $B = 0$, $C = -1$, $B^2 - AC = a^2 > 0$. Следовательно, это уравнение гиперболического типа. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ запишем в виде $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Для него $A = a^2$, $B = 0$, $C = 0$, $B^2 - AC = 0$. Следовательно, это уравнение параболического типа. Для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\Rightarrow B^2 - AC = -1 < 0$. Следовательно, это уравнение эллиптического типа.

В случае переменных коэффициентов A , B , C тип уравнения в рассматриваемой области может меняться. Мы, как правило, будем рассматривать уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

72.2. Приведение линейных уравнений второго порядка к каноническому виду

72.2.1. *Уравнение гиперболического типа.* Если в области D уравнение (72.1) гиперболического типа, то оно имеет два различных семейства действительных характеристик: $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$.

Сделаем замену переменных: $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$. Поскольку функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются решениями уравнения (72.4), то коэффициенты при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ в уравнении (72.3) равны нулю:

$$A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

$$A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = 0$$

и уравнение (72.3) принимает вид:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} A_1 + F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0,$$

где A_1 обозначен коэффициент при $2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$. Выразив отсюда $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (72.8)$$

Уравнение (72.8) называется *канонической формой* уравнения гиперболического типа. Если функция $u = u(\xi, \eta)$ является решением уравнения (72.8), то $u = u(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ — решение уравнения (72.1)

ПРИМЕР 72.2. Привести к каноническому виду уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, называемое уравнением свободных колебаний струны.

Р е ш е н и е: Перепишем уравнение в виде: $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Здесь $A = a^2$, $B = 0$, $C = -1$, а в примере (72.1) установлено, что это уравнение гиперболического типа. Составим характеристическое уравнение (72.6): $a^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - 1 = 0$. Разрешив его относительно $\frac{dt}{dx}$, получим два уравнения (72.7): $a \frac{dt}{dx} - 1 = 0$, $-a \frac{dt}{dx} - 1 = 0$, решая которые, получим два семейства вещественных характеристик:

$$+a \frac{dt}{dx} - 1 = 0 \Rightarrow a \frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow at + C_1 = x \Rightarrow x - at = C_1.$$

$$-a \frac{dt}{dx} - 1 = 0 \Rightarrow -a \frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow -at + C_2 = x \Rightarrow x + at = C_2.$$

Сделаем замену переменных: $\xi = x - at$ и $\eta = x + at$ и выразим частные производные по x и t через производные по ξ и η

$$\xi = x - at \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a;$$

$$\eta = x + at \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) +$$

$$+ a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = -a \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} a + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} a \right) +$$

$$+ a \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} a \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение колебания струны, получаем:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (72.9)$$

Уравнение (72.9) является канонической формой уравнения колебания струны.

Это уравнение легко интегрируется. При помощи двух последовательных интегрирований по переменным ξ и η получаем:

$u(\xi, \eta) = F(\xi) + \Phi(\eta)$. Сделав обратную подстановку $\xi = x - at$,

$\eta = x + at$, получаем общее решение уравнения свободных колебаний (решение Даламбера).

$$u(t, x) = F(x - at) + \Phi(x + at). \quad (72.10)$$

72.2.2. Уравнение параболического типа. Если в области D уравнение (72.1) параболического типа, то оно имеет одно семейство вещественных характеристик: $\varphi(x, y) = C$. Сделаем замену переменных

$\xi = \varphi(x, y)$, другую функцию можно выбрать произвольно, но так, чтобы якобиан замены не равнялся нулю: $\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0$, например можно взять $\eta = y$.

Поскольку $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (72.6), коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ в (72.3) равен нулю:

$$A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Отсюда, поскольку $B^2 - AC = 0$ (уравнение параболического типа), следует, что $B = \sqrt{AC}$ и значит:

$$0 = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2\sqrt{A}\sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \quad (72.11)$$

Коэффициент при $\frac{\partial u^2}{\partial \eta^2}$ в (72.3) равен C , так как:

$$\eta = y \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 \Rightarrow A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = C.$$

Коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ в (72.3) равен нулю, так как:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot 0 + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot 1 + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot 0 \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot 1 = B \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \frac{\partial \xi}{\partial y} = \sqrt{A}\sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \\ &= \sqrt{C} \left(\sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю последней скобки следует из (72.11).

Подставляя найденные значения коэффициентов, получаем, что уравнение (72.3) приобретает вид:

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (72.12)$$

Уравнение (72.12) называется *канонической формой* уравнения параболического типа. Если $u = u(\xi, \eta)$ — решение уравнения (72.12), то $u = u(\varphi(x, y), y)$ — решение уравнения (72.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 72.1. Если в качестве замены переменных взять $\xi = x$ и $\eta = \varphi(x, y)$, то уравнение (72.1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \Phi_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

который тоже является канонической формой уравнения параболического типа.

ПРИМЕР 72.3. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и решить его.

Решение: Здесь $A = x^2$, $B = -xy$, $C = y^2 \Rightarrow B^2 - AC = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа при любых x и y .

Составим характеристическое уравнение (72.6):

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \quad \text{или} \quad \left(x \frac{dy}{dx} + y \right)^2 = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно производной, получаем $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow xy = C$ — общий интеграл.

Сделаем замену переменных: $\xi = xy$, $\eta = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1.$$

Аналогично тому, как это сделано в примере 72.2, найдем выражения для $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} xy + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y + \frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2xy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} xy + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \\ + y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + 2x \frac{\partial u}{\partial \xi} y = 0.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение в канонической форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Получившееся уравнение легко интегрируется:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\xi) \Rightarrow u = \int F(\xi) d\eta + \Phi(\xi) = \eta F(\xi) + \Phi(\xi).$$

Возвращаясь к переменным x и y , получаем общее решение исходного уравнения: $u = yF(x, y) + \Phi(x, y)$.

72.2.3. *Уравнение эллиптического типа.* Если в области D уравнение (72.1) эллиптического типа, то характеристическое уравнение распадается на два уравнения (72.7), правые части которых являются сопряжёнными комплексными числами, их общие интегралы будут также комплексно сопряжёнными: $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1$ и $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2$. Можно показать, что заменами $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$ уравнение (72.1) приведется к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (72.13)$$

Уравнение (72.13) называется *канонической формой уравнения эллиптического типа*.

ПРИМЕР 72.4. Привести к канонической форме уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Р е ш е н и е: Здесь $A = 1$, $B = -1$, $C = 2 \Rightarrow B^2 - AC = -1 < 0$. Уравнение эллиптического типа при любых x и y . Составим характеристическое уравнение (72.6):

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dx} + 2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -1 \pm i.$$

Интегрируя, получим два семейства комплексных характеристик: $x + y + ix = C_1$ и $x + y - ix = C_2$.

Здесь $\varphi(x, y) = x + y$, $\psi(x, y) = x$. Произведем замену переменных: $\xi = x + y$, $\eta = x \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$.

Аналогично тому, как это сделано в предыдущих примерах, найдем выражение для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}; & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем, что оно принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

После сокращения получим: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ — уравнение, называемое *уравнением Лапласа*.

72.3. Постановка дифференциальных задач для уравнений второго порядка

Уравнения гиперболического и параболического типа возникают обычно при изучении процессов, протекающих во времени (переменная t). Такие уравнения, как уже отмечалось в лекции 69, относятся к *уравнениям эволюционного типа*. Пространственные переменные обозначаются, как правило, x , y , z . Характер многих физических процессов таков, что они симметричны относительно некоторой плоскости. Для упрощения решения задач в этом случае рассматривают двумерные уравнения эволюционного типа с переменными x , y и t . В уравнениях, описывающих одномерные физические процессы, участвуют одна пространственная координата x и время t .

Основным уравнением математической физики гиперболического типа является волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

В двухмерном случае (например, колебание волн на поверхности моря) волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Для одномерных процессов (например, колебание стержня, струны, продольные колебания воды в трубе и т.д.) это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (72.14)$$

и называется *уравнением свободных колебаний струны*.

Физический смысл входящих в него переменных может быть, например, следующий: t — время, x — пространственная координата (расстояние от одного из концов струны), $u(x, t)$ — отклонение струны от положения равновесия в момент времени t в точке с пространственной координатой x . Параметр a определяется физическими характеристиками струны и имеет смысл скорости распространения возмущений по струне.

Основным уравнением математической физики параболического типа является *уравнение теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

В двухмерном случае (например, температура воздуха на поверхности Земли) уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

В одномерном случае (например, зависимость температуры воды в море от глубины погружения или изменение температуры теплоизолированного по боковой поверхности стержня) это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (72.15)$$

Физический смысл входящих в него переменных обычно следующий: t — время, x — пространственная координата (расстояние вдоль стержня), $u(x, t)$ — температура стержня в момент t в точке x . Параметр a определяется физическими характеристиками.

Основным уравнением математической физики эллиптического типа является уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (72.16)$$

Физический смысл входящих в него переменных обычно тот же, что и для уравнения теплопроводности. В этом случае уравнение Лапласа описывает распределение температуры в пространственном теле, если температура не изменяется во времени, т.е. распределение температуры является *стационарным*.

Поскольку общее решение уравнений в частных производных зависит от произвольных функций, количество которых зависит от порядка уравнения, для однозначного определения характера физических процессов необходимо задать дополнительные условия. Для рассмотренных уравнений они разделяются на *начальные* и *краевые (граничные)*.

Как уже отмечалось в первом разделе, начальные условия состоят в задании дополнительных условий в какой-либо момент времени $t = t_0$. Чаще всего изучение процессов эволюционного типа начинают с момента времени $t = 0$. Для однозначного решения задачи количество начальных условий должно совпадать с порядком уравнения по временной координате t . Этими условиями являются значения искомой функции u и её производной по t (для волнового уравнения) или только значения функции u (для уравнения теплопроводности). Для уравнения Лапласа начальные условия не задаются, поскольку время в него не входит. Постановка начальной задачи в этом случае является некорректной.

Краевые (граничные) условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции u или её производных в каждой точке на границе области изменения пространственных координат x, y, z . Это могут быть концы струны или стержня, края мембраны, граница тела. Если процесс протекает в бесконечном интервале по x (бесконечная струна, стержень), то краевые условия не задаются и получается задача только с начальными условиями. Такая задача, как отмечалось в первом разделе, называется *задачей Коши*.

Если задаются и начальные, и краевые условия, то задача называется *смешанной*.

Для уравнения Лапласа задаются только краевые условия, т.е. указывается поведение неизвестной функции на границе области. Это

может быть *задача Дирихле*, если заданы значения самой функции, или *задача Неймана*, если заданы значения нормальной производной искомой функции. В случае задания на границе линейной комбинации функции и её нормальной производной задача называется *смешанной*.

Напомним, что дополнительные условия (начальные и краевые) должны выбираться из физических соображений так, чтобы получить единственное решение задачи, отвечающее характеру изучаемого процесса. Кроме этого, на практике функции, входящие в начальные и краевые условия, определяются из экспериментальных данных лишь приближённо. Поэтому необходимо быть уверенным в том, что малые изменения исходных данных задачи вызывают лишь малые изменения в её решении для рассматриваемой области, т.е. задача должна быть *устойчивой* относительно начальных и краевых условий. Если задача математической физики имеет *единственное решение*, устойчивое относительно исходных данных, говорят, что эта задача *поставлена корректно* (является *корректной*).

Перейдем теперь к рассмотрению дифференциальных задач, описываемых уравнением теплопроводности.

Практическое занятие 72. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка

Решение всех типовых примеров данной темы подробно разобрано в лекции 72.

Самостоятельная работа

Определить тип дифференциальных уравнений, найти их характеристики и привести их к каноническому виду:

ПРИМЕР 72.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

ПРИМЕР 72.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}.$

ПРИМЕР 72.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3\frac{\partial u}{\partial x} - 5\frac{\partial u}{\partial y}.$

Определить тип и найти характеристики уравнений:

ПРИМЕР 72.4. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} - y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

ПРИМЕР 72.5. $\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y}.$

ПРИМЕР 72.6. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

ПРИМЕР 72.7. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^3 \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y}.$

ПРИМЕР 72.8. $\frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy \frac{\partial u}{\partial y}.$

ПРИМЕР 72.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y.$

ПРИМЕР 72.10. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x \frac{\partial u}{\partial x} + y.$

Лекция 73. Вывод уравнения теплопроводности и понятия о рядах Фурье

Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задач для уравнения теплопроводности. Уравнение Лапласа. Постановка задач Дирихле и Неймана. Ряды Фурье. Условие Дирихле. Теорема Дирихле. Разложение функций в ряд Фурье. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций.

73.1. Вывод уравнения теплопроводности

Рассмотрим в пространстве неравномерно нагретое тело. Температура в каждой точке $P(x, y, z)$ тела в момент t является функцией $u(x, y, z, t)$. Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет эта функция.

Выделим в теле произвольный объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 41). Договоримся считать поток тепла положительным, если данный участок тела теряет тепло, и отрицательным, если приобретает. Подсчёт количества тепла будем производить на основе следующих известных физических законов:

– количество тепла dQ_1 , которое необходимо сообщить телу объёма dV , чтобы повысить его температуру на du :

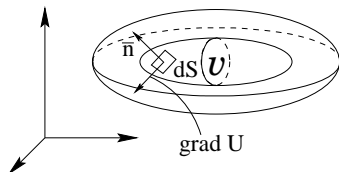


Рис. 41. Направление теплового потока

$$dQ_1 = -c\rho dV du; \quad (73.1)$$

– количество тепла dQ_2 , которое проходит через поверхность S за время dt :

$$dQ_2 = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt. \quad (73.2)$$

Здесь c — удельная теплоёмкость тела, ρ — плотность тела, k — коэффициент теплопроводности, $\partial u / \partial n$ — производная от температуры $u(x, y, z, t)$ в направлении внешней нормали \bar{n} , dS — элемент поверхности S , ограничивающей объем V .

Предполагается, что все физические величины, характеризующие свойства тела (плотность, удельная теплоёмкость, коэффициент теплопроводности), постоянны.

Знак минус в (73.1) поставлен потому, что если $du < 0$, то тело отдаёт тепло и, согласно договоренности, dQ_1 должно быть положительным.

Знак минус в (73.2) поставлен потому, что если $\partial u / \partial n < 0$, то в направлении внешней нормали температура убывает, т.е. участок dS теряет тепло и, согласно договоренности, dQ_2 должно быть положительным.

Поскольку производная скалярного поля по направлению равна проекции градиента на это направление, для нормальной производной $\partial u / \partial n$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{Pr}_{\bar{n}} \text{grad } u = \bar{n} \cdot \text{grad } u.$$

С учётом этого формулу (73.2) можно переписать в виде:

$$dQ_2 = -k \bar{n} \text{grad } u \cdot dS \cdot dt.$$

Полное количество тепла Q_2 , проходящее через замкнутую поверхность S , равно интегралу по этой поверхности:

$$Q_2 = \oint_S dQ = -kdt \oint_S \bar{n} \cdot \text{grad } u dS.$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса [II, лекция 58], получим далее:

$$Q_2 = -kdt \oint_S \bar{n} \cdot \text{grad } u dS = -kdt \iiint_V \text{div}(\text{grad } u) dV. \quad (73.3)$$

С другой стороны, полное количество тепла, отдаваемое или получаемое телом объёма V , можно подсчитать на основе формулы (73.1) как тройной интеграл:

$$Q_1 = \iiint_V dQ = -c\rho \iiint_V du \cdot dS.$$

Поскольку частный дифференциал du температуры выражается через частную производную по времени формулой

$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$, получаем:

$$Q_1 = -c\rho \iiint_V du \cdot dV = -c\rho dt \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (73.4)$$

Предполагаем, что все тепло, проходящее через поверхность S , идет на нагрев тела. Приравнявая правые части (73.3) и (73.4), получаем:

$$-c\rho dt \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = -k \cdot dt \iiint_V \text{div}(\text{grad } u) dV.$$

Сократив на dt и перенеся оба выражения в одну часть, получим равенство:

$$\iiint_V \left(k \cdot \text{div}(\text{grad } u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = 0,$$

верное для произвольного объёма V . Отсюда следует, что подынтегральная функция тождественно равна нулю:

$$k \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).$$

Поскольку $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$, то $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, поэтому получившееся уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \text{где } a^2 = \frac{k}{c\rho}. \quad (73.5)$$

Или в виде $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ называется оператором Лапласа или лапласианом. Полученное уравнение (73.5) называется *уравнением теплопроводности*.

В одномерном случае, когда рассматриваемое тело представляет собой тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью, расположенный вдоль оси x (рис. 42), уравнение для распределения температуры $u = u(x, t)$ принимает вид (72.15).

Для нахождения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо задать начальные и граничные условия. Рассмотрим задачу теплопроводности для стержня.

Начальное условие имеет вид:

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (73.6)$$

и задаёт начальное распределение температур вдоль стержня.

Если стержень ограничен, то на его концах при $x = 0$ и $x = l$ задаются граничные условия. Так, например, если на концах стержня задано изменение со временем температуры, то граничные условия имеют следующий вид:

$$u(x, t)|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = \psi_2(t).$$

Если, в частности, на концах стержня поддерживается нулевая температура, то получатся нулевые граничные условия:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (73.7)$$

Рассмотрим случай, когда концы стержня теплоизолированы, т.е. теплообмен на концах стержня отсутствует:

$$dQ|_{x=0} = dQ|_{x=l} = 0.$$

Поскольку количество тепла определяется формулой (73.2)

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS \cdot dt, \quad \text{то} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=l} = 0.$$

На концах стержня направление нормали или совпадает, или противоположно направлению оси x (см. рис. 42), поэтому

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=0} &= - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=l} &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \end{aligned}$$



Рис. 42. Стержень с теплоизолированной боковой поверхностью

и условия теплоизолированности концов стержня принимают вид:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (73.8)$$

Если на конце стержня поддерживается заданный поток тепла, то

$$k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = q_1(t), \quad -k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = q_2(t). \quad (73.9)$$

При этом, если значение функции $q_i > 0$, то происходит приток тепла через торец стержня, а если $q_i < 0$ — отток.

Если на конце стержня происходит конвективный теплообмен, то

$$\alpha(u - u_{cp})|_{x=0} = q_1(t), \quad \alpha(u - u_{cp})|_{x=l} = q_2(t), \quad (73.10)$$

где α — коэффициент теплообмена, зависящий от теплофизических характеристик и скорости движения охлаждающей среды; u_{cp} — температура окружающей среды.

Возможны также задачи с разными граничными условиями на концах стержня, например с теплоизолированным левым и правым торцами, поддерживаемыми при нулевой температуре:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (73.11)$$

Для полубесконечного стержня задаётся лишь одно граничное условие на левом конце стержня.

Для бесконечного стержня задача ставится следующим образом:

Необходимо решить дифференциальное уравнение (72.15) с начальными условиями (73.6).

В случае двумерной (плоской) задачи теплопроводности рассматривается распределение температуры $u = u(x, y, t)$ на площадке (мембране) σ , ограниченной кривой L . Граничные условия в этом случае задаются кривой L .

Для трёхмерной (пространственной) задачи теплопроводности граничные условия задаются на поверхности S , ограничивающей тело V .

Если температура u не зависит от времени t , т.е. распределение температуры в теле стационарное, то $\partial u / \partial t = 0$, и уравнение (73.5) примет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (73.12)$$

Уравнение (73.12) называется, как уже отмечалось, *уравнением Лапласа*, а функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется *гармонической функцией*.

Для однозначного определения гармонической функции задаются только граничные условия, которые в пространственном случае могут иметь вид:

$$u(x, y, z)|_S = \psi(x, y, z), \quad (73.13)$$

где $\psi(x, y, z)$ — заданная функция, определяющая распределение температуры на границе S рассматриваемого тела.

Задача нахождения решения уравнения Лапласа (73.12), удовлетворяющего заданному для функции u граничному условию (73.13), называется *задачей Дирихле*.

Отметим, что уравнение (73.5) описывает и некоторые другие физические процессы, в частности, диффузию: $\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$, где $c = c(x, y, z)$ — искомая функция, являющаяся концентрацией диффундирующего вещества, D — коэффициент диффузии. Начальные и граничные условия подобны рассматриваемым соответствующим условиям в задачах теплопроводности. Одним из классических методов решения задач математической физики является метод Фурье, основанный на нахождении решения в рядах Фурье.

73.2. Ряд Фурье

Для решения многих задач часто приходится раскладывать периодические функции в ряды Фурье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 73.1. *Функциональный ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (73.14)$$

называется *рядом Фурье*.

Числа $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ — называются *коэффициентами Фурье*.

Все члены ряда (73.14) являются периодическими функциями с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Общий период этих коэффициентов равен 2π . Следовательно, если ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он сходится на всей действительной оси $(-\infty, +\infty)$, а функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (73.15)$$

является периодической с периодом 2π . Приведем некоторые формулы, которые понадобятся для вывода коэффициентов Фурье

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)); \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)); \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)); \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x); \\ \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x. \end{aligned} \quad (73.16)$$

Используя формулы (73.16), легко вычислить следующие интегралы. Если n и k — натуральные числа и $n \neq k$, то имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= 0,
\end{aligned} \tag{73.17}$$

если же $n = k$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx = 0. \tag{73.18}$$

Предположим, что функциональный ряд (73.15) правильно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$. Выведем формулы для коэффициентов ряда Фурье. Так как правильно сходящийся ряд можно почленно интегрировать, то проинтегрируем выражение (73.15) в пределах от $-\pi$ до π . Получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right).$$

Используя формулы (73.17) и то, что $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx = a_0 \pi$, получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Умножим правую и левую часть выражения (73.15) на $\cos kx$, где $k \in N$, и проинтегрируем полученное выражение:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right).
\end{aligned}$$

Согласно формулам (73.17, 73.18) в правой части данного выражения все слагаемые, кроме одного при $n = k$, равны нулю. Ненулевое слагаемое $a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = a_k \pi$. В результате вместо суммы бесконечного количества слагаемых получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \pi.$$

$$\text{Откуда } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (73.15) на $\sin kx$ и интегрируя полученное выражение в пределах от $-\pi$ до π , используя формулы (73.17, 73.18), найдем выражение для коэффициентов b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Таким образом, если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является суммой правильно сходящегося ряда Фурье (73.15) на отрезке $[-\pi, \pi]$, то коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned} \quad (73.19)$$

Формулы (73.19) выведены в предположении, что ряд Фурье сходится правильно. Приведем без доказательства достаточное условие сходимости ряда Фурье. Дадим некоторые определения, необходимые для формулировки основной теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 73.2. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция монотонна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 73.3. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[a, b]$, если:

- 1) функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ или же имеет на нём конечное число точек разрыва I рода;
- 2) функция кусочно-монотонна на отрезке $[a, b]$.

Теперь сформулируем теорему Дирихле, дающую достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Теорема Дирихле. Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом отрезке условиям Дирихле. В таком случае ряд Фурье, соответствующий этой функции, сходится во всех точках числовой оси. При этом в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой

точке. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднеарифметическому предельных значений функции при $x \rightarrow x_0$ слева и справа, т.е.

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \right). \quad (73.20)$$

ПРИМЕР 73.1. Разложить на области $x \in (-\pi, \pi]$ в ряд Фурье функцию $f(x) = x$.

Решение: Данная функция не является периодической. Но, учитывая, что в нашу задачу входит разложение функции только на интервале $(-\pi, \pi]$, мы можем раскладывать в ряд Фурье другую функцию $f_1(x) = f\left(x - \text{Int}\left(\frac{x}{2\pi}\right) 2\pi\right)$, где функция $\text{Int}(x)$ вычисляет целую часть аргумента по обычным арифметическим правилам. Новая функция $f_1(x)$ полностью удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, равна исходной функции на исследуемой области $(-\pi, \pi]$. Применяя формулы (73.19), найдем коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x d \sin nx = \frac{1}{n\pi} \left(x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x d \cos nx = -\frac{1}{n\pi} \left(x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right) = -\frac{1}{\pi n} \left(\pi \cos n\pi + \pi \cos(-n\pi) - \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0; b_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$. Следовательно

$$f_1(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx + \dots \right).$$

Или в более краткой форме

$$f_1(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}.$$

73.3. Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Если исследуемая функция обладает свойствами четности или нечётности, то формулы для ряда Фурье и коэффициентов Фурье существенно упрощаются. Для чётной функции $\varphi(x)$ выполняется условие $\varphi(-x) = \varphi(x)$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx &= \int_{-\pi}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (73.21)$$

Аналогично для нечётной функции $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx &= \int_{-\pi}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = \\ &= - \int_0^{\pi} \varphi(x) dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (73.22)$$

Рассмотрим теперь разложение в ряд Фурье нечётной функции $f(x)$. В этом случае подынтегральные функции для коэффициентов Фурье a_0 и a_k являются нечётными, а для коэффициентов b_k — чётными. Поэтому формулы для коэффициентов Фурье принимают вид

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (73.23)$$

Тогда формула для ряда Фурье принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx. \quad (73.24)$$

Аналогично для чётной функции

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0. \quad (73.25)$$

Тогда формула для ряда Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx. \quad (73.26)$$

Из формул (73.24) и (73.26) видно, что нечётная функция раскладывается только по синусам, а чётная функция — только по косинусам.

Если функция является нечётной в новой системе координат $y_1 = y + c, x_1 = x$, то ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx. \quad (73.27)$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad a_n = 0. \quad (73.28)$$

73.4. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$.

Рассмотрим периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$. Введем новую переменную $z = \frac{\pi}{l}x$. Тогда функция $f\left(\frac{l}{\pi}z\right)$ будет периодической с периодом 2π . Её можно разложить в ряд Фурье (73.15) на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}z\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

где коэффициенты Фурье имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) dz, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \cos n z dz, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}z\right) \sin n z dz. \end{aligned}$$

Теперь произведем обратную замену $x = \frac{l}{\pi}z$, $z = x\frac{\pi}{l}$,
 $dz = \frac{\pi}{l} dx$. При $z = -\pi$, $x = -l$, при $z = \pi$, $x = l$.

Получаем коэффициенты Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \end{aligned} \quad (73.29)$$

И ряд Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right). \quad (73.30)$$

Для нечетной периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ коэффициенты Фурье принимают вид

$$a_0 = a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \quad (73.31)$$

Ряд Фурье примет достаточно простой вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right). \quad (73.32)$$

Для чётной периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ коэффициенты Фурье принимают вид

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, \quad b_n = 0. \quad (73.33)$$

Ряд Фурье примет достаточно простой вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x \right). \quad (73.34)$$

Если функция $y = f(x) - c$ является чётной периодической функцией с периодом $2l$, то ряд Фурье для функции $y = f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right). \quad (73.35)$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad a_n = 0. \quad (73.36)$$

Практическое занятие 73. Разложение функций в ряд Фурье

73.5. Разложение функций в ряд Фурье с использованием компьютерных математических пакетов

Процесс разложения функций в ряд Фурье является достаточно однообразным и трудоемким. Первая трудность состоит в вычислении интегралов. В большинстве практических случаев интегралы аналитически не вычисляются. Для их вычисления необходимо применять численные методы. Ещё более трудоемкой задачей является вычисление сумм ряда Фурье и построение графика полученной функции. С такой задачей достаточно просто можно справиться при помощи математических пакетов программ MathCad или Maxima.

Рассмотрим пример разложения произвольной функции в ряд Фурье с помощью макета MathCad.

ПРИМЕР 73.1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-1, 1]$ функцию $y = x^4$.

Данная функция является чётной. Но для общности решения задачи Фурье мы не будем учитывать свойство четности данной функции и разложим её по общим формулам (73.29, 73.30). Приведем MathCad - программу решения данной задачи.

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 0 \quad \text{TOL} := 0.00001 \quad L := 1 \quad A := -3 \quad B := 3 \\
 & N := 30 \quad n := 0..N \quad f(x) := x^4 \\
 & a_n := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx \\
 & b_n := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx \\
 & F(x, K) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^K \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right)
 \end{aligned}$$

На рис. 43 представлены графики частичных сумм при $K = 1$, $K = 2$, и $K = 30$. Мы видим, что разложение заданной функции в ряд Фурье достаточно быстро сходится к периодической функции $f_1(x) = f\left(x - \text{Int}\left(\frac{x}{2 \cdot L}\right) 2 \cdot L\right)$, где Int — функция, округляющая аргумент по стандартным правилам округления, принятым в математике.

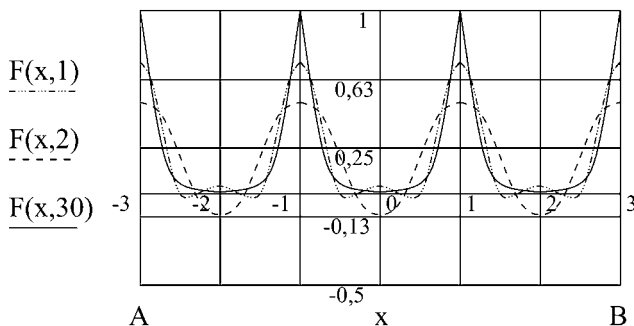


Рис. 43. Сходимость ряда Фурье для функции $y = x^4$

Таким образом, подставляя вместо функции $f(x)$ любую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, по приведённой программе можно получить разложение в ряд Фурье. Параметры A и B задают область для построения графика функции $F(x, K)$. K указывает, сколько слагаемых в разложении ряда Фурье необходимо учитывать. Параметр N показывает, сколько коэффициентов Фурье необходимо вычислять. Следовательно, параметр K нельзя задавать больше, чем параметр N . Для того чтобы посмотреть значения коэффициентов

Фурье, необходимо ввести оператор $a =$ и подать команду вычислить (F9).

Приведем теперь Maxima - программу решения этой же задачи.

```
(%i1) numer:true$ ratprint:false$ fpprintprec:4$ L:1$ N:30$
(%i6) $ A: -3$ B:3 $ f(x):=x^4;
```

/ Вычисляем коэффициенты ряда Фурье. Нумерация коэффициентов a начинается с 0, поэтому для них список не подходит, создаём и заполняем массив. Для вычисления интеграла используем функцию численного интегрирования quad_qag.*/*

```
(%i8) array(a,N)$
(%i9) fillarray(a,makelist(1/L*quad_qag(f(x)*
cos(n*%pi*x/L),x,-L,L,3)[1],n,0,N));
```

/ Выводим массив коэффициентов ряда Фурье a . */*

```
(%i9) listarray(a);
(%o9) [0.4, -0.318, 0.172, -0.084, 0.0487, -0.0316, ...]
```

/ Вычисляем список коэффициентов ряда Фурье b . Исследуемая функция чётная, поэтому все они равны нулю. */*

```
(%i10) b:makelist(1/L*quad_qag(f(x)*
sin(n*%pi*x/L),x,-L,L,3)[1],n,1,N);
(%o10) [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, ...]
```

/ Вычисляем сумму K первых слагаемых ряда Фурье. */*

```
(%i11) F(x, K):=a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*%pi*x/L)+
b[k]*sin(k*%pi*x/L), k, 1, K);
```

/ Строим три графика суммы ряда Фурье с одним, двумя и N слагаемыми.*/*

```
(%i12) wxplot2d([f(x), F(x, 1), F(x, 2), F(x, N)],
[x, A, B],[style, [lines,3,4],[lines,2,1],
[lines,4,2]], [y, -1,1],
[gnuplot_preamble,"set grid"],
[legend, "x^4","K=2","K=30"], [ylabel,""]);
```

Задание: Разложить в ряд Фурье функции, заданные в Вашем варианте типового расчёта по дифференциальным уравнениям в частных производных, представленном в учебном пособии [17]. Построить графики заданных функций и их разложений в ряд Фурье.

Лекция 74. Аналитические методы решения задач теплопроводности

Решение краевых задач теплопроводности с однородными граничными условиями методом Фурье. Интеграл Фурье. Решение задачи теплопроводности в бесконечном стержне с использованием интеграла Фурье. Решение задачи Коши для полубесконечного стержня

74.1. Расщепление уравнения теплопроводности

Ранее была сформулирована задача теплопроводности для конечного стержня длины l . Математически она сводится к нахождению решения уравнения теплопроводности (72.15), удовлетворяющего начальным условиям (73.6) и заданным граничным условиям при $x = 0$ и $x = l$. Приведем эти уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t > 0,$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x).$$

Задачу будем решать методом разделения переменных Фурье, т.е. будем искать решение в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (74.1)$$

Подставим это выражение в уравнение (72.15):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x) \cdot T'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

откуда:
$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку левая часть получившегося равенства не зависит от x , а правая – от t , они не зависят ни от x , ни от t и, следовательно, эти отношения постоянны:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C. \quad (74.2)$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$\begin{cases} T'(t) - a^2 C T(t) = 0, \\ X''(x) - C X(x) = 0. \end{cases} \quad (74.3)$$

Первое из них имеет общее решение $T(t) = Be^{Ca^2t}$ и, поскольку при $t \rightarrow +\infty$ температура $u(x, t)$ не может неограниченно возрастать, заключаем, что $C < 0$. Обозначим $C = -\lambda^2$, тогда решение первого из уравнений (74.3) примет вид:

$$T(t) = Be^{-\lambda^2 a^2 t}. \quad (74.4)$$

С учётом того, что $C = -\lambda^2$, второе из уравнений (74.3) $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ имеет общее решение:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad (74.5)$$

так как его характеристическое уравнение $s^2 + \lambda^2 = 0$ имеет чисто мнимые корни $s_{1,2} = \pm \lambda i$.

Таким образом, мы получили общее решение уравнения теплопроводности в виде произведения двух функций

$$u(t, x) = Be^{-\lambda^2 a^2 t} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x).$$

Осталось найти константы интегрирования. Для определения констант C_1 и C_2 используются граничные условия на торцах стержня.

74.1.1. *Постоянная температура на торцах стержня.* Рассмотрим прежде всего задачу с нулевой температурой на торцах $u(t, x)|_{x=0} = 0$.

В этом случае граничные условия (73.7) с учётом (74.1) принимают вид

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0.$$

Так как эти равенства справедливы для любых функций $T(t)$ тождественно не равных нулю, Отсюда следует, что

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (74.6)$$

Найдем частное решение $X(x)$, удовлетворяющее граничным условиям (74.6). Подставим (74.6) в (74.5):

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin \lambda l = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = k\pi, k \in Z \Rightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

так как C_k — произвольная константа и с её помощью можно выбирать знак, будем считать, что $k = 1, 2, 3, \dots$

Величины $\lambda_k = k\pi/l$ называется *собственными числами*, а функции $\sin(k\pi x/l)$ — *собственными функциями* второго из уравнений

(74.3). Соответствующие решения первого уравнения из системы (74.3) $T_k(t)$ определяются по формуле (74.4) при значениях

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}; \quad T_k(t) = B_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t}.$$

Подставляя функции $X_k(x)$ и $T_k(t)$ в формулу (74.1), получаем решение $u_k(x, t)$ уравнения (72.15), удовлетворяющее граничным условиям (73.7):

$$u_k(x, t) = B_k C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} = b_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (74.7)$$

где $b_k = B_k C_k$.

Решение $u(x, t)$ уравнения (72.15), удовлетворяющее кроме граничных условий (73.7) ещё и начальным условиям (73.6), будем искать в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-(k\pi/l)^2 a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (74.8)$$

В силу линейности и однородности уравнения (72.15) функция (74.8) также будет его решением, поскольку оно является суммой решений $u_k(x, t)$ этого уравнения.

Кроме того, очевидно, что $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (73.7). Подберем произвольные константы b_k ($k = 1, 2, \dots$) так, чтобы выполнялось начальное условие (73.6):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Таким образом, величины b_k являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$ заданной на $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам:

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (74.9)$$

Следовательно, решение уравнения теплопроводности (72.15) с начальным условием (73.6) и нулевой температурой на концах задаётся рядом (74.8), где коэффициенты b_k определяются по формулам (74.9).

Пусть теперь температура на концах стержня постоянна и отлична от нуля, т.е. граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = h_0, \quad u|_{x=l} = h_1, \quad (74.10)$$

то заменой неизвестной функции $u(x, t)$ на $w(x, t)$:

$$u(x, t) = w(x, t) + \gamma_1 x + \gamma_0,$$

в соответствии с подбором коэффициентов γ_0 и γ_1 можно свести эту задачу к задаче теплопроводности относительно новой неизвестной функции $w(x, t)$, с другими начальными условиями и нулевой температурой на концах.

Действительно, используя предлагаемую замену и граничные условия, для коэффициентов γ_0 и γ_1 получаем систему двух уравнений:

$$u|_{x=0} = w|_{x=0} + \gamma_0, \quad u|_{x=0} = h_0; \quad w|_{x=0} = 0 \Rightarrow h_0 = \gamma_0;$$

$$u|_{x=l} = w|_{x=l} + \gamma_1 l + \gamma_0, \quad u|_{x=l} = h_1; \quad w|_{x=l} = 0 \Rightarrow h_1 = \gamma_1 l + \gamma_0.$$

Решая эту систему, находим γ_1 и γ_0 :

$$\gamma_0 = h_0; \quad \gamma_1 = \frac{h_1 - h_0}{l}.$$

Откуда

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{h_1 - h_0}{l}x + h_0. \quad (74.11)$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, то функция $w(x, t)$ также удовлетворяет уравнению теплопроводности (72.15), как и функция $u(x, t)$. Начальные условия (73.6) для функции $u(x, t)$ заменяются на начальные условия для функции $w(x, t)$:

$$w(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) - \frac{h_1 - h_0}{l}x - h_0, \quad (74.12)$$

а граничные условия (74.10) — на нулевые граничные условия:

$$w|_{x=0} = 0; \quad w|_{x=l} = 0. \quad (74.13)$$

Решая уравнение теплопроводности с начальными условиями (74.12) и нулевыми граничными условиями (74.13), находим решение $w(x, t)$. Решение $u(x, t)$ исходной задачи с начальными условиями (74.10) определяется затем по формуле (74.11).

74.1.2. Торцы стержня теплоизолированы. Рассмотрим теперь задачу, в которой концы стержня теплоизолированы. Как показано в предыдущей лекции, граничные условия в этом случае имеют вид (73.8).

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}|_{x=l} = 0.$$

Задачу будем решать методом Фурье, т.е. будем искать решение в виде (74.1). Подставив это решение в уравнение (72.15), получим равенство (74.2) и два уравнения (74.3). В начале данной лекции уже доказывалось, что значение константы C в (74.2) и (74.3) должно быть отрицательным: $C = -\lambda^2$, и решение второго из уравнений (74.3) имеет вид (74.4). Общее решение второго из уравнений (74.3) имеет вид (74.5).

Граничное условие (73.9) с учётом (74.1) принимает вид:

$$X'(0)T(t) = 0, \quad X'(l)T(t) = 0.$$

Поскольку эти равенства справедливы для любых функций $T(t)$, отсюда следует, что:

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (74.14)$$

Найдем частное решение $X(x)$, удовлетворяющее граничным условиям (74.14), для чего найдем $X'(x)$ и подставим в полученное выражение граничные условия (74.14), определяем:

$$X'(x) = -\lambda C_1 \sin \lambda x + \lambda C_2 \cos \lambda x. \quad (74.15)$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow \lambda C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow \lambda(-C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l) = 0 \Rightarrow \sin \lambda l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda l = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow X_k(x) = C_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Выбирая знак с помощью произвольной константы C_k , будем считать, что $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Здесь добавляется собственное число $k = 0$, так как собственными функциями теперь являются косинусы, а $\cos 0 = 1 \neq 0$. Соответствующие собственным числам $\lambda_k = k\pi/l$ решения $T_k(t)$ определяются по формуле (74.3):

$$T_k(t) = B_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t}.$$

Подставляя функции X_k и $T_k(t)$ в формулу (74.1), получаем решение $u_k(x, t)$ уравнения (72.15), удовлетворяющее граничным условиям (73.9):

$$u_k(x, t) = B_k C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \cos \frac{k\pi x}{l} = a_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad (74.16)$$

где $a_k = B_k C_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Обозначим } B_0 C_0 = \frac{a_0}{2} \Rightarrow u_0(x, t) = \frac{a_0}{2}.$$

Решение $u_k(x, t)$ уравнения (72.15), удовлетворяющее кроме граничных условий (73.9) ещё и начальным условиям (73.6), будем искать в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-(k\pi/l)^2 a^2 t} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad (74.17)$$

где слагаемое $a_0/2$ соответствует собственному числу $\lambda_0 = 0$. Как и в предыдущем случае, убеждаемся, что эта функция является решением уравнения (72.15), удовлетворяющим граничным условиям (73.8). Подберем константы так, чтобы выполнялось начальное условие (73.6):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Таким образом, величины a_k являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$, заданной на $(0, l)$ в ряд Фурье по косинусам

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (74.18)$$

Следовательно, решение уравнения теплопроводности (72.15) с начальным условием (73.6) и теплоизолированными торцами дается рядом (74.17), где коэффициенты a_k определяются по формулам (74.18).

ПРИМЕР 74.1. В конечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) оба торцевых сечения теплоизолированы, а начальная температура постоянна по стержню: $\varphi(x) = u_0$ при $0 \leq x \leq l$. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в любой момент времени.

Решение: Решение задачи с теплоизолированными торцами дается рядом (74.17), где коэффициенты определяются по формулам (74.18):

$$a_k = \frac{2u_0}{l} \int_0^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 2u_0 & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } k > 0 \end{cases}.$$

По формуле (74.17) получаем решение $u(x, t) = a_0/2 = u_0$.

Полученный результат очевиден, так как при полной теплоизоляции стержня постоянная начальная температура сохраняется в нём при всех $t > 0$.

74.1.3. *Смешанные однородные граничные условия.* В заключение данной лекции рассмотрим задачу, в которой один конец (например, левый) теплоизолирован, а другой (правый) — поддерживается при нулевой температуре. В этом случае граничные условия имеют вид (73.11).

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=l} = 0.$$

При решении задачи методом Фурье получаем такие же уравнения (74.2), их общие решения (74.3), (74.4). Граничные условия (73.10) с учётом (74.1) принимают вид:

$$X'(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (74.19)$$

Найдем частное решение $X(t)$, удовлетворяющее граничным условиям (74.19), для чего в выражение (74.15) для $X'(x)$ подставим $x = 0$, получим $X'(0) = 0 \Rightarrow \lambda C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. В выражение (74.5) подставим $x = l$, получим $X(l) = 0 \Rightarrow C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 \cos \lambda l = 0 \Rightarrow \cos \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l} \Rightarrow X_k(x) = C_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Выбирая знак с помощью произвольной константы C_k , считаем, что индекс $k = 0, 1, 2, \dots$. Соответствующие собственным числам $\lambda_k = (2k+1)\pi/(2l)$ решения $T_k(t)$ определяются по формуле (74.4). Подставляя функции $X_k(x)$ и $T_k(t)$ в формулу (74.1), получаем решение уравнения (72.15), удовлетворяющее граничным условиям (73.11):

$$u_k(x, t) = B_k C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = a_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad (74.20)$$

где $a_k = B_k C_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Решение $u_k(x, t)$ уравнения (72.15), удовлетворяющее кроме граничных условий (73.11) ещё и начальным условиям (73.6), будем искать в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t / 4l^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (74.21)$$

Как и раньше, легко убедиться, что эта функция является решением уравнения (72.15), удовлетворяющим граничным условиям (73.11).

Подберем константы a_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) так, чтобы выполнялось начальное условие (73.6):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = \varphi(x). \quad (74.22)$$

Студентам предлагается самостоятельно показать, что система функций $\cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ ортогональна на $(0, l)$. То есть, доказать равенства:

$$\int_0^l \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} l/2 & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}. \quad (74.23)$$

Как и при получении формул для коэффициентов ряда Фурье, домножая обе части равенства (74.22) на $\cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ и интегрируя на $(0, l)$, с учётом (74.23) получаем формулу для коэффициентов:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx. \quad (74.24)$$

Решение уравнения теплопроводности (72.15) с начальным условием (73.6) и граничными условиями (73.11) даётся рядом (74.21), где коэффициенты определяются по формулам (74.24).

ПРИМЕР 74.2. В конечном стержне длины l левый конец теплоизолирован, а правый поддерживается при нулевой температуре. Найти распределение температуры в стержне в произвольный момент $t > 0$, если дано начальное распределение температуры: $u|_{t=0} = l - x$.

Решение: Имеем смешанную задачу для уравнения теплопроводности с граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (74.25)$$

и начальным условием $u|_{t=0} = l - x$.

Решение даётся рядом (74.21), где коэффициенты a_k определяются по формулам (74.24):

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l (l - x) \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \frac{4}{(2k+1)\pi} (l - x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \Big|_0^l +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^l \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \frac{4}{(2k+1)\pi} (l-x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \Big|_0^l - \\
& - \frac{8l}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \Big|_0^l = - \frac{8l}{(2k+1)^2 \pi^2} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - 1 \right) = \\
& = \frac{8l}{(2k+1)^2 \pi^2}.
\end{aligned}$$

Решение в соответствии с (74.21) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-a^2(2k+1)^2 \pi^2 t / 4l^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (74.26)$$

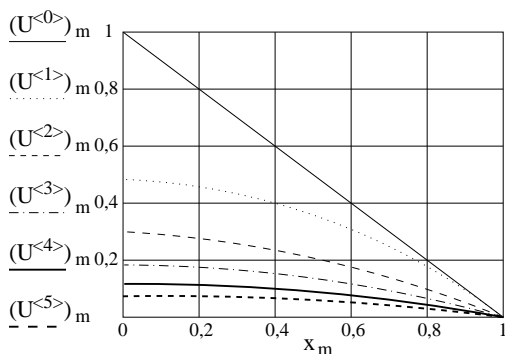


Рис. 44. Изменение температуры со временем

Проведем исследование данного решения. В задаче левый торец теплоизолирован, а правый поддерживается при нулевой температуре, т.е. помещён в термостат, например в очень большой сосуд с таящим льдом. При $t \rightarrow +\infty$ очевидно, что температура во всех точках стержня выровняется и станет равной температуре в термостате, т.е. равной нулю. Из граничных условий очевидно, что в любой момент времени (даже сколь угодно малый) температура принимает на правом торце нулевое значение, а на левом касательная к графику функции её распределения параллельна оси Ox . На рис. 44 представлены кривые $u(x)$ для различных моментов времени t , рассчитанные по формуле (74.26).

Решением примера 74.2 является функция двух переменных, представленная в виде ряда. Для построения графика данной функции необходимо для фиксированного значения временной переменной t найти сумму ряда в фиксированных точках $x_m, m = 0, 1, \dots, M$ по пространственной переменной x , а затем построить график. Такую трудоемкую работу вручную, или даже с калькулятором, выполнять не очень интересно и очень долго, т.е. необходимо применить компьютер. Эту задачу удобнее решать средствами коммерческого пакета MathCad или свободного программного продукта Maxima. Более того, при использовании этого пакета нет необходимости вручную вычислять коэффициенты a_k .

74.1.4. *Сводные формулы решения однородных задач теплопроводности методом Фурье.* Для удобства использования полученных в данной лекции результатов выпишем отдельно решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = \varphi(x)$ для трёх типов однородных граничных условий.

$$1) \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-(k\pi/l)^2 a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\text{где } b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$2) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-(k\pi/l)^2 a^2 t} \cos \frac{k\pi x}{l},$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$3) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = u_{x=l} = 0.$$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \cos \lambda_k x,$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}.$$

74.2. Интеграл Фурье и задача теплопроводности в бесконечном стержне

Чтобы решить уравнение теплопроводности для бесконечного и полубесконечного стержня нам понадобится новое понятие — *интеграл Фурье*, являющийся некоторым обобщением понятия ряда Фурье.

Ниже будет показано, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале и $\frac{1}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится (говорят, что $f(x)$ абсолютно интегрируема), то функцию $f(x)$ можно в этом случае представить интегралом Фурье, т.е. во всех точках непрерывности

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha, \quad (74.27)$$

а в точках разрыва выполняется:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha.$$

Коэффициенты $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \alpha \tau d\tau; \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \alpha \tau d\tau. \end{aligned} \quad (74.28)$$

В случае ряда Фурье частоты слагаемых образуют, как говорят, дискретный спектр: $\frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \dots, \frac{k\pi}{l}, \dots$

В случае интеграла Фурье частоты образуют непрерывный спектр, принимая все неотрицательные значения:

$$\alpha \in [0, +\infty).$$

Аналогично тому, как это делалось в лекции 72 для коэффициентов Фурье, можно показать, что для случая чётной функции $f(x)$

коэффициенты $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ определяются по формулам:

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \alpha \tau d\tau, \quad B(\alpha) = 0, \quad (74.29)$$

и, следовательно интеграл Фурье примет вид:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\alpha) \cos \alpha x dx. \quad (74.30)$$

Для случая нечётной функции $f(x)$ соответствующие формулы принимают вид:

$$A(\alpha) = 0, \quad b(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \alpha \tau d\tau, \quad (74.31)$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(\alpha) \sin \alpha x dx. \quad (74.32)$$

Заметим, что интеграл Фурье можно представить в более коротком виде.

Подставив в формулу (74.27) выражения (74.28) для коэффициентов получим:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) (\cos \alpha \tau \cos \alpha x + \sin \alpha \tau \sin \alpha x) d\tau d\alpha.$$

Это выражение с учётом тригонометрической формулы

$$\cos \alpha(\tau - x) = \cos \alpha \tau \cos \alpha x + \sin \alpha \tau \sin \alpha x$$

можно переписать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \alpha(\tau - x) dx. \quad (74.33)$$

Можно показать, что представление функции в виде интеграла Фурье получается предельным переходом из разложения этой функции в ряд Фурье при $l \rightarrow +\infty$.

Ранее (см. с. 312) была сформулирована задача теплопроводности для бесконечного стержня. Математически она сводится к нахождению решения уравнения теплопроводности (72.15), удовлетворяющего начальным условиям (73.6). Так как стержень бесконечный, граничные условия не задаются.

Задачу будем решать методом Фурье, т.е. будем искать решение в виде произведения двух функций одного переменного:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

По аналогии с использованием метода Фурье для конечного стержня частное решение уравнения (72.15), соответствующее определённому λ , получается в следующем виде:

$$u_\lambda(x, t) = (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

При решении методом Фурье задачи для конечного стержня в подразделе 72.2.3 получалось, что для удовлетворения заданных граничных условий необходимо, чтобы параметр λ принимал значения, образующие некоторую последовательность λ_k (собственные числа), а решение, удовлетворяющее начальным условиям, искалось в виде ряда.

В рассматриваемой сейчас задаче граничных условий нет и параметр λ может принимать любые положительные значения. Решение, удовлетворяющее начальным условиям (73.6), естественно искать в виде соответствующего интеграла по параметру λ , т.е. в виде интеграла Фурье:

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda. \quad (74.34)$$

Можно показать, что эта функция также является решением уравнения (72.15). Функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ подберем так, чтобы решение (74.33) удовлетворяло условию (73.6). Подставив в выражение (74.34) значение $t = 0$, получим:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \Rightarrow \int_0^{+\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda = \varphi(x).$$

Это есть разложение функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье, в соответствии с формулами (74.28) получаем для коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$

формулы

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \lambda \tau d\tau; \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \sin \lambda \tau d\tau. \end{aligned} \quad (74.35)$$

Подставляя выражения (74.35) в формулу (74.34), получаем решение уравнения теплопроводности в виде интеграла Фурье, при этом воспользуемся формулой (74.33):

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \lambda(\tau - x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\tau. \quad (74.36)$$

Запишем получившееся решение в виде так называемого интеграла Пуассона, для чего примем без доказательства следующую формулу:

$$\int_0^{+\infty} \cos \lambda(\tau - x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-(\tau-x)^2/(4a^2 t)}. \quad (74.37)$$

Поменяв в (74.36) порядок интегрирования и используя формулу (74.37), получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \left(\int_0^{+\infty} \cos \lambda(\tau - x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-(\tau-x)^2/(4a^2 t)} d\tau. \end{aligned}$$

Последний интеграл носит название *интеграла Пуассона*.

Таким образом, решение уравнения теплопроводности (72.15) для бесконечного стержня с заданными начальными условиями (73.6) получилось в виде интеграла Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-(\tau-x)^2/(4a^2 t)} d\tau. \quad (74.38)$$

ПРИМЕР 74.3. Начальное распределение температуры бесконечно-го теплоизолированного стержня задаётся соотношениями

$$u(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_1, \\ u_0, & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

Найти распределение температуры в любой момент $t > 0$.

Решение: Искомое распределение даётся интегралом Пуассона (74.38):

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(\tau-x)^2/(4a^2t)} d\tau.$$

Полученный интеграл легко выражается через известную функцию Лапласа $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-S^2/2} dS.$$

Для функции Лапласа имеются таблицы значений этой функции, кроме того, во многих пакетах компьютерных программ имеются встроенные функции для вычисления функции Лапласа. Напомним, что функция Лапласа является нечётной $\Phi(-z) = -\Phi(z)$, монотонно возрастающей на всей числовой оси. Кроме того, $\Phi(-\infty) = -0,5$, $\Phi(+\infty) = 0,5$. Сделаем замену переменных: $\frac{\tau-x}{a\sqrt{2t}} = S$, откуда $d\tau = a\sqrt{2t}dS$.

Получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x_1-x}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x_2-x}{a\sqrt{2t}}} e^{-S^2/2} a\sqrt{2t} dS = \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\frac{x_2-x}{a\sqrt{2t}}} e^{-S^2/2} dS + \int_{\frac{x_1-x}{a\sqrt{2t}}}^0 e^{-S^2/2} dS \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= u_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_2-x}{a\sqrt{2t}}} e^{-S^2/2} dS - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_1-x}{a\sqrt{2t}}} e^{-S^2/2} dS \right) \Rightarrow \\
 &u(x, t) = u_0 \left(\Phi \left(\frac{x_2 - x}{a\sqrt{2t}} \right) - \Phi \left(\frac{x_1 - x}{a\sqrt{2t}} \right) \right). \quad (74.39)
 \end{aligned}$$

Отметим, что аргументы $\frac{x_2 - x}{a\sqrt{2t}}$ и $\frac{x_1 - x}{a\sqrt{2t}}$ при $x < x_1$ и при $x > x_2$ имеют одинаковые знаки, а при $x_1 < x < x_2$ — разные. А так как функция $\Phi(z)$ является нечётной и $\Phi(+\infty) = 0,5$, имеем, что при $t = 0$ правая часть в формуле (74.39) при $x < x_1$ и $x > x_2$ обращается в нуль, а при $x_1 < x < x_2$ равна u_0 , т.е. начальные условия удовлетворяются.

Если в примере 74.3 задать конкретные значения a , x_1 и x_2 , например $a = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, тогда формула (74.39) примет вид :

$$u(x, t) = u_0 \left\{ \Phi \left(\frac{3 - x}{\sqrt{2t}} \right) - \Phi \left(\frac{1 - x}{\sqrt{2t}} \right) \right\}.$$

В заключение, не останавливаясь подробно на выводе формул, приведем конечные результаты, позволяющие решать уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня, когда распределение температуры $u(x, t)$, кроме уравнения (72.15) и начального условия (73.6) должно удовлетворять граничному условию при $x = 0$. В частности, если в точке $x = 0$ поддерживается нулевая температура, граничное условие имеет вид: $u(0, t) = 0$. Для решения этой смешанной задачи воспользуемся формулами, полученными для бесконечной области. Для этого продолжим функцию $\Phi(x)$, задающую начальную температуру, на отрицательную полуось $x < 0$ нечётным образом. Решение полученной задачи найдется по формуле (74.38), которая после несложных преобразований с учётом нечётности $\Phi(x)$ примет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4a^2t}} \right) d\tau. \quad (74.40)$$

Решение смешанной задачи для полубесконечного стержня, когда левый конец теплоизолирован, т.е. граничные условия имеют вид: $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, получается по формуле (74.38), если начальное условие

— функцию $\Phi(x)$ продолжить на отрицательную полуось чётным образом. Можно показать, что в этом случае решение примет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4a^2t}} \right) d\tau. \quad (74.41)$$

Практическое занятие 74. Решение задач теплопроводности аналитическими методами

Теория по данному практическому занятию приведена в лекции 72.

Самостоятельная работа

Решить краевую задачу теплопроводности с однородными граничными условиями:

ПРИМЕР 74.1.

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} x - L/2, & x \in (0, L/2), \\ 0, & x \notin (0, L/2). \end{cases}$$

ПРИМЕР 74.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}, u|_{x=L} = 0, \quad u|_{t=0} = \frac{100}{L}(L - x), \quad x \in [0, L].$$

ПРИМЕР 74.3.

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} 100, & x \in (0, L/2], \\ 20, & x \in (L/2, L]. \end{cases}$$

ПРИМЕР 74.4. Решить уравнение теплопроводности на бесконечной области $x \in (-\infty, +\infty)$ с заданными начальными условиями:

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 100(1 - x/10), & x \in [0, 10], \\ 100(1 + x/10), & x \in [-10, 0), \\ 0, & |x| > 10. \end{cases}$$

Решить уравнение теплопроводности на полубесконечной области $x \in (0, +\infty)$ с заданными граничными и начальными условиями:

ПРИМЕР 74.5. $u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} U_0, & x \in [2, 10], \\ 0, & x \in (0, 2) \cup (10, +\infty). \end{cases}$

ПРИМЕР 74.6. $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} U_0, & 0 < x < L, \\ 0, & x \geq L. \end{cases}$

Лекция 75. Решение задач теплопроводности методом сеток

Решение задач теплопроводности методом сеток. Явная и неявная схемы. Исследование устойчивости конечно-разностных схем для краевых задач описываемых уравнением теплопроводности

75.1. Решение задач теплопроводности методом сеток

Основные понятия метода сеток для уравнений в частных производных первого порядка изложены в лекции 70. Поэтому в данной лекции общие вопросы метода сеток рассматриваться не будут. В добавление к рассмотренным в этих лекциях вопросам необходимо вывести формулы, связанные с присутствием в дифференциальном уравнении производной второго порядка по пространственной переменной x . Хотя, как мы уже отмечали, метод сеток применим к задачам различного типа, в том числе и нелинейным, для простоты и конкретности рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (75.1)$$

Найти решение уравнения теплопроводности в прямоугольной области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ при начальном условии

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (75.2)$$

а граничные условия запишем в более общем виде:

$$\begin{cases} \alpha_0 u \Big|_{x=0} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \gamma_1(t); \\ \beta_0 u \Big|_{x=l} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \gamma_2(t). \end{cases} \quad (75.3)$$

Прежде всего остановимся на аппроксимации второй производной в узле сетки (n, m) . Для этого необходимо привлечь не менее трёх узлов. Используем самую простейшую аппроксимацию. Сложив третье и четвертое уравнения (70.7) и выразив из этой суммы вторую

производную, получим:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2). \quad (75.4)$$

Рассмотрим две схемы, представленные на рис. 45.

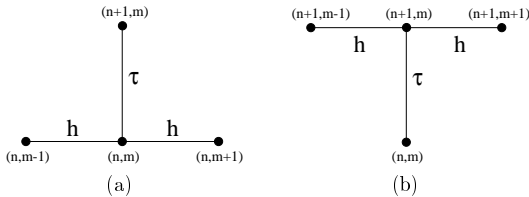


Рис. 45. Шаблоны разностных схем уравнения теплопроводности

75.1.1. *Явная схема.* Явная схема (вторая производная $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_m^n$ расписывается по узлам n -ого слоя, рис. 45,а).

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0, \\ m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ u_m^0 = \varphi_0(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ \alpha_0 u_0^{n+1} + \alpha_1 \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} = \gamma_1(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \beta_0 u_M^{n+1} + \beta_1 \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{h} = \gamma_2(t^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (75.5)$$

Уравнение (75.5) представляет собой замкнутую систему $(N+1) \cdot (M+1)$ линейных алгебраических уравнений. Введем параметр $r = \tau a^2 / h^2$ и перепишем эту систему в следующем виде

$$\begin{cases} u_m^0 = \varphi_0(x_m), & m = 0, 1, \dots, M, & (a) \\ u_m^{n+1} = (1-2r)u_m^n + r(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n), & m = 1, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, & (b) \\ u_0^{n+1} = \frac{-\alpha_1/h}{\alpha_0 - \alpha_1/h} u_1^{n+1} + \frac{\gamma_1(t^{n+1})}{\alpha_0 - \alpha_1/h}, & n = 0, 1, \dots, N-1, & (c) \\ u_M^{n+1} = \frac{\beta_1/h}{\beta_0 + \beta_1/h} u_{M-1}^{n+1} + \frac{\gamma_2(t^{n+1})}{\beta_0 + \beta_1/h}, & n = 0, 1, \dots, N-1. & (d) \end{cases} \quad (75.6)$$

Алгоритм решения краевой задачи теплопроводности по явной схеме:

- (1) $n = 0$. По формуле (75.6, *a*) находим решение на нулевом временном слое при $t = 0$
- (2) По формулам (75.6, *b*) получаем значение сеточной функции u во всех внутренних узлах ($m = 1, 2, \dots, M - 1$) $n + 1$ -го временного слоя при $t = (n + 1)\tau$.
- (3) Подставляем граничные условия на левой (75.6, *c*) и правой (75.6, *d*) границе области при $t = (n + 1)\tau$.
- (4) $n = n + 1$
- (5) Если $n < N$, переход на пункт 2.
- (6) Печать результатов расчёта.

75.1.2. *Неявная схема.* Неявная схема (вторая производная в точке $(n + 1, m)$ расписывается по узлам $n + 1$ -ого слоя, рис. 45, *b*).

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a^2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0, \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad (75.7)$$

Начальные и граничные условия остаются такими же, как и для явной схемы.

В этой схеме значения u в каком-либо узле $(n + 1)$ -ого слоя не могут быть определены независимо от соответствующих значений в других точках этого слоя. Для разрешения получаемой на $(n + 1)$ -ом слое системы алгебраических трёхточечных уравнений, аппроксимирующих краевую задачу, наибольшее распространение нашёл метод прогонки, известный студентам по решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Повторим изложение метода прогонки для решения системы алгебраических уравнений, записанных для рассматриваемого $(n + 1)$ -ого слоя. Пусть нам известны все значения функции u с индексом n . Тогда для неизвестных $u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{M-1}^{n+1}$ получим из (75.7) следующую систему линейных уравнений:

$$a_m \cdot u_{m-1}^{n+1} + b_m \cdot u_m^{n+1} + c_m \cdot u_{m+1}^{n+1} = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (75.8)$$

где $a_m = c_m = -r$, $b_m = 1 + 2r$, $f_m = u_m^n$.

Разработаем алгоритм определения сеточной функции u на $(n + 1)$ -ом временном слое. Введем обозначение $y_m = u_m^{n+1}$ и перепишем

систему уравнений (75.8), (75.6,c), (75.6,d) в виде:

$$\begin{cases} a_m y_{m-1} + b_m y_m + c_m y_{m+1} = f_m, & m = 1, 2, \dots, M-1; \\ y_0 = L_0 y_1 + K_0; \\ y_M = \tilde{L}_M y_{M-1} + \tilde{K}_M, \end{cases} \quad (75.9)$$

где

$$L_0 = \frac{-\alpha_1/h}{\alpha_0 - \alpha_1/h}; \quad K_0 = \frac{\gamma_1(t^{n+1})}{\alpha_0 - \alpha_1/h}; \quad (75.10)$$

$$\tilde{L}_M = \frac{\beta_1/h}{\beta_0 + \beta_1/h}; \quad \tilde{K}_M = \frac{\gamma_2(t^{n+1})}{\beta_0 + \beta_1/h}. \quad (75.11)$$

Решение системы (75.9) будем искать методом прогонки, который мы уже применяли при решении краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (см. подраздел 68.6.2).

По аналогии с формулами для y_0 , будем искать решение во внутренних точках в виде

$$y_m = L_m y_{m+1} + K_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (75.12)$$

Подставив это выражение при $m = m-1$ в уравнение (75.9,a), получим:

$$a_m (L_{m-1} y_m + K_{m-1}) + b_m y_m + c_m y_{m+1} = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1.$$

или

$$y_m = \frac{-c_m}{a_m L_{m-1} + b_m} y_{m+1} + \frac{f_m - a_m K_{m-1}}{a_m L_{m-1} + b_m}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1.$$

Следовательно,

$$L_m = \frac{-c_m}{a_m L_{m-1} + b_m}; \quad K_m = \frac{f_m - a_m K_{m-1}}{a_m L_{m-1} + b_m}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (75.13)$$

Коэффициенты K_m , L_m называются прогоночными коэффициентами и вычисляются по рекуррентным формулам (75.13)

Рассмотрим теперь граничные условия при $x = l$. Составим систему двух уравнений (75.9,c) и (75.12) при $m = M-1$

$$\begin{cases} y_M = L_M y_{M-1} + K_M; \\ y_{M-1} = L_{M-1} y_M + K_{M-1}. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$y_M = \frac{L_M K_{M-1} + K_M}{1 - L_M L_{M-1}}.$$

После подстановки вместо \tilde{L}_M и \tilde{K}_M их значений (75.10, 75.11), получаем

$$y_M = \frac{\beta_1 K_{M-1} + h\gamma_2(t^{n+1})}{\beta_0 h + \beta_1 - \beta_1 L_{M-1}}. \quad (75.14)$$

Рассмотрим теперь алгоритм определения решения y_m , $m = 0, 1, \dots, M$ методом прогонки.

Прямой ход метода прогонки.

- (1) $m = 0$. Вычисление прогоночных коэффициентов L_0, K_0 по формулам (75.10)
- (2) $m = m + 1$. Вычисление прогоночных коэффициентов L_m, K_m по формулам (75.13)
- (3) Если $m < M$, то переход на пункт 2.
Обратный ход метода прогонки.
- (4) По формуле (75.14) вычисляется y_M .
- (5) Вычисление y_m по формулам (75.12). $m = m - 1$.
- (6) Если $m > 0$, переход к пункту 5.
- (7) Выход.

Отметим, что описанный метод прогонки для решения системы трёхточечных алгебраических уравнений на $(n+1)$ -ом временном слое (75.8) в рассматриваемой задаче слабо чувствителен к малым возмущениям, так как условие его устойчивости $|b_m| > |a_m| + |c_m|$ выполняется всегда.

Алгоритм решения краевой задачи теплопроводности по неявной схеме.

- (1) $n = 0$. По формуле (75.6,а) находим решение на нулевом временном слое при $t = 0$.
- (2) Применяем алгоритм решения метода прогонки для получения решения на $(n + 1)$ -ом временном слое при $t = (n + 1)\tau$.
- (3) $n = n + 1$.
- (4) Если $n < M$, переход на пункт 2.
- (5) Печать результатов расчёта.

Очевидно, что алгоритм решения по явной схеме проще, чем по неявной. Порядок аппроксимации у этих схем одинаков и равен $O(\tau) + O(h^2)$. Однако с точки зрения устойчивости неявная схема предпочтительнее, что мы покажем с помощью принципа Неймана.

Запишем уравнение возмущений соответственно для явной (75.5) и неявной (75.7) схем:

$$\frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} - a^2 \frac{\delta u_{m+1}^n - 2\delta u_m^n + \delta u_{m-1}^n}{h^2} = 0. \quad (75.15)$$

$$\frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\tau} - a^2 \frac{\delta u_{m+1}^{n+1} - 2\delta u_m^{n+1} + \delta u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0. \quad (75.16)$$

После подстановки в них $\delta u_m^n = \lambda^n e^{iwh}$ и сокращения на $\lambda^n e^{iwh}$ получим характеристические уравнения, которые затем исследуем.

1) Явная схема (75.5).

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{iwh} - 2 + e^{-iwh}}{h^2} = 0. \quad (75.17)$$

Учитывая, что $e^{iwh} + e^{-iwh} = 2 \cos wh$ и $1 - \cos wh = 2 \sin^2 wh/2$, получаем $e^{iwh} - 2 + e^{-iwh} = 2(\cos wh - 1) = -4 \sin^2 wh/2$ и, следовательно, из (75.17)

$$\lambda = 1 - 4 \frac{\tau a^2}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2}. \quad (75.18)$$

Ясно, что для любого соотношения шагов τ/h^2 величина $\lambda \leq 1$, но может оказаться $\lambda < -1$, в таком случае условие Неймана не будет выполняться. Возьмём самые опасные частоты, для которых $\sin^2 wh/2 = 1$, тогда условие Неймана выполняется, если

$$\lambda = 1 - 4ra^2 \geq -1,$$

отсюда

$$r \leq \frac{1}{2a^2}. \quad (75.19)$$

Итак, для того, чтобы явная схема (75.5) была бы устойчивой, на отношение шагов по t и x должно быть наложено жёсткое условие

$$\tau/h^2 \leq \frac{1}{2a^2}.$$

2) Неявная схема (75.7)

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a^2 \frac{\lambda(e^{iwh} - 2 + e^{-iwh})}{h^2} = 0. \quad (75.20)$$

После выкладок, подобных проведённым для явной схемы найдем

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 wh/2}. \quad (75.21)$$

Очевидно, что $|\lambda| \leq 1$ при любом r неявная схема абсолютно устойчива.

Практическое занятие 75. Решения однородных задач теплопроводности

75.2. Решение краевых однородных задач теплопроводности

Теоретический материал для данной лабораторной работы приведен в лекции 75. Рассмотрим аналитическое решение однородных задач теплопроводности с простейшими начальными условиями. Аналитические решения данных задач являются достаточно трудоемкими, и при этом решение получается в виде ряда Фурье. Следовательно для визуализации полученного решения необходимо использование ЭВМ. Поэтому решение задач подобного рода можно сразу решать на ЭВМ, используя программные пакеты MathCad или Maxima.

На базе примера 74.2 напомним MathCad-программу для решения более общей краевой задачи с граничными условиями (74.25) и начальными условиями $u|_{t=0} = f(x)$. В качестве функции $f(x)$ возьмём функцию примера 74.2.

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 0 \quad \text{TOL} := 0.00001 \quad L := 1 \quad T_{\max} := 1 \\
 & K := 100 \quad N := 5 \quad M := 10 \quad A := 1 \\
 & k := 0..K \quad n := 0..N \quad m := 0..M \quad f(x) := L - x \\
 & a_k := \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) dx \\
 & u(x, t) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot e^{-\left(\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \pi}{2 \cdot L} \cdot A\right)^2 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{(2 \cdot k + 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L}\right) \\
 & h := \frac{L}{M} \quad \tau := \frac{T_{\max}}{N} \quad x_m := h \cdot m \quad t_n := \tau \cdot n \\
 & U_{m,n} := u(x_m, t_n)
 \end{aligned}$$

Далее строим график функции $u(x, t)$ для шести значений временной координаты t . Результаты решения по данной программе представлены на рис. 44.

Для решения задачи с другими начальными условиями необходимо вместо приведённой выше функции $f(x)$ ввести новую и подать команду **Вычислить**, нажав клавишу F9.

Для решения задач с другими типами однородных граничных условий необходимо по другим формулам вычислять коэффициенты a_k и функцию $u(x, t)$ по формулам соответствующим рассматриваемым граничным условиям. Для решения краевой задачи теплопроводности с граничными условиями в виде теплоизолированных торцов (73.8) при вычислении коэффициентов a_k используются формулы (74.9), а для вычисления функции $u(x, t)$ — формула (74.8). Для решения краевой задачи теплопроводности со смешанными однородными граничными условиями (73.11), для вычисления коэффициентов a_k используются формулы (74.24), а для вычисления функции $u(x, t)$ — формула (74.21).

Приведем теперь Maxima-программу для решения этой же задачи.

```
(%i1) numer:true$ fpprintprec:4$ ratprint:false $ L:1$
(%i5) N:5$ M:10$ K:100$ Tmax:1$
(%i8) f(x):=L-x$

/* Вычисляем массив коэффициентов A ряда Фурье (74.9).*/
%i9) array(A, K)$
(%i10) fillarray(A, makelist(2/L*(quad_qag(f(x)*
      cos((2*k+1)*%pi/(2*L)*x), x, 0, L, 3)[1]), k, 0, K));

/* Программируем функцию, определяющую решение поставленной
краевой задачи теплопроводности с однородными граничными усло-
виями, по формулам (74.8).*/
(%i11) u(x,t):=sum(A[k]*exp(-(2*k+1)*%pi/(2*L))^2*t)*
      cos((2*k+1)*%pi/(2*L)*x), k, 0, K);

/* Вычисляем шаг по пространственной координате h, и временной
координате tau.*/
(%i12) h:L/M; tau:Tmax/N;

/* Создаём и вычисляем массивы координат по переменной x и t.*/
(%i14) array(X, M)$
      fillarray(X, makelist(h*m, m, 0, M));
(%i16) array(T, N)$
      fillarray(T, makelist(tau*n, n, 0, N));

/* Вычисляем значение решения по временным слоям  $t = T[n]$  и за-
поминаем их по строкам в двумерном массиве U. Создаём шесть
списков для построения графиков решений по временным слоям.*/
(%i18) G0:makelist([X[m], u(X[m], T[0])], m, 0, M);
```

```
G1:makelist([X[m], u(X[m], T[1])], m, 0, M);
G2:makelist([X[m], u(X[m], T[2])], m, 0, M);
G3:makelist([X[m], u(X[m], T[3])], m, 0, M);
G4:makelist([X[m], u(X[m], T[4])], m, 0, M);
G5:makelist([X[m], u(X[m], T[5])], m, 0, M);
```

/ Строим шесть графиков на одной диаграмме.*/*

```
(%i24) wxplot2d([[discrete, G0], [discrete, G1],
[discrete, G2], [discrete, G3], [discrete, G4], [discrete, G5]],
[y, 0, 1], [style, [lines, 4, 1], [lines, 2, 2], [lines, 4, 3],
[lines, 2, 4], [lines, 4, 5], [lines, 2, 6]],
[gnuplot_preamble, "set grid"], [ylabel, ""],
[legend, "t=0", "t=0.2", "t=0.4", "t=0.6", "t=0.8", "t=1.0"]);
```

75.3. Решение задач теплопроводности на бесконечной области

Рассмотрим теперь решение задач теплопроводности в бесконечной области. Теория по данной задаче рассматривалась в лекции 74.

В качестве примера решения задачи теплопроводности на бесконечной области средствами пакета MathCad рассмотрим задачу 74.3, решенную в лекции 74. При этом примем $u_0 = 100$, $a = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x \in [A, B]$, $A = -3$, $B = 7$.

$$\begin{aligned}
 TOL &:= 0.0001 & ORIGIN &:= 0 & N &:= 5 & M &:= 100 \\
 A &:= -3 & B &:= 7 & n &:= 0..N & m &:= 0..M & h &:= \frac{B-A}{M} \\
 t_0 &:= 0 & t_1 &:= 0.1 & t_2 &:= 0.4 & t_3 &:= 1 & t_4 &:= 5 & t_5 &:= 20 \\
 x_m &:= A + h \cdot m & a &:= 1 \\
 \Psi(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \vee x > 3 \\ 100 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 u(x, t) &:= \begin{cases} \Psi(x) & \text{if } t < 0.0001 \\ \frac{1}{2 \cdot a \cdot \sqrt{\pi \cdot t}} \int_1^3 \Psi(\tau) \cdot e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4 \cdot a^2 \cdot t}} d\tau & \text{otherwise} \end{cases} \\
 U_{m,n} &:= u(x_m, t_n)
 \end{aligned}$$

Результаты расчёта представлены на рис. 46.

С помощью пакета программ MathCad можно построить график распределения температуры по стержню в последующие моменты времени (см. рис. 46). На рисунке приведены значения функции температур стержня $u(x, t)$ для шести значений временной координаты: $t = \{0; 0, 1; 0, 4; 1; 5; 20\}$.

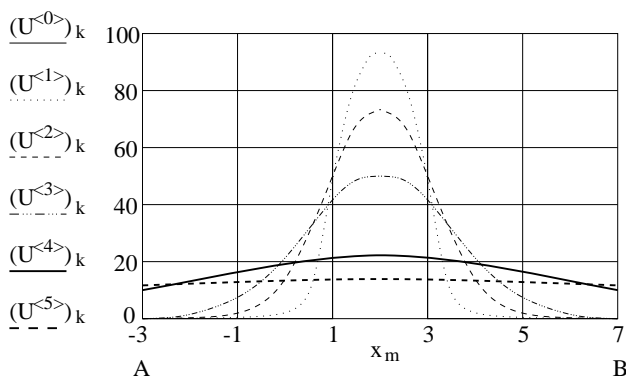


Рис. 46. Изменение температуры со временем

Из графиков видно, что со временем тепло переходит от более нагретых участков стержня к менее нагретым. При этом площадь между графиком функции $U(x, t^n)$ и осью абсцисс остаётся постоянной. Температура в стержне постепенно выравнивается и при $t \rightarrow +\infty$ очевидно, что температура в любой точке стержня $u \rightarrow 0$. Этот пример даёт наглядное представление о процессе распространения тепла по стержню.

В рамка пакета Maxima, программа решающая эту же задачу имеет вид.

```
(%i1) a:1$ numer:true$ fpprintprec:5$ ratprint:false$
(%i5) $ M:20$ N:5$ A:-3.0$ B:7.0$ h:(B-A)/M;
/* Функция задающая начальную температуру.*/
(%i9) psi(x):=(if (x<1 or x>3) then 0.0 else 100);
/* Функция определяющая распределение температуры.*/
(%i10) u(x,t):=(if t<0.0001 then psi(x) else
1/(2*a*sqrt(%pi*t))*quad_qag(psi(z)*
exp(-(z-x)^2/(4*a^2*t)),z,1,3,5)[1]);
```

```

/* Массив узловых пространственных координат.*/
(%i11) array(X,M);fillarray(X,makelist(A+k*h,k,0,M));
/* Массив временных координат.*/
(%i13) array(T,N)$ fillarray(T,[0,0.1,0.4,1,5,20]);
/* Создание списков для построения графикой.*/
(%i15) G0:makelist([X[k],u(X[k],T[0])],k,0,M);
      G1:makelist([X[k],u(X[k],T[1])],k,0,M);
      G2:makelist([X[k],u(X[k],T[2])],k,0,M);
      G3:makelist([X[k],u(X[k],T[3])],k,0,M);
      G4:makelist([X[k],u(X[k],T[4])],k,0,M);
      G5:makelist([X[k],u(X[k],T[5])],k,0,M);

/* Построение 6 графиков на одной диаграмме.*/
(%i21) wxplot2d([[discrete,G0],[discrete,G1],
      [discrete,G2],[discrete,G3],[discrete,G4],
      [discrete,G5]], [style,[lines,4,1],[lines,2,2],
      [lines,4,3],[lines,2,4],[lines,4,5],
      [lines,4,6]], [gnuplot_preamble,"set grid"],
      [ylabel,""], [legend, "t=0", "t=0.2", "t=0.4",
      "t=0.6", "t=0.8", "t=1.0"]]);

```

Задание: Решить средствами пакета MathCad или Maxima задание 9,а и 10,а Вашего варианта типового расчёта по уравнениям в частных производных из учебного пособия [18].

Лекция 76. Вывод волнового уравнения

Вывод волнового уравнения. Задача колебаний струны. Задача о продольных колебаниях стержня. Задача о крутильных колебаниях вала. Решение задачи о свободных колебаниях бесконечной струны методом Даламбера

Рассмотрим три физические задачи, приводящие к одномерному волновому уравнению (72.14).

76.1. Задача колебания струны

Рассмотрим задачу о колебаниях струны. Если вывести струну из положения равновесия (оттянуть её или ударить по ней), то струна

начнёт колебаться. При выводе уравнения сделаем ряд предположений, не затрагивающих существо процесса.

Предположение 1. Будем предполагать, что все точки струны движутся перпендикулярно её положению равновесия, причём в каждый момент струна находится в одной и той же плоскости, т. е. рассматриваем *плоские поперечные колебания*.

Выберем в плоскости колебаний струны систему координат xOu , где u означает отклонение струны от положения равновесия, а x — расстояние вдоль струны. Требуется найти зависимость u от x и t , т. е. функцию $u(x, t)$. В каждый фиксированный момент времени, т. е. при $t = \text{const}$, график $u(x, t)$ представляет форму струны в момент t , $u'_x(x, t)$ — угловой коэффициент касательной в точке x , т. е. $\text{tg } \alpha$ при $x = \text{const}$. Функция $u(x, t)$ даёт закон движения точки струны с абсциссой x вдоль оси Ou , $u'_t(x, t)$ — скорость этого движения, $u''_{tt}(x, t)$ — ускорение.

Предположение 2. Считаем струну *абсолютно гибкой*, т. е. не сопротивляющейся изгибу: если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от любой точки M (на рис. 47 левее точки M), то сила натяжения \bar{T} , заменяющая действие удалённой части, всегда направлена по касательной к струне.

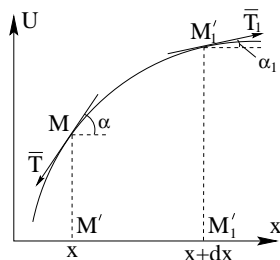


Рис. 47

Предположение 3. Струна предполагается упругой и *подчиняющейся закону Гука*; согласно этому закону, изменение величины силы натяжения пропорционально изменению длины струны.

Предположение 4. Считаем струну *однородной*, т. е. её линейная плотность (предел отношения массы данного участка к его длине, когда последняя стремится к нулю) постоянна и равна ρ .

Предположение 5. Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, пренебрегаем.

Предположение 6. Будем рассматривать только малые колебания струны, при которых величины $u(x, t)$ и $u'_x(x, t)$ настолько малы, что можно пренебречь их квадратами. Тогда $\cos \alpha \approx 1$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, где α — угол касательной к струне с осью $0u$.

Из сделанных предположений вытекает два следствия.

Следствие 1. Можно пренебречь изменением длины любого участка струны, т.е. $|\overline{MM_1}| = |\overline{M'M'_1}|$. Действительно, как известно, длина дуги $|\overline{MM_1}|$ определяется по формуле:

$$|\overline{MM_1}| = \int_x^{x_1} \sqrt{1 + u_x'^2} dx.$$

Согласно предположению 6, можно пренебречь величиной $u_x'^2$ по сравнению с единицей. Получаем:

$$|\overline{MM_1}| \approx \int_x^{x_1} dx = x_1 - x = |\overline{M'M'_1}|.$$

Следствие 2. Величину силы натяжения T можно считать постоянной, т.е.: $|\overline{T}| = |\overline{T_1}| = T$.

Действительно, по закону Гука, натяжение струны остаётся неизменным, т.к. по следствию 1 можно пренебречь изменением длины любого участка.

Перейдем теперь к выводу уравнения колебаний струны. Будем учитывать внешние силы, действующие на струну в плоскости параллельно оси $0u$. Обозначим $g(x, t)$ — линейную плотность внешних сил (предел отношения величины равнодействующей этих сил, приложенных к данному участку, к его длине, когда последняя стремится к нулю). Найдем все силы, действующие на участок $\overline{MM_1}$, и применим к нему второй закон Ньютона. Так как колебания поперечные (предположение 1), достаточно ограничиться составляющими сил по оси $0u$.

Сумма проекций на ось $0u$ сил натяжения равна (см. рис. 47):

$$F_1 = |\overline{T_1}| \sin \alpha_1 - |\overline{T}| \sin \alpha = T(\sin \alpha_1 - \sin \alpha) = T(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha).$$

Здесь мы воспользовались предположением 6 и следствием 2.

Далее, поскольку $\operatorname{tg} \alpha = u'_x(x, t)$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = u'_x(x + dx, t)$,

$$F_1 = T(u'_x(x+dx, t) - u'_x(x, t)).$$

Заменяя частное приращение производной $u'_x(x, t)$ частным дифференциалом $du'_x(x, t) = u''_{xx}(x, t)dx$, получаем:

$$F_1 = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Проекция равнодействующей внешних сил на ось Ox с учётом следствия 1 равна :

$$F_2 = g(x, t)|\overline{MM_1}| = g(x, t)|\overline{M'M'_1}| = g(x, t)dx.$$

Масса рассматриваемого участка $\widetilde{MM_1}$ согласно предположению 4 и следствию 1 равна: $dm = \rho|\overline{MM_1}| = \rho dx$.

Ускорение для всех точек участка $\overline{MM_1}$ в силу его малости можно считать одинаковым и равным $u''_{tt}(x, t)$.

По второму закону Ньютона, произведение массы рассматриваемого участка на ускорение равно сумме проекций на ось Ox всех действующих на него сил :

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1 + F_2 \quad \text{или} \quad \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x, t)dx.$$

Разделив обе части на ρdx , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{\rho},$$

откуда, обозначив $T/\rho = a^2$, $g(x, t)/\rho = F(x, t)$, получаем *уравнение колебания струны* :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (76.1)$$

Если внешние силы отсутствуют, т.е. $g(x, t) = 0 \Rightarrow F(x, t) = 0$, то уравнение (76.1) называется уравнением *свободных колебаний струны*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (76.2)$$

Так, например, если на струну действует только сила тяжести, а натяжение струны T велико, можно пренебречь величиной $F(x, t)$ в (76.1) и рассматривать колебания струны как свободные.

Если внешние силы присутствуют, т.е. $g(x, t) \neq 0 \Rightarrow F(x, t) \neq 0$, то уравнение (76.1) называется уравнением *вынужденных колебаний струны*.

Как уже отмечалось, для однозначного определения требуемого решения дифференциального уравнения в частных производных необходимо дополнительно задать начальные и граничные условия.

Начальные условия показывают, в каком состоянии находилась струна в момент начала колебания при $t = 0$. Начальное положение точек струны задаётся условием: $u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x)$, а начальная скорость условием $u'_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

В другой записи эти условия выглядят так:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (76.3)$$

Граничные или краевые условия показывают, что происходит на концах струны во время колебаний. Например, если струна ограничена с двух сторон, имеет длину l и её концы закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, то граничные условия имеют вид:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (76.4)$$

К уравнению (76.1) приводят также задачи, связанные с продольными и крутильными колебаниями стержня (вала), электрическими колебаниями и т.д. Рассмотрим первые две из них.

76.2. Задача о продольных колебаниях стержня

Рассмотрим однородный стержень цилиндрической (может быть, в частности, призматической) формы, для растяжения или сжатия которого нужно приложить усилие. Считаем, что все силы действуют вдоль оси стержня и каждое поперечное сечение перемещается поступательно только вдоль оси (это предположение оправдывается, если поперечные размеры стержня малы по сравнению с длиной, а силы вдоль оси относительно невелики).

Практически продольные колебания чаще всего возникают тогда, когда стержень предварительно растягивается (сжимается), а затем отпускается. В этом случае в нём возникают продольные колебания. Выведем уравнение этих колебаний, для чего применим второй закон Ньютона к малому участку стержня.

Рассмотрим произвольное сечение стержня σ (рис. 48); x — его абсцисса в состоянии покоя. Смещение этого сечения в момент t есть функция $u(x, t)$. Вычислим силы, действующие на участок между σ и σ_1 . Для этого найдем относительное удлинение участка между сечениями σ и σ_1 с точностью до бесконечно малых высшего порядка по

сравнению с dx :

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = u'_x(x, t).$$

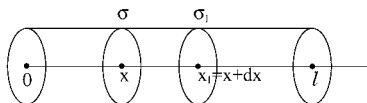


Рис. 48

Считая, что силы, вызывающие это удлинение, подчиняются закону Гука, определим величину силы натяжения T в сечении σ , которая должна быть пропорциональна относительному удлинению участка и площади поперечного сечения: $T = ESu'_x(x, t)$, где S — площадь поперечного сечения; E — модуль упругости (модуль Юнга).

Аналогично можно найти величину силы натяжения T_1 в сечении σ_1 : $T_1 = ESu'_x(x + dx, t)$.

Выражая частное приращение первых производных через производную второго порядка, получаем, что результирующая этих сил равна:

$$T_1 - T = ES \{u'_x(x + dx, t) - u'_x(x, t)\} = ES(\partial^2 u / \partial x^2) dx.$$

Считая выделенный участок материальной точкой с массой $\rho S dx$, где ρ — объёмная плотность стержня, применим к этому участку второй закон Ньютона:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, \text{ отсюда } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a^2 = E/S$.

Получили уравнение (76.2) свободных колебаний стержня.

Рассмотрим практически наиболее интересный случай, когда один конец стержня *закреплен*, а другой *свободен*.

Если считать закрепленным конец стержня с абсциссой $x = 0$, то $u|_{x=0} = 0$.

На свободном конце стержня *внешние силы отсутствуют*, поэтому равна нулю и сила натяжения T , действующая в сечении, $x = l$, т.е. $ESu'_x(l, t) = 0$, откуда:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (76.5)$$

Начальные условия, задающие начальные смещения и начальные скорости точек стержня, имеют вид (76.3).

Заметим, что математически данная задача отличается от задачи колебания струны с закрепленными концами (76.2), (76.3), (76.4) только вторым граничным условием (76.5).

Если стержень находился в состоянии покоя без внешних сил, а в начальный момент $t = 0$ и в последующем к его свободному концу приложена вдоль оси сила Q , то сила натяжения T , действующая в сечении $x = l$, равна

$$Q = ESu'_x(l, t), \quad \text{откуда} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{Q}{ES}.$$

Таким образом, в данном случае граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{Q}{ES}, \quad (76.6)$$

а начальные условия имеют вид (76.3).

Рассмотрим теперь случай, когда стержень был растянут силой P , приложенной к свободному концу, а в начальный момент $t = 0$ действие силы прекратилось. Здесь сила натяжения T , действующая в момент $t = 0$, равна P :

$$\begin{aligned} ESu'_x(x, 0) = P &\Rightarrow u'(x, 0) = \frac{P}{ES} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^x u'_x(x, 0) dx &= \frac{P}{ES} x \Rightarrow u(x, 0) - u(0, 0) = \frac{P}{ES} x. \end{aligned}$$

Поскольку $u(0, 0) = 0$, т.к. левый конец закреплен, получаем:

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = \frac{P}{ES} x.$$

Поскольку начальные скорости точек стержня равны нулю, получаем другое начальное условие:

$$u'_t|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, в данном случае начальные условия имеют вид:

$$U|_{t=0} = \frac{P}{ES} x, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad (76.7)$$

а граничные условия – вид (76.5).

76.3. Задача о крутильных колебаниях вала

Будем предполагать, что кручение круглого вала можно представить как результат сдвигов, вызванных поворотом поперечных сечений дуг относительно друг друга без искривления, причём все повороты совершаются вокруг оси вала. Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, действующие в плоскости сечения, а нормальные напряжения равны нулю. Поскольку касательные напряжения симметричны относительно центра поперечного сечения, то они приводятся к паре сил, момент которой называется *крутящим моментом*. Поскольку нас будут интересовать только относительные повороты сечений, то любое из них можно принять за неподвижное; будем считать, что неподвижен (закреплен) левый конец вала. В результате закручивания сечение σ повернется относительно неподвижного сечения на угол Θ , сечение σ_1 – на угол $\Theta + d\Theta$ (рис. 49).

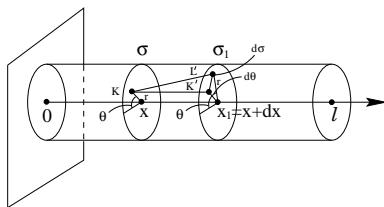


Рис. 49. Поворот сечения на угол $\Delta\Theta$

Для вывода дифференциального уравнения, которому удовлетворяет угол $\Theta(x, t)$, применим второй закон Ньютона к вращательному движению вокруг оси участка тела между сечениями σ и σ_1 . Произведение момента инерции участка на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно оси вращения.

Момент внешних сил есть разность крутящих моментов, приложенных к сечениям σ и σ_1 . Вычислим крутящий момент, приложенный к сечению σ . Для этого выделим элемент $d\sigma$ этого сечения, расположенный на расстоянии r от центра, и определим величину напряжения τ , вызванного сдвигом элементарного волокна KK' в положении KL' .

При этом считаем, что напряжение подчиняется закону Гука: $\tau = G \cdot \widehat{L'KK'}$, где G — постоянный коэффициент, определяемый физическими свойствами вала (модуль сдвига).

Как всегда, рассматриваем малые колебания. Тогда в некоторый фиксированный момент времени имеем:

$$\widehat{L'KK'} = \operatorname{tg} \widehat{L'KK'} = |L'K'|/dx.$$

С другой стороны, $|K'L'| \approx |\widetilde{K'L'}| = r d\Theta$, поэтому

$$\widehat{L'KK'} \approx r d\Theta/dx.$$

Таким образом, для величины напряжения τ получаем:

$$\tau = Gr \frac{d\Theta}{dx}.$$

Следовательно, сила, приложенная к элементу $d\sigma$, направлена перпендикулярно радиусу, и её величина равна

$$\tau d\sigma = Gr \frac{d\Theta}{dx} d\sigma.$$

Элементарный крутящий момент dM_x , приложенный к элементу $d\sigma$, получаем равным

$$dM_x = r\tau d\sigma = Gr^2 \frac{d\Theta}{dx} d\sigma.$$

Полную величину крутящего момента M_x найдем, интегрируя это выражение по σ :

$$M_x = \iint_{\sigma} Gr^2 \frac{d\Theta}{dx} d\sigma = G \frac{d\Theta}{dx} \iint_{\sigma} r^2 d\sigma = G \Theta'_x(x, t) J_0, \quad (76.8)$$

где $J_0 = \iint_{\sigma} r^2 d\sigma$ — полярный момент инерции сечения вала. Момент внешних сил, т.е. разность моментов M_{x+dx} и M_x , приложенных к сечениям σ_1 и σ , теперь равен

$$M_{x+dx} - M_x = G \{ \Theta'_x(x+dx, t) - \Theta'_x(x, t) \} J_0 \approx G \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} dx J_0.$$

Здесь частное приращение $\Theta'_x(x+dx, t) - \Theta'_x(x, t)$ заменено частным дифференциалом $(\partial^2 \Theta / \partial x^2) dx$.

Если обозначить величину момента инерции вала, приходящуюся на единицу длины K , то момент инерции участка между σ_1 и σ будет

$K \cdot dx$, угловое ускорение этого участка $\partial^2\Theta/\partial t^2$. Применяя второй закон Ньютона, получаем:

$$K dx \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = M_{x+dx} - M_x = G \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} dx J_0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \frac{GJ_0}{K}$.

Таким образом, свободные крутильные колебания вала также описываются уравнением колебаний (76.2) с искомой функцией $\Theta(x, t)$. Рассмотрим начальные и граничные условия для случая, когда один конец вала длины l закреплен, а другой *свободен*. В начальный момент правый конец вала закручивается на малый угол α и отпускается без начальной скорости. Из малости угла α и, следовательно, угла γ аналогично вычислению момента M_x получим для момента $t = 0$ (рис. 50):

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma \approx \frac{|K'L'|}{x} \text{ из } \Delta K K' L', |K'L'| \approx |\widetilde{K'L'}| = R\Theta \Rightarrow \gamma = \frac{R\Theta}{x};$$

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma \approx \frac{|K''L''|}{x} \text{ из } \Delta K K'' L'', |K''L''| \approx |\widetilde{K''L''}| = R\alpha \Rightarrow \gamma = \frac{R\alpha}{l}.$$

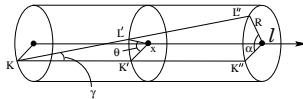


Рис. 50. Поворот сечения в начальный момент

Приравнявая эти значения γ , получим, что при $t = 0$ выполняется соотношение

$$\frac{R\Theta}{x} = \frac{R\alpha}{l}, \quad \text{откуда} \quad \Theta|_{t=0} = \alpha \frac{x}{l}.$$

Из условия отсутствия начальной скорости следует:

$$\left. \frac{\partial\Theta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Левый конец вала закреплен, поэтому $\Theta|_{x=0} = 0$.

На правом конце вала крутящий момент M_l , определяемый формулой (76.8), равен нулю:

$$M_l = 0 \Rightarrow GJ_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{x=l} = 0.$$

Таким образом, получились начальные условия:

$$\Theta|_{t=0} = \alpha \frac{x}{l}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (76.9)$$

и граничные условия :

$$\Theta|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (76.10)$$

Математически такая задача совпадает с задачей о продольных колебаниях стержня (76.2), (76.3), (76.5).

Рассмотрим теперь случай, когда один конец вала закреплен, а на другой конец насажен массивный диск, момент инерции которого относительно оси равен J_1 . Как и в предыдущем случае, в начальный момент диск закручивается на малый угол α и отпускается без начальной скорости.

Начальные условия этой задачи такие же, как и в предыдущей, и имеют вид (76.9).

Левый конец вала закреплен, поэтому $\Theta|_{x=0} = 0$.

Граничное условие на правом конце будет другое; т.к. на правом конце нужно приравнять к нулю сумму крутящего момента M_l , определяемого по формуле (76.8), и момента силы инерции диска

$$J_1 = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l}, \text{ то:}$$

$$GJ_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=l} + J_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = 0.$$

Таким образом, для вала с диском начальные условия имеют вид (76.9), а граничные —

$$\Theta|_{x=0} = 0, \quad GJ_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=l} + J_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = 0.$$

76.4. Решение задачи о свободных колебаниях бесконечной струны методом Даламбера

Свободные колебания струны описываются уравнением (76.2). Если струна бесконечная, то начальные условия (76.3) задаются при всех $x : -\infty < x < +\infty$, а граничные условия отсутствуют. Полученная дифференциальная задача называется *задачей Коши*. В подразделе 72.2.1 было показано, что в характеристических переменных $\xi = x - at$ и $\eta = x + at$ уравнение свободных колебаний (76.2) имеет канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (76.11)$$

решением которого является суперпозиция двух произвольных дважды дифференцируемых функций $u(\xi, \eta) = F(\xi) + \Phi(\eta)$.

Откуда, возвращаясь к переменным x и t , получим:

$$u(x, t) = F(x - at) + \Phi(x + at). \quad (76.12)$$

Полученное решение (оно называется решением Даламбера) имеет наглядную физическую интерпретацию. Действительно, график функции $F(x - at)$ получается из графика функции $F(x)$ сдвигом его вправо на величину at , т.е. перемещением его вправо со скоростью a ; график функции $\Phi(x + at)$ получается из графика функции $\Phi(x)$ сдвигом его влево со скоростью a . Если в начальный момент (при $t = 0$) возмущение струны описывается функцией $u = F(x) + \Phi(x)$, то в дальнейшем это возмущение распространяется вдоль струны в виде двух волн, одна из которых $F(x - at)$ распространяется со скоростью a вправо (*прямая волна*), а другая $\Phi(x + at)$ распространяется с той же скоростью влево (*обратная волна*), как показано на рис. 51.

Подберем функции F и Φ так, чтобы удовлетворялись начальные условия (76.3). Из первого начального условия

$$u(x, 0) = F(x) + \Phi(x) = \varphi(x).$$

Для второго начального условия найдем производную:

$$u'_t(x, t) = -aF'(x - at) + a\Phi'(x + at),$$

откуда: $u'_t(x, 0) = -aF'(x) + a\Phi'(x) = \psi(x)$.

Интегрируя последнее равенство от 0 до x , получаем (в подинтегральных функциях аргумент обозначен z в отличие от верхнего

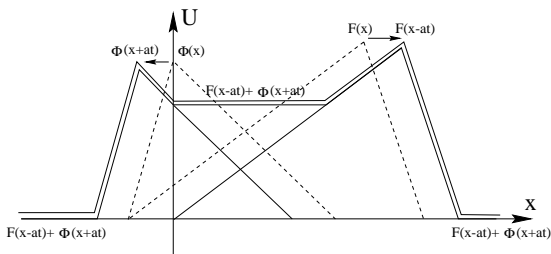


Рис. 51. Распространение прямой и обратной волны решения Даламбера

предела x):

$$\int_0^x \psi(z) dz = -a \int_0^x F'(z) dz + a \int_0^x \Phi'(z) dz = -a(F(x) - F(0)) +$$

$$+a(\Phi(x) - \Phi(0)) = a(\Phi(x) - F(x)) - aC, \quad \text{где } C = \Phi(0) - F(0).$$

Отсюда :

$$\Phi(x) - F(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + C.$$

Таким образом, для определения $F(x)$ и $\Phi(x)$ имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(x) + F(x) = \varphi(x) \\ \Phi(x) - F(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + C. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$\begin{cases} \Phi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz + \frac{C}{2} \\ F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz - \frac{C}{2}. \end{cases}$$

Полученные равенства справедливы при любых значениях x , в частности — если вместо x подставить $x + at$ и $x - at$:

$$\begin{cases} \Phi(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z)dz + \frac{C}{2} \\ F(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(z)dz - \frac{C}{2}. \end{cases}$$

Подставляя эти равенства в 77.12, получаем общее решение уравнения (76.2):

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \quad (76.13)$$

Формула (76.13) даёт искомый закон колебания и называется *формулой Даламбера* для решения задачи Коши для уравнения свободного колебания струны.

ПРИМЕР 76.1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = P \operatorname{arctg} x.$$

Решение: Воспользовавшись формулой (76.13) и интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{P}{4} \int_{x-at}^{x+at} \operatorname{arctg} z dz = \frac{P}{4} \left(z \operatorname{arctg} z \Big|_{x-at}^{x+at} - \int_{x-at}^{x+at} \frac{z dz}{1+z^2} \right) = \\ &= \frac{P}{4} \left(z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) \right) \Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{P}{4} \left((x+at) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{arctg}(x+at) - (x-at) \operatorname{arctg}(x-at) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+(x-at)^2}{1+(x+at)^2} \right). \end{aligned}$$

С помощью формулы Даламбера можно решить смешанную задачу для уравнения колебания *полубесконечной струны*.

Рассмотрим случай, когда струна в начальном положении располагается по положительной полуоси Ox и её *конец*, находящийся в начале координат, неподвижно *закреплен*:

$$u(0, t) = 0. \quad (76.14)$$

Начальные условия заданы только при $x \geq 0$. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ доопределены каким-то образом при $x < 0$, то выражение для $u(0, t)$, полученное по формуле (76.13), будет иметь вид :

$$u(0, t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(z) dz.$$

Чтобы $u(0, t) = 0$, т.е. выполнялось заданное граничное условие, достаточно доопределить $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечётным образом:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x),$$

Тогда :

$$\varphi(-at) = -\varphi(at), \quad \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} = 0, \quad \int_{-at}^{at} \psi(z) dz = 0,$$

как интеграл от нечётной функции по симметричному относительно начала координат интервалу.

Таким образом, продолжив начальные условия (76.3) на левую полуось нечётным образом, для решения задачи (76.2), (76.3), (76.4) можно использовать формулу Даламбера для бесконечной струны. Поскольку продолженные начальные условия различны для случая $x \geq 0$ и $x < 0$, то и решение задаётся различными формулами при $x - at > 0$ ($t < x/a$) и $x - at < 0$ ($t > x/a$):

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz & \text{при } 0 < t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{\varphi(x + at) - \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-(x-at)}^{x+at} \psi(z) dz & \text{при } \frac{x}{a} < t < +\infty. \end{cases} \quad (76.15)$$

Рассмотрим теперь смешанную задачу для *полубесконечной струны* со свободным концом:

$$u'_x(0, t) = 0. \quad (76.16)$$

Начальные условия (76.3) заданы при $x \geq 0$. В этом случае можно показать, что начальные условия необходимо продолжить на левую

полуось чётным образом:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \psi(-x) = \psi(x).$$

По формуле Даламбера находится решение получившейся задачи для бесконечной струны, которое в этом случае можно записать в виде:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, & \text{при } 0 < t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} \psi(z) dz + \right. & \text{при } \frac{x}{a} < t < +\infty. \\ \left. + \int_0^{at-x} \psi(z) dz \right), & \end{cases} \quad (76.17)$$

Практическое занятие 76. Решение задачи теплопроводности методом сеток

76.5. Решение задачи теплопроводности в рамках табличного процессора Excel

На конкретном примере рассмотрим решение краевой задачи теплопроводности методом сеток. Теория для данной задачи приведена в лекции 76.

ПРИМЕР 76.1. Решить одномерное уравнение теплопроводности (72.15) с начальными условиями $u|_{t=0} = 100 \cdot e^{-x}$ и граничными условиями

$$u|_{x=0} = 100 \cdot e^{-4t}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \right) \Big|_{x=L} = 20 - 30 \cdot e^{-7t}.$$

Заменяя дифференциальное уравнение (72.15), начальные и граничные условия данного примера их конечно-разностными аналогами, получаем

$$\begin{aligned} u_m^0 &= 100 \cdot e^{-x_m}, & m &= 0, 1, 2, \dots, M; \\ u_0^{n+1} &= 100 \cdot e^{-4t^{n+1}}, & n &= 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ u_M^{n+1} &= \frac{u_{M-1}^{n+1} + h \cdot (20 - 30 \cdot e^{-7t^{n+1}})}{1+h}. \end{aligned}$$

Ограничимся решением задачи при $L = 1$, $a = 1$, $r = 0.5$. В качестве шага сетки по пространственной координате h возьмём значение 0.1. Тогда параметр τ равен $r \cdot h^2$. Для решения поставленной задачи по явной схеме входим в текстовый процессор Excel и проделываем такие же действия, как и для решения задачи переноса. Переименуем любой рабочий лист в **ЯвнаяСхема**. В первой строке пишем заглавие работы. В ячейках B2 и D2 записываем значения параметров сетки r и h . Заполняем теперь третью строку. В ячейку A3 записываем текст t/x . Далее получаем массив абсцисс x_m . Для этого в ячейку B3 пишем число 0. В ячейку C3 пишем формулу $= D2$. В ячейку D3 вводим формулу $= C3 + \$D\2 . Эту формулу продолжаем до ячейки L3. Для заполнения массива координат узлов по временной координате t проделаем аналогичные действия. В ячейку A4 пишем значение начального времени $- 0$. В ячейку A5 – формулу $= \$B\$2 * \$D\2^2 . В ячейку A6 – формулу $= A5 + A\$5$ и продолжаем её до ячейки A204. В ячейках B4 : L4 подставляем начальные условия. Для этого в ячейку B4 пишем формулу $= 100 * EXP(-B3)$ и продолжаем её до ячейки L4. Теперь вычисляем решение на первом временном слое. В ячейку B5 вводим формулу для вычисления граничных условий на левом торце: $= 100 * EXP(-4 * A5)$. Для получения решения во внутренних точках сетки используем вторую формулу (75.6). Поэтому в ячейку C5 вводим следующую формулу: $= \$B\$2 * D4 + (1 - 2 * \$B\$2) * C4 + \$B\$2 * B4$ и продолжаем её влево до ячейки K5. Теперь осталось заполнить ячейку L5, в которой необходимо подставить граничное условие на правом торце. В данную ячейку вводим формулу $= (K5 + \$D\$2 * (20 - 30 * EXP(-7 * A5) / (1 + \$D\$2)))$.

Решение на первом временном слое получено. Для получения решения на втором, третьем, ... , двухсотом слое ($t = 1$) выделяем область B5 : L5 и продолжаем её до строки номер 204. В результате поставленная задача решена и осталось исследовать поведение решения в зависимости от пространственной координаты и времени. Для этого построим графики значений температур на различных временных слоях. На одной диаграмме построим графики для шести временных слоев при $t = 0; 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ и 1.0 . Для этого скроем все строки, кроме 3, 4, 24, 44, 84, 124 и 204, и при помощи мастера диаграмм построим графики точно так же, как и для решения задачи переноса. Результаты решения при помощи табличного процессора Excel полностью совпадают с результатами, полученными средствами программирования на Visual Basic. Поэтому здесь графики не приводим.

Для решения задачи теплопроводности по явной схеме с использованием программирования на алгоритмическом языке Visual Basic напишем программу, аналогичную программе **УравнениеПереноса()**, представленную в разделе 68.12.2. Для построения графиков используем подпрограмму **ПостроитьГрафики**, используемую для построения графиков задачи переноса. Программа для решения задачи теплопроводности по явной схеме снабжена достаточным объёмом комментариев, поэтому приводим её без дополнительных пояснений.

```

Sub ТеплопроводностьЯвнаяСхема()
Dim x() As Double, y() As Double, ynp1() As Double
Dim h As Double, tau As Double, r As Double
Dim L As Double, hPr As Double, tauPr As Double
Dim nn As Long, mm As Long, MPr As Long
Dim a As Double, Tmax As Double
Dim n As Long, m As Long, ngr As Integer
Dim t As Double, rr As Double
' Исходные данные для задачи
L = 1 'Длина области, на которой решается задача
a = 1 ' Коэффициент в уравнении теплопроводности
Tmax = 1 ' Верхняя граница временной координаты
h = 0.01 ' Шаг по пространственной координате
r = 0.5 'Параметр сетки tau=r*h^2/2
tau = r * h ^ 2 / 2 'Шаг по временной координате
'Шаг для вывода значений сеточной функции по x
hPr = 0.1
tauPr = 0.2 ' Шаг вывода графиков по t
'Через столько точек выводить результаты по оси Oх
' Количество ячеек сетки по оси Oх
MPr = CLng(hPr / h) mm = CLng(L/ h)
nn = CLng(Tmax / tau) 'Количество ячеек сетки t
'Размерность используемых массивов
ReDim x(mm), y(mm), ynp1(mm)
For m = 0 To mm
    x(m) = h * m 'абсциссы узловых точек
    'Подстановка начальных условий
    y(m) = 100 * Exp(-x(m))
Next m
' Имя рабочего листа для вывода результатов
Dim NameSh As String NameSh = "ЯвнаяСхема"_

```

```

Sheets(NameSh).Select
'Очистить рабочий лист от предыдущих данных Cells.Clear
Cells(1,1) = "t\x" Cells(2, 1) = "t=0"
'Номер текущего графика,
ngr = 1
'Вывод решения на 0-ом временном слое
'(Два знака после запятой)
For m = 0 To mm Step MPr
Cells(1,m\MPr+2)=CDBl(Format(x(m),"#0.00"))
Cells(ngr+1,m\MPr+2)=CDBl(Format(y(m),"#0.00"))
'Выделить цветом область вывода абсцисс
Cells(1,m\MPr+2).Interior.Color=RGB(220,90,220)
Next m
rr = 1 - 2 * r
'Обход по временным слоям с 1-го по nn
For n = 1 To nn
t = tau * n 'Значение временной координаты
'Вычисление во внутренних узлах временного слоя
For m = 1 To mm - 1
    ynp1(m) = r * (y(m + 1) + y(m - 1)) + rr * y(m)
Next m
'Подстановка граничных условий
Call ГраничныеУсловия(ynp1, t, h, mm)
'Переписать полученное решение на n+1-ом временном
'слое в массив y
For m = 0 To mm
    y(m) = ynp1(m)
Next m
'Записать решение на данном временном слое в
'строки рабочего листа.
If Abs((ngr) * tauPr - t) < tau / 10 Then
    ngr = ngr + 1
    'Заглавие линии графика (Легенда)
    Cells(ngr + 1, 1) = "t=" + Format(t, "#0.00")
    For m = 0 To mm Step MPr
        Cells(ngr+1,m\MPr+2)=CDBl(Format(y(m),"#0.00"))
    Next m
End If
Next n 'Выделить цветом область вывода заглавия графиков

```

```

Range("a1:a" + Trim(Str(ngr + 1))).Interior.Color = _
    RGB(220, 90, 220)
Dim NameDiagr As String 'Название диаграммы
NameDiagr="Теплопроводность. Явная схема"

Call ПостроитьГрафики(ngr, CInt(mm/MPr),NameSh, _
    NameDiagr,0, 1, 0, 100)
End Sub

Sub ГраничныеУсловия(y() As Double,t As Double, _
    h As Double, mm As Long)
y(0) = FunHamma1(t) 'Левая граница
y(mm)=(y(mm-1)+h*FunHamma2(t))/(1+h)'Правая граница
End Sub

Function FunHamma1(t As Double) As Double
FunHamma1 = 100 * Exp(-4 * t)
End Function

Function FunHamma2(t As Double) As Double
FunHamma2 = 20 - 30 * Exp(-7 * t)
End Function

```

На рис. 52 представлены результаты решения примера (76.1), полученные в рамках алгоритмического языка Visual Basic.

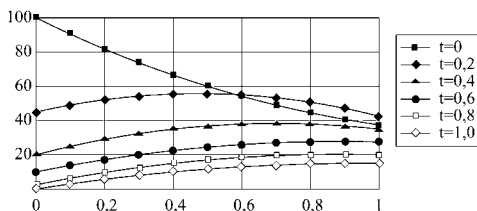


Рис. 52. Решение задачи теплопроводности методом сеток

Таблица 76.2

Теплопроводность. Явная схема

$t \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	100	90,5	81,9	74,1	67,0	60,6	54,88	49,7	44,9	40,7	36,8
0,2	44,9	49,8	53,0	54,7	55,1	54,4	52,9	50,8	48,3	45,5	42,5
0,4	20,2	25,4	29,7	33,1	35,7	37,5	38,5	38,8	38,4	37,4	35,8
0,6	9,1	13,0	16,6	19,7	22,2	24,6	25,7	26,7	27,1	27,1	26,6
0,8	4,1	6,9	9,5	11,9	13,9	15,7	17,2	18,3	19,0	19,5	19,6
1,0	1,8	3,9	5,8	7,6	9,2	10,7	12,0	13,1	14,0	14,8	15,3

При решении задачи теплопроводности в рамках математического пакета MathCad, даже по явной схеме, необходимо применять программирование. Приведем программу на MathCad, решающую пример (76.1) по явной схеме. Алгоритм решения, используемый в данной программе, такой же, как и в программе на Visual Basic. Поэтому комментарии в приведённой MathCad-программе не приведены.

$$\begin{aligned}
 ORIGIN &:= 0 & TOL &:= 0.00001 & L &:= 1 & a &:= 1 & T_{max} &:= 1 \\
 r &:= 0.5 & M &:= 20 & h &:= \frac{L}{M} & \tau &:= r \cdot \left(\frac{h}{\rho}\right)^2 & N &:= \frac{T_{max}}{\tau} \\
 \tau Pr &:= 0.2 & hPr &:= 0.1 & MPr &:= \frac{hPr}{h} & MhPr &:= \frac{L}{hPr}
 \end{aligned}$$

```

U := for m ∈ 0..M
    | x_m ← m · h
    | y_m ← 100 · e-x_m
    k ← 0
    ngr ← 1
    for m ∈ 0, MPr..M
        | Uk, ngr-1 ← y_m
        | k ← k + 1
    rr ← 1 - 2 · r
    for n ∈ 1..N
        | t ← n · τ
        for m ∈ 1..M - 1
            ynp1_m ← r · (ym-1 + ym+1) + rr · y_m
        ynp1_0 ← 100 · e-4·t
        ynp1_M ←  $\frac{ynp1_{M-1} + h \cdot (20 - 30 \cdot e^{-7 \cdot t})}{1 + h}$ 
        y ← ynp1
        if |ngr · τPr - t| <  $\frac{\tau}{10}$ 
            | k ← 0
            for m ∈ 0, MPr..M
                | Uk, ngr ← y_m
                | k ← k + 1
            ngr ← ngr + 1
    U

```

$$m := 0..MhPr \quad x_m := m \cdot hPr$$

Далее строим графики решения, сохранённого в шести столбцах двумерного массива U . Результаты решения примера (76.1) с использованием пакета MathCad, естественно, должны совпадать с результатами, полученными при помощи пакета Excel, поэтому мы их не выводим.

Приведем теперь аналогичную программу решения этой же задачи с использованием пакета Maxima.

```
(%i1) numer:true$ L:1$ a:1$ Tmax:1$ r:0.5$ M:20$ h:L/M$
```

```
/* Функция fix округляет число до целого. */
```

```
(%i9) tau:r*(h/a)^2; N:fix(Tmax/tau+0.5); tauPr:0.2$
```

```

(%i11) ngr:1$ fpprintprec:5$
(%i13) array(x,M)$ array(y,M)$ array(ynp1,M)$
(%i16) array(U,5,M)$
(%i17) for m:0 while m<=M do (x[m]:m*h,
/*Задание начальных условий. Решение на нулевом временном
слое.*/
    y[m]:100*exp(-x[m]),
    U[0,m]:y[m]
);
(%i18) rr:1-2*r;
/*Вычисление решения на 1, 2, : n-ом временных слоях.*/
(%i19) for n:1 while n<=N do (
    t:n*tau,

/*Граничные условия слева.*/
    ynp1[0]:100*exp(-4*t),
/*Решение во внутренних точках временного слоя.*/
    for m:1 while m<=M-1 do (
        ynp1[m]:r*(y[m-1]+y[m+1])+rr*y[m]
    ),

/*Граничные условия справа.*/
    ynp1[M]:(ynp1[M-1]+h*(20-30*exp(-7*t)))/(1+h),

/*Сохранение массива y для следующей итерации.*/
    for m:0 while m<=M do (y[m]:ynp1[m]),
    if abs(ngr*tauPr-t)<0.1*tau then (
        T[ngr]:t,
        for m:0 while m<=M do(
            U[ngr,m]:y[m]
        ),
        ngr:ngr+1
    )
);
/*Создание 6 списков для построения графиков.*/
(%i10) G0:makelist([x[m],U[0,m]],m,0,M);

```

```

G1:makelist([x[m],U[1,m]],m,0,M);
G2:makelist([x[m],U[2,m]],m,0,M);
G3:makelist([x[m],U[3,m]],m,0,M);
G4:makelist([x[m],U[4,m]],m,0,M);
G5:makelist([x[m],U[5,m]],m,0,M);

/*Построение 6 графиков на одной диаграмме.*/
(%i11) wxplot2d([[discrete,G0],[discrete,G1],
[discrete,G2],[discrete,G3],[discrete,G4],
[discrete,G5]], [style,[lines,4,1],
[lines,2,2],[lines,4,3],[lines,2,4],
[lines,4,5],[lines,2,6]],
[gnuplot_preamble,"set grid"], [ylabel,""],
[legend, "t=0","t=0.2", "t=0.4", "t=0.6",
"t=0.8", "t=1.0"]);

```

Решение задачи теплопроводности по явной схеме обладает важным достоинством: алгоритм решения достаточно простой. Однако при решении уравнения теплопроводности по явной схеме необходимо следить за тем, чтобы конечно-разностная схема была устойчивой. Это достигается, если соотношения между шагами сетки удовлетворяют условию $\tau \leq 0,5(ah)^2$, т.е. шаг по временной координате пропорционален квадрату шага по пространственной координате. Поэтому уменьшение шага сетки по оси Ox в десять раз приводит к стократному увеличению количества временных слоев. Для получения более точного результата, особенно при сложных граничных условиях, предпочтительнее использовать неявную схему.

Алгоритм решения задачи по неявной схеме является более сложным. Для решения по неявной схеме первый метод, использование пакета Excel без применения программирования, не подходит, т.к. на каждом временном слое необходимо выполнить прямой и обратный ход метода прогонки.

Ниже приведена программа, реализующая решение уравнения теплопроводности по неявной схеме. Эта программа построена по аналогии с программой решения данной задачи по явной схеме.

```

Sub ТеплопроводностьНеявнаяСхема()
Dim x() As Double, y() As Double, ynp1() As Double
Dim h As Double, tau As Double, r As Double, a As Double
Dim hPr As Double, tauPr As Double, Tmax As Double

```

```

Dim nn As Long, mm As Long, MPr As Long, L As Double
Dim n As Long, m As Long, ngr As Integer
Dim t As Double, beta1 As Double
Dim alpha0 As Double, alpha1 As Double, beta0 As Double
' Исходные данные для задачи
alpha0 = 1: alpha1 = 0: beta0 = 1: beta1 = 1
L = 1 ' Это длина области
a = 1 ' Это коэффициент в уравнении теплопроводности
Tmax = 1 ' Верхняя граница временной координаты
h = 0.01 ' Это шаг по пространственной координате
r = 1 ' Параметр сетки
tau=r*h^2/2 ' Это шаг по временной координате
' Это шаг для вывода значений сеточной функции по x
hPr = 0.1
' Это шаг вывода графиков по временной координате
tauPr = 0.2
MPr = CLng(hPr / h) mm = CLng(L / h)
'Количество ячеек сетки по оси 0x
nn = CLng(Tmax / tau) 'Количество ячеек сетки по оси 0t
ReDim x(mm), y(mm), ynp1(mm) 'Размерность массивов
For m = 0 To mm
    x(m) = h * m
    'Подстановка начальных условий
    y(m) = 100 * Exp(-x(m))
Next m
'Имя рабочего листа для вывода результатов и графиков
Dim NameSh As String
NameSh = "Неявная схема" Sheets(NameSh).Select
Cells.Clear 'Очистить рабочий лист
Cells(1, 1) = "t\x" Cells(2,1) = "t=0"
'Номер текущего графика
ngr = 1
For m = 0 To mm Step MPr
    Cells(1,m\MPr+2)=Cdbl(Format(x(m),"#0.00"))
    Cells(ngr+1,m\MPr+2)=Cdbl(Format(y(m),"#0.00"))
    Cells(1,m\MPr+2).Interior.Color=RGB(220,90,220)
Next m
'Обход по временным слоям
For n = 1 To nn

```

```

t = tau * n
Call МетодПрогонки(y,t,r,h,mm,alpha0,alpha1, _
                    beta0, beta1)
' Записать решение на данном временном слое
'Записываются с шагом tauPr
If Abs(ngr * tauPr - t) < tau / 10 Then
    ngr = ngr + 1
    Cells(ngr + 1, 1) = "t=" + Format(t, "#0.00")
    For m = 0 To mm Step MPr
        Cells(ngr+1,m\MPr+2)=CDBl(Format(y(m),"#0.00"))
    Next m
End If
Next n
Range("a1:a" + Trim(Str(ngr + 1))).Interior.Color = _
    RGB(220, 90, 220)
Dim NameDiagr As String 'Название диаграммы
NameDiagr ="Теплопроводность. Неявная схема"
Call ПостроитьГрафики(ngr,CInt(mm / MPr), NameSh, _
                        NameDiagr, 0, 1, 0, 100)

End Sub

Sub МетодПрогонки(y() As Double,t As Double, r As Double, _
    h As Double,mm As Long,alpha0 As Double, _
    alpha1 As Double, beta0 As Double, beta1 As Double)
Dim L() As Double, k() As Double
Dim m As Long,am As Double,bm As Double,cm As Double
ReDim L(mm), k(mm), s As Double
'Коэффициенты уравнения
am = -r: cm = -r: bm = 1 + 2 * r
' Прямой ход метода прогонки
' Вычисление прогоночных коэффициентов L(m), K(m)
s = alpha0 - alpha1 / h
L(0) = -alpha1 / (h * s): k(0) =
FunHamma1(t) / s
For m = 1 To mm - 1
    s = bm + am * L(m - 1)
    L(m) = -cm / s
    k(m) = (y(m) - am * k(m - 1)) / s
Next m
'Обратный ход метода прогонки

```

```

'Подстановка граничных условий на правой границе
y(mm) = (beta1 * k(mm - 1) + h * FunHamma2(t)) / _
      (beta0 * h + beta1 - beta1 * L(mm - 1))
For m = mm - 1 To 0 Step -1
  y(m) = L(m) * y(m + 1) + k(m)
Next m
End Sub

```

Естественно, результаты работы программы по неявной схеме совпадают с результатами по явной схеме. Приведем теперь программу решения задачи теплопроводности по неявной схеме с использованием пакета MathCad.

```

ORIGIN := 0      TOL := 0.00001      L := 1      a := 1
Tmax := 1      r := 1      M := 100      h :=  $\frac{L}{M}$ 
 $\tau := r \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2$   $N := \frac{Tmax}{\tau}$        $\tau \tau Pr := 0.2$        $hPr := 0.1$ 
 $MPr := \frac{hPr}{h}$        $MhPr := \frac{L}{hPr}$ 

 $\gamma 1(t) := 100 \cdot e^{-4 \cdot t}$        $\gamma 2(t) := 20 - 30 \cdot e^{-7 \cdot t}$ 
 $\alpha 0 := 1$        $\alpha 1 := 0$        $\beta 0 := 1$        $\beta 1 := 1$ 
 $am := -r$        $bm := 1 + 2 \cdot r$        $cm := -r$ 

```

```

U :=
  for m ∈ 0..M
  |
  |   xm ← m · h
  |   ym ← 100 · e-xm
  k ← 0
  ngr ← 1
  for m ∈ 0, MPr..M
  |   Uk,0 ← ym
  |   k ← k + 1
  for n ∈ 1..N
  |   t ← n · τ
  |   s ← α0 -  $\frac{\alpha 1}{h}$ 
  |   L0 ←  $\frac{-\alpha 1}{h \cdot s}$ 
  |
  |   K0 ←  $\frac{\gamma 1(t)}{s}$ 
  |   for m ∈ 1..M - 1
  |   |   s ← bm + am · Lm-1
  |   |   Lm ←  $\frac{-cm}{s}$ 
  |   |   Km ←  $\frac{y_m - am \cdot K_{m-1}}{s}$ 
  |   yM ←  $\frac{\beta 1 \cdot K_{M-1} + h \cdot \gamma 2(t)}{\beta 0 \cdot h + \beta 1 - \beta 1 \cdot L_{M-1}}$ 
  |   for m ∈ M - 1..0
  |   |   ym ← Lm · ym+1 + Km
  |   if |ngr · τPr - t| <  $\frac{\tau}{10}$ 
  |   |   k ← 0
  |   |   for m ∈ 0, MPr..M
  |   |   |   Uk,ngr ← ym
  |   |   |   k ← k + 1
  |   |   ngr ← ngr + 1
  U
m := 0..MhPr   xm := m · hPr

```

После отладки программы строим графики решения по сохранённым в массиве U временным слоям. Графики полученных результатов

не приводим, т.к. они совпадают с результатами по явной схеме, полученными с использованием программирования на Visual Basic, рис. 52.

Приведем теперь аналогичную программу решения этой же задачи с использованием пакета Maxima.

```
(%i1) numer:true$ L:1$ a:1$ Tmax:1$ r:1$ M:20$
(%i7) h:L/M; tau:r*(h/a)^2; N:fix(Tmax/tau+0.5);
(%i9) tauPr:0.2$

/* Описываем функции, задающие граничные условия.*/
(%i10) g1(t):=100*exp(-4*t); g2(t):=20-30*exp(-7*t);
/* Коэффициенты, описывающие граничные условия.*/
(%i12) a0:1$ a1:0$ b0:1$ b1:1$
/* Коэффициенты строк трехдиагональной матрицы.*/
(%i16) am: -r; bm:1+2*r; cm: -r;
/* Создаём массивы, используемые в программе.*/
(%i19) array(x, M)$ array(y, M)$ array(K, M)$
      array(L, M)$ array(U, 5, M)$
/* ngr - номер графика.*/
(%i20) ngr:1$
      for m:0 while m<=M do(
        x[m]:m*h,
        y[m]:100*exp(-x[m]),
        U[0,m]:y[m]
      );
(%i22) fpprintprec:4$
/* Цикл по временным слоям. Весь цикл набираем в многострочном
вводе. Операторы разделяем запятой.*/
(%i24) for n:1 while n<=N do (
      t:n*tau,
      /* Прямой ход метода прогонки.*/
      s:a0-a1/h, L[0]: -a1/(h*s), K[0]:g1(t)/s,
      for m:1 while m<=M-1 do (
        s:bm+am*L[m-1],
        /* Прогночные коэффициенты.*/
        L[m]: -cm/s, K[m]:(y[m] -am*K[m-1])/s
      ),
      /* Решение на правой границе.*/
```

```

y[M]:(b1*K[M-1]+h*g2(t))/(b0*h+b1-b1*L[M-1]),
/* Обратный ход метода прогонки. */
for m:M-1 thru 0 step -1 do (
  y[m]:L[m]*y[m+1]+K[m]),
/* Если время кратно tauPr, то сохраняем решение в массиве U.*/
if abs(ngr*tauPr-t)<0.1*tau then (
  for m:0 while m<=M do(
    U[ngr,m]:y[m]
  ),
  ngr:ngr+1
)
);
/* Создаём шесть списков для построения графиков решений по
временным слоям. */
(%i25) G0:makelist([x[m], U[0, m]], m, 0, M);
G1:makelist([x[m], U[1, m]], m, 0, M);
G2:makelist([x[m], U[2,m]], m, 0, M);
G3:makelist([x[m], U[3, m]], m, 0, M);
G4:makelist([x[m], U[4, m]], m, 0, M);
G5:makelist([x[m], U[5,m]], m, 0, M);
/* Строим шесть графиков на одной диаграмме.*/
(%i31) wxplot2d([[discrete, G0], [discrete, G1],
[discrete, G2],[discrete, G3], [discrete, G4],
[discrete,G5]], [style, [lines,4,1], [lines,2,2],
[lines,4,3], [lines,2,4], [lines,4,5],
[lines,4,6]], [gnuplot_preamble,"set grid"],
[legend, "t=0.0", "t=0.2", "t=0.4", "t=0.6",
"t=0.8", "t=1.0"]);

```

Лекция 77. Решение краевых задач для волнового уравнения методом Фурье

Решение задачи о колебаниях струны с закрепленными концами методом Фурье. Решение задачи о продольных колебаниях стержня методом Фурье. Решение задачи о крутильных колебаниях вала методом Фурье. Решение задачи о свободных колебаниях струны

77.1. Решение задачи о колебаниях струны с закрепленными концами методом Фурье

Решим уравнение (76.2) свободных колебаний струны другим методом — методом Фурье или, как его ещё называют, методом разделения переменных. Рассмотрим смешанную задачу колебаний струны с *закрепленными концами*. Как показано в 75.1.2, математически задача состоит в решении уравнения (76.2) с начальными условиями (76.3) и заданным граничным условием при $x = 0$ и $x = l$ (76.4). Приведем дифференциальное уравнение и начальные условие

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t > 0,$$

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u'_t(x, t) \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Задачу будем решать методом разделения переменных Фурье, т.е. будем искать решение в виде:

Решение будем искать в виде :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{77.1}$$

Поставив функцию (77.1) в уравнение (76.2), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{T''(t)}{X(x)} = C.$$

Поскольку левая часть получившегося равенства зависит от t , а правая — зависит только от x , а t и x — независимые переменные, следовательно эти отношения постоянны. Обозначим эту постоянную C .

Отсюда получаем два уравнения:

$$T''(t) - Ca^2T(t) = 0; \quad (77.2)$$

$$X''(x) - CX(x) = 0. \quad (77.3)$$

С учётом (77.1) краевые условия (76.4) можно записать так:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Поскольку мы ищем решение $u(x, t)$, не равное нулю тождественно, отсюда следует, что $T(t) \neq 0$, и, следовательно:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (77.4)$$

В результате для отыскания функции $X(x)$ получили следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения: найти решение уравнения (77.5), удовлетворяющее граничным условиям (77.4). Составим для (77.3) характеристическое уравнение $s^2 - C = 0$ и рассмотрим три случая.

1. $C = \lambda^2 > 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm \lambda$ — корни действительные, различные, общее решение уравнения (77.3) имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Из граничных условий (77.4) следует:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0.$$

Эта система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$, откуда следует: $X(x) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0$ при всех x, t .

Разобранный случай интереса не представляет.

2. $C = 0 \Rightarrow s_{1,2} = 0$ — корни действительные, одинаковые, общее решение уравнения (77.3) имеет вид:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Из граничных условий (77.4) следует:

$$C_2 = 0, \quad C_1 + C_2 l = 0,$$

откуда:

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0 \text{ при всех } x, t.$$

Разобранный случай также интереса не представляет.

3. $C = -\lambda^2 \Rightarrow s_{1,2} = \pm \lambda i$ — корни комплексно-сопряжённые, общее решение уравнения (77.3) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из граничных условий (77.4) следует: $C_1 = 0, C_2 \sin \lambda l = 0$.

Чтобы получить не равное нулю решение, необходимо, чтобы $C_2 \neq 0$, поэтому из последнего равенства заключаем, что

$$\sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \pi k \ (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow \lambda = \frac{k\pi}{l}.$$

Решение уравнения (77.3), отвечающее некоторому фиксированному k , обозначим $X_k(x)$:

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (77.5)$$

где C_k — произвольная константа.

Поскольку знак C_k в нашем распоряжении, можно считать, что $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, каждому значению $\lambda_k = k\pi/l$ соответствует бесчисленное множество решений, отличающихся постоянным множителем. Величины $\lambda_k = k\pi/l$ называются *собственными числами*, а функции $\sin(k\pi x/l)$ — *собственными функциями* краевой задачи (77.3), (77.4).

Легко показать, что система найденных собственных функций ортогональна на $(0, l)$.

Теперь найдем $T(t)$. Каждому $\lambda_k = k\pi/l$ соответствует своя функция $T_k(t)$, определяемая уравнением (77.2) при

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$s^2 + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = 0 \quad \text{и}$$

находим его корни $s_{1,2} = \pm \frac{k\pi a}{l} i$.

Общее решение уравнения (77.2) имеет вид:

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l}, \quad (77.6)$$

где A_k и B_k — произвольные константы.

Подставляя выражения (77.5), (77.6) в формулу (77.1), получаем частные решения уравнения (76.2), удовлетворяющие граничным условиям (76.4):

$$u_k(x, t) = C_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right).$$

Обозначив $C_k A_k = a_k$, $C_k B_k = b_k$, запишем $u_k(x, t)$ в виде:

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (77.7)$$

Решения $u_k(x, t)$ называются *собственными функциями задачи*, а соответствующие им колебания — *собственными колебаниями*.

Найдем теперь решение уравнения (76.2), удовлетворяющее кроме граничных ещё и начальным условиям (76.3). Для этого рассмотрим сумму решений (77.7), которая в силу линейности и однородности уравнения (76.2) также будет являться его решением (читателям предлагается самостоятельно проверить этот факт для суммы конечного числа слагаемых):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (77.8)$$

Ясно, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (76.4), поскольку им удовлетворяет каждая из функций (77.7). Подберем произвольные константы a_k и b_k так, чтобы функция (77.8) удовлетворяла начальным условиям:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Для второго начального условия найдем производную:

$$u'_t(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(-a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$u'_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \psi(x).$$

Таким образом, величины a_k и $\frac{k\pi a}{l} b_k$ являются коэффициентами разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданных на $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам (73.23). Откуда:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \\ b_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (77.9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи даётся рядом (77.8), где коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам (77.9).

Выясним *физический смысл* собственных функций $u_k(x, t)$, для чего перепишем их в виде:

$$u_k(x, t) = F_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a}{t} + \varphi_k \right), \quad (77.10)$$

где $F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_k = a_k/b_k$.

Из формулы (77.9) видно, что все точки струны совершают гармонические колебания с одной частотой $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$, называемой *собственной частотой* струны и *фазой* φ_k ; амплитуда колебаний зависит от x и равна $F_k \sin \frac{k\pi x}{l}$. Такие колебания называются *стоячими волнами*. В стоячей волне $u_k(x, t)$ имеется $(k+1)$ неподвижная точка на $(0, l)$:

$$\sin \frac{k\pi x}{l} = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{(k-1)l}{k}, l.$$

Эти точки называются *узлами*; между ними расположены точки, в которых отклонения достигают максимума — *пучности*. При колебании струна издаёт звук с собственной частотой ω_k , определяющей высоту звука; самый низкий звук будет, когда частота равна ω_1 — *основной тон*; остальные тоны, соответствующие частотам $\omega_k (k \geq 2)$, называются *обертоны* или *гармоники*. Звук, издаваемый струной, складывается из основного тона и обертонов, причём характер звучания (тон, сила звука, тембр) будет зависеть от соотношения между амплитудами отдельных гармоник. Обычно F_k быстро убывают с ростом k , и основной тон выделяется среди остальных; обертоны придают лишь окраску звуку — тембр звука.

ПРИМЕР 77.1. Методом Фурье решить смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} &= \begin{cases} \frac{4hx}{3l} & \text{при } x \in \left[0; \frac{3l}{4}\right]; \\ \frac{4h(l-x)}{l} & \text{при } x \in \left(\frac{3l}{4}; l\right]. \end{cases} \\ u'_t|_{t=0} &= 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Эти условия означают следующее: струна длиной l закреплена на концах ($u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$), в начальный момент она имеет вид ломаной OAB на рис. 53 (смотри первое начальное условие) и отпущена без начальной скорости ($u'_t|_{t=0} = 0$).

Р е ш е н и е:

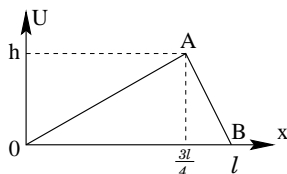


Рис. 53. Начальные условия для примера 77.1

Решение данной задачи имеет вид (77.8), где коэффициенты определяются по формулам (77.9):

$$a_k = \frac{2}{l} \left(\int_0^{\frac{3l}{4}} \frac{4hx}{3l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \int_{\frac{3l}{4}}^l \frac{4h(l-x)}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right) = \frac{32h}{3(k\pi)^2} \sin \frac{3k\pi}{4}.$$

Интегралы берутся по частям.

В данном примере $b_k = 0$, т.к. $\psi(x) = 0$.

Решение в соответствии с (77.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{32h}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(3k\pi/4)}{k^2} \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ &= \frac{32h}{3\pi^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi at}{l} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi at}{l} + \frac{1}{25\sqrt{2}} \sin \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{5\pi at}{l} + \dots \right). \end{aligned}$$

Здесь основной тон

$$u_1(x, t) = \frac{32h}{3\pi^2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi at}{l}$$

имеет максимальную амплитуду $F_1 = \frac{32h}{3\pi^2\sqrt{2}}$ в точке $x = \frac{l}{2}$ и частоту $\omega_1 = \pi a/l$. Первым обертоном является

$u_2(x, t) = -\frac{8h}{3\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi at}{l}$, который имеет в $\frac{4}{\sqrt{2}}$ меньшую максимальную амплитуду $F_2 = 8h/3\pi^2$, но уже в точке $x = l/4$ и частоту в 2 раза большую. Второй обертоном

$$u_3(x, t) = \frac{12h}{27\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi at}{l}$$

имеет в 3 раза большую частоту, а максимальную амплитуду в 9 раз меньшую, чем у основного тона, но уже в точке $x = l/6$. Амплитуда третьего обертона равна нулю. Четвертый обертоном имеет уже максимальную амплитуду в 25 раз меньшую, чем у основного тона. Относительно сложный характер колебаний струны вызван несимметричным её отклонением от положения равновесия в начальный момент времени.

77.2. Решение задачи о продольных колебаниях стержня методом Фурье

В лекции 76 была сформулирована задача о продольных колебаниях стержня с закрепленным левым концом. Математически задача состоит в решении уравнения (76.2) с начальными условиями (76.3) и граничными условиями (76.5). Для решения применим метод Фурье, т.е. будем искать решение в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставив эту функцию в граничные условия (76.5), получим, что $X(0) = X'(l) = 0$. Подставляя эту же функцию в уравнение (76.2) и разделяя переменные, получаем (как и в 75.1.2, здесь также можно показать, что в силу краевых условий для определения ненулевого решения постоянная в правой части получаемого соотношения должна быть отрицательной):

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Данное уравнение распадается на два :

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \text{и} \quad T''(t) + (\lambda a)^2 T(t) = 0. \quad (77.11)$$

Общее решение первого уравнения имеет вид :

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

т.к. характеристическое уравнение $s^2 + \lambda^2 = 0$ имеет комплексные корни: $s_{1,2} = \pm \lambda i$.

Из граничных условий получаем:

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X'(l) = C_2 \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Нулевые решения будут получаться при $\cos \lambda l = 0$, т.е. при

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Каждому из этих собственных чисел λ_k соответствует функция $X_k(x) = C_k \sin((2k+1)\pi x/(2l))$.

Читателям рекомендуется самостоятельно доказать, что система собственных функций $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ ортогональна на $(0; l)$:

$$\int_0^l \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} l/2, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

Общее решение второго уравнения (77.11) имеет вид:

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l},$$

поэтому частным решением $u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t)$, соответствующим собственному числу λ_k , будет:

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Здесь $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$.

Для нахождения решения $u(x, t)$, удовлетворяющего кроме граничных ещё и начальным условиям, составим ряд:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (77.12)$$

и подберем коэффициенты a_k и b_k так, чтобы выполнялись начальные условия (76.3):

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = \varphi(x), \\ u'_t|_{t=0} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)\pi a}{2l} b_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = \psi(x). \end{aligned} \quad (77.13)$$

Таким образом, a_k и $\frac{(2k+1)\pi x}{2l}b_k$ являются коэффициентами в разложении в ряд Фурье функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по ортогональной системе функций $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$. Аналогично тому, как получались формулы для коэффициентов ряда Фурье, в данном случае имеем (чтобы вывести формулы для коэффициентов a_k обе части первого из равенств (77.13) сначала умножим на $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$, а затем проинтегрируем на $(0; l)$. Из второго равенства (77.13) аналогично получаем формулы для b_k):

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx; \\ b_k &= \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx. \end{aligned} \quad (77.14)$$

Таким образом, искомое решение задачи (76.2), (76.3), (76.5) даётся рядом (77.12), где коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам (77.14).

ПРИМЕР 77.2. *Однородный продольный стержень плотности ρ , длины l , закрепленный при $x = 0$, растянут силой P , приложенной к другому концу стержня. В момент $t = 0$ действие силы прекратилось. Найти продольные колебания стержня.*

Решение: Как было показано в (75.1.2), эта задача сводится к решению уравнения (76.2) при начальных условиях (76.7) и граничных условиях (76.5). Определяя по формулам (77.14) коэффициенты a_k и b_k , получаем:

$$a_k = \frac{2P}{lES} \int_0^l x \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \frac{8Pl(-1)^k}{\pi^2 ES(2k+1)^2}, \quad b_k = 0.$$

Решение задачи даётся рядом (77.12):

$$u(x, t) = \frac{8l}{\pi^2 ES} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

В закреплённом конце стержня (при $x = 0$) всегда будет узел, т.к. $u(x, t)|_{x=0} = 0$, в свободном конце (при $x = l$) — пучность, т.к. $\sin \frac{(2k+1)\pi l}{2l} = (-1)^k$.

77.3. Решение задачи о крутильных колебаниях вала методом Фурье

В лекции 76 была сформулирована задача о крутильных колебаниях вала длиной l с закрепленным левым концом и диском на правом. Математически она сводится к нахождению решения $\Theta(x, t)$ уравнения (76.2), в котором $u(x, t) = \Theta(x, t)$, удовлетворяющего начальным условиям (76.9) и граничным условиям (76.10).

Будем искать решение в виде $\Theta(x, t) = X(x)T(t)$. Подставляя функцию $\Theta(x, t)$ вместо $u(x, t)$ в уравнение (76.2) и разделяя переменные, получаем систему двух уравнений (77.11). Из первого граничного условия (76.10) следует: $X(0) = 0$.

Второе граничное условие перепишем в виде:

$$\Theta''_{tt}|_{x=l} = -b^2\Theta'_t|_{x=l}, \quad \text{где } b^2 = GJ_0/J_1$$

и подставим сюда $\Theta(l, t) = X(l)T(t)$. Получим:

$$T''(t)X(l) = -b^2T(t)X'(l).$$

Учитывая, что из второго уравнения (77.11) следует

$$T''(t) = -a^2\lambda^2T(t),$$

получаем второе граничное условие в виде:

$$\begin{aligned} T''(t)X(l) &= -b^2T(t)X'(l) \Rightarrow -a^2\lambda^2T(t)X(l) = \\ &= -b^2T(t)X'(l) \Rightarrow b^2X'(l) - a^2\lambda^2X(l) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, граничные условия для функции $X(x)$ имеют вид:

$$X(0) = 0, \quad b^2X'(l) - a^2\lambda^2X(l) = 0. \quad (77.15)$$

Как и в предыдущем подразделе, общее решение первого уравнения (77.11) имеет вид :

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из условий (77.15) определим значения C_1 и C_2 :

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow X(x) = C_2 \sin \lambda x,$$

$$\begin{aligned} b^2X'(l) - a^2\lambda^2X(l) &= 0 \Rightarrow \lambda(b^2 \cos \lambda l - a^2 \sin \lambda l)C_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2X'(l) - a^2\lambda \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \lambda l = \lambda a^2/b^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения собственных чисел получим уравнение:

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{a^2}{b^2} \lambda, \quad (77.16)$$

не решаемое аналитически. Графически легко показать (рис. 54), что уравнение (77.16) имеет бесчисленное множество корней λ_k , причём каждому положительному корню λ_k соответствует равный ему по абсолютной величине отрицательный. Как обычно, выбирая знак константы C_2 , можем рассматривать только положительные значения λ_k .

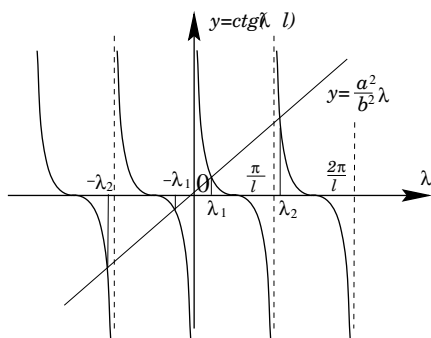


Рис. 54. Графическое определение собственных чисел уравнения 77.1

Каждому значению λ_k соответствует функция

$$X_k(x) = C_k \sin \lambda_k x.$$

Общее решение второго уравнения (77.11), соответствующее данному λ_k , имеет вид $T_k(t) = A_k \cos \lambda_k at + B_k \sin \lambda_k at$, поэтому частным решением $\Theta_k(x, t)$, соответствующим собственному числу λ_k , будет:

$$\Theta_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) \sin \lambda_k x,$$

где $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям, ищем в виде суммы:

$$\Theta(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) \sin \lambda_k x \quad (77.17)$$

и подбираем коэффициенты a_k и b_k так, чтобы выполнялись начальные условия :

$$\begin{aligned}\Theta'_t|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k b_k \sin \lambda_k x = 0 \Rightarrow b_k = 0, \\ \Theta|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \lambda_k x = \alpha \frac{x}{l} \quad k = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{77.18}$$

Из условия (77.18) найдем a_k . Следует заметить, что функции $\sin \lambda_k x$ не ортогональны на $(0; l)$, поэтому коэффициенты a_k нельзя найти с помощью формул Фурье; однако легко доказать, что их производные, т.е. $\cos \lambda_k x$, ортогональны на указанном интервале:

$$\int_0^l \cos \lambda_k x \cos \lambda_n x dx = \begin{cases} \frac{l}{2} + \frac{\sin(2\lambda_k l)}{4\lambda_k}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

Продифференцируем обе части (77.18) по x :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \lambda_k \cos \lambda_k x = \frac{\alpha}{l}.$$

Чтобы получить формулы для коэффициента a_k , обе части последнего равенства умножим на $\cos \lambda_n x$ и проинтегрируем на $(0; l)$. В силу ортогональности системы функций $\cos \lambda_k x$ получаем:

$$a_k \lambda_k \int_0^l \cos^2(\lambda_k x) dx = \frac{\alpha}{l} \int_0^l \cos \lambda_k x dx,$$

откуда, беря интегралы, окончательно имеем:

$$a_k = \frac{\alpha \sin \lambda_k l}{\lambda_k^2 l \left(\frac{l}{2} + \frac{\sin(2\lambda_k l)}{4\lambda_k} \right)}.\tag{77.19}$$

Таким образом, искомое решение даётся рядом:

$$\Theta(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \lambda_k t \sin \lambda_k x,\tag{77.20}$$

где коэффициенты a_k определяются по формулам (77.19).

Численные значения корней λ_k уравнения (77.16) можно найти в специальных таблицах или вычислить известными методами (метод деления отрезка пополам, метод Ньютона и т.п.).

На этом мы завершим рассмотрение примеров решения краевых задач для волнового уравнения по методу Фурье. Было видно, что решение даже специально подобранных примеров является очень громоздким, а более сложные задачи уже не поддаются решению по методу Фурье. Как уже отмечалось в предыдущих частях данного методического пособия, более общим методом решения краевых задач является метод сеток.

Практическое занятие 77. Аналитическое решение простейших волновых задач

В лекции 76 была выведена формула Даламбера (76.2) для решения задачи о свободных колебаниях бесконечной струны. Для случая полубесконечной струны $x \in [0, +\infty)$ были выведены две формулы: (76.15) для закреплённого конца струны и (76.17) для свободного конца струны. В лекции 77 были выведены формулы для решения краевых задач о колебаниях с однородными граничными условиями трёх типов.

Самостоятельная работа

77.4. Решение задачи о свободных колебаниях струны

Решить следующие задачи при $t > 0$:

ПРИМЕР 77.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = x^2,$
 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

ПРИМЕР 77.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = 0,$
 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

ПРИМЕР 77.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = \sin 2x,$
 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^x, \quad u|_{x=0} = 0, \quad x \in (0, +\infty).$

ПРИМЕР 77.4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = 0,$
 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad x \in (0, +\infty).$

77.5. Решение однородных краевых задач

Решить краевые задачи для одномерного волнового уравнения на области $x \in [0, L]$ при заданных начальных и граничных условиях:

ПРИМЕР 77.5. $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 100x, u|_{x=0} = 0, u|_{x=L} = 0.$

ПРИМЕР 77.6. $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2x, u|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0.$

ПРИМЕР 77.7. $u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2L}, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = 0,$
 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0.$

ПРИМЕР 77.8. $u|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = 0,$
 $u|_{x=L} = 0.$

Лекция 78. Метод сеток для решения волнового уравнения

Вывод конечно-разностного уравнения для решения краевых задач, описываемых волновым уравнением. Исследование устойчивости конечно-разностной явной схемы «Крест». Неявные схемы.

В волновое уравнение входит вторая производная по времени, для аппроксимации которой необходимы три временных слоя. Кроме того, производная входит и в начальные условия, входящие в соответствующие дифференциальные задачи. Для конкретности рассмотрим следующую краевую дифференциальную задачу:

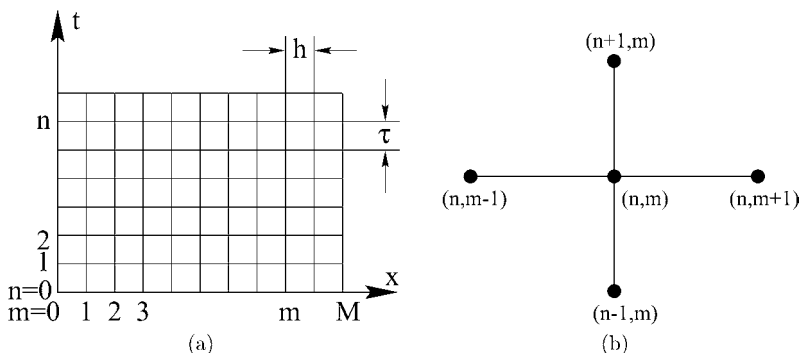


Рис. 55. Шаблон конечно-разностного волнового уравнения

Найти решение волнового уравнения в полосе $0 \leq x \leq l$, $t > 0$ при заданных начальных ($t = 0$) и краевых ($x = 0, x = l$) условиях.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0, x) = \varphi_0(x), \\ u'_t(0, x) = \varphi_1(x), \\ \alpha_0 u \Big|_{x=0} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \gamma_1(t), \\ \beta_0 u \Big|_{x=0} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \gamma_2(t). \end{cases} \quad (78.1)$$

Введем прямоугольную сетку $t^n = n\tau$, $x_m = mh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $m = 0, 1, 2, \dots, M = l/h$ (рис. 55,а).

78.1. Явная схема «Крест»

Рассмотрим вначале две возможные схемы, отличающиеся друг от друга аппроксимацией начальных условий, имеющие один и тот же явный пятиточечный трёхслойный шаблон, изображенный на рис. 55,б («Крест»).

При аппроксимации начальных условий конечно-разностной производной первого порядка точности, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0, \\ \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1; \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \varphi_1(mh), \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ \alpha_0 u_0^{n+1} + \alpha_1 \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} = \gamma_1(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \beta_0 u_M^{n+1} + \beta_1 \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{h} = \gamma_2(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (78.2)$$

Для аппроксимации начальных условий применим более точные приближённые формулы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0, \\ \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1; \\ u_m^0 = \varphi_0(mh), \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \varphi_1(mh) + \frac{\tau a^2}{2} \varphi_0''(mh), \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ \alpha_0 u_0^{n+1} + \alpha_1 \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} = \gamma_1(t^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \beta_0 u_M^{n+1} + \beta_1 \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{h} = \gamma_2(t^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (78.3)$$

Граничные условия для волнового уравнения совпадают с граничными условиями для уравнения теплопроводности (76.5 с, d). В схеме (78.2) дифференциальное уравнение аппроксимируется со вторым порядком по τ и h , а начальное условие с первым порядком — по τ , следовательно, порядок аппроксимации всей схемы будет второй по h и первый по τ . Схема (78.3) отличается от (78.2) аппроксимацией производной в начальном условии. В этой схеме производная $\partial u(0, x)/\partial t$ аппроксимируется со вторым порядком по τ и, следовательно, вся схема будет иметь второй порядок как по h , так и по τ . Получим аппроксимационное выражение $\partial u(0, x)/\partial t$ в схеме (78.3) при условии, что

$\varphi_0(x)$ имеет ограниченные производные. Значения u_m^1 можно получить по формуле Тейлора

$$u_m^1 = u_m^0 + \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t^2} \tau^2 + O(\tau^3).$$

Откуда на основании дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{d^2 \varphi_0(x)}{dx^2}$$

имеем

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} - \frac{a^2}{2} \frac{d^2 \varphi_0(x)}{dx^2} \tau + O(\tau^2),$$

а, следовательно, на основании второго начального условия (78.1)

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \varphi_1(mh) + \frac{\tau}{2} a^2 \varphi_0''(mh) + O(\tau^2).$$

Отсюда

$$u_m^1 = u_m^0 + \tau \varphi_1(mh) + \frac{\tau^2}{2} a^2 \varphi_0''(mh). \quad (78.4)$$

Зная u_m^0 и определив u_m^1 из (78.4) расчёт значений и на последующих слоях проводится по формуле:

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} + a^2 \frac{\tau^2}{h^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (78.5)$$

Рассмотрим теперь алгоритм решения краевой задачи для волнового уравнения по явной схеме:

- (1) По формуле $u_m^0 = \varphi_0(mh)$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$ находим решение на нулевом временном слое при $t = 0$.
- (2) $n = 1$. По формуле $u_m^1 = u_m^0 + \tau \varphi_1(mh)$ или по более точной формуле (78.4) получаем решение на первом временном слое при $t = \tau$.
- (3) По формулам (78.5) получаем значение сеточной функции u во всех внутренних узлах ($m = 1, 2, \dots, M-1$) $n+1$ -го временного слоя при $t = (n+1)\tau$.
- (4) Подставляем граничные условия на левой (76.5 с) и правой (76.5 d) границе области при $t = (n+1)\tau$.
- (5) $n = n+1$
- (6) Если $n < N$, переход на пункт 3.
- (7) Вывод результатов расчёта.

78.1.1. *Устойчивость конечно-разностной схемы «Крест».* Перейдем теперь к рассмотрению устойчивости введенной явной схемы «Крест». Подставляя возмущение $\delta u_m^n = \lambda^n e^{iwmh}$ в уравнение для возмущений

$$\frac{\delta u_m^{n+1} - 2\delta u_m^n + \delta u_m^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{\delta u_{m+1}^n - 2\delta u_m^n + \delta u_{m-1}^n}{h^2} = 0,$$

после некоторых преобразований при $\tau > rh$ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2 \left(1 - 2r^2 a^2 \sin^2 \frac{wh}{2} \right) \lambda + 1 = 0. \quad (78.6)$$

Корни данного характеристического уравнения согласно теореме Виета связаны соотношением $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Поэтому, если они действительные и один меньше единицы, то другой больше единицы. Поэтому схема может быть устойчивой лишь при комплексных корнях, которые являются сопряженными и по модулю равными единице. Из (78.6) имеем:

$$\lambda = 1 - 2r^2 a^2 \sin^2 \frac{wh}{2} \pm 2ra \sin \frac{wh}{2} \sqrt{r^2 a^2 \sin^2 \frac{wh}{2} - 1}. \quad (78.7)$$

Следовательно для устойчивости схемы «крест» необходимо, чтобы неоднородное выражение в (78.7) было отрицательным: $r^2 a^2 \sin^2(wh/2) < 1$, а при $r^2 a^2 \sin^2(wh/2) = 1$ имеем $|\lambda| = 1$. Если взять самые опасные частоты, для которых $\sin^2(wh/2) = 1$, имеем, что схема «Крест» устойчива при $r^2 a^2 \leq 1$, т.е.

$$r = \frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{a}. \quad (78.8)$$

Напомним, что область зависимости решения волнового уравнения в любой заданной точке (t^{n+1}, x_m) охватывается характеристиками $x - at = C_1$ и $x + at = C_2$, приходящими в эту точку (пунктир на рис. 56). Область же зависимости для разностной схемы определяется шаблоном. Согласно условию КФЛ, для того, чтобы разностная схема была устойчивой, необходимо, чтобы область зависимости решения в любой точке (t^{n+1}, x_m) конечно-разностной схемы охватывала бы область зависимости дифференциального уравнения, т.е. для схемы «Крест» $\frac{\tau}{h} \leq a$, что совпадает с условием устойчивости этой схемы, полученным по признаку Неймана. Однако такое совпадение

бывает не всегда. Напомним, что признак КФЛ является лишь необходимым признаком сходимости.

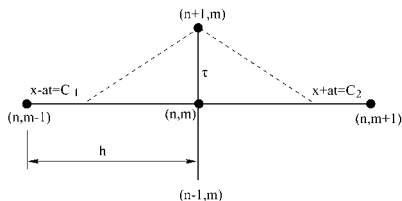


Рис. 56. Сходимость конечно-разностной схемы для волнового уравнения

78.2. Неявные схемы

Перейдем теперь к рассмотрению простейших неявных схем для волнового уравнения. В трёхслойной разностной схеме вторая производная по t расписывается в центральной точке (n, m) . Таким образом, и производная по x должна расписываться также в этой точке. Простейшие два неявных шаблона, для которых можно удовлетворить этому условию, представлены на (рис. 57, а и 57, б)

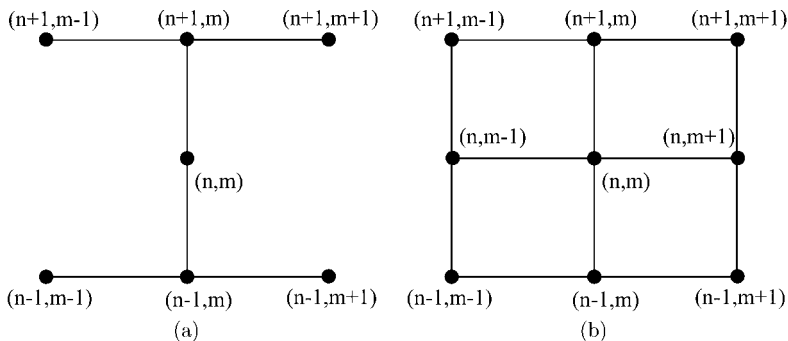


Рис. 57. Примеры неявных шаблонов для конечно-разностных схем волнового уравнения

Разностные схемы, определяемые этими шаблонами, могут быть записаны одним выражением

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{\sigma(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1})}{h^2} - a^2 \frac{(1 - 2\sigma)(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \sigma(u_{m+1}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m-1}^{n-1})}{h^2} = 0, \quad (78.9)$$

которое при $\sigma = 1/2$ соответствует семиточечной неявной разностной схеме, рис. 57, а при $\sigma = 1/4$ — девятиточечной неявной разностной схеме, рис. 57, b. Кстати, при $\sigma = 0$ разностная схема (78.9) совпадает с явной схемой «Крест».

Характеристическое уравнение для (78.9) после преобразований при $\tau = rh$ будет иметь вид:

$$(1 + 4\sigma r^2 a^2 \sin^2(wh/2)) \lambda^2 - 2(1 - 2(1 - 2\sigma)r^2 a^2 \sin^2(wh/2)) \lambda + 1 + 4\sigma^2 r^2 a^2 \sin^2(wh/2) = 0. \quad (78.10)$$

Откуда при $\sigma = 1/2$ и $\sigma = 1/4$ получим, что $|\lambda| = 1$, т.е. обе эти схемы абсолютно устойчивы, однако решение краевой задачи по уравнениям (78.9) получить сложнее, чем по явной схеме (78.5), т.к. для разрешения системы трёхточечных уравнений на рассчитываемом $(n+1)$ -ом слое необходимо, как и для неявной схемы в уравнении теплопроводности, использовать метод прогонки.

Практическое занятие 78. Решение волнового уравнения аналитическими методами

78.3. Решение задачи Коши

В лекции 76 выведены формулы Даламбера для решения задачи Коши для волнового уравнения в бесконечной и полубесконечной области. Формулы получились достаточно простые, однако для получения решения необходимо вычислять интеграл от функции $\psi(x)$, задающей скорость точек струны в начальный момент времени. Часто эта функция является достаточно сложной и для вычисления интеграла необходимо применять численные методы. Кроме того, для исследования поведения решения необходимо строить графики решений при фиксированных значениях временной координаты и исследовать характер решения. Поэтому для исследования решения задачи Коши удобнее использовать пакет MathCad.

В качестве примера решения задачи Коши с использованием пакета MathCad рассмотрим решение рассмотренной в лекции 75.1.2 задачи 76.1. Ниже приведена достаточно простая, но универсальная программа решения данной задачи.

```

ORIGIN := 0  TOL := 0.00001  N := 5  M := 100  a := 2
n := 0..N  m := 0..M  A := -5  B := 5  h :=  $\frac{B-A}{M}$ 
 $\tau := 0.25$    $t_n := \tau \cdot n$    $x_m := A + h \cdot m$ 
 $\varphi(x) := 0$    $\psi(x) := 100 \cdot \operatorname{atan}(x)$ 
 $u(x, t) := 0,5 \cdot (\varphi(x - a \cdot t) + \varphi(x + a \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{x-a \cdot t}^{x+a \cdot t} \psi(z) dz$ 
 $U_{m,n} := u(x_m, t_n)$ 

```

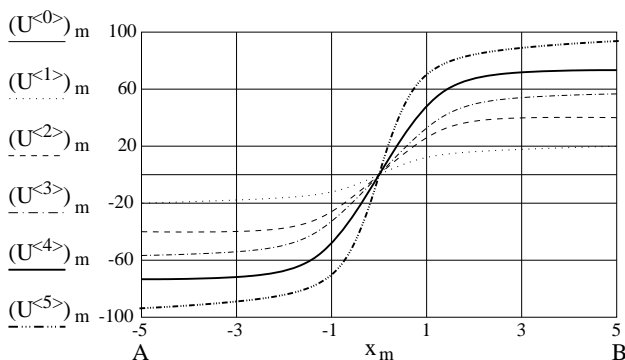


Рис. 58. Решения задачи Коши в бесконечной области для примера 76.1

На рис. 58 представлены результаты, полученные в MathCad. При $t = 0$ график решения совпадает с осью Ox .

Приведем теперь аналогичную программу решения этой же задачи с использованием пакета Maxima.

```

(%i1) a:2$ numer:true$ fpprintprec:4$ ratprint:false$
(%i4) fi(x):=0$
(%i5) psi(x):=100*atan(x);
/* Формула Даламбера.*/

```

```
(%i6) u(x,t):=0.5*(fi(x-a*t)+fi(x+a*t))+
      1/(2*a)*quad_qag(psi(z), z, x-a*t, x+a*t,5)[1];
(%i7) N:20$ A:-5$ B:5$ h:(B-A)/N;
(%i9) array(X, N)$

/* Генерируем координаты точек по оси Oх в массиве X.*/

(%i10) fillarray(X,makelist(A+k*h,k,0,N));
(%i11) array(T, 5)$

/* Задаем значения параметра t в которых выводим графики.*/

(%i12) fillarray(T, [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]);

/* Создаем списки с координатами узловых точек графиков.*/

(%i13) G0 : makelist([X[k], u(X[k], T[0])], k, 0, N);
      G1 : makelist([X[k], u(X[k], T[1])], k, 0, N);
      G2 : makelist([X[k], u(X[k], T[2])], k, 0, N);
      G3 : makelist([X[k], u(X[k], T[3])], k, 0, N);
      G4 : makelist([X[k], u(X[k], T[4])], k, 0, N);
      G5 : makelist([X[k], u(X[k], T[5])], k, 0, N);

/* Строим графики.*/

(%i14) wxplot2d([[discrete, G0], [discrete, G1],
      [discrete, G2],[discrete, G3], [discrete, G4],
      [discrete, G5]], [x, A, B], [style, [lines,4,1],
      [lines,2,2], [lines,4,3], [lines,2,4],
      [lines,4,5], [lines,4,6]],
      [gnuplot_preamble,"set grid"], [ylabel,""],
      [legend, "t=0", "t=0.2", "t=0.4", "t=0.6",
      "t=0.8", "t=1.0"]);
```

78.4. Решение краевой однородной задачи для волнового уравнения

Аналитическое решение краевой задачи для волнового уравнения с однородными граничными условиями трёх типов подробно рассматривалось в лекции 77. Рассмотрим решение ранее рассмотренного примера 77.1 в рамках компьютерных пакетов MathCad и Maxima.

Ниже представлена MathCad-программа решения примера 77.1.

$$\begin{aligned}
 N &:= 5 & TOL &:= 0.00001 & ORIGIN &:= 0 & M &:= 100 \\
 K &:= 20 & a &:= 1 & P &:= 100 & L &:= 1 \\
 n &:= 0..N & m &:= 0..M & k &:= 0..K & h &:= \frac{L}{M} \\
 t_n &:= 0.2 \cdot n & x_m &:= h \cdot m
 \end{aligned}$$

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{4 \cdot P \cdot x}{3 \cdot L} & \text{if } 0 \leq x \wedge x \leq \frac{3 \cdot L}{4} \\ \frac{4 \cdot P \cdot (L - x)}{L} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_k := \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx$$

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^K \left(A_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a \cdot t}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right)$$

$$U_{m,n} := u(x_m, t_n)$$

На рис. 59 представлены графики решения данного примера для шести значений временной координаты t .

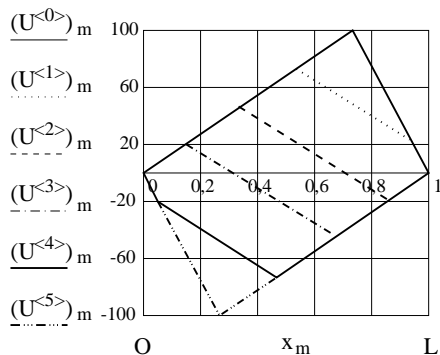


Рис. 59. Перемещение точек струны со временем для примера 77.1

Приведем Maxima - программу для решения этого же примера.

```
(%i1) numer:true$ ratprint:false$ fpprintprec:4$ L:1$ N:5$
(%i6) M:50$ K:20$ Tmax:1$ a:1$ P:100$
(%i11) fi(x):=(if x>=0 and x<=0.75*L then (4*P*x)/(3*L)
```

```

else (4*P*(L-x)/L));
(%i12) A: makelist(2/L*(quad_qag(fi(x)*sin(k*%pi/L*x),
      x,0,L,3)[1]),k,1,K);
(%i13) u(x,t):=sum(A[k]*cos(k*%pi*a*t/L)*
      sin(k*%pi*x/L),k,1,K);
(%i14) h:L/M; tau:Tmax/N;
(%i16) array(X,M)$ fillarray(X,makelist(h*m,m,0,M));
(%i18) array(T,N)$ fillarray(T,makelist(tau*n,n,0,N));
(%i20) G0: makelist([X[m],u(X[m],T[0])],m,0,M);
      G1: makelist([X[m],u(X[m],T[1])],m,0,M);
      G2: makelist([X[m],u(X[m],T[2])],m,0,M);
      G3: makelist([X[m],u(X[m],T[3])],m,0,M);
      G4: makelist([X[m],u(X[m],T[4])],m,0,M);
      G5: makelist([X[m],u(X[m],T[5])],m,0,M);
(%i26) wxplot2d([[discrete,G0],[discrete,G1],
      [discrete,G2],[discrete,G3],[discrete,G4],
      [discrete,G5]], [style,[lines,4,1],[lines,2,2],
      [lines,4,3],[lines,2,5]],
      [gnuplot_preamble,"set grid"], [ylabel,""],
      [legend, "t=0","t=0.2", "t=0.4", "t=0.6",
      "t=0.8", "t=1.0"] );

```

Рассмотрим теперь пример более сложных начальных условий, при которых коэффициенты рядов Фурье аналитически не вычисляются, а в рамках пакетов MathCad и Maxima сложность программы не изменяется.

ПРИМЕР 78.1. Методом Фурье решить смешанную задачу для волнового уравнения с начальными условиями

$$u \Big|_{t=0} = x \cdot (L - x) \cdot e^{x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.1 \cdot \sin^2 \frac{4 \cdot \pi \cdot x}{L}$$

и однородными граничными условиями: $u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=L} = 0$.

Р е ш е н и е: Решение данной задачи имеет вид (77.8), где коэффициенты определяются по формулам (77.9). Представим программу для решения данного примера на MathCad.

$$N := 5 \quad TOL := 0.00001 \quad ORIGIN := 0 \quad M := 100 \quad K := 20$$

$$n := 0..N \quad m := 0..M \quad k := 0..K \quad L := 1 \quad h := \frac{L}{M} \quad a := 1$$

$$t_n := 0.25 \cdot n \quad x_m := h \cdot m$$

$$\varphi(x) := x \cdot (L - x) \cdot e^{x^2} \quad \psi(x) := 0.1 \cdot \left(\sin \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right)^2$$

$$A_k := \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right) dx$$

$$B_k := \frac{2}{\pi \cdot a \cdot k} \cdot \int_0^L \psi(x) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right) dx \quad p := \frac{\pi \cdot a}{L}$$

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^K (A_k \cdot \cos(k \cdot p \cdot t) + B_k \cdot \sin(k \cdot p \cdot t)) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right)$$

$$U_{m,n} := u(x_m, t_n)$$

На рис. 60 представлены графики решения данного примера для шести значений временной координаты t .

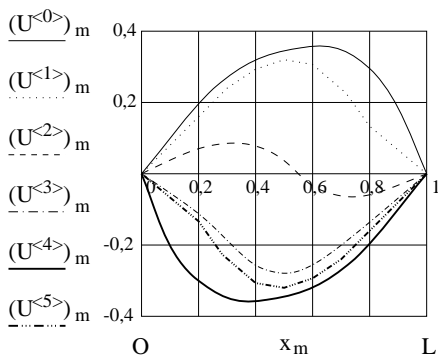


Рис. 60. Перемещение точек струны со временем для примера 78.1

Приведем Maxima-программу для решения этого же примера.

```
(%i1) numer:true$ ratprint:false$ fpprintprec:4$ L:1$
(%i5) N:5$ M:50$ K:20$ Tmax:1$ a:1$
```

```
(%i10) fi(x):=x*(L-x)*exp(x^2);
(%i11) psi(x):=0.1*(sin(4*pi*x/L))^2;
(%i12) A:=makelist(2/L*(quad_qag('fi(x)*
      sin(k*pi/L*x),x,0,L,3)[1]),k,1,20);
(%i13) B:=makelist(2/(pi*a*k)*(quad_qag('psi(x)*
      sin(k*pi/L*x),x,0,L,3)[1]),k,1,20);
(%i14) p:=pi*a/L;
(%i15) u(x,t):=sum(A[k]*cos(k*p*t)*sin(k*pi*x/L)+
      B[k]*sin(k*p*t)*sin(k*pi*x/L),k,1,K);
(%i16) h:L/M; tau:Tmax/N;
(%i18) array(X,M)$ fillarray(X,makelist(h*m,m,0,M));
(%i20) array(T,N)$ fillarray(T,makelist(tau*n,n,0,N));
(%i22) G0:=makelist([X[m],u(X[m],T[0])],m,0,M);
      G1:=makelist([X[m],u(X[m],T[1])],m,0,M);
      G2:=makelist([X[m],u(X[m],T[2])],m,0,M);
      G3:=makelist([X[m],u(X[m],T[3])],m,0,M);
      G4:=makelist([X[m],u(X[m],T[4])],m,0,M);
      G5:=makelist([X[m],u(X[m],T[5])],m,0,M);
(%i28) wxplot2d([[discrete,G0],[discrete,G1],
      [discrete,G2],[discrete,G3],[discrete,G4],
      [discrete,G5]], [style,[lines,4,1],[lines,2,2],
      [lines,4,3],[lines,2,5]],
      [gnuplot_preamble,"set grid"], [ylabel,""],
      [legend, "t=0", "t=0.2", "t=0.4", "t=0.6",
      "t=0.8", "t=1.0" ] );
```

Лекция 79. Уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа и задача Дирихле для круговой области. Решение задачи Дирихле для круговой области методом Фурье. Метод сеток для решения задачи Дирихле и Неймана на прямоугольных областях

79.1. Уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга

Пусть требуется найти решение $u(x, y)$ двумерного уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (79.1)$$

заданного в области σ ; решение должно удовлетворять граничному условию на контуре L , ограничивающем σ :

$$u(x, y)|_L = \psi(x, y). \quad (79.2)$$

Такая задача называется *плоской задачей Дирихле*. Мы ограничимся решением этой задачи для случая, когда область σ есть круг радиусом R с центром в начале координат. В этом случае задачу удобно решать в полярных координатах. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

С помощью правила дифференцирования сложной функции найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Аналогично получается :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Далее, поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \arctg(y/x)$, находим:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{r^3} = \frac{\sin^2 \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^3} = \frac{\cos^2 \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{(-y/x^2)}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{\cos \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2}.$$

С учётом этих формул выражения для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (79.1), после очевидных упрощений получаем уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (79.3)$$

Искомая функция $u(r, \varphi)$, кроме уравнения (79.3), должна удовлетворять также граничным условиям

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = \psi(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ — заданная функция, определённая во всех точках окружности L : $r = R$, причём $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$. Для решения уравнения (79.3) применим метод Фурье, т.е. будем искать решение в виде:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Подставив это решение в уравнение (79.3), получим :

$$\Phi(\varphi)R''(r) + \frac{1}{r}\Phi(\varphi)R'(r) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Откуда

$$-\frac{rR'(r) + r^2R''(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = C. \quad (79.4)$$

Можно показать, что для получения ненулевого решения необходимо, чтобы константа C была отрицательна:

$$C = -\lambda^2.$$

Это следует из того, что решение должно быть периодическим по φ . При этом уравнение (79.4) распадается на два:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0, \quad (79.5)$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda^2R(r) = 0. \quad (79.6)$$

Общее решение уравнения (79.5) имеет вид:

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\lambda\varphi) + B \sin(\lambda\varphi).$$

Заметим, что увеличение φ на 2π возвращает точку с координатами (r, φ) в исходное положение, значит все рассматриваемые функции от φ должны иметь период 2π . Таким образом, $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ (собственные числа), соответствующие собственные функции $\Phi_k(\varphi)$, определяются по формулам:

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Отрицательные значения λ отбрасываем, т.к. знак λ влияет только на знак произвольной постоянной B_k .

Решение уравнения (79.6) (уравнение Эйлера) будем искать в виде $R(r) = r^m$. Находим производные

$$R'(r) = mr^{m-1}, \quad R''(r) = m(m-1)r^{m-2},$$

подставляем их в (79.6) и получаем

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + r m r^{m-1} - \lambda^2 r^m = 0,$$

откуда: $m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \lambda$. Два полученных решения уравнения (79.6): $R_1(r) = r^\lambda$ и $R_2(r) = r^{-\lambda}$ составляют, как легко проверить, фундаментальную систему. Однако решение $R_2(r) = r^{-\lambda}$ неограничено при $r \rightarrow 0$, поэтому его отбрасываем. Следовательно, решение уравнения (79.6) имеет вид: $R(r) = C r^\lambda$, а его решение, соответствующее собственным числам $\lambda = k$, имеет вид:

$$R_k(r) = C_k r^k.$$

Окончательно получаем, что решение $u_k(r, \varphi)$ уравнения (79.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_k(r, \varphi) &= R_k(r) \Phi_k(\varphi) = (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) C_k r^k = \\ &= (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) r^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Обозначим $u_0(r, \varphi) = a_0/2$; непосредственной подстановкой проверяется, что функция эта также является решением уравнения (79.3).

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма этих решений $u(r, \varphi)$ также будет решением уравнения (79.3):

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) r^k. \quad (79.7)$$

Коэффициенты a_k и b_k найдем из граничного условия:

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k R^k \cos(k\varphi) + b_k R^k \sin(k\varphi)) = f(\varphi),$$

откуда коэффициенты определяются по формулам Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_k R^k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi,$$

$$b_k R^k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Окончательно получаем формулы для коэффициентов :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, & a_k &= \frac{1}{R^k \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \\ b_k &= \frac{1}{R^k \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, & k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (79.8)$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для круга даётся рядом (79.7), где коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам (79.8).

ПРИМЕР 79.1. Дана однородная круглая пластинка радиуса R , причём на верхней половине ограничивающей окружности поддерживается температура 1^0C , а на нижней — 0^0C . Найти распределение температуры на пластинке.

Решение: Нужно решить задачу Дирихле для круга с граничным условием вида:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0, & \text{при } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

По формулам (79.8) находим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d\varphi \right) = 1, \quad a_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{\pi} 1 \cos(k\varphi) d\varphi = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{\pi} 1 \sin(k\varphi) d\varphi = \frac{1 - (-1)^k}{\pi R^k k} \Rightarrow b_{2n} = 0,$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{\pi R^{2n-1} (2n-1)}.$$

Согласно (79.7) получаем решение:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n-1} \frac{\sin((2n-1)\varphi)}{2n-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 79.1. Решение задачи Дирихле для круга можно также представить в виде интеграла Пуассона:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{R^2 - \tau^2}{R^2 - 2R\tau \cos(\tau - \varphi) + \tau^2} d\tau.$$

В заключение отметим, что полученное решение задачи Дирихле для круга позволяет также решать соответствующую задачу для бесконечного кругового однородного цилиндра, ось которого совпадает с Oz . Считая, что температура внутри цилиндра установилась, требуется найти закон распределения температур при условии, что на границе цилиндра поддерживается заданная температура. Рассматривается случай, когда распределение температуры на поверхности во всех поперечных сечениях цилиндра одинаково. В этом случае задача для цилиндра сводится к решению плоской задачи Дирихле для круга.

79.2. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Пусть область D , в которой ищется, например, решение задачи Дирихле, представляет собой прямоугольник со сторонами, равными a и b (рис. 61). Разобьем его на M частей по оси x и на N — по оси y . Шаги сетки по переменным x и y обозначим h_x и h_y .

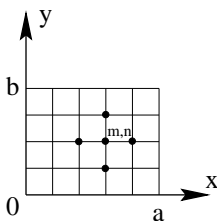


Рис. 61. Шаблон для конечно-разностной схемы уравнения Лапласа

Аппроксимируем производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в точке (m, n) по схеме «Крест».

Тогда получим следующую конечно-разностную схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h_x^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{h_y^2} = 0, \\ \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ u_{m,0} = \varphi(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ u_{m,N} = \varphi(x_m, b), \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ u_{0,n} = \varphi(0, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_{M,n} = \varphi(a, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (79.9)$$

Уравнение Лапласа не является эволюционным. В нём нет какой-либо предпочтительной переменной, x и y — переменные по пространству и они равноправны. Это равноправие мы отмечаем тем, что оба индекса сеточной функции U ставим внизу. Получаемая в результате замены дифференциальной задачи Дирихле для уравнения Лапласа система алгебраических уравнений (79.9) содержит $(N+1)(M+1)$ неизвестных и может быть решена обычным методом исключения лишь при небольших значениях N и M .

При большом числе узлов решение системы (79.9) представляет значительные трудности. Наибольшее распространение получили итерационные методы решения таких систем.

Простейший итерационный процесс может заключаться в следующем. Выразим из первого уравнения (79.9) $u_{m,n}$ и снабдим его верхним итерационным индексом $(p+1)$, значения u в остальных узлах — соответствующим индексом (p) .

$$u_{m,n}^{(p+1)} = \left(u_{m+1,n}^{(p)} + u_{m-1,n}^{(p)} + r \left(u_{m,n+1}^{(p)} + u_{m,n-1}^{(p)} \right) \right) / (2(r+1)), \quad (79.10)$$

где параметр сетки $r = (h_x/h_y)^2$. Задавая какие-либо значения u во всех узлах области, кроме значения в граничных точках, которые известны, следующие приближения будем определять по формуле (79.10).

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока два последовательных приближения для $u_{m,n}$ не станут отличаться друг от друга меньше, чем на заданную величину ε , т.е. во всех узлах сетки будет удовлетворяться неравенство

$$|u_{m,n}^{(p+1)} - u_{m,n}^{(p)}| < \varepsilon. \quad (79.11)$$

Установлено, что, если итерационную формулу (79.10) заменить на формулу

$$u_{m,n}^{(p+1)} = \frac{\omega}{2(r+1)}(u_{m+1,n}^{(p)} + u_{m-1,n}^{(p)} + r(u_{m,n+1}^{(p)} + u_{m,n-1}^{(p)})) + (1-\omega)u_{m,n}^{(p)}, \quad (79.12)$$

то можно выбором параметра ω добиться значительного сокращения числа итераций, необходимого для сходимости решения (выполнения условия (79.11)) числа итераций. Выбор наиболее оптимального параметра ω для конкретной задачи можно осуществить на грубой сетке, а затем с выбранным параметром ω выполнить более точный расчёт уже на мелкой сетке.

При решении задачи итерационным методом очень важно правильно подобрать нулевое приближение $u^{(0)}$. При плохом выборе нулевого приближения число итераций, необходимых для достижения заданной точности, существенно увеличивается и даже может возникнуть такая ситуация, что итерационный процесс может расходиться. Для правильного подбора нулевого приближения рекомендуется использовать граничные условия.

Итерационный метод (79.10) можно трактовать как выход на стационарный режим решения краевой задачи для некоторого эволюционного уравнения с двумя пространственными переменными при заданных произвольных начальных условиях в области D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (79.13)$$

Для исследования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнение (79.13), также могут быть применены условие КФЛ и признак Неймана, но в отличие от рассмотренных нами схем для одномерных по пространству уравнений в случае (79.12) вводится сетка в трёхмерном пространстве (t, x, y) .

$$\begin{aligned} t^n &= n\tau, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ x_m &= mh, & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ y_k &= kl, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ u(t^n, x_m, y_k) &= U_{m,k}^n. \end{aligned} \quad (79.14)$$

И для исследования устойчивости по Нейману разностной схемы, аппроксимирующей (79.13), рассматриваются возмущения специального вида

$$\delta U_{m,k}^n = \lambda^n \cdot e^{tw_1mh} \cdot e^{tw_2kl}. \quad (79.15)$$

Необходимое условие Куранта, Фридрихса, Леви в многомерном случае формулируется точно так же, как и для одномерных эволюционных уравнений.

Мы рассмотрели наряду с аналитическими методами решения задач математической физики и основные понятия разностных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных и примеры исследования аппроксимации и устойчивости некоторых разностных схем для простейших линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Разумеется, что особое внимание исследованию свойств схемы должно уделяться при создании и использовании новых разностных схем. Однако и все те, кто использует уже известные разностные схемы решения дифференциальных задач, должны быть в какой-то степени знакомы с такими чрезвычайно важными понятиями теории разностных схем, как аппроксимация, устойчивость, сходимость, чтобы суметь разобраться в полученных результатах расчёта и правильно оценить их точность.

Практическое занятие 79. Решение волнового уравнения методом сеток

79.3. Постановка задачи

На конкретном примере рассмотрим решение краевой задачи для волнового уравнения методом сеток.

ПРИМЕР 79.1. *Методом сеток решить смешанную задачу для волнового уравнения (72.14) с начальными условиями*

$$u \Big|_{t=0} = \sin \pi x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,5 \cdot \cos \frac{\pi x}{2}$$

и граничными условиями

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = 0, 1 \sin 2\pi t.$$

Заменяя начальные и граничные условия их конечно-разностными аналогами, получаем

$$\begin{aligned} u_m^0 &= \sin \pi x_m, & m &= 0, 1, 2, \dots, M; \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} &= 0,5 \cdot \cos \frac{\pi x_m}{2}, & m &= 0, 1, \dots, M; \\ u_0^{n+1} &= 0, & n &= 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ u_M^{n+1} + \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{h} &= 0,1 \cdot \sin 2\pi t^{n+1}, & n &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим: решение на нулевом временном слое

$$u_m^0 = \sin \pi x_m. \quad (79.1)$$

Решение на первом временном слое

$$u_m^1 = u_m^0 + \tau \cdot \cos(0,5\pi x_m). \quad (79.2)$$

Решение на левом крае

$$u_0^{n+1} = 0. \quad (79.3)$$

Решение на правом крае

$$u_M^{n+1} = (u_{M-1}^{n+1} + h \cdot 0,1 \cdot \sin(2\pi t^{n+1})) / (1 + h). \quad (79.4)$$

79.4. Решение волнового уравнения в рамках табличного процессора Excel без использования программирования

В качестве шага сетки по пространственной координате h возьмём значение 0,05. Тогда параметр τ равен $r \cdot h$. Конечно-разностная схема для волнового уравнения сходится, если выполняется условие $r \leq 1$. Выбираем значение $r=1$.

Для решения поставленной задачи по явной схеме входим в текстовый процессор Excel и прodelываем такие же действия как и для решения задачи теплопроводности. Переименуем любой рабочий лист на **Волновое Уравнение**. В первой строке пишем заглавие работы. В ячейках B2, D2 и F2 записываем значения параметров сетки r , h и τ : 1, 0,05 и формулу $= B2 * D2$, соответственно. Заполняем теперь третью строку. В ячейку A3 записываем текст t/x . Далее записываем массив абсцисс x_m . Для этого в ячейку B3 пишем число 0. В ячейку C3 пишем формулу $= D2$. В ячейку D3 формулу $= C3 + \$D\2 . Эту формулу продолжаем до ячейки V3 ($x = 1$). Для заполнения массива координат узлов по временной координате t прodelаем аналогичные действия. В ячейку A4 пишем значение начального времени – 0. В

ячейку $A5$ - формулу $=F\$2$. В ячейку $A6$ — формулу $=A5+F\$2$ и продолжаем её до ячейки $A24$. В ячейках $B4 : V4$ подставляем начальные условия на нулевом временном слое (79.1). Для этого в ячейки $B4$ пишем формулу $=\sin(3,14159 * B\$3)$ и продолжаем её до ячейки $L4$. Теперь вычисляем решение на первом временном слое (79.1). В ячейку $B5$ вводим формулу: $=C4 + F\$2 * \cos(1,5708 * C\$3)$.

Для получения решения во внутренних точках сетки используем формулу (78.5). В ячейку $C6$ вводим следующую формулу: $=2 * C5 - C4 + (\$F\$2 / \$D\$2) \cdot \Delta t^2 * (D5 - 2 * C5 + B5)$ и продолжаем её влево до ячейки $U6$. Подставим теперь граничные условия на левом (79.3) и правом крае (79.4) области. В ячейку $B6$ вводим формулу $= 0$. Теперь осталось заполнить ячейку $V5$, в которой необходимо подставить граничное условие на правом торце. В данную ячейку вводим формулу $=(U6 + \$D\$2 * 0,1 * \sin(6,28 * \$A5) / (1 + \$D\$2))$. Теперь для получения решения на других временных слоях, выделяем область $A6 : V6$. И продолжаем её до 24 строки. В результате поставленная задача решена и осталось исследовать поведение решения в зависимости от пространственной координаты и времени.

Построим графики значений температур на различных временных слоях. На одной диаграмме построим графики на шести временных слоях при $t = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$ и 1.0 . Для этого скроем все строки, кроме 3, 4, 8, 12, 16, 20 и 24, и при помощи мастера диаграмм построим графики решений на указанных временных слоях. Результаты, полученные в рамках табличного процессора Excel, полностью совпадают с результатами, полученными по программе, написанной на алгоритмическом языке Visual Basic и MathCad и приводятся ниже.

79.5. Решение волнового уравнения с использованием программирования на Visual Basic

Для решения волнового уравнения с использованием программирования на алгоритмическом языке Visual Basic напомним программу, аналогичную программе для решения задачи теплопроводности. Для построения графиков используем подпрограмму **ПостроитьГрафики**, используемую для построения графиков задачи переноса. Приведённая ниже программа снабжена достаточным объёмом комментариев, поэтому приводим её без дополнительных предварительных пояснений.

```
Sub ВолновоеУравнениеЯвнаяСхема()  
Dim x() As Double, y() As Double, ynp1() As Double
```

```

Dim, ynm1() As Double, h As Double, tau As Double
Dim r As Double, a As Double Dim hPr As Double
Dim tauPr As Double, Tmax As Double, L As Double
Dim nn As Long, mm As Long, MPr As Long, a1 As Double
Dim a2 As Double Dim n As Long, m As Long
Dim ngr As Integer Dim t As Double, rr As Double
Dim pi As Double
pi = Atn(1) * 4
' Исходные данные для задачи
L = 1 : a = 1 ' Это скорость распространения волны
Tmax = 0.5 ' Верхняя граница временной координаты
h = 0.01 ' Это шаг по пространственной координате
r = 1 ' Параметр сетки
tau = r * h ' Это шаг по временной координате
' Шаг для вывода значений функции по координате x
hPr = 0.1
' Это шаг вывода графиков по временной координате t
tauPr = 0.1
NPr = CLng(Tmax / tauPr) + 1 ' Число графиков
' Через столько точек выводить результаты по оси Oх
MPr = CLng(hPr/h)
mm = CLng(L/h) ' Количество ячеек сетки по оси Oх
nn = CLng(Tmax/tau) ' Количество ячеек сетки по оси Ot
' Размерность используемых динамических массивов
ReDim x(mm), y(mm), ynp1(mm), ynm1(mm)
For m = 0 To mm
    x(m) = h * m
    ' Подстановка начальных условий
    ' Нулевой временной слой
    ynm1(m) = Sin(pi * x(m))
    ' Первый временной слой
    y(m) = ynm1(m) + tau * 0.5 * Cos(0.5 * pi * x(m))
Next m
' Имя листа для вывода результатов и графиков
Dim NameSh As String
NameSh = "ВолновоеУравнение"
Sheets(NameSh).Select Cells.Clear ' Очистить рабочий лист
Cells(1, 1) = "t/x": Cells(2, 1) = "t=0"
ngr = 1 ' Номер текущего графика

```

```

For m = 0 To mm Step MPr
    Cells(1,m/MPr+2) = CDBl(Format(x(m),"#0.00"))
    Cells(ngr+1,m/MPr+2)=CDBl(Format(ynm1(m),"#0.00"))
Cells(1,m/MPr + 2).Interior.Color = RGB(220, 90, 220)
Next m
a1 = 2 * (1 - r ^2) : a2 = r ^2
For n = 2 To nn
    t = tau * n
    For m = 1 To mm - 1
        ynp1(m)=a1*y(m)+a2*(y(m+1)+y(m-1))-ynm1(m)
    Next m
    Call ГраничныеУсловияВолновое(ynp1, t, h, mm)
    'Переставить активные временные слои для следующей
    'итерации
    For m = 0 To mm
        ynm1(m) = y(m)
    y(m) = ynp1(m)
    Next m
    'Записать решение на данном временном слое а
    'Записываются с шагом tauPr
    If Abs((ngr) * tauPr - t) < tau / 10 Then
        ngr = ngr + 1
        Cells(ngr + 1, 1) = "t="+ Format(t, "#0.00")
    For m = 0 To mm Step MPr
        Cells(ngr+1,m / MPr + 2) = CDBl(Format(y(m), "#0.00"))
    Next m
    End If
Next n

Range("a1:a" + Trim(Str(ngr + 1))).Interior.Color = _
    RGB(220, 90, 220)

Dim NameDiagr As String 'Название диаграммы
NameDiagr = "Волновое уравнение"

Call ПостроитьГрафики(ngr, CInt(mm / MPr), NameSh, _
    NameDiagr, 0, 1, 0, 1)

End Sub

Sub ГраничныеУсловияВолновое(ynp1() As Double, _
    t As Double, h As Double, mm As Long)
Dim pi As Double

```

```

pi = Atn(1) * 4
ynp1(0) = 0 'Левая граница
'Правая граница
ynp1(mm) = (ynp1(mm - 1) + h *
              0.1 * Sin(2 * pi * t)) / (1 + h)
End Sub

```

В таблице 79.1 приведены результаты, полученные по представленной выше программе для значений временной переменной в диапазоне от 0 до 0,5 с шагом 0,1.

Таблица 79.1

Волновое уравнение

$t \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,31	0,59	0,81	0,95	1	0,95	0,81	0,59	0,31	0
0,2	0	0,34	0,61	0,82	0,95	0,99	0,94	0,80	0,58	0,30	0,27
0,4	0	0,30	0,57	0,75	0,86	0,89	0,84	0,71	0,51	0,54	0,53
0,6	0	0,23	0,44	0,61	0,69	0,70	0,66	0,55	0,67	0,74	0,72
0,8	0	0,14	0,27	0,38	0,46	0,46	0,42	0,62	0,78	0,84	0,81
1,0	0	0,04	0,08	0,11	0,15	0,17	0,42	0,64	0,79	0,85	0,82

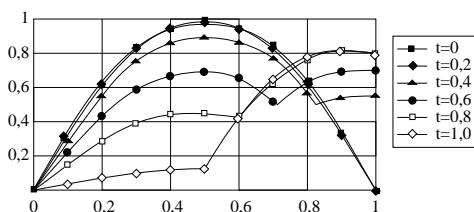


Рис. 62. Решение волнового уравнения для примера 79.1.
Visual Basic

79.6. Решение волнового уравнения с использованием компьютерных пакетов

Представим решение примера (79.1) средствами математических пакетов MathCad и Maxima. Алгоритм решения задачи и наименование переменных такие же, как и для решения волнового уравнения с использованием алгоритмического языка Visual Basic. Поэтому в программах на MathCad и Maxima комментарии полностью отсутствуют.

$$\begin{aligned}
 ORIGIN &:= 0 & TOL &:= 0.00001 & L &:= 1 & a &:= 1 \\
 Tmax &:= 0.5 & r &:= 1 & M &:= 100 & h &:= \frac{L}{M} \\
 \tau &:= r \cdot \left(\frac{h}{a}\right) & N &:= \frac{Tmax}{\tau} \\
 \tau Pr &:= 0.1 & hPr &:= 0.1 & MPr &:= \frac{hPr}{h} & MhPr &:= \frac{L}{hPr} \\
 a1 &:= 2 \cdot (1 - r^2) & a2 &:= r^2
 \end{aligned}$$

$$m := 0..MhPr \quad x_m := m \cdot hPr$$

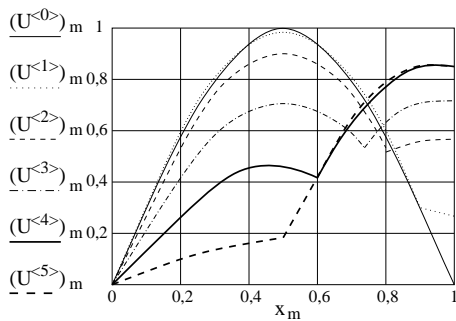


Рис. 63. Решение волнового уравнения для примера 79.1. MathCad

```

U := | for   m ∈ 0..M
      |   xm ← m · h
      |   ynm1m ← sin(π · xm)
      |   ym ← ynm1m + τ · 0.5 · cos(0.5 · π · xm)
      | k ← 0
      | ngr ← 1
      | for   m ∈ 0, MPr..M
      |   Uk,0 ← ynm1m
      |   k ← k + 1
      | for   n ∈ 2..N
      |   t ← n · τ
      |   for   m ∈ 1..M - 1
      |     ynp1m ← a1 · ym + a2 · (ym-1 + ym+1) - ynm1m
      |   ynp10 ← 0
      |   ynp1M ←  $\frac{ynp1_{M-1} + h \cdot 0.1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)}{1 + h}$ 
      |   ynm1 ← y
      |   y ← ynp1
      |   if |ngr · τPr - t| < 0.1 · τ
      |     | k ← 0
      |     | for   m ∈ 0, MPr..M
      |     |   Uk,ngr ← ym
      |     |   k ← k + 1
      |     | ngr ← ngr + 1
      | U

```

$$m := 0..MhPr \quad x_m := m \cdot hPr$$

На рис. 63 приведены графики изменения функции $U(x, t)$, полученные по представленной выше программе в рамках пакета MathCad. В таблице 79.2 представлены значения сеточной функции в узлах вывода. Сравнивая полученные результаты по программе, написанной на Visual Basic, и программе MathCad, мы видим идеальное совпадение.

Приведем теперь программу решения данной задачи в пакете Maxima.

```

(%i1) numer:true$ L:1$ a:1$ Tmax:0.5$ r:1$ M:100$
(%i7) h:L/M; tau:r*h/a; fpprintprec:4$

```

Таблица 79.2

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0,309	0,3446	0,3002	0,2299	0,1404	0,0401
2	0,5878	0,6092	0,5745	0,4406	0,27	0,0788
3	0,809	0,8177	0,7496	0,6146	0,379	0,1149
4	0,9511	0,9494	0,8578	0,688	0,4595	0,1472
5	1	0,9911	0,8878	0,7027	0,4563	0,1749
6	0,9511	0,9384	0,836	0,656	0,4181	0,4186
7	0,809	0,796	0,7066	0,5514	0,6184	0,6434
8	0,5878	0,5773	0,5114	0,669	0,7768	0,7941
9	0,309	0,3032	0,5396	0,7367	0,8446	0,8539
10	0	0,2713	0,5285	0,7153	0,8138	0,8159

```
(%i10) N:fix(Tmax/tau+0.5); tauPr:0.1$
(%i12) array(x,M)$ array(y,M)$ array(ynp1,M)$
(%i15) array(ynm1,M)$ array(U,5,M)$
(%i17) ngr:1$ /*ngr - номер графика.*/
(%i18) for m:0 while m<=M do(
    x[m]:m*h,
    /*Начальные условия.*/
    ynm1[m]:sin(%pi*x[m]),
    y[m]:ynm1[m]+tau*0.5*cos(0.5*%pi*x[m]),
    U[0,m]:ynm1[m]
);
(%i19) a1:2*(1-r^2); a2:r^2;
/* Обход по временным слоям.*/
(%i21) for n:2 while n<=N do (
    /*Время на текущем временном слое.*/
    t:n*tau,
    /*Решение во внутренних точках текущего временного слоя.*/
    for m:1 while m<=M-1 do (
        ynp1[m]:a1*y[m]+a2*(y[m-1]+y[m+1])-ynm1[m]
    ),
    /*Подстановка граничных условий на текущем временном слое.*/
    ynp1[0]:0,
```

```

        ynp1[M]:(ynp1[M-1]+h*0.1*sin(2*%pi*t))/(1+h),
/* Готовимся к вычислению решения на следующем временном
слое.*/
        for m:0 while m<=M do
            (ynm1[m]:y[m], y[m]:ynp1[m]),
            if abs(ngr*tauPr-t)<0.1*tau then (
                for m:0 while m<=M do(
                    U[ngr,m]:y[m]
                ),
                ngr:ngr+1
            )
        );

(%i22) G0:makelist([x[m],U[0,m]],m,0,M);
        G1:makelist([x[m],U[1,m]],m,0,M);
        G2:makelist([x[m],U[2,m]],m,0,M);
        G3:makelist([x[m],U[3,m]],m,0,M);
        G4:makelist([x[m],U[4,m]],m,0,M);
        G5:makelist([x[m],U[5,m]],m,0,M);

(%i28) wxplot2d([[discrete,G0],[discrete,G1],
[discrete,G2],[discrete,G3],[discrete,G4],
[discrete,G5]], [style,[lines,4,1],[lines,2,2],
[lines,4,3],[lines,2,4],[lines,4,5],[lines,2,6]],
[gnuplot_preamble,"set grid"],[legend,"t=0.0",
"t=0.2", "t=0.4", "t=0.6", "t=0.8", "t=1.0"] );

```

ГЛАВА XII

Элементы вариационного исчисления и теории оптимизации

Лекция 80. Введение в теорию вариационного исчисления

Происхождение экстремальных задач. Классическая изопериметрическая задача. Задача Дидоны. Задача о брахистохроне. Задача о геодезических линиях, транспортная задача и задачи о рационе и быстродействии. Формализация экстремальных задач

80.1. Происхождение экстремальных задач

Если нам приходится выбирать из нескольких возможностей, то вполне естественным является желание выбрать среди них *оптимальную*. Слово оптимальный происходит от латинского *optimus*, что значит «наилучший», «совершенный». Чтобы найти оптимальную возможность, нужно решать задачи на отыскание *максимума* или *минимума*, т.е. наибольших и наименьших значений некоторых величин. Оба эти понятия объединяются одним термином *экстремум* (от латинского *extremum*, что значит «крайнее»). Поэтому задачи на нахождение максимума или минимума называют *экстремальными задачами*.

Методы решения и исследования различного рода экстремальных задач образуют специальные разделы математического анализа. Почти тот же смысл вкладывается в название *задачи оптимизации*, в нём более отчётливо видна связь с практическими приложениями математики.

Прежде чем переходить к формальному последовательному изложению этого раздела математики, обратимся к прошлому, чтобы лучше понять причины, побуждающие ставить и решать экстремальные задачи в их прикладном аспекте, т.е. как задачи оптимизации.

80.1.1. *Классическая изопериметрическая задача. Задача Дидоны.* Ещё в античности впервые были сформулированы задачи отыскания наибольших и наименьших величин. Одной из древнейших экстремальных задач является классическая изопериметрическая задача. Уже Аристотель использовал как известный тот факт, что окружность имеет наибольшую «вместимость» среди всех замкнутых кривых одной и той же длины, то есть было доказано до Аристотеля, что окружность является решением такой экстремальной задачи: *среди плоских замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую наибольшую площадь.*

Легендарную мотивировку той же изопериметрической и некоторых близких к ней задач можно найти в «Энеиде» Вергилия. Финикийская царевна Дидона вместе с небольшим отрядом жителей города Тира покинули свою родину, спасаясь от преследований тирана – брата Дидоны, и отправились на кораблях на запад вдоль берегов Средиземного моря. Выбрав на африканском побережье удобное место, Дидона и её спутники решили основать поселение. Местные жители не хотели этого, но Дидоне удалось уговорить их предводителя продать клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Разрезав шкуру на тонкие полоски и связав их в один длинный ремень, Дидона окружила им значительную территорию и заложила на ней город Карфаген. В память об этой истории карфагенская цитадель получила название Бирса (шкура). Все эти события легенда относит к IX веку до н. э.

Анализируя ситуацию, можно обнаружить несколько возможных постановок задачи оптимизации.

1. Указать оптимальную форму участка земли, который при заданной длине периметра L имеет наибольшую площадь S .

Ясно, что это классическая изопериметрическая задача, сформулированная выше. Её решением является круг. Ещё одна реальная ситуация, приводящая к той же задаче, описана в рассказе Л.Н. Толстого «Сколько человеку земли нужно», где мужику пообещали отвести столько земли, сколько он сможет обежать от восхода до заката солнца.

2. Другие постановки получаются, если, как это естественно считать, Дидона хотела сохранить выход к морю. В отличие от классической изопериметрической задачи, такие задачи называют задачами Дидоны. Для простоты можно рассмотреть случай прямолинейного берега.

Первая задача Дидоны. Среди всех дуг длины L , лежащих в полуплоскости, ограниченной прямой l , и имеющих концы $A, B \in l$, найти такую, которая вместе с отрезком $[AB]$ ограничивает фигуру наибольшей площади S .

Решение этой задачи легко получить, отразив произвольную (допустимую) дугу относительно прямой l , т.е. искомая дуга – полуокружность, опирающаяся на диаметр $[AB]$. С точностью до сдвига вдоль прямой решение единственно.

3. В предыдущей задаче положение концов A и B искомой дуги на прямой l было произвольным. Что случится, если эти концы будут заданы?

Вторая задача Дидоны. Среди всех дуг длины L , лежащих в полуплоскости, ограниченной прямой l , и имеющих заданные концы $A, B \in l$, найти такую, которая вместе с отрезком $[AB]$ ограничивает фигуру наибольшей площади S .

Эта задача ненамного сложнее, чем предыдущая. Её решение может быть получено аналогично и представляет собой дугу окружности, для которой $[AB]$ является хордой.

Две разобранные задачи имеют следующее различие. В первой задаче Дидоны кривых существенно больше, так как положение точек A и B не задано. Без ограничения общности одну из них можно считать фиксированной. Тогда положение точки B определяется дополнительным условием: найденная дуга не просто некоторая дуга окружности, как во второй задаче Дидоны, но это полуокружность. Последнее равносильно следующему: в своих граничных точках искомая дуга подходит к прямой l под прямым углом. Как мы увидим позже, в этом проявляется общий принцип: предоставляя концам искомой кривой некоторую свободу, мы должны потребовать, чтобы в них выполнялись некоторые условия, называемые *условиями трансверсальности*. Форма же искомой кривой в обеих задачах одинакова, она определяется некоторым уравнением (*уравнением Эйлера*), которое должно выполняться вдоль кривой. В нашем случае искомая кривая должна иметь одну и ту же кривизну во всех точках кривой.

4. Задача Дидоны усложняется, если берег не является прямой линией. Предположим, что положение концов A и B фиксировано. Нетрудно видеть, что если между точками A и B берег мало отличается от прямой, то решением остаётся та же дуга окружности, что и раньше.

Однако если искомая кривая должна охватить некоторую узкую и длинную бухту (как в Севастополе или Балаклаве) и граница города должна проходить по суше, то решение остаётся прежним, пока крайняя точка бухты C находится внутри охватываемой площади. В противном случае решением является кривая, составленная из двух дуг окружностей AC и CB . В предельном случае $|AC| + |CB| = L$ решением является ломаная ACB , а при $|AC| + |CB| > L$ решение не существует.

Рассмотренный вариант можно было бы назвать *задачей Дидоны с фазовыми ограничениями*.

5. Рассмотрим ещё один вариант задачи Дидоны. Пусть по каким-то соображениям стены города нельзя вести более чем под углом 45° к линии берега. Такая задача уже является *задачей оптимального управления*. Её решение может быть найдено с помощью *принципа максимума Понтрягина*. В типичном случае её решение состоит из двух отрезков, отходящих от берега под предельным углом, и некоторой дуги окружности, касающейся этих отрезков в граничных точках.

80.1.2. *Задача о брахистохроне*. В 1696 г. Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал математикам решить задачу о линии наискорейшего ската – *брахистохроне*. В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки A и B , не лежащие на вертикальной прямой, и обладающую тем свойством, что материальная точка под действием силы тяжести скатится по этой линии из точки A в точку B за кратчайшее время.

Легко видеть, что линией наискорейшего ската не будет прямая, соединяющая точки A и B , хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками A и B , так как движение по прямой будет равноускоренным и скорость будет нарастать сравнительно медленно. Если же мы возьмём кривую, спускающуюся около точки A более круто вниз, то хотя путь и удлинится, его значительная часть будет пройдена с большей скоростью и время движения из точки A в точку B уменьшится. Решение задачи о брахистохроне было дано самим И. Бернулли, а также Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Кривая наискорейшего спуска или брахистохрона оказалась циклоидой. В дальнейшем мы рассмотрим эту задачу.

80.1.3. *Задача о геодезических линиях*. Найти линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ (рис. 64). Такие кратчайшие линии называются *геодезическими*.

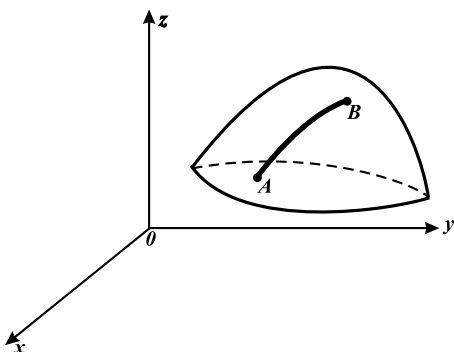


Рис. 64. Иллюстрация к задаче о геодезических линиях

Это вариационная задача на так называемый *связанный* или *условный экстремум*. Необходимо найти минимум *функционала*

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

когда гладкие (дифференцируемые) функции $y(x)$ и $z(x)$ подчиняются условию $\varphi(x, y, z) = 0$. *Функционалом* называют отображение, которое любой функции, принадлежащей некоторому множеству, ставит в соответствие некоторое числовое значение.

Первое решение задачи о геодезических линиях было получено в 1698 году Якобом Бернулли, но общий метод решения задач такого типа был дан в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

80.1.4. Транспортная задача и задача о рации. Предположим, что запасы некоторого продукта распределены по нескольким базам и этот продукт должен быть доставлен нескольким магазинам. Стоимость перевозки единицы продукта от каждой базы до каждого магазина известна, и также известно, сколько продукта должно быть доставлено в каждый магазин. *Транспортная задача* заключается в составлении оптимального в этой ситуации плана перевозок, т.е. в указании того, какое количество данного продукта надо перевезти из каждой базы в каждый магазин, чтобы суммарная стоимость перевозки была минимальной.

Похожая задача о *рационе* состоит в составлении рациона, удовлетворяющего потребностям человеческого организма с минимальными денежными затратами при определённом ассортименте продуктов, заданном содержании в каждом из них питательных веществ и известной стоимости единицы каждого продукта.

Подобные задачи повсеместно встречаются в конкретной экономике. Обе упомянутые задачи относятся к разделу, называемому *линейным программированием*. Теория линейного программирования была построена сравнительно недавно – в сороковые-пятидесятые годы XX века.

80.1.5. *Задача о быстродействии*. Приведем простейший пример экстремальной задачи с «техническим» содержанием. Пусть имеется тележка, движущаяся по горизонтальным рельсам прямолинейно и без трения. Тележка управляется внешней силой, изменяющейся в определённых пределах. Требуется остановить тележку в определённом положении в кратчайшее время. Это задача называется *простейшей задачей о быстродействии*.

Особенность постановок экстремальных задач техники состоит в том, что действующие силы делятся на две части. Одна из них – это силы природы (например, сила тяжести), другая (скажем, сила тяги) регулируется человеком. При этом, естественно, возникают ограничения на управляющие действия, обусловленные техническими возможностями. Теория такого рода задач была построена в конце пятидесятых годов XX века. Она называется *теорией оптимального управления*.

Приведённые примеры показывают, что экстремальные задачи возникают как в естествознании, экономике и технике, так и диктуются потребностями самой математики. Поэтому теория экстремальных задач и её практический аспект – теория оптимизации – приобрели в наши дни особую актуальность.

80.2. Формализация экстремальных задач

80.2.1. *Основные определения*. Каждая из сформулированных выше задач записана в терминах той частной области, в которой она возникла. Если мы хотим использовать преимущества аналитического подхода, то нам необходимо «перевести» задачу с содержательного языка на формальный язык математического анализа. Такой перевод называется *формализацией*.

Точно поставленная экстремальная задача содержит следующие элементы: *функционал* $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определённый на некотором множестве X , и *ограничение*, т.е. подмножество $C \subseteq X$. Символом $\overline{\mathbb{R}}$ обозначена *расширенная вещественная прямая* – совокупность всех вещественных чисел, пополненная значениями $-\infty$ и $+\infty$. Множество X называется *классом допустимых элементов*, а точки $x \in C$ – допустимыми по ограничению.

Сама экстремальная задача формулируется так: *найти экстремум* (т.е. нижнюю \inf или верхнюю \sup грань) *функционала* f *при условии, что* $x \in C$. При этом используется стандартная запись

$$f(x) \longrightarrow \inf(\sup); \quad x \in C. \quad (80.1)$$

Таким образом, для точной постановки надо описать X , f и C .

Если $X = C$, то задача (80.1) называется *задачей без ограничений*. Точку \hat{x} будем называть *решением* задачи (80.1), *минималью* (или, соответственно, *максималью*) или *абсолютным минимумом* (*максимумом*), если $f(x) \geq f(\hat{x})$ (соответственно $f(x) \leq f(\hat{x})$) для всех $x \in C$.

Как правило, все задачи будем записывать как задачи минимизации, заменяя задачу $f(x) \longrightarrow \sup, x \in C$ задачей $\tilde{f}(x) \longrightarrow \inf, x \in C$, где $\tilde{f}(x) = -f(x)$. В тем случаях, когда мы хотим подчеркнуть, что нам безразлично, рассматривается ли задача минимизации или максимизации, мы будем писать $f(x) \longrightarrow \text{extr}$.

Множество X должно быть наделено *топологией*, т.е. в нём должно быть введено понятие близости элементов. Это можно сделать, например, задав в X набор окрестностей (как это стандартно делается в \mathbb{R}^n или в нормированном пространстве). В дальнейшем мы приведем соответствующие строгие определения из функционального анализа. Если X – топологическое пространство, то \hat{x} называется *локальным минимумом*, если существует окрестность U точки \hat{x} , такая, что \hat{x} – решение задачи $f(x) \longrightarrow \inf, x \in C \cap U$. Аналогично определяется *локальный максимум*.

80.2.2. Формализация классической изопериметрической задачи. Эта задача является одной из известнейших экстремальных задач, но оказывается едва ли не самой трудной для полного исследования. Процедура её формализации может быть выполнена по-разному. Выбор удачной формализации представляет собой самостоятельную проблему, и успех при решении задачи в многом зависит от того, насколько удачно будет проведена формализация.

Пусть длина кривой равна L , а сама кривая задана параметрически функциями $x(s), y(s)$, причём в качестве параметра взята длина дуги s , отсчитываемая вдоль кривой от некоторой её точки. Тогда в любой точке кривой выполняется соотношение $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$ (так как дифференциал дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$) и, кроме того, $x(0) = x(L), y(0) = y(L)$, так как кривая замкнута.

Для большей определённости в расположении искомой кривой можно также потребовать, чтобы её центр тяжести попал в начало координат, т.е. чтобы имели место равенства $\int_0^L x(s)ds = \int_0^L y(s)ds = 0$. Площадь S кривой, заданной параметрически $(x(s), y(s))$ равна $\int_0^L xy'ds$. Таким образом, получается следующая формализация:

$$S[x(s), y(s)] = \int_0^L xy'ds \longrightarrow \sup; \quad x'^2(s) + y'^2(s) = 1, \quad (80.2)$$

$$\int_0^L x(s)ds = \int_0^L y(s)ds = 0, \quad x(0) = x(L), \quad y(0) = y(L).$$

Эту задачу можно формализовать иначе. Допустим, пилот получил задачу облететь за заданное время возможно большую площадь и вернуться на свой аэродром. Если максимальная скорость самолета не зависит от направления полета, то данная задача имеет следующую естественную формализацию.

Предположим, что траектория полета описывается параметрически как функция времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда скорость самолета имеет две составляющие $u = x'(t)$, $v = y'(t)$. Условие того, что охватываемая площадь должна быть максимальна, приводит к соотношению

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)v(t) - y(t)u(t))dt \longrightarrow \sup. \quad (80.3)$$

Условие, что максимальная скорость самолета равна V , даёт ограничение

$$u^2 + v^2 \leq V. \quad (80.4)$$

И, наконец, условие возвращения самолета на свой аэродром приводит к соотношениям

$$x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T). \quad (80.5)$$

Таким образом, формализация задачи приобретает вид (80.3), (80.4), (80.5).

80.2.3. Формализация задачи о брахистохроне. Требуется найти кривую, соединяющую заданные точки A и B , при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B за кратчайшее время (трение и сопротивление среды отсутствуют).

Введем в плоскости систему координат (x, y) , так что ось Ox направлена горизонтально, а ось Oy – вертикально вниз. Пусть начало координат совпадает с точкой A , т.е. её координаты $(0, 0)$. Предположим, что координаты точки B есть (x_1, y_1) , где $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, а $y = y(t)$ – функция, задающая уравнение кривой, соединяющей точки A и B . В отсутствие трения и сопротивления среды скорость движения материальной точки под действием силы тяжести не зависит от формы кривой $y = y(x)$, а зависит только от ординаты точки $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$, откуда находим время t , необходимое для перемещения материальной точки из положения $A(0, 0)$ в положение $B(x_1, y_1)$:

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx \longrightarrow \inf; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (80.6)$$

80.2.4. Формализация задачи о быстродействии. Формализация простейшей задачи о быстродействии может быть проведена аналогично. Пусть масса тележки m , её начальная координата x_0 , а начальная скорость v_0 . Внешнюю силу (силу тяги) обозначим через f , а текущую координату тележки через $x(t)$. Тогда по второму закону Ньютона $m\ddot{x} = f$. Ограничение на тягу зададим в таком виде: $f \in [f_1, f_2]$. Отсюда получим задачу оптимизации управления, необходимого для того, чтобы остановить тележку за кратчайшее время T .

$$T \longrightarrow \inf, \quad m\ddot{x} = f, \quad f \in [f_1, f_2], \quad (80.7)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Отметим одно важное обстоятельство. На самом деле мы «неформализовали» ещё наши задачи. Например, в формализации (80.6) не указана точно область определения функционала $t[y(x)]$ и, следовательно, пока неизвестно, на каком классе кривых рассматривалась задача (т.е. не определено множество X из п. 80.2.1). Чтобы быть точными и правильно решать задачи, необходимо всякий раз указывать, в каком классе объектов ищется решение.

80.2.5. *Формализация транспортной задачи и задачи о рациионе.* Рассмотрим вначале транспортную задачу. Введем следующие обозначения:

- a_i – количество единиц продукта, находящегося на i -той базе, $1 \leq i \leq m$;
- b_j – потребность (в тех же единицах) j -того магазина, $1 \leq j \leq n$;
- c_{ij} – стоимость перевозки единиц продукта из i -той базы в j -тый магазин;
- x_{ij} – планируемое количество единиц продукта для перевозки из i -той базы в j -тый магазин.

Тогда стоимость перевозки равна $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$, и её нужно минимизировать. Естественные ограничения при этом следующие:

- (1) $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$ (очевидное ограничение на величину перевозки);
- (2) $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$ (нельзя вывести больше того, что есть);
- (3) $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ (нужно перевести ровно столько, сколько необходимо).

В итоге получается следующая формализация:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \inf, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \in \mathbb{R}_+. \quad (80.8)$$

Задача о рациионе формализуется столь же просто. Пусть имеется n продуктов (мука, крупы, мясо, овощи и т.п.). Допустим, что для полноценного питания необходимо b_j единиц j -го вещества. При этом a_{ij} есть содержание j -го вещества в единице i -го продукта, а c_i – цена единицы i -го продукта.

Обозначив через x_i потребление i -го продукта, получаем задачу

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \inf, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, \quad x_i \geq 0. \quad (80.9)$$

Практическое занятие 80. Решение задачи Дирихле методом сеток

80.3. Вычислительная программа для решения задач, описываемых уравнением Лапласа

Рассмотрим решение задач, описываемых уравнением Лапласа, методом сеток. В качестве области решения задачи возьмём прямоугольную область с прямоугольным вырезом, рис. 65.

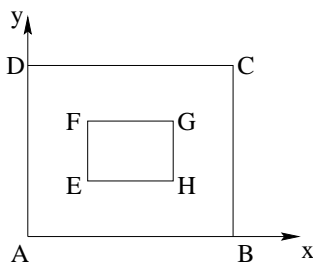


Рис. 65. Граница области решения задачи Дирихле

Введем обозначения:

- a — ширина прямоугольника;
- b — высота прямоугольника;
- a_v — ширина выреза;
- b_v — высота выреза;
- $O(x_{v0}, y_{v0})$ — координаты центра выреза.

Предполагаем, что вырез $EFGH$ может находиться в произвольном месте прямоугольника $ABCD$. Для решения задачи методом конечных разностей разобьем прямоугольник $ABCD$ на M одинаковых интервалов длины hx по стороне AB и N одинаковых интервалов длины hy по стороне AD . При этом $hx = \frac{a}{M}$, $hy = \frac{b}{N}$. Обозначим через $M1, M2, N1, N2$ номера узлов, ближайших к левой, правой, нижней,

верхней границам выреза. Предусмотрим четыре качественно различных случая.

- (1) Выреза нет. В этом случае $a_v = 0$, $b_v = 0$.
 $N1 = N2 = M1 = M2 = 0$.
- (2) Центр выреза находится внутри прямоугольника.
 $a_v > 0$, $b_v > 0$. $0 < N1 < N2 < N$, $M1 < M2 < M$.
- (3) Центр выреза находится в любой вершине прямоугольника. Например, в точке C . $a_v > 0$, $b_v > 0$. Это в случае, если прямые DC и BC являются плоскостями симметрии. Тогда $0 < N1 < N$, $N2 = N$, $0 < M1 < M$, $M2 = M$.
- (4) Центр выреза находится на любой стороне прямоугольника. Например, на стороне AD . $a_v > 0$, $b_v > 0$. Это в случае, если прямая AD является плоскостью симметрии. В этом случае $M1 = 0$. На стороне CD –
 $N2 = N$.

Для решения поставленной задачи методом сеток необходимо разработать вычислительную программу **РешениеУравненияЛапласа**. Для того чтобы решать более широкий класс задач, необходимо по возможности делать более универсальную постановку задачи. Рассмотрим прямоугольную область $ABCD$ с прямоугольным вырезом $EHGF$, рис. 65. Введем обозначения: $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|EF| = a_v$, $|EH| = b_v$, $O(x_{v0}, y_{v0})$ – координаты центра выреза.

Для решения задачи методом конечных разностей разобьем прямоугольник $ABCD$ на N одинаковых интервалов по стороне AD и на M одинаковых интервалов по стороне AB . При этом обозначим через $N1$, $N2$, $M1$, $M2$ номера узлов, соответствующих границам выреза.

В исходных данных будем задавать параметры a , b , a_v , b_v – длины сторон AB , AD , EF , EH , а также координаты центра выреза x_{v0} , y_{v0} . При отсутствии выреза $a_v = b_v = x_{v0} = y_{v0} = 0$.

Разработаем теперь алгоритм расчёта и вычислительную программу. Внутри программы при помощи операторов присваивания задаём начальные условия. В Visual Basic строчные и прописные буквы в именах переменных считаются одинаковыми, поэтому в программе вместо математической переменной N вводим идентификатор nn , а вместо переменной M – mm . Затем вычисляем параметры сетки: hx , hy , r , массив узловых координат по оси $Ox - x_m$, массив узловых координат по оси $Oy - y_m$, $m1$, $m2$, $n1$, $n2$.

Далее вызываем подпрограмму **ГраничныеУсловияДляНулевогоПриближения** в которой задаём решение на нулевой итерации. Во всех внутренних точках области на нулевой итерации задаём усреднённую температуру равную 75. Для упрощения алгоритма учёта выреза во всех внутренних точках находящихся внутри выреза, мы задаём значение температуры ниже абсолютного нуля равное -1000 . Затем в этой же подпрограмме задаём граничные условия для нулевого приближения во всех граничных точках области.

После получения нулевого приближения начинается итерационный процесс. В двумерном цикле

```
For n = 1 To nn - 1
For m = 1 To mm - 1
.....
Next m, n
```

происходит обход по всем внутренним точкам области. Оператор

If Not (u(m, n) < -273 Or ((n >= n1 And n <= n2) And ... задаёт точки, входящие во внутреннюю области решения, пропуская граничные точки и точки, входящие в вырез.

В подпрограмме **ГраничныеУсловияЛапласа** происходит подстановка граничных условий на границе области для ненулевых итераций.

Выход из итерационного цикла происходит в случае, когда либо достигнута заданная точность

```
Loop Until (Emax <= Eps),
```

либо когда параметр цикла *itn* превысил максимально допустимое значение *Itmax*

```
If itn > Itmax Then
MsgBox ("Итерационный процесс не сошёлся за " & itn & _
" итераций" & " Emax=" & Emax)
Exit Sub
End If
```

Далее происходит вывод результатов расчёта. Результаты расчёта выводятся на два рабочих листа: NameShZ = **УравнениеЛапласаЗначения** и NameShG = **УравнениеЛапласаИзотермы**. На первый лист выводятся значения сеточной функции *u* во всех узлах сетки. На второй рабочий лист выводятся карта изотерм решения. Диапазон полученных температур разбивается на *NIZOL* поддиапазонов, и

каждому из них присваивается очередное значение и некоторый цвет. Ячейки рабочего листа, соответствующие узловым точкам x_m, y_m , запрашиваются различными цветами, соответствующими уровню температур. Для вывода на черно-белые документы можно подобрать серые и белые полосы.

Ниже представлены распечатки основной программы **Решение-УравненияЛапласа** и всех подпрограмм, вызывающихся этой программой.

```
Sub РешениеУравненияЛапласа()  
Dim u() As Double, x() As Double, y() As Double  
Dim a As Double, b As Double, av As Double, bv As Double  
Dim xv0 As Double, yv0 As Double, Eps As Double  
Dim hx As Double, hy As Double, r As Double, omega As Double  
Dim NameShZ As String, NameShG As String, rr As Double  
Dim itn As Integer, mm As Integer, nn As Integer, n As Integer  
Dim m As Integer, Itmax As Integer, Emax As Double  
Dim n1 As Integer, n2 As Integer, m1 As Integer, m2 As Integer  
Dim x1 As Double, x2 As Double, y1 As Double, y2 As Double  
Dim Uw As Double, Ep As Double, s As String  
'Имена рабочих листов для вывода результатов и изотерм  
NameShZ = "УравнениеЛапласаЗначения"  
NameShG = "УравнениеЛапласаИзотермы"  
Worksheets(NameShZ).Select Cells.Select Selection.Clear  
' Исходные данные для задачи  
a = 15: b = 10: mm = 60: nn = 60: av = 5: bv = 5:  
xv0 = 12.5: yv0 = 2.5: omega = 1.75: Eps = 0.01: Itmax = 500  
itn = 0: n1 = nn: n2 = nn: m1 = mm: m2 = mm  
'Определение размера используемых массивов  
ReDim u(mm, nn), x(mm), y(nn) hx = a / mm  
'Размер сетки по оси Ox  
hy = b / nn 'Размер сетки по оси Oy  
r = (hx / hy) ^ 2  
For m = 0 To mm  
    x(m) = m * hx 'Координаты сетки по оси Ox  
Next m  
For n = 0 To nn  
    y(n) = n * hy 'Координаты сетки по оси Oy  
Next n  
If av > a / mm Then 'Наличие выреза
```

```

If Abs(xv0 + yv0) < hx / 2 Then
    ' Симметричный вырез
    m1 = CInt((a - av) / (2 * hx))
    m2 = mm - m1
    n1 = CInt((b - bv) / (2 * hy))
    n2 = nn - n1
Else
    ' Несимметричный вырез
    x1 = xv0 - av / 2
    x2 = xv0 + av / 2
    y1 = yv0 - bv / 2
    y2 = yv0 + bv / 2
    m1 = CInt(x1 / hx)
    m2 = m1 + CInt((x2 - x1) / hx)
    n1 = CInt(y1 / hy)
    n2 = n1 + CInt((y2 - y1) / hy)
End If
If nn - n2 <= 1 Then n2 = nn
If mm - m2 <= 1 Then m2 = mm
End If
Call ГраничныеУсловияДляНулевогоПриближения(u, nn, mm, n1, _
n2, m1, m2)
'Организация итерационного процесса
itn = 0: rr = 2 * r + 2
Do
    itn = itn + 1
    Emax = 0
    For n = 1 To nn - 1
        For m = 1 To mm - 1
            If Not (u(m, n) < -273 Or ((n >= n1 And n <= n2) And _
                (m >= m1 And m <= m2))) Then
                Uw = omega / rr * (r * (u(m, n + 1) + u(m, n - 1)) + _
                    (u(m + 1, n) + u(m - 1, n))) + (1 - omega) * u(m, n)
                Ep = Abs(Uw - u(m, n))
                If Ep > Emax Then Emax = Ep
                u(m, n) = Uw
            End If
        Next m, n
    ' Подстановка граничных условий на текущей итерации

```

```
Call ГраничныеУсловияЛаплас(u,hx,hy,nn,mm,n1,n2,m1,m2)
If itn > Itmax Then
    MsgBox ("Итерационный процесс не сошелся за " & itn & _
        " итераций" & " Emax=" & Emax)
    Exit Sub
End If
Loop Until (Emax <= Eps)
s="Итерационный процесс сошёлся за " & itn & " итераций" & _
    " Emax=" & Emax
Call ВыводРезультатов(u, x, y, nn, mm, NameShG, NameShZ, s)
End
Sub SubГраничныеУсловияДляНулевогоПриближения(u() As Double, _
nn As Integer,mm As Integer,n1 As Integer,n2 As Integer, _
    m1 As Integer, m2 As Integer)
Dim m As Integer, n As Integer
'Задание нулевого приближения внутри области
For m = 1 To mm - 1 For n = 1 To nn - 1
    u(m, n) = 75
Next n, m
' В узлах выреза температура ниже абсолютного нуля
For m = m1 To m2 For n = n1 To n2
    u(m, n) = -1000
Next n, m 'На границе AD x=0
For n = 0 To nn
    u(0, n) = 100
Next n 'На границе DC y=b
For m = 0 To mm
    u(m, nn) = 100
Next m 'На границе AE y=0
For m = 0 To m1
    u(m, 0) = 75
Next m 'На границе EH x=xv0-av/2
For n = 0 To n2
    u(m1, n) = 20
Next n 'На границе HG y=hy*n2
For m = m1 To m2
    u(m, n2) = 20
Next m 'На границе GC x=a
For n = n2 To nn
```

```

    u(mm, n) = 100
Next n
End Sub
Sub ГраничныеУсловияЛаплас(u() As Double, hx As Double, _
    hy As Double, nn As Integer, mm As Integer, _
    n1 As Integer, n2 As Integer, m1 As Integer, _
    m2 As Integer) Dim n As Integer, m As Integer
'На границе AD x=0
For n = 0 To nn
    u(0, n) = u(1, n) + 4 * hx
Next n 'На границе DC y=b
For m = 0 To mm
    u(m, nn) = 100
Next m 'На границе AE y=0
For m = 0 To m1
    u(m, 0) = u(m, 1)
Next m 'На границе EH x=xv0-av/2
For n = 0 To n2
    u(m1, n) = (3 * u(m1 - 1, n) - 40 * hx) / (3 + 2 * hx)
Next n 'На границе HG y=hy*n2
For m = m1 To m2
    u(m, n2) = (3 * u(m, n2 + 1) + 40 * hy) / (3 + 2 * hy)
Next m 'На границе GC x=a
For n = n2 To nn
    u(mm, n) = u(mm - 1, n)
Next n
End Sub
Sub ВыводРезультатов(u() As Double, x() As Double, _
    y() As Double, nn As Integer, mm As Integer, _
    NameShG As String, NameShZ As String, s As String)
Dim Umax As Double, Umin As Double, HU As Double
Dim n As Integer, m As Integer, col As Integer
Dim masColor As Variant, k1 As Integer, Nizol As Integer
Dim alph As String
alph = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyzabcdefghijklmnpqrstuvw"
Nizol = 10 ' Число изолиний
Sheets(NameShZ).Select Cells.Select
Selection.Clear Selection.ColumnWidth=4 Selection.RowHeight=12
Cells(1, 1) = "y\x"

```

```
For m = 0 To mm 'Вывод координат x
    Cells(1, m + 2) = CDb1(Format(x(m), "#0.00"))
    Cells(1, m + 2).Interior.Color = RGB(220, 90, 220)
Next m
For n = 0 To nn 'Вывод координат y
    Cells(nn - n + 2, 1) = CDb1(Format(y(n), "#0.00"))
    Cells(nn - n + 2, 1).Interior.Color = RGB(220, 100, 220)
Next n 'Вывод значения температур
For m = 0 To mm For n = 0 To nn
    If u(m, n) > -272 Then 'Если точка не принадлежит вырезу
        Cells(nn - n + 2, m + 2) = CDb1(Format(u(m, n), "#0.00"))
    Else
        Cells(nn - n + 2, m + 2).Interior.Color = RGB(40, 40, 40)
    End If
Next n, m
Sheets(NameShG).Select ' Выделить рабочий лист
Cells.Select 'Выделить все ячейки рабочего листа
Selection.Clear
'Очистить выделенные ячейки
Selection.ColumnWidth = 1.1
'Установить ширину столбцов
Selection.RowHeight = 8
'Высота строки
Selection.Font.Size = 6 'Размер шрифта
'Поиск диапазона изменения температур [Umin,Umax] Umax=-272
'Максимальная температура Umin = 1E+20
' Минимальная температура
For m = 0 To mm 'Обход по всем узловым точкам
For n = 0 To nn
    If u(m, n) > -273 Then 'Если не вырез
        If u(m, n) > Umax Then Umax = u(m, n)
        If u(m, n) < Umin Then Umin = u(m, n)
    End If
Next n, m
HU = (Umax - Umin) / Nizol
Range("a"+Trim(Str(nn+3))+":cz"+Trim(Str(nn+5))).Select With
Selection
    .RowHeight = 16 ' Высота строки
    .Font.Size = 10 'Размер шрифта
```

```

End With
Cells(nn + 3, 1) = "Среднее значение температур в изотермах"
'Выбор палитры цветов (подберите самостоятельно)
masColor = Array(&HE1C171, &HE1B171, &HD1C171, &H11B1C1, _
    &HB19141, &HC19161, &H810151, &H714161, &H210161, _
    &H8181C1, &H4101D1)
'Вывести значение и цвет изотерм For n = 0 To Nizol
For k1 = 1 To 5
    Cells(nn + 4, 5 * n + k1).Interior.Color = masColor(n)
Next k1
Cells(nn + 4, 5 * n + 1) = n & " - " & _
    Format(Umin + HU * (n + 0.5), "#0.00")
Next n
Cells(nn + 5, 1) = s
'Заполнить нужным цветом ячейки сетки. Т.е. вывести изолинии
For m = 0 To mm For n = 0 To nn
    ' Номер цвета текущей ячейки
    col = CLng((u(m, n) - Umin) / HU)
    If col >= 0 And col <= Nizol Then 'Если не вырез
        '\it Заполнить цветом ячейку}
        Cells(nn - n + 1, m + 1).Interior.Color = masColor(col)
        Cells(nn - n + 1, m + 1) = col ' Номер изотермы
    End If
Next n, m
End Sub

```

В качестве примера применения разработанной программы рассмотрим двумерную задачу о переносе тепла теплопроводностью для бруса прямоугольного сечения (30х20см) с квадратным (10х10см), рис. 65. На двух параллельных поверхностях бруса поддерживается температура $U = 100^{\circ}\text{C}$, а на двух других задан тепловой поток $q = -60\text{Вт}/\text{см}^2$. Внутри полости бруса движется охлаждающая жидкость с температурой среды $U_{\text{ср}} = 20^{\circ}\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи принимается равным $\alpha = 10\text{Вт}/(\text{см}^2\text{K})$, коэффициент теплоотдачи материала бруса $K = 15\text{Вт}/(\text{смK})$. Требуется найти температурное поле полого бруса.

Поставленная плоская задача имеет две линии симметрии, что даёт возможность рассматривать только четвертую часть области,

рис. 66. По линиям CG и AE можно поставить симметричные граничные условия. Очевидно, вследствие симметрии задачи, по этим линиям не происходит переход тепла. Поэтому на этих линиях поставим следующие граничные условия

$$q = -K \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Сформулируем граничные условия для поставленной задачи по всей границе.

$$U|_{DC} = 100; \quad -15 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AD} = -60, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{AD} = -4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{CG} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{AE} = 0;$$

$$15 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{EH} = 10(u - 20); \quad 15 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{HG} = 10(u - 20).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 80.1. При подстановке граничных условий учтено, что на линиях AD , EH , AE и HG направление нормали противоположно направлению координатных осей.

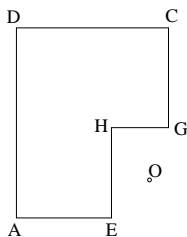


Рис. 66. Область решения задачи Дирихле с учётом симметрии

Для того, чтобы применить разработанную программу, рассмотрим односвязную область $AENHGC$. Будем её считать прямоугольником $ABCD$ с прямоугольным вырезом в углу B . Центр выреза в точке O . Начало декартовых координат выберем в точке A , а оси направим по сторонам AB (ось Ox) и AD (ось Oy). Тогда координаты центра выреза $O(12, 5; 2, 5)$. Значения числовых параметров области $av = 2, 5$, $bv = 2, 5$, $a = 15$, $b = 10$.

Сформулируем теперь конечно-разностные граничные условия для поставленной задачи.

$$\frac{u_{1m} - u_{0m}}{h_x} = -4 \Rightarrow u_{0m} = u_{1m} + 4h_x \quad (m = 0, 1, \dots, M); (AD);$$

$$\frac{u_{Nm} - u_{N-1m}}{h_x} = 0 \Rightarrow u_{Nm} = u_{N-1m} \quad (m = M2, M2+1, \dots, M-1); (CG);$$

$$\frac{u_{n1} - u_{n0}}{h_y} = 0 \Rightarrow u_{n0} = u_{n1} \quad (n = 1, 2, \dots, N1); (AE);$$

$$u_{nM} = 100 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N); (DC);$$

$$-15 \frac{u_{N1m} - u_{N1-1m}}{h_x} = 10(u_{N1m} - 20) \Rightarrow$$

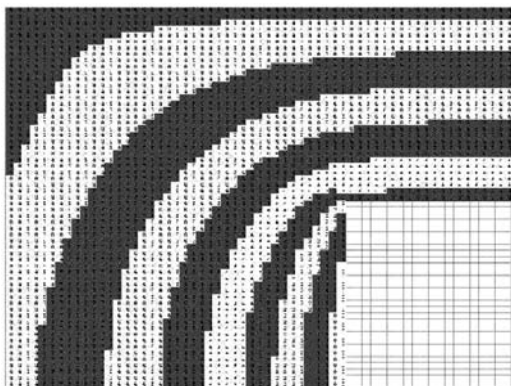
$$\Rightarrow u_{N1m} = \frac{3u_{N1-1m} - 40h_x}{3 + 2h_x}, \quad (m = 0, 1, \dots, M2); (EH);$$

$$15 \frac{u_{nM2+1} - u_{nM2}}{h_y} = 10(u_{nM2} - 20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{nM2} = \frac{3u_{nM2+1} + 40h_y}{3 + 2h_y}, \quad (n = N1 + 1, \dots, N); (EF).$$

В приведённой выше программе **РешениеУравненияЛапласа** подставлены как раз граничные условия данной задачи.

На рис. 67 приведено решение данной задачи в виде карты изотерм. Учитывая, что печать учебного пособия черно-белая, изотермы напечатаны при помощи двух цветов, светло-серого и белого, которые чередуются через один. Значение температур можно узнать из напечатанного в каждой ячейке номера изолинии. Максимальные значения температур получаются на внешней границе области, где задана температура 100°C (DC) и приток тепла (AD). Во внутренней части прямоугольного бруса, где происходит конвективное охлаждение, температура принимает минимальное значение.



Средние значения температур в изотермах								
0-7,9	1-19,1	2-30,3	3-41,6	4-52,8	5-64,0	6-75,2	7-86,4	8-97,6
Итерационный процесс сошёлся за 237 итераций $E_{\max} = 9,973$								

Рис. 67. Карта изотерм решения задачи Дирихле

Лекция 81. Элементы функционального анализа

Нормированные и банаховы пространства. Пространство \mathbb{R}^n . Определение и примеры банаховых пространств. Произведение пространств. Некоторые теоремы из геометрии и функционального анализа. Теоремы Вейерштрасса о достижении максимума и минимума. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Теорема о среднем. Формула Тейлора

Теория экстремальных задач, а также изучение основных разделов вариационного исчисления и оптимального управления требуют рассмотрения в нормированных и банаховых пространствах. Важнейшие элементы теории могут быть проиллюстрированы в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Ниже мы дадим сводку всех необходимых сведений из функционального анализа, уделяя преимущественное внимание простейшему, конечномерному случаю.

81.1. Нормированные и банаховы пространства

81.1.1. *Пространство \mathbb{R}^n* . Пространство \mathbb{R}^n — пространство n -мерных векторов $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$. Векторы из \mathbb{R}^n можно складывать (по правилу: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n) \Rightarrow x_1 + x'_1 = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$) и умножать на вещественные числа (по правилу: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$). Вектор $0 = (0, \dots, 0)$ называется *нулевым вектором*. Это превращает \mathbb{R}^n в *линейное пространство*.

В пространстве \mathbb{R}^n обычно вводят расстояние следующим образом:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n) \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Это расстояние называют *евклидовым*. Его можно выразить через *евклидову норму*:

$$|\mathbf{x}| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

по формуле $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Евклидова норма, как это нетрудно проверить, удовлетворяет таким соотношениям:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $|\mathbf{x}| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$;
- $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$ для любого \mathbf{x} из \mathbb{R}^n и любого α из \mathbb{R} ;
- $|\mathbf{x} + \mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}'|$ для любых \mathbf{x} и \mathbf{x}' из \mathbb{R}^n .

Функции, обладающие подобными свойствами, называют *нормами*, а линейные пространства, оснащённые нормами, называют *нормированными пространствами* (точные определения в следующем пункте). Нормы в \mathbb{R}^n можно определять по-разному. Например, по формуле

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty)$$

или по формуле

$$\|\mathbf{x}\|_{+\infty} = \max_{i \leq i \leq n} |x_i|.$$

Введение нормы даёт возможность найти расстояние по формуле $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$, определить, что такое открытые и замкнутые множества, сходимость и т.п.

81.1.2. Определение и примеры банаховых пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 81.1. *Линейное пространство X называется нормированным, если на X определен функционал $\|\mathbf{x}\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, называемый нормой и удовлетворяющий условиям:*

- а) $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X$ и $\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$;
- б) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{x} \in X$;
- в) $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

Иногда, чтобы подчеркнуть, что норма задана именно на X , пишем $\|\mathbf{x}\|_X$. Две нормы в X $\|\mathbf{x}\|_1$ и $\|\mathbf{x}\|_2$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что

$$C_1 \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq C_2 \|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

Всякое нормированное пространство становится *метрическим*, если в нём ввести расстояние $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 81.2. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной, если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε , что $\rho(\mathbf{x}_{n'}, \mathbf{x}_{n''}) < \varepsilon$ для всех $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 81.3. *Полное нормированное метрическое пространство называется банаховым.*

Рассмотрим некоторые примеры банаховых пространств.

- (1) Конечномерное пространство l_p^n , состоящее из векторов

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ с нормой } \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$$1 \leq p \leq +\infty.$$

- (2) Пространство $\mathbb{C}(K, \mathbb{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $\mathbf{x}(t) : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданных на компакте K , с нормой $\|\mathbf{x}(t)\|_0 = \max_{t \in K} |\mathbf{x}(t)|$.

Множество A в метрическом пространстве называется *компактом*, если из всякой последовательности элементов из A можно выбрать сходящуюся к элементу из A подпоследовательность или (равносильное определение) если из всякого покрытия A открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Ограниченное и замкнутое подмножество конечномерного пространства является компактом.

- (3) Пространство $\mathbb{C}^r([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ r раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{x}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданных на конечном отрезке $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, с нормой

$$\|\mathbf{x}(t)\|_r = \max\{\|\mathbf{x}(t)\|_0, \dots, \|\mathbf{x}^{(r)}(t)\|_0\}.$$

- (4) Пространство l_2 , состоящее из последовательностей

$x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, для которых $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty$, с нормой,

задаваемой формулой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

81.1.3. *Произведение пространств.* Пусть X и Y — нормированные пространства. Декартово произведение $X \times Y$ можно превратить в нормированное пространство, введя норму

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$$

(легко проверить, что все аксиомы выполняются). Возможны и другие эквивалентные нормировки.

Отметим очевидное утверждение: *декартово произведение банаховых пространств банахово.*

81.2. Некоторые теоремы из геометрии и функционального анализа

81.2.1. *Теоремы Вейерштрасса о достижении максимума и минимума.* Чаше будет использована следующая основная

ТЕОРЕМА 81.1. *(Теорема Вейерштрасса). Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства достигает своих абсолютных максимума и минимума.*

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие. *Если функция f непрерывна на \mathbb{R}^n и $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$), то f достигает своего абсолютного минимума (максимума) на любом замкнутом подмножестве.*

81.3. Определения производных

Для вещественных функций одного вещественного переменного два определения — существование конечного предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\hat{x} + h) - F(\hat{x})}{h} \quad (81.1)$$

и возможность асимптотического разложения при $h \rightarrow 0$

$$F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})h + o(h), \quad (81.2)$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с h , приводят к одному и тому же понятию дифференцируемости. Но уже для функций двух и большего числа переменных существует несколько различных подходов к понятию дифференцируемости (гладкости). Определение (81.1) ведет к понятиям производной по направлению, вариации по Лагранжу и производной по Гато. Определение (81.2) ведет к понятиям производной Фреше и строгой дифференцируемости.

81.4. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах

81.4.1. *Теорема о среднем.* Хорошо известно, что для числовых функций одного переменного справедлива теорема Лагранжа, называемая также теоремой о среднем значении, или формулой конечных приращений (часть I, лекция 17): *если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) , то существует точка $c \in (a, b)$, такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (81.3)$$

Нетрудно убедиться, что формула (81.3) остаётся справедливой и для числовых функций $f(x)$, аргумент которых принадлежит произвольному нормированному пространству. В этом случае

$$[a, b] = \{x : x = a + t(b - a), \quad 0 \leq t \leq 1\},$$

аналогично определяется интервал (a, b) , а дифференцируемость можно понимать в смысле Гато. Полагая $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$, сводим доказательство к случаю одного вещественного переменного.

Для векторнозначных функций формула (81.3) не имеет места.

Отметим, что в анализе, как правило, используется не сама формула (81.3), а вытекающая из неё оценка $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$,

где $M = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|$. Покажем сейчас, что в этом более слабом виде утверждение распространяется уже на случай произвольных нормированных пространств. По традиции оно сохраняет название «теорема о среднем», хотя, конечно, его следовало бы именовать «теоремой об оценке конечного приращения».

ТЕОРЕМА 81.2. *(Теорема о среднем). Пусть X, Y — нормированные пространства и открытое множество $U \subset X$ содержит отрезок $[a, b]$. Если отображение $f : U \rightarrow Y$ дифференцируемо по Гато в каждой точке $x \in [a, b]$, то*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in (a,b)} \|f'_\Gamma(c)\| \cdot \|b - a\|.$$

81.4.2. Формула Тейлора. Формула Тейлора. (см. часть I, лекция 19) *Если $f^{(n)}(\hat{x})$ существует, то*

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + h) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + (1/2)f''(\hat{x})[h, h] + \dots \\ &\quad \dots + (1/n!)f^{(n)}[h, \dots, h] + r(h), \end{aligned}$$

где $\|r(h)\| = o(\|h\|^n)$ при $h \rightarrow 0$.

Лекция 82. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами

Вариация функционала и её свойства. Необходимое условие экстремума. Основная лемма вариационного исчисления (Лемма Лангранжа). Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера

82.1. Вариация функционала и её свойства

Наряду с задачами нахождения максимума и минимума функций $z = f(x)$ в задачах физики, механики и т.д. возникает необходимость нахождения максимума и минимума некоторой величины, называемой функционалом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.1. *Функционал — это отображение, которое любой функции, принадлежащей некоторому множеству, ставит в соответствие некоторое числовое значение.*

ПРИМЕР 82.1. Длина l дуги плоской кривой, соединяющей две заданные точки, является функционалом (рис. 68). Величина l может быть вычислена, если задано уравнение кривой $y = y(x)$ (часть II, лекция 48, формула 48.9):

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Здесь предполагается, что дуга является гладкой, т.е. функция $y = y(x)$ непрерывно дифференцируема.

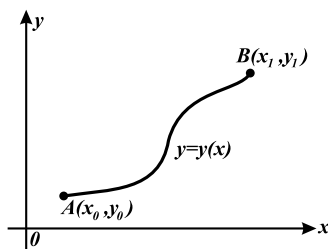


Рис. 68. Плоская кривая с заданными граничными точками

ПРИМЕР 82.2. Площадь некоторой поверхности является функционалом, определяемым выбором функции $z = z(x, y)$, задающей эту поверхность (часть II, лекция 54, формула 54.2)

$$S[z(x, y)] = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где σ – проекция поверхности на плоскость XY .

ПРИМЕР 82.3. Моменты инерции, статические моменты, координаты центра тяжести некоторой поверхности или кривой являются функционалами, зависящими от формы поверхности (кривой). Их значения определяются выбором кривой или поверхности, т.е. выбором функций, входящих в уравнение этой кривой или поверхности (см. часть II, лекция 54, формула 54.8, 54.9).

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов.

Вариационными задачами называются задачи исследования функционала на максимум или минимум.

Проведем аналогию между методами решения задач на максимум и минимум для функций и такими методами для функционалов.

82.1.1. *Функция и функционал.* Переменная величина z называется функцией аргумента x : $z = f(x)$, если любому x из некоторой области D соответствует некоторое $z \in E$: $x \xrightarrow{f(x)} z$ (см. часть I, лекция 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.2. *Переменная величина v называется функционалом, зависящим от функции $y(x)$, что обозначается $v = v[y(x)]$, если каждой функции $y(x)$ из некоторого класса функций соответствует числовое значение v : $y(x) \mapsto v$.*

82.1.2. *Приращение аргумента функции и вариация аргумента функционала.* Приращением Δx аргумента x функции $f(x)$ называется разность $\Delta x = x - x_1$. Если x – независимая переменная, то дифференциал x совпадает с приращением $dx = \Delta x$ (см. часть I, лекция 16).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.3. *Вариацией δy аргумента $y(x)$ функционала $v[y(x)]$ называется разность между функциями $\delta y = y(x) - y_1(x)$. При этом предполагается, что $y(x)$ меняется произвольно в некотором классе функций.*

82.1.3. *Непрерывность функции и функционала.* Функция $f(x)$ непрерывна, если малому изменению x соответствует малое изменение функции $f(x)$ (см. часть I, лекция 9).

Функционал $v[y(x)]$ непрерывен, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала $v[y(x)]$.

Уточним последнее определение. Что значит малое изменение функции $y(x)$? Какие кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ считать близкими?

Казалось бы, можно считать близкими функции $y(x)$ и $y_1(x)$, если модуль их разности $|y(x) - y_1(x)|$ мал для любого x . Однако если $v[y(x)]$ явным образом зависит от производной функции y' , как, например, функционал $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y'(x)) dx$, часто встречающийся в приложениях, то при таком определении близости кривых функционал $v[y(x)]$, вообще говоря, не будет непрерывным (из-за наличия y' под интегралом). В ряде случаев также нужно учитывать модули разности более высоких производных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.4. Кривые $y = y(x)$ и $y_1 = y_1(x)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если величина $|y(x) - y_1(x)|$ мала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.5. Кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле близости 1-ого порядка, если малы модули разностей $|y(x) - y_1(x)|$ и $|y'(x) - y_1'(x)|$, или, точнее,

$$\|y(x) - y_1(x)\| < \varepsilon; \quad \|y'(x) - y_1'(x)\| < \varepsilon,$$

где

$$\|y - y_1\| = \max_{x \in [a, b]} |y - y_1|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.6. Кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле близости k -ого порядка, если

$$\|y(x) - y_1(x)\| < \varepsilon, \dots, \|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\| < \varepsilon.$$

На рис. 69 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка, так как их ординаты близки, а наклоны касательных не близки. На рис. 70 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

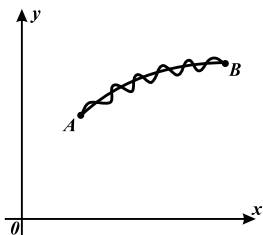


Рис. 69

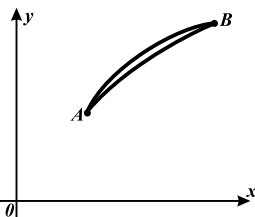


Рис. 70

Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка (слева) и первого порядка (справа)

Из определений (82.4-82.6) следует, что если $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле близости k -ого порядка, значит они близки и в смысле близости меньшего порядка.

ПРИМЕР 82.4. Кривые $y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$ и $y_1(x) \equiv 0$ близки в смысле близости нулевого порядка на отрезке $[0, \pi]$, поскольку

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

и на всем отрезке $[0, \pi]$ модуль разности между $y(x)$ и $y_1(x)$ мал при достаточно большом n .

Близости первого порядка для кривых $y(x)$ и $y_1(x)$ нет, так как

$$|y'(x) - y_1'(x)| = n |\cos n^2 x|,$$

и, например, в точках $x = \frac{2\pi}{n^2}$, где $\cos n^2 x = 1$, модуль разности $|y'(x) - y_1'(x)| = n$ и становится сколь угодно большим при достаточно большом n .

ПРИМЕР 82.5. Кривые $y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ и $y_1(x) \equiv 0$ близки в смысле близости первого порядка на отрезке $[0, \pi]$, поскольку модули разностей

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

малы на всем отрезке $[0, \pi]$ при достаточно большом n .

Теперь дадим более точное определение непрерывности функционала, исходя из определения непрерывности функции $f(x)$ на языке $\varepsilon - \delta$: $f(x) \in C(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0)$, такое что для $\forall x : |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.7. Функционал $v[y(x)]$ непрерывен при $y = y_0(x)$ в смысле близости k -го порядка, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall y(x) \in Y$, такого, что

$$\|y(x) - y_0(x)\| < \delta$$

$$\|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)\| < \delta$$

выполнено неравенство

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon.$$

Можно определить расстояние $\rho(y_1, y_2)$ между кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ ($x \in [x_0, x_1]$):

$$\|y_1 - y_2\| = \rho(y_1, y_2) = \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_1(x) - y_2(x)|,$$

т. е. близость нулевого порядка по метрике пространства C_0 , тогда мы приходим к понятию близости нулевого порядка. Если считать

$$\|y_1 - y_2\| = \rho(y_1, y_2) = \sum_{p=1}^k \max_{x \in [x_0, x_1]} |y_1^{(p)}(x) - y_2^{(p)}(x)|$$

(предполагается, что y_1 и $y_2 \in \mathbb{C}^k$), то близость кривых понимается в смысле близости k -го порядка.

82.1.4. *Линейные функция и функционал.* Линейной функцией (см. часть I, лекция 4) называется функция $l(x)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $l(Cx) = Cl(x)$ ($\forall C$),
- 2) $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$.

Линейная функция имеет вид: $l(x) = kx$, где $k = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.8. *Линейным функционалом $L[y(x)]$ называется функционал, удовлетворяющий условиям:*

- 1) $L[Cy(x)] = CL[y(x)]$ ($\forall C$),
- 2) $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$.

Пример линейного функционала: $L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y + q(x)y'(x)]dx$.

82.1.5. *Дифференциал функции и вариация функционала.* Если приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ можно представить в виде $\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta)\Delta x$, где $A(x)$ не зависит от Δx , а $\beta(x, \Delta) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$, то функция называется дифференцируемой, а линейная часть приращения $(A(x)\Delta x)$ называется дифференциалом: $df = A(x)\Delta x$. Деля на Δx и переходя к пределу, имеем: $df = f'(x)\Delta x$ (часть I, лекция 16).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.9. *Если приращение функционала $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$ можно представить в виде $\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\|\delta y\|$, где $L[y(x), \delta y]$ линейный по отношению к δy функционал, а $\beta(y(x), \delta y) \xrightarrow{\|\delta y\| \rightarrow 0} 0$, то линейная по отношению к δy часть приращения функционала $(L[y(x), \delta y])$ называется вариацией функционала δv .*

Вариация функционала — это главная, линейная по отношению к вариации аргумента часть приращения функционала.

Таким образом, вариация функционала играет ту же роль, что и дифференциал функции. Можно дать другие (почти эквивалентные) определения дифференциала функции и вариации функционала.

Рассмотрим $f(x + \alpha\Delta x)$ при фиксированных x и Δx и изменяющемся параметре α . При $\alpha = 1$ получим значение функции $f(x + \Delta x)$, при $\alpha = 0$ получим исходное значение функции $f(x)$. Производная от $f(x + \alpha\Delta x)$ по α при $\alpha = 0$ равна дифференциалу $f(x)$ в точке x . Действительно

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha\Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha\Delta x)\Delta x|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x).$$

Для функции нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ дифференциал можно также получить путём дифференцирования функции $f(x_1 + \alpha\Delta x_1, x_2 + \alpha\Delta x_2, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n)$ по α , полагая затем $\alpha = 0$. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha\Delta x_1, x_2 + \alpha\Delta x_2, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n)|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \equiv df.$$

Аналогично для функционалов вида $v[y(x)]$, или более сложных, зависящих от нескольких неизвестных функций или от функций нескольких переменных, можно определить вариацию как производную функционала $v[y(x) + \alpha\delta y(x)]$ по α при $\alpha = 0$.

Действительно, если функционал имеет вариацию в смысле главной линейной части приращения, то его приращение имеет вид

$$\Delta v = v[y + \alpha\delta y] - v[y] = L(y, \alpha\delta y) + \beta(y, \alpha\delta y)\alpha\|\delta y\|.$$

Производная от $v[y(x) + \alpha\delta y(x)]$ по α при $\alpha = 0$ равна:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha\delta y) + \beta(y, \alpha\delta y)\alpha\|\delta y\|}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha\delta y)}{\alpha} + \underbrace{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y, \alpha\delta y)\alpha\|\delta y\|}{\alpha}}_{=0} = L(y, \delta y), \end{aligned}$$

т.к. в силу линейности $L(y, \alpha\delta y) = \alpha L(y, \delta y)$.

Таким образом, если существует вариация в смысле главной линейной части приращения функционала, то существует и вариация в

смысле производной по параметру при начальном значении параметра, и эти определения эквивалентны.

Второе определение вариации несколько шире первого, поскольку существуют примеры функционалов, для которых нельзя из приращения выделить главную линейную часть, однако вариация в смысле второго определения существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.10. Дифференциал функции $f(x)$ равен частной производной функции $f(x + \alpha \Delta x)$ по параметру α при начальном значении параметра $\alpha = 0$:

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \Big|_{\alpha=0}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.11. Вариация функционала $v[y(x)]$ равна частной производной функционала $v[y(x) + \alpha \delta y]$ по параметру α при начальном значении параметра $\alpha = 0$:

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} [v(y(x) + \alpha \delta y)] \Big|_{\alpha=0}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82.12. Функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума, если значения функционала $v[y(x)]$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше, чем $v[y_0(x)]$, т.е. $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$.

Если $\Delta v \leq 0$, причём $\Delta v = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается строгий максимум. Аналогично определяется и кривая $y = y_0(x)$, на которой достигается минимум. В этом случае $\Delta v \geq 0$ для всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

ТЕОРЕМА 82.1. (теорема Ферма, часть I, лекция 17). Если дифференцируемая функция $f(x)$ достигает \max или \min во внутренней точке $x = x_0$ области определения, то в этой точке дифференциал функции $df = 0$.

ТЕОРЕМА 82.2. Если функционал $v[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает \max или \min при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ – внутренняя точка области определения функционала, то при $y = y_0(x)$ вариация функционала

$$\delta v = 0.$$

Доказательство теоремы для функционалов. Если $y_0(x)$ и δy фиксированы, то функционал $v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$ является функцией α , которая по предположению теоремы достигает максимума или

минимума при $\alpha = 0$, следовательно,

$$\varphi'(\alpha) = 0 \implies \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = 0,$$

т.е. $\delta v = 0$. Таким образом, на кривых, где достигается экстремум функционала, его вариация равна нулю.

Понятие экстремума нужно уточнить. Имелись в виду наибольшие и наименьшие значения функционала только по отношению к близким кривым, следовательно, нужно учитывать, какого порядка близость имела в виду.

Если функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума (минимума) по отношению ко всем кривым, для которых $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$ (т. е. близким в смысле нулевого порядка), то максимум (минимум) называется *сильным*.

Если функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума (минимума) лишь по отношению к кривым, близким к $y = y_0(x)$ в смысле близости 1-го порядка, то максимум (минимум) называется *слабым*.

Очевидно, если на $y = y_0(x)$ существует сильный максимум, следовательно, существует слабый максимум, так как любая кривая, близкая в смысле первого порядка, близка и по нулевому порядку. Однако если на кривой $y = y_0(x)$ достигается слабый максимум (минимум), то сильный может не достигаться.

ЗАМЕЧАНИЕ 82.1. Если на $y = y_0(x)$ достигается экстремум, то не только $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = 0$, но и $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = 0$ на любом семействе допустимых кривых $y(x, \alpha)$, таком, что функция $y(x, \alpha)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ превращается в $y_0(x)$ и $y_0(x) + \delta y$ соответственно.

Действительно, $v[y(x, \alpha)]$ является функцией α , так как задание α определяет семейство $y = y(x, \alpha)$, и, следовательно, значение функционала $v[y(x, \alpha)]$. Эта функция, по предположению, достигает экстремума при $\alpha = 0$, следовательно, производная этой функции равна нулю при $\alpha = 0$ (при этом подразумевается, что α может принимать любые близкие к $\alpha = 0$ значения и $\left. \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$ существуют).

Таким образом, $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = 0$, однако эта производная, вообще говоря, уже не будет совпадать с вариацией функционала, но будет обращаться в нуль одновременно с δv на кривых, реализующих экстремумы функционала.

ЗАМЕЧАНИЕ 82.2. Все определения и основная теорема о вариации функционала почти без всяких изменений переносятся на функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций:

$$v[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)],$$

или зависящих от одной или нескольких функций многих переменных:

$$v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$

или

$$v[z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Например, вариация δv функционала $v[z(x, y)]$ может быть определена или как главная линейная по отношению к δz часть приращения

$$\Delta v = v[z(x, y) + \delta z] - v[z(x, y)],$$

или как производная по параметру при нулевом значении параметра

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z] \Big|_{\alpha=0},$$

причём, если при $z = z(x, y)$ функционал v достигает экстремума, то вариация $\delta v = 0$ при $z = z(x, y)$, так как $\Delta v = v[z(x, y) + \alpha \delta z]$ есть функция от α , которая при $\alpha = 0$, по предположению, достигает экстремума. Следовательно, производная этой функции по α при $\alpha = 0$ равна нулю, откуда $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z] \Big|_{\alpha=0} = 0$ или $\delta v = 0$.

82.2. Уравнение Эйлера

Исследуем на экстремумы функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (82.1)$$

причём граничные точки допустимых кривых закреплены: $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$ (рис. 71). Будем предполагать, что $F(x, y, y') \in C^3$.

Известно, что необходимое условие экстремума — это обращение в нуль вариации функционала. Покажем, как эта теорема применяется к функционалу (82.1).

Предположим, что экстремум достигается на кривой $y = y(x) \in C^2$. Возьмём какую-нибудь близкую к $y = y(x)$ допустимую кривую $y = \bar{y}(x)$ и образуем однопараметрическое семейство кривых

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x)) = y(x) + \alpha \delta y, \quad \delta y = \bar{y}(x) - y(x).$$

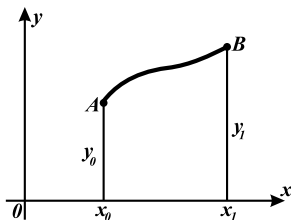


Рис. 71. Допустимые кривые с закрепленными граничными точками

Очевидно, что $y(x, 0) = y(x)$, $y(x, 1) = \bar{y}(x)$ (рис.72). Как мы уже знаем, разность $\bar{y}(x) - y(x)$ называют вариацией функции $y(x)$ и обозначают δy .

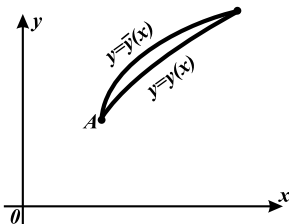


Рис. 72. Семейство допустимых кривых с закрепленными граничными точками

Вариация δy в вариационных задачах играет роль, аналогичную роли приращения аргумента Δx в задачах на исследование экстремума функции $f(x)$. Вариация $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$ есть функция от x , которую можно дифференцировать один или несколько раз, причём

$$\begin{aligned} (\delta y)' &= \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y' \Rightarrow \\ \Rightarrow (\delta y)^{(n)} &= \bar{y}^{(n)}(x) - y^{(n)}(x) = \delta y^{(n)}. \end{aligned}$$

Вывод: производная вариации равна вариации производной.

Итак, семейство $y = y(x, \alpha)$ содержит кривую $y = y(x)$ и некоторую близкую кривую $\bar{y} = \bar{y}(x)$, называемую кривой сравнения. Если рассматривать значения функционала (82.1) только на кривых семейства $y = y(x, \alpha)$, то он превращается в функцию от α :

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha),$$

так как значения параметра α определяют кривую семейства $y = y(x, \alpha)$ и, следовательно, определяют значения функционала $v[y(x, \alpha)]$. Эта функция достигает экстремума при $\alpha = 0$, так как при $\alpha = 0$ получаем $y = y(x)$ и функционал достигает экстремума по сравнению с любой допустимой близкой кривой и, в частности, по отношению к близким кривым семейства $y = y(x, \alpha)$.

Необходимое условие экстремума функции $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$ есть $\varphi'(0) = 0$. Так как

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx,$$

то

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx,$$

где

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)), \quad F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)),$$

или, так как

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y',$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y'] dx; \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi'(0) &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y'] dx. \end{aligned}$$

Как уже указывалось ранее, $\varphi'(0)$ есть вариация функционала и обозначается δv . Необходимое условие экстремума функционала v состоит в равенстве нулю его вариации: $\delta v = 0$. Из последнего равенства следует, что для функционала (82.1) это условие имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0.$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям с учётом того, что $\delta y' = (\delta y)'$. Получим

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y dx.$$

Так как границы зафиксированы, имеем

$$\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0, \quad \delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

поэтому $\delta v = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y dx$ и необходимое условие экстремума принимает вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0, \quad (82.2)$$

причём первый множитель $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ на кривой $y(x)$, реализующей экстремум, является заданной непрерывной функцией, а второй множитель δy , ввиду произвольности выбора функции сравнения $y = \bar{y}(x)$, является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям $\delta y|_{x=x_0} = \delta y|_{x=x_1} = 0$, непрерывной и дифференцируемой один или несколько раз, и δy или δy и $\delta y'$ малы по абсолютной величине.

Докажем следующую лемму.

Лемма 82.1. *Основная лемма вариационного исчисления (лемма Лагранжа). Если для каждой непрерывной функции $\eta(x) \in C[x_0, x_1]$*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

где $\Phi(x)$ также непрерывна: $\Phi(x) \in C[x_0, x_1]$, то

$$\Phi(x) \equiv 0, \quad x \in [x_0, x_1].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 82.3. Утверждение леммы и её доказательство не изменяются, если на функцию $\eta(x)$ наложить ограничения:

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0, \quad \eta(x) \in C^p[x_0, x_1], \quad |\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon, \quad (s = 0, 1, \dots, q; q \leq p).$$

Доказательство леммы: (от противного).

Пусть в точке $x = \bar{x} \in [x_0, x_1]$, $\Phi(\bar{x}) \neq 0$. Тогда из непрерывности $\Phi(x)$ следует, что, если $\Phi(\bar{x}) \neq 0$, то существует окрестность точки \bar{x} , в которой $\Phi(x)$ сохраняет знак. Выберем $\eta(x)$ также сохраняющей знак в этой окрестности и равной нулю вне её при $x \notin [\bar{x}_0, \bar{x}_1]$. Тогда произведение $\Phi(x)\eta(x)$ сохраняет знак, когда $x \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ и равно нулю вне этого отрезка. Следовательно, $\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x) dx \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\Phi(x) \equiv 0$.

Функцию $\eta(x)$ можно выбирать, например, так:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [\bar{x}_0, \bar{x}_1]; \\ k(x - \bar{x}_0)^{2n}(x - \bar{x}_1)^{2n}, & x \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1], \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$ и k — постоянный множитель, за счёт которого функция $\eta(x)$ может быть сделана сколь угодно малой вместе со всеми производными.

ЗАМЕЧАНИЕ 82.4. Точно также доказывается лемма для функции $\Phi(x, y) \in C[D]$ на плоскости (x, y) , когда $\iint_D \Phi(x, y)\eta(x, y) dx dy = 0$ при произвольном выборе $\eta(x, y)$, удовлетворяющей аналогичным условиям. Вообще, эта лемма верна и для n -кратных интегралов.

Применим лемму Лагранжа для упрощения необходимого условия (82.2) экстремума простейшего функционала (82.1).

Все условия леммы выполнены: множитель $(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})$ непрерывен на кривой, реализующей экстремум, а δy — произвольная функция, на которую наложены лишь общие ограничения. Следовательно, $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$ на кривой $y = y(x)$, реализующей экстремум функционала. Следовательно, $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \quad (82.3)$$

или в развернутом виде:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \quad (82.4)$$

Уравнение (82.3) называется *уравнением Эйлера* (1744 год). Интегральные кривые уравнения Эйлера $y = y(x, C_1, C_2)$ называются *экстремальными*. Экстремум функционала (82.1) может достигаться только на экстремальных. Чтобы найти кривую, реализующую экстремум функционала (82.1), нужно проинтегрировать уравнение (82.3) и определить две произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий на границах $y(x_0) = y_0$; $y(x_1) = y_1$. Однако, чтобы установить, реализуется ли экстремум и определить его тип, нужно использовать *достаточные условия* экстремума.

ЗАМЕЧАНИЕ 82.5. *Краевая задача*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

не всегда имеет решение или оно может быть неединственным.

ЗАМЕЧАНИЕ 82.6. *Во многих вариационных задачах экстремальное решение очевидно из физического или геометрического смысла. Если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то эта единственная экстремаль, как правило, будет решением рассматриваемой задачи.*

82.2.1. *Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.* Уравнение Эйлера интегрируемо в квадратурах далеко не всегда. Рассмотрим случаи, когда это можно сделать.

1) F не зависит от y' : $F = F(x, y)$. Уравнение Эйлера имеет вид: $F'_y(x, y) = 0$, т.к. $F_{y'} \equiv 0$.

Это уравнение конечное (не дифференциальное), его решение не содержит элементов произвола, и, следовательно, не удовлетворяет требуемым условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$, решение вариационной задачи, вообще говоря, не существует. Оно может существовать лишь в исключительных случаях, когда кривая $F'_y(x, y) = 0$ проходит через граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) .

ПРИМЕР 82.6. *Решить вариационную задачу*

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

Р е ш е н и е: Уравнение Эйлера имеет вид: $F_y = 0$, что в рассматриваемом случае равносильно $y = 0$.

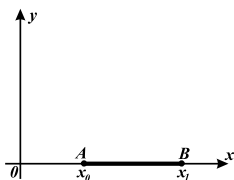


Рис. 73. Экстремаль с нулевыми граничными условиями

Экстремаль $y = 0$ проходит через граничные точки y_0 и y_1 только при $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$ (рис. 73). Если $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$, то, очевидно, функция $y = 0$ реализует минимум функционала $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$, т.к. $v[y(x)] \geq 0$, причём $v = 0$ при $y = 0$.

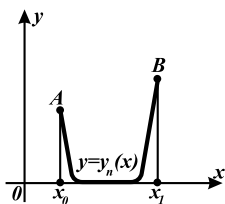


Рис. 74. Кривые, приближающиеся к экстремалью с нулевыми граничными условиями

Если же хотя бы одно из значений y_0 и y_1 не равно 0, то минимум функционала на непрерывных функциях не достигается, так как можно брать непрерывные функции $y_n(x)$ вида, изображенного на рис. 74, графики которых состоят из дуг, все более круто спускающихся из граничных точек, и отрезка оси абсцисс, почти совпадающим со всем отрезком (x_0, x_1) .

Очевидно, что на кривых такой последовательности значения функционала сколь угодно мало отличаются от нуля и, следовательно, нижняя грань значений функционала равна нулю, однако эта нижняя грань не может быть достигнута на непрерывной кривой, так как для любой непрерывной кривой $y = y(x)$, такой что $y(x) \not\equiv 0$ $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx > 0$. Эта нижняя грань достигается на разрывной функции вида, изображенного на рис. 75.

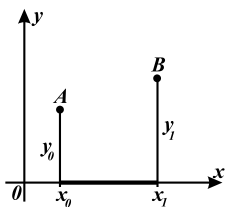


Рис. 75. Разрывная экстремаль

2) Рассмотрим случай, когда F линейно зависит от y' :

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y';$$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right] dx.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0,$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' = 0,$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Это вновь конечное, а не дифференциальное уравнение. Кривая $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям и, следовательно, вариационная задача не имеет решений в классе непрерывных функций. Если же $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то $Mdx + Ndy = du$ — полный дифференциал и функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left[M + N \frac{dx}{dy} \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} M dx + N dy$$

не зависит от пути интегрирования, его значение постоянно на допустимых кривых. Вариационная задача не имеет смысла.

ПРИМЕР 82.7. Решить вариационную задачу

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$$

Р е ш е н и е: Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ что в нашем случае даёт $y - x = 0$. Первое граничное условие $y(0) = 0$ удовлетворяется, но второе условие может быть удовлетворено только при $a = 1$. Если $a \neq 1$, то экстремума, удовлетворяющего граничным условиям, не существует.

3) F зависит только от y' : $F = F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $F_{y'y'} \cdot y'' = 0$, так как $F_y' = F_{xy'}'' = F_{yy'}'' = 0$. Отсюда

- (1) либо $y'' = 0$, тогда $y = C_1 x + C_2$ — двупараметрическое семейство, экстремали — всевозможные прямые линии. $y = C_1 x + C_2$;
- (2) либо $F_{y'y'}(y') = 0$ и если это уравнение имеет один или несколько действительных корней $y' = k_i$, то $y = k_i x + C$ и мы получаем однопараметрическое семейство прямых $y = k_i x + C_2$, которое содержится в двупараметрическом семействе $y = C_1 x + C_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае экстремали — всевозможные прямые линии $y = C_1 x + C_2$.

Например, длина дуги кривой

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

имеет экстремали в виде прямых линий $y = C_1 x + C_2$.

4) Подынтегральная функция F зависит только от x и y' : $F = F(x, y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0,$$

следовательно, существует первый интеграл $F_{y'}(x, y') = C_1$, а так как полученное уравнение первого порядка $F_{y'}(x, y') = C_1$ не содержит y , то его можно интегрировать либо путём разрешения относительно y' , либо путём введения параметра.

ПРИМЕР 82.8. Среди кривых, соединяющих точки $A(1, 3)$ и $B(2, 5)$, найти кривую, на которой может достигаться экстремум функции

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(x)(1 + x^2 y'(x)) dx.$$

Решение: Поскольку подынтегральная функция F не зависит явно от y , то уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$, что даёт уравнение $\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 y') = 0$, после интегрирования которого получаем

$$1 + 2x^2 y' = C_1.$$

Разрешая это уравнение, получим $y' = \frac{C_1 - 1}{2x^2}$. Интегрируя, найдём $y(x) = \frac{1 - C_1}{2x} + C_2$, т.е. экстремали представляют собой гиперболы. Для нахождения экстремали, проходящей через заданные точки A и B , составляем систему для нахождения постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} 3 = \frac{1 - C_1}{2} + C_2, \\ 5 = \frac{1 - C_1}{4} + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 9$, $C_2 = 7$. Искомая кривая $y(x) = 7 - \frac{4}{x}$.

5) Подынтегральная функция F не зависит явно от x и зависит только от y и y' : $F = F(y, y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид

$$F'_y - F''_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0,$$

так как $F''_{xy'} = 0$.

Умножим его на y' . Получим уравнение $F'_y y' - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = 0$, где правая часть представляет собой, как можно проверить, полную производную от $F - y' F_{y'}$: $F'_y y' - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = \frac{d}{dx}(F - y' F_{y'})$.

Действительно, вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) &= y' F'_y + F_{y'y'} y'^2 - y'' F_{y'} - F''_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = \\ &= y'(F'_y - F''_{yy'} y' - F_{y'y'} y''). \end{aligned}$$

Следовательно, существует первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$, причём это уравнение первого порядка не содержит явно x и поэтому его можно проинтегрировать, разделив переменные или введя параметр.

ПРИМЕР 82.9. Найти функцию $y(x)$, на которой функционал

$$V[y(x)] = \int_0^1 y^3 y' dx \quad (82.5)$$

принимает наименьшее возможное значение, причём $y(0) = 0$, $y(1) = 8$.

Подынтегральная функция F не зависит явно от x , поэтому уравнение Эйлера для функционала (82.5)

$$y'^3 - 3 \frac{d}{dx} (yy'^2) = 0 \quad (82.6)$$

имеет первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$, который можно записать в виде

$$y'^3 y = \tilde{C}_1^3. \quad (82.7)$$

Частное решение уравнения (82.6) $y = 0$ не удовлетворяет граничным условиям и должно быть отброшено.

Из (82.7) находим

$$y' = \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt[3]{y}} \quad \text{и} \quad y = (\hat{C}_1 x + C_2)^{3/4}.$$

Используя граничные условия, получим $\hat{C}_1 = 16$, $C_2 = 0$, откуда

$$y = 8x^{3/4},$$

т.е. минимальное значение функционала (82.5) с заданными граничными условиями достигается на параболе степени $3/4$.

Практическое занятие 81. Уравнение Эйлера

ПРИМЕР 81.1. На каких кривых может достигать экстремума функционал:

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2) dx; \quad y(x) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1?$$

Р е ш е н и е: Уравнение Эйлера имеет вид: $y'' + y' = 0$, его общее решение $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Из граничных условий получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, т.е. если экстремум существует, то он может достигаться только на синусоиде $y = \sin x$.

ПРИМЕР 81.2. На каких кривых может достигать экстремума функционал:

$$v[y(x)] = \int_0^1 [y'^2 + 12xy] dx \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 ?$$

Решение: Уравнение Эйлера имеет вид: $y'' - 6x = 0$, откуда $y = x^3 + C_1x + C_2$. Из граничных условий находим $C_1 = C_2 = 0$; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кубической параболы $y = x^3$.

ПРИМЕР 81.3. Найти экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1$, $y(3) = 4, 5$.

Решение: Уравнение Эйлера имеет вид $3x - 2y = 0$, откуда $y(x)$ находится однозначно: $y(x) = \frac{3}{2}x$.

Так как найденная экстремаль $y = \frac{3}{2}x$ не удовлетворяет условию $y(1) = 1$, вариационная задача не имеет решения.

ПРИМЕР 81.4. Решить вариационную задачу

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx \iff v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y dx + x dy.$$

Решение: Уравнение Эйлера превращается в тождество $1 \equiv 1$. Подынтегральное выражение является полным дифференциалом, следовательно, $v = \text{const}$. Значит, на допустимых кривых вариационная задача теряет смысл.

ПРИМЕР 81.5. Найти минимальное время, затрачиваемое на перемещение по некоторой кривой $y = y(x)$ из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_1, y_1)$, если скорость $\frac{ds}{dt} = v(y')$ зависит только от наклона кривой.

Решение: Время перемещения — это функционал $t[y(x)]$ вида

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')} dx ,$$

так как $\frac{ds}{dt} = v(y')$; $dt = \frac{ds}{v(y')} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')} dx$, следовательно, экстремали есть прямые линии.

ПРИМЕР 81.6. Найти минимальное время t , затрачиваемое на перемещение по некоторой кривой $y = y(x)$ из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_1, y_1)$, если скорость $v = x$.

Решение: Время перемещения есть функционал

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx,$$

поскольку если $\frac{ds}{dt} = x$, то $dt = \frac{ds}{x}$.

Подынтегральная функция F^x не зависит от y , поэтому существует первый интеграл уравнения Эйлера $F'_{y'} = C_1$, который имеет вид

$$\frac{y'}{x \cdot \sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Это уравнение наиболее просто интегрируется, если мы введем параметр $y' = \operatorname{tg} t$; тогда

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \sin t$$

или $x = \bar{C}_1 \sin t$, где $\bar{C}_1 = \frac{1}{C_1}$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t; \quad dy = \operatorname{tg} t dx = \operatorname{tg} t \bar{C}_1 \cos t dt = C_1 \sin t dt;$$

интегрируя, получаем

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \Rightarrow x = \bar{C}_1 \sin t; \quad y - C_2 = -C_1 \cos t.$$

Исключая t , получим $x^2 + (y - C_2)^2 = \bar{C}_1^2$ — семейство окружностей с центрами на оси ординат.

ПРИМЕР 81.7. Найти экстремаль функционала

$$V[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx,$$

проходящую через заданные точки (a, A) и (b, B) в верхней полуплоскости.

Решение: Так как подынтегральная функция не содержит явно x , уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C_1$, который можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1. \quad (81.1)$$

После упрощений получим $y\sqrt{1+y'^2} = \tilde{C}_1$, где $\tilde{C}_1 = \frac{1}{C_1}$. Интегрируя это дифференциальное уравнение, которое является уравнением с разделяющимися переменными, найдем экстремали $(x+C_2)^2 + y^2 = \tilde{C}_1^2$ – семейство окружностей с центрами на оси абсцисс. Искомой будет та экстремаль, которая проходит через две заданные точки. Задача имеет единственное решение, так как через любые две точки, лежащие в верхней полуплоскости, проходит ровно одна полуокружности с центром на оси Ox .

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 81.8. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy') dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

ПРИМЕР 81.9. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y') dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

ПРИМЕР 81.10. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 yy'^2 dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

ПРИМЕР 81.11. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx; \quad y(-1) = 1; \quad y(0) = 0.$$

ПРИМЕР 81.12. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 0.$$

ПРИМЕР 81.13. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y(1+y'^2)} dx; \quad y(0) = y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Практическое занятие 82. Уравнение Эйлера.

Задача о брахистохроне

ПРИМЕР 82.1. *Задача о наименьшей поверхности вращения. Найти кривую с заданными граничными точками, при вращении которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади.*

Р е ш е н и е: Площадь поверхности вращения есть функционал

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^x y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Подынтегральная функция зависит лишь от y и y' , и, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид

$$F - y'F_{y'} = C_1,$$

или в данном случае

$$y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{y\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

После упрощений получаем

$$\frac{y}{y \cdot \sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

Сделаем подстановку: $y' = \operatorname{sh} t$, тогда $y = C_1 \operatorname{ch} t$. Получим

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Таким образом, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид:

$$y = \begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = C_1 \cdot \operatorname{ch} t \end{cases}.$$

После исключения t будем иметь: $y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$ – семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности, называемые катеноидами. Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия прохождения линии через точки A и B . В зависимости от расположения A и B может существовать одно, два или ни одного решения.

ПРИМЕР 82.2. *Задача о брахистохроне. Найти кривую, соединяющую точки A и B , при движении по которой материальная точка скатится из A в B за кратчайшее время (трение и сопротивление среды отсутствуют).*

Решение: Пусть начало координат совпадает с точкой A , ось Ox направлена горизонтально, ось Oy — вертикально. Скорость движения материальной точки $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$, откуда время t перемещения из $A(0, 0)$ в $B(x_1, y_1)$ равно

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

при условии, что $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$.

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл:

$$F - y' F_{y'} = C,$$

который в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C.$$

После упрощений получим

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \implies y(1+y'^2) = C_1.$$

Можно разрешить это уравнение относительно y' , однако удобнее ввести параметр t , полагая $y' = \operatorname{ctg} t$; тогда получим

$$y = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1 (1 - \cos 2t) dt;$$

$$x = C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t) + C_2;$$

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t); \quad y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t).$$

Можно преобразовать параметр подстановкой $2t = t_1$, и, учитывая, что $C_2 = 0$ (так как кривая проходит через точку $x = 0$, $y = 0$), получим уравнение семейства циклоид в виде

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1) \\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1), \end{cases}$$

где $\frac{C_1}{2}$ радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку (x_1, y_1) .

Таким образом, *брахистохрона есть циклоида*.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 82.3. *Найти экстремали функционала*

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x} dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = e^{-1}.$$

ПРИМЕР 82.4. *Найти экстремали функционала*

$$v[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(-1) = -1; \quad y(1) = 1.$$

ПРИМЕР 82.5. *Найти экстремали функционала*

$$v[y(x)] = \int_1^e (xy'^2 + yy') dx; \quad y(1) = 0; \quad y(e) = 1.$$

ПРИМЕР 82.6. *Найти экстремали функционала*

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

ПРИМЕР 82.7. *Найти экстремали функционала*

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx.$$

ПРИМЕР 82.8. *Найти экстремали функционала*

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

Лекция 83. Функционалы, зависящие от нескольких функций, старших производных и функций многих переменных

Функционалы, зависящие от нескольких функций. Уравнения Эйлера. Функционалы, зависящие от старших производных. Уравнения Эйлера-Пуассона. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Остроградского. Приложения вариационного метода

83.1. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Для того чтобы получить необходимые условия экстремума функционала

$$v[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

при заданных граничных условиях

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0},$$

$$y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, \quad \dots, \quad y_n(x_1) = y_{n1},$$

будем варьировать одну из функций $y_j(x) (j = 1, \dots, n)$, оставляя все остальные без изменения.

Тогда функционал, зависящий от n функций y_1, \dots, y_n , превратится в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, например от $y_i(x) : v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \tilde{v}[y_i]$, который был рассмотрен выше, и, следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Здесь $i = 1, \dots, n$, так как это верно для любого y_i .

Таким образом, мы получаем систему n дифференциальных уравнений второго порядка. Эта система определяет $2n$ -параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве x, y_1, y_2, \dots, y_n — семейство экстремалей рассматриваемой вариационной задачи.

Если функционал зависит лишь от двух функций $y(x)$ и $z(x)$

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0} x_1 F(x, y, z, y', z') dx$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1,$$

т.е. определяется выбором пространственной кривой

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$$

то получается система двух уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 83.1. Найти дифференциальные уравнения распространения света в оптически неоднородной среде, в которой скорость распространения света есть заданная функция координат $v(x, y, z)$.

Согласно принципу Ферма, свет распространяется из одной точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_1, y_1)$ по кривой, для которой время T его прохождения будет наименьшим.

Если уравнение искомой кривой есть $y = y(x)$ и $z = z(x)$, то

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)} dx.$$

Система уравнений Эйлера для этого функционала имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \end{cases}$$

и будет системой, определяющей линии распространения света.

83.2. Функционалы, зависящие от старших производных

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (83.1)$$

где $F \in C^{n+2}$. Будем предполагать, что граничные условия имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (83.2)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}.$$

Таким образом, в граничных точках заданы не только функция, но и её производные до $(n-1)$ -го порядка включительно.

Предположим, что экстремум достигается на кривой $y = y(x) \in C^{2n}$ и $\bar{y}(x)$ - кривая сравнения - также принадлежит классу C^{2n} .

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha[\bar{y}(x) - y(x)] \quad \text{или} \quad y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y.$$

При $\alpha = 0$ $y(x, \alpha) = y(x)$, при $\alpha = 1$ $y(x, \alpha) = \bar{y}(x)$. Если рассматривать значение функционала $v[y(x)]$ только на кривых семейства $y = y(x, \alpha)$, то функционал превратится в функцию параметра α , достигающую экстремума при $\alpha = 0$, следовательно, $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)]_{\alpha=0} = 0$. Эта производная в соответствии с ранее сказанным называется *вариацией функционала* v и обозначается δv :

$$\begin{aligned} \delta v &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), \dots, y^{(n)}(x, \alpha)) dx \right|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}] dx. \end{aligned} \quad (83.3)$$

Проинтегрируем второе слагаемое в правой части по частям один раз:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx,$$

третье слагаемое — 2 раза:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = [F_{y''} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx,$$

и т.д., последнее $(n+1)$ -ое слагаемое - n раз:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = [F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \right]_{x_0}^{x_1} + \dots$$

$$+(-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \delta y dx.$$

Так как границы закреплены, вследствие чего при $x = x_0$ и $x = x_1$ вариации $\delta y = \delta y' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$, получим

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.$$

Поскольку на экстремали вариация $\delta v = 0$, то в силу произвольности δy и непрерывности первого множителя, по лемме Лагранжа имеем

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

Таким образом, функция $y = y(x)$, реализующая экстремум функционала (83.2), должна быть решением уравнения Эйлера-Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (83.4)$$

Это дифференциальное уравнение порядка $2n$, его решения являются экстремалами рассматриваемой вариационной задачи. Они должны удовлетворять $2n$ граничным условиям (83.2).

ПРИМЕР 83.2. *Определить экстремаль функционала*

$$v[y(x)] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \mu y''^2 + \rho y \right) dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$y(-l) = 0, \quad y'(-l) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

К этой задаче приводит нахождение оси изогнутой упругой цилиндрической балки, заделанной на концах. Если балка однородна, то $\rho = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, и уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2} (\mu y'') = 0 \quad \text{или} \quad y^{\text{IV}} = -\frac{\rho}{\mu},$$

откуда получим

$$y = -\frac{\rho}{24\mu} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Из граничных условий легко находим, что

$$y = \frac{-\rho}{24\mu}(x^4 - 2l^2x^2 + l^4) \quad \text{или} \quad y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2.$$

Если функционал имеет вид

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^x F(x, y, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(m)})dx,$$

то, варьируя только функцию $y(x)$ и считая $z(x)$ фиксированной и наоборот, получим, что функции $y(x)$ и $z(x)$, на которых реализуется экстремум, должны удовлетворять системе двух уравнений

$$\begin{aligned} F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} &= 0 \\ F_{z'} - \frac{d}{dx}F_{z''} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично выписывается система уравнений для любого функционала, зависящего от m функций:

$$v[y_1, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_1^{(n_1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(n_m)})dx.$$

Для этого функционала, варьируя одной функцией $y_i(x)$ и сохраняя остальные неизменными, получим необходимые условия экстремума в виде

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

83.3. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

Рассмотрим функционал

$$v[z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$

причём на границе C области D значения функции $z(x, y)$ заданы, т.е. задан пространственный контур \tilde{C} , через который должны проходить все допустимые поверхности (рис. 76). Для сокращения записи обозначим $\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Предположим, что $F \in C^3(D)$, $z \in C^2(D)$.

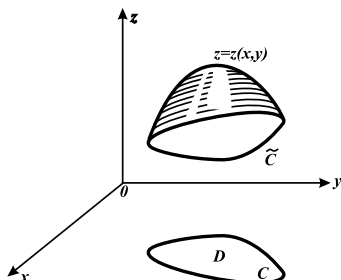


Рис. 76. Допустимая поверхность с заданной границей

Рассмотрим однопараметрическое семейство поверхностей

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z,$$

где $\delta z = \bar{z}(x, y) - z(x, y)$, так что при $\alpha = 0$ имеем поверхность $z = z(x, y)$, на которой реализуется экстремум, а при $\alpha = 1$ — некоторую допустимую поверхность $z = \bar{z}(x, y)$.

Вновь, как и раньше, на функциях семейства $z(x, y, \alpha)$ функционал v превращается в функцию параметра α , которая должна иметь экстремум при $\alpha = 0$, следовательно, $\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = 0$ — это *вариация функционала* δv (согласно первой лемме). Для неё имеем

$$\begin{aligned} \delta v &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint_D F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha)) dx dy \right|_{\alpha=0} = \\ &= \iint_D [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} z(x, y, \alpha) &= z(x, y) + \alpha \delta z, \\ p(x, y, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial x} z(x, y, \alpha) = p(x, y) + \alpha \delta p, \\ q(x, y, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial y} z(x, y, \alpha) = q(x, y) + \alpha \delta q. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} [F_p \delta z] = \frac{\partial}{\partial x} [F_p] \delta z + F_p \delta p, \quad \frac{\partial}{\partial y} [F_q \delta z] = \frac{\partial}{\partial y} [F_q] \delta z + F_q \delta q,$$

то после подстановки получим:

$$\begin{aligned} & \iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ — так называемая *полная частная производная* по x , т.е. при её вычислении считается, что $y = \text{const}$, но зависимость функций z , p , и q от x учитывается:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x},$$

и аналогично для полной частной производной по y имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}.$$

По формуле Грина получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C N dy - M dx,$$

откуда

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy = \oint_{\Gamma_\sigma} (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

Последний интеграл равен нулю, так как на контуре C вариация $\delta z=0$ (все допустимые поверхности проходят через один и тот же пространственный контур \tilde{C}). Следовательно,

$$\iint_D [F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy = - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy,$$

откуда следует, что необходимое условие экстремума

$$\iint_D (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = 0$$

имеет вид:

$$\iint_D (F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\}) \delta z dx dy = 0.$$

Так как δz произвольна (на δz наложены лишь ограничения общего характера относительно непрерывности и дифференцируемости, $\delta z|_C = 0$ и т.д.), то по основной лемме Лагранжа на поверхности $z = z(x, y)$, реализующей экстремум,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \equiv 0.$$

Следовательно, $z(x, y)$ является решением уравнения:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0.$$

Это уравнение в частных производных второго порядка — *уравнение Остроградского* (1834).

ПРИМЕР 83.3. Рассмотрим функционал

$$v[z(x, y)] = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

у которого на границе Γ_{σ} области σ заданы значения функции z , так что $z = f(x, y)$ на Γ_{σ} .

Уравнение Остроградского для этого функционала имеет вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

или в краткой записи

$$\Delta z = 0,$$

т.е. является известным *уравнением Лапласа*, для которого надо найти непрерывное в области σ решение, принимающее заданные значения на границе. Это одна из основных задач математической физики, так называемая *задача Дирихле*.

ПРИМЕР 83.4. Рассмотрим функционал

$$v[z(x, y)] = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy,$$

у которого на Γ_{σ} функция z задана.

Уравнение Остроградского для этого функционала имеет вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y),$$

или в краткой записи

$$\Delta z = f(x, y)$$

Это уравнение, называемое *уравнением Пуассона*, также часто встречается в уравнениях математической физики; например, оно описывает стационарное распределение электрического поля, индуцированного зарядом с плотностью $f(x, y)$.

83.4. Приложения вариационного метода

Принцип наименьшего действия Гамильтона является основным вариационным принципом в механике: среди возможных, т.е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действительности осуществляется движение, дающее стационарное значение (т.е. такое, при котором вариация функционала равна нулю) интегралу:

$$\int_{t_0}^t (T - U) dt,$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергия системы. Применим этот принцип к нескольким задачам механики.

ПРИМЕР 83.5. Дана некоторая система материальных точек с массами m_i ($i = 1, \dots, n$) и координатами (x_i, y_i, z_i) на которую действуют силы F_i , обладающие силовой функцией (потенциалом), зависящей только от координат:

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

где F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} - проекции на координатные оси силы \vec{F}_i , действующей на материальную точку (x_i, y_i, z_i) . Нужно найти дифференциальное уравнение движения системы.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = 0.5 \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

а потенциальная энергия равна U .

Система уравнений Эйлера для интеграла $\int_{t_0}^t (T - U) dt$ имеет вид:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

или:

$$m_i \ddot{x}_i - F_{ix} = 0; \quad m_i \ddot{y}_i - F_{iy} = 0; \quad m_i \ddot{z}_i - F_{iz} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если движение материальных точек подчинено дополнительно некоторой системе независимых связей

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$m < 3n$, то с помощью уравнений связей можно исключить m переменных и получить $s = 3n - m$ независимых переменных (не считая времени t), называемых *обобщёнными координатами*:

$$q_1, q_2, \dots, q_s,$$

через которые (а также их производные и время t) выражаются T и U .

В этом случае $T - U$ называется функцией Лагранжа $L = L(q, \dot{q}, t)$, а соответствующий интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$$

называется действием по Лагранжу. На реальных движениях материальных точек он должен достигать минимума.

Принцип наименьшего действия формулируется так:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Тогда из уравнений Эйлера для S следуют уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

ПРИМЕР 83.6. *Дифференциальное уравнение свободных колебаний струны.*

Совместим один из концов струны с началом координат. В состоянии покоя струна под действием силы натяжения расположена вдоль некоторой прямой, по которой направим ось абсцисс. Отклонение струны от положения равновесия $u = u(x, t)$ является функцией абсциссы x и времени t .

Потенциальная энергия U некоторого элемента струны пропорциональна растяжению струны. С точностью до бесконечно малых высшего порядка участок струны dx в деформированном состоянии имеет длину

$$ds = \sqrt{1 + u_x'^2} dx,$$

тогда удлинение рассматриваемого элемента равно

$$(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1) dx.$$

По формуле Тейлора имеем $(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1) \approx \frac{1}{2} u_x'^2$. Считая u_x' малым и пренебрегая членами высшего порядка, найдем, что потенциальная энергия элемента равна

$$dU = \frac{1}{2} k u_x'^2 dx,$$

где k — некоторый размерный множитель, тогда потенциальная энергия всей струны равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k u_x'^2 dx.$$

Кинетическая энергия струны равна

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho u_t'^2 dx,$$

где ρ — плотность струны.

В данном случае интеграл $\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = v[u(x, t)]$ принимает вид

$$v[u(x, t)] = \int_0^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_x'^2 \right] dx dt.$$

Уравнение движения струны будет уравнением Остроградского для функционала $v[u(x, t)]$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t') - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x') = 0.$$

Если струна однородна, то есть $\rho = \text{const}$ и $k = \text{const}$, то для колебаний струны уравнение упрощается:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Если на струну действует ещё и внешняя сила $f(x, t)$, которая перпендикулярна струне в её положении равновесия и рассчитана на единицу массы, то эта сила имеет силовую функцию $\rho f(x, t) u dx$ и интеграл Гамильтона принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_x'^2 + \rho f(t, x) u \right] dx dt,$$

а уравнение вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t') - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x') - \rho f(x, t) = 0,$$

или, если струна однородна,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Аналогично можно получить уравнение колебаний мембраны.

Практическое занятие 83. Вариационные задачи, зависящие от нескольких функций, старших производных и функций многих переменных

ПРИМЕР 83.1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Р е ш е н и е: Система уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{aligned} y'' - z &= 0, \\ z'' - y &= 0. \end{aligned}$$

Исключая одну из неизвестных функций, например z , получим

$$y^{\text{IV}} - y = 0.$$

Проинтегрировав это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, будем иметь

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x; \\ z &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{aligned}$$

Из граничных условий найдем: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 1$, следовательно, экстремали имеют вид

$$y = \sin x, \quad z = -\sin x.$$

ПРИМЕР 83.2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z') dx.$$

Р е ш е н и е: Система уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} F_{y'y'} y'' + F_{y'z'} z'' = 0; \\ F_{y'z'} y'' + F_{z'z'} z'' = 0, \end{cases}$$

откуда при $F_{y'y'}F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$ получим $y'' = 0$ и $z'' = 0$, т.е. экстремали

$$\begin{cases} y = C_1x + C_2, \\ z = C_3x + C_4, \end{cases}$$

образуют семейство прямых в пространстве.

ПРИМЕР 83.3. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (1 + y''^2) dx,$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

Решение: Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид $\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$ или $y^{IV} = 0$; его общее решение есть

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Из граничных условий найдем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0,$$

поэтому экстремум может достигаться на прямой $y = x$.

ПРИМЕР 83.4. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2) dx,$$

удовлетворяющую условиям

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Решение: Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид $y^{IV} - y = 0$. Его общее решение

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Используя граничные условия, получим

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0,$$

поэтому экстремум может достигаться лишь на косинусоиде $y = \cos x$.

ПРИМЕР 83.5. Задача о поверхности минимальной площади, натянутой на контур Γ , сводится к исследованию на минимум функционала (часть II, лекция 54, формула 54.2):

$$S[z(x, y)] = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где σ — область на плоскости XY , ограниченная проекцией контура Γ на эту плоскость.

Р е ш е н и е: Уравнение Остроградского имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0,$$

то есть средняя кривизна в любой точке поверхности равна нулю.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 83.6. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y'^2 + x^2) dx.$$

ПРИМЕР 83.7. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = -\text{sh}1$.

ПРИМЕР 83.8. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - y'''^2) dx$$

с граничными условиями $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(-1) = -4,5$, $y'(0) = 0$, $y''(-1) = 16$, $y''(0) = 0$.

ПРИМЕР 83.9. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (2y'^2 + y''^2) dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = \operatorname{sh} 1$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = \operatorname{ch} 1$.

ПРИМЕР 83.10. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx.$$

ПРИМЕР 83.11. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2) dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $z(0) = 0$, $z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

ПРИМЕР 83.12. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{-1}^1 \left(2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3} \right) dx$$

с граничными условиями $y(1) = 0$, $y(-1) = 2$, $z(1) = 1$, $z(-1) = -1$.

ПРИМЕР 83.13. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y) dx$$

с граничными условиями $y(0) = 1$, $y(1) = 1,5$, $z(0) = 0$, $z(1) = 1$.

ПРИМЕР 83.14. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

ПРИМЕР 83.15. Написать уравнение Остроградского для функциионала

$$v[u(x, y, z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

Лекция 84. Вариационные задачи с подвижными границами

Простейшая задача с подвижными границами. Задачи с подвижными границами для функционалов, зависящих от двух функций.

84.1. Простейшая задача с подвижными границами

Ранее при исследовании функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (84.1)$$

предполагалось, что граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) заданы. Допустим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется, поэтому, если на какой-либо кривой $y = y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными точками, то он тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых. Следовательно, должно быть выполнено основное необходимое условие — уравнение Эйлера для функционала (84.1):

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

т.е. кривые, на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными граничными условиями, должны быть экстремалиями.

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольных постоянных, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными точками это были условия $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$. Ныне они отсутствуют, и недостающие условия должны быть получены из основного необходимого условия экстремума $\delta v = 0$. Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, то далее можно

рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал $v[y(x, C_1, C_2)]$ превращается в функцию параметров C_1 и C_2 и пределов интегрирования x_0 и x_1 , а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции.

Для простоты будем считать, что одна из граничных точек, например (x_0, y_0) , закреплена, а другая (x_1, y_1) может перемещаться и переходит в точку $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$, или, как принято в вариационном исчислении, в точку $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$.

Допустимые кривые $y = y(x)$ и $y = y(x) + \delta y$ считаются близкими, если малы модули вариаций δy и $\delta y'$, и модули приращений δx_1 и δy_1 (приращения δx_1 и δy_1 обычно называют вариациями предельных значений x_1 и y_1).

Экстремали, проходящие через точку (x_0, y_0) , образуют пучок экстремалей $y = y(x, C_1)$. Функционал $v[y(x, C_1)]$ на кривых этого пучка превращается в функцию C_1 и x . Если кривые пучка $y = y(x, C_1)$ в окрестности рассматриваемой экстремали не пересекаются, то $v[y(x, C_1)]$ можно рассматривать как однозначную функцию x_1 и y_1 , так как задание x_1 и y_1 определяет экстремаль пучка (рис. 77) и тем самым определяет значение функционала.

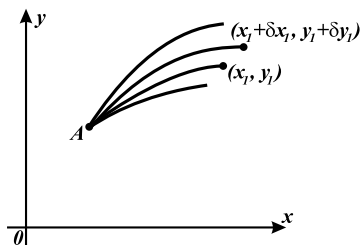


Рис. 77. Пучок экстремалей

Вычислим вариацию функционала $v[y(x, C_1)]$ на экстремальных пучка $y = y(x, C_1)$ при перемещении граничной точки из (x_1, y_1) в положение $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Так как функционал v на кривых пучка превращается в функцию x_1 и y_1 , то его вариация совпадает с дифференциалом этой функции. Выделим из приращения Δv главную

линейную по отношению к δx_1 и δy_1 часть:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx + \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx. \end{aligned} \quad (84.2)$$

Первое слагаемое в (84.2) преобразуем по теореме о среднем значении (часть II, лекция 47, свойство 7):

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} \delta x_1, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как функция F непрерывна, то

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $\delta x_1 \rightarrow 0$ и $\delta y_1 \rightarrow 0$.

Таким образом, для первого слагаемого в (84.2) получим

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = F(x, y, y')|_{x=x_1} \delta x_1 + \varepsilon_1 \delta x_1.$$

Второе слагаемое в (84.2) преобразуем с помощью формулы Тейлора (часть I, лекция 19):

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y'] dx + R_1, \end{aligned}$$

где R_1 - бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с δy и $\delta y'$. Линейную часть преобразуем, интегрируя по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Так как значения функционала берутся на экстремалиях, то уравнение Эйлера выполнено тождественно

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0.$$

Так как точка (x_0, y_0) закреплена, $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Итак:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = [F_{y'} \delta y]|_{x=x_1}.$$

Заметим, что $\delta y|_{x=x_1}$ не равно δy_1 — приращению y_1 , так как δy_1 — это приращение y_1 при перемещении граничной точки в положении $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$, а $\delta y|_{x=x_1}$ — это приращение ординаты в точке x_1 при переходе от экстремали, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , к экстремали, проходящей через точки (x_0, y_0) и $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ (рис. 78).

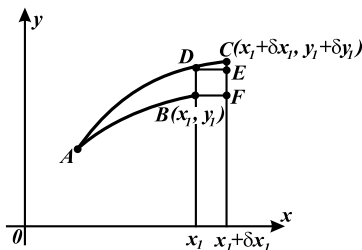


Рис. 78. Вариация и приращение в граничной точке

Из рис. 78 видно, что $BD = \delta y|_{x=x_1}$, $FC = \delta y_1$, и при этом

$$EC \approx y'(x_1) \delta x_1, \quad BD = FC - EC,$$

следовательно,

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1$$

(это равенство верно до бесконечно малых высшего порядка малости).

Итак, подведем итоги:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F dx \approx F|_{x=x_1} \delta x_1;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y')] dx \approx F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1),$$

где приближённые равенства справедливы с точностью до членов, порядок которых выше первого относительно δx_1 и δy_1 . Таким образом, из (84.2) получаем:

$$\delta v = F|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1) = (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1,$$

или

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} dx_1 + F_{y'}|_{x=x_1} dy_1.$$

Здесь $\bar{v}(x_1, y_1)$ — функция, в которую превратился функционал v на экстремальных $y = y(x_1, C_1)$, а $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ — приращения в граничной точке. Таким образом, необходимое условие экстремума $\delta v = 0$ имеет вид:

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 = 0. \quad (84.3)$$

Если вариации δx_1 и δy_1 независимы, то

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0. \quad (84.4)$$

Рассмотрим случай, когда вариации δx_1 и δy_1 зависимы. Пусть, например, правая граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по некоторой кривой $y_1 = \varphi(x_1)$, тогда $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1) \delta x_1$, а значит условие (84.3) принимает вид:

$$[F - y' F_{y'} + F_{y'} \varphi']|_{x_1} \delta x_1 = 0,$$

а так как δx_1 произвольно, то

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}]|_{x=x_1} = 0. \quad (84.5)$$

Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами φ' и y' в граничной точке. Оно называется *условием трансверсальности*. Условие трансверсальности вместе с условием $y_1 = \varphi(x_1)$ позволяют, вообще говоря, определить одну или несколько экстремалей пучка $y = y(x, C_1)$, на которых может достигаться экстремум.

Если граничная точка (x_0, y_0) может перемещаться по некоторой кривой $y_0 = \psi(x_0)$, то аналогично для точки (x_0, y_0) можно получить условие трансверсальности

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 84.1. Если (x_1, y_1) может перемещаться лишь по вертикали, то $\delta x_1 = 0$ и условие (84.3) переходит в условие $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 84.2. Если граничная точка (x_1, y_1) в задаче об экстремуме функционала (84.1) может перемещаться лишь по горизонтальной прямой $y = y_1$, то $\delta y_1 = 0$ и условие трансверсальности (84.3) принимает вид

$$[F - y'F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

84.2. Задачи с подвижными границами для функционалов, зависящих от двух функций

Если при исследовании на экстремум функционалов

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx \quad (84.6)$$

одна из граничных точек закреплена, а другая неподвижна (или обе подвижны), то экстремум может достигаться лишь на интегральных кривых системы уравнений Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0; \quad F'_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0,$$

так как если экстремум достигается на некоторой кривой C с подвижными границами, то среди них также находятся кривые, у которых границы фиксированы (т.е. класс кривых с границами вложен в класс кривых с подвижными границами). Следовательно, на C должны удовлетворяться необходимые условия экстремума с неподвижными границами.

Общее решение системы уравнений Эйлера содержит четыре произвольные постоянные. Если точка $A(x_0, y_0, z_0)$ неподвижна, можно,

вообще говоря, исключить две произвольные постоянные, а для определения двух других нужно иметь ещё два уравнения, которые должны быть получены из условия $\delta v = 0$, причём при вычислении вариации мы будем рассматривать функционал лишь на решениях системы уравнений Эйлера. Тогда функционал v превращается в функцию $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ координат точки $B(x_1, y_1, z_1)$, и вариация превращается в дифференциал этой функции.

Вариация функционала v может быть вычислена аналогично предыдущему. Для этого запишем приращение Δv в виде

$$\begin{aligned} \Delta v = & \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \\ & - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx = \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - F(x, y, z, y', z')] dx. \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем к первому интегралу, а во втором выделим главную линейную часть по формуле Тейлора. После преобразований, аналогичных тем, что проведены выше, получим

$$\delta v = [F - y'F_{y'} - z'F_{z'}] \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0.$$

Если вариации δx_1 , δy_1 , δz_1 независимы, то из условия $\delta v = 0$ следует:

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}] \Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_{z'} \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (84.7)$$

Если граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по некоторой кривой $y_1 = \varphi(x_1)$, $z_1 = \psi(x_1)$, то $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1$ и $\delta z_1 = \psi'(x_1)\delta x_1$ и условие (84.7) переходит в условие

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 = 0,$$

и в силу произвольности δx_1 получим

$$F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'} = 0. \quad (84.8)$$

Это так называемое *условие трансверсальности* в вариационной задаче для функционала (84.6). Условие (84.8) вместе с уравнениями $y_1 = \varphi(x_1)$ и $z_1 = \psi(x_1)$ дают недостающие уравнения для определения

координат точки $B(x_1, y_1, z_1)$ и, следовательно, двух произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по поверхности

$z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, то $\delta z_1 = \varphi'_{x_1} \delta x_1 + \varphi'_{y_1} \delta y_1$, где δx_1 и δy_1 произвольны. Условие $\delta v = 0$ (см. (84.7)) даёт

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'} + \varphi'_x F_{z'}] \delta x_1 + [F_{y'} + F_{z'} \varphi'_y] \delta y_1 = 0.$$

Так как вариации δx_1 и δy_1 независимы, то

$$F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0, \quad [F_{y'} + F_{z'} \varphi'_y]_{x=x_1} = 0.$$

Эти два условия вместе с уравнением поверхности $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, вообще говоря, дают возможность определить две произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Аналогичные условия могут быть получены в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, если она подвижна.

Применяя всю эту технику к функционалу

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx,$$

для подвижной точки $B(x_1, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1})$ получим следующие условия:

$$\left(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} = 0. \quad (84.9)$$

Практическое занятие 84. Вариационные задачи с подвижными границами

ПРИМЕР 84.1. Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Решение: В данном случае условие трансверсальности $F + F_{y'}(\varphi' - y') = 0$ имеет вид:

$$A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} (\varphi' - y') = 0 \Rightarrow \frac{A(x, y) (1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0;$$

предполагая, что $A(x, y) \neq 0$ в граничной точке, получим $1 + y'\varphi' = 0$ или $y' = -\frac{1}{\varphi'}$, т.е. условие трансверсальности свелось к условию ортогональности кривой $y = \varphi(x_1)$ и экстремали.

ПРИМЕР 84.2. Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

при наличии граничных условий $y(0) = 0, y_1 = x_1 - 5$.

Решение: Проинтегрируем уравнение Эйлера

$$-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0.$$

Получим

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2} + \frac{-y'^2}{y^2\sqrt{1+y'^2}} + \frac{1}{y} \frac{\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{(\sqrt{1+y'})^2} y'' = 0;$$

$$\frac{1}{y^2\sqrt{1+y'^2}} + \frac{1}{y} \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

$$(1+y'^2) + yy'' = 0, \quad y' = p(y), \quad y'' = p \frac{dp}{dy};$$

$$1 + p^2 + yp \frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{pdp}{1+p^2} = -\frac{dy}{y};$$

$$\ln(1+p^2) = -2\ln y + C_1^2, \quad 1+p^2 = \frac{C_1^2}{y^2}, \quad p = \frac{\sqrt{C_1^2 - y^2}}{y};$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx, \quad \sqrt{C_1^2 - y^2} = -x + C_2.$$

Таким образом, интегральными кривыми уравнения Эйлера являются окружности

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

Из первого граничного условия $y(0) = 0$ следует $C_1 = C_2$. Условие трансверсальности сводится к условию ортогональности, поэтому прямая $y_1 = x_1 - 5$ должна быть диаметром окружности, следовательно,

центр окружности должен находиться в точке $(0, 5)$, откуда получаем уравнение кривой, на которой может достигаться экстремум:

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25.$$

ПРИМЕР 84.3. *Рассмотреть ситуацию, когда в задаче о брахистохроне левая граничная точка закреплена, а правая может перемещаться вертикально.*

Р е ш е н и е: Экстремалами функционала

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

являются циклоиды, у которых $y(0) = 0$. Поэтому их уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = C_1(t - \sin t), \\ y = C_1(1 - \cos t). \end{cases}$$

Для определения C_1 используем условие $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$, из которого получим

$$\left. \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \right|_{x=x_1} = 0,$$

следовательно, $y'(x_1) = 0$, т.е. искомая циклоида должна пересекать прямую $x = x_1$ под прямым углом и, значит, точка $x = x_1, y = y_1$ является вершиной циклоиды. Вершине соответствует значение $t = \pi$, поэтому $x_1 = C_1\pi$ и, значит, $C_1 = \frac{x_1}{\pi}$. Таким образом, экстремум может быть достигнут только на циклоиде

$$\begin{cases} x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin t), \\ y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos t). \end{cases}$$

ПРИМЕР 84.4. *Найти условия трансверсальности для функционала*

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

если $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$.

Р е ш е н и е: Условия трансверсальности

$$[F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad [F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1} = 0$$

имеют вид: $1 + \varphi'_x z' = 0$ и $y' + \varphi'_y z' = 0$ при $x = x_1$, что равносильно

$$\frac{1}{\varphi'_x} = \frac{y'}{\varphi'_y} = \frac{z'}{-1} \quad \text{при} \quad x = x_1,$$

т.е. являются условиями параллельности вектора касательной к искомой экстремали в точке (x_1, y_1, z_1) и вектора нормали к поверхности $z = \varphi(x, y)$ в той же точке. Следовательно, условие трансверсальности становится условием ортогональности экстремали к поверхности $z = \varphi(x, y)$.

ПРИМЕР 84.5. Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$.

Р е ш е н и е: Для решения задачи необходимо найти экстремум интеграла $l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$ при условии, что координаты граничных точек (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) удовлетворяют уравнениям $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ и $z_1 = \psi(x_0, y_0)$, соответственно.

Так как подынтегральная функция зависит только от y' и z' , то экстремальными являются прямые линии. Данный функционал есть частный случай функционала из предыдущего примера, следовательно, условие трансверсальности переходит в условие ортогональности и поэтому экстремум может достигаться лишь на прямых, ортогональных одновременно поверхности $z = \varphi(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) и поверхности $z = \psi(x, y)$ в точке (x_1, y_1, z_1) .

ПРИМЕР 84.6. Исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx,$$

причём $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, а точка (x_1, y_1, z_1) принадлежит плоскости $x = x_1$.

Р е ш е н и е: Система уравнений Эйлера имеет вид:
$$\begin{cases} z'' - y = 0, \\ y'' - z = 0, \end{cases}$$
 откуда $y^{IV} - y = 0$.

Интегрируя эти уравнения, получаем экстремали

$$\begin{cases} y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{cases}$$

Из граничных условий $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ находим $C_1 + C_3 = 0$ и $C_1 - C_3 = 0$, следовательно, $C_1 = C_3 = 0$. Условие в подвижной граничной точке

$$(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \delta z_1 = 0$$

переходит в условия

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad F_{z'}|_{x=x_1} = 0,$$

так как $\delta x_1 = 0$, а δy_1 и δz_1 произвольны.

В рассматриваемом примере $F_{y'} = 2y'$ и $F_{z'} = 2z'$, следовательно,

$$y'(x_1) = 0 \quad \text{и} \quad z'(x_1) = 0$$

или

$$\begin{cases} C_2 \operatorname{ch} x_1 + C_4 \cos x_1 = 0, \\ C_2 \operatorname{ch} x_1 - C_4 \cos x_1 = 0. \end{cases}$$

Если $\cos x_1 \neq 0$, то $C_2 = C_4 = 0$ и экстремум — прямая $y = 0$; $z = 0$. Если же $\cos x_1 = 0$, т.е. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $C_2 = 0$, C_4 — произвольная постоянная,

$$y = C_4 \sin x, \quad z = -C_4 \sin x.$$

Можно проверить, что в этом случае при любом C_4 функционал $v = 0$.

Самостоятельная работа

ПРИМЕР 84.7. Написать условие трансверсальности для функциионала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) e^{\arctg y'} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad A(x, y) \neq 0.$$

ПРИМЕР 84.8. Пользуясь основным необходимым условием экстремума $\delta v = 0$, найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0; \quad y(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ не задано.}$$

Ответы

60.11 а) да; б) да; в) да; г) да; е) да; ж) нет.

60.13 а) $y^3 = \frac{C}{\cos 3x}$, б) $(1 - \sqrt{1 - x^2}) \cdot (1 - \sqrt{1 - y^2}) = Cxy$,

в) $\frac{y^2}{2} = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C$, г) $e^{3y} = \frac{\ln^5 x}{5} + C$. **60.14** $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1 + e^x)$.

60.15 а) $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$, б) $2\sqrt{\frac{3y}{x} + 4} = \ln |Cx|$, в) $\cos \frac{2y}{x} = Cx$,

г) $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$. **60.16** $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$. **60.17** $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$.

60.18 $y = x^3 \left(\frac{\sin 2x}{2} x^4 + C \right)$. **60.19** $y = \frac{(x+1)^4 - (x+1)^2}{2}$. **60.20** $y = \frac{x}{\cos x}$.

60.21 $y = \frac{1}{x^2 + Cx}$. **60.22** $y^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$.

61.9 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + xy + 2x + 4y = C$. **61.10** $2y^2 \ln x + \frac{3y}{x} = C$.

61.11 $\frac{1}{2}x^2 + x \sin y - \cos y = C$. **61.12** $2x^3 + 2x^2y^3 - y^4 = C$.

61.13 $\ln |x| - \frac{y^2}{x} = C$. **61.14** $x^2y - \frac{3x^5}{5} = C$. **61.15** $y = -\sin x + C_1x + C_2$.

61.16 $y = \frac{8}{3}(x+9)^{3/2} + C_1x + C_2$. **61.17** $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$.

61.18 $y = \frac{8}{9}\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos x + x - \frac{7}{9}$. **61.19** $y = C_1 + C_2 \ln |x|$.

61.20 $y = C_1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin 6x \right) + C_2$. **61.21** $y = C_1(e^x + 2x) + C_2$.

61.22 $y = e^x(x-1)$. **61.23** $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. **61.24** $\ln |y+1| = C_1x + C_2$.

61.25 $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} = C_1x + C_2$. **61.26** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$.

62.7 Да. **62.8** Нет. **62.9** $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. **62.10** $y = e^{-x}$.

62.11 $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$. **62.12** $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$. **62.13** $y = e^x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$. **62.14** $y = \sin 2x$. **62.15** $y = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$.

63.3 $y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. **63.4** $y = x^3 + C_1 + C_2x^2$.

63.5 $y = (C_1 + \ln |\sin x|) \sin x + (C_2 - x) \cos x$. **63.6** $y = -\frac{1}{x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

63.7 $y = \frac{1}{4} \sin 2x \ln(\operatorname{tg} 2x) + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

64.6 $y = \frac{5}{2}x^2 - 2x + C_1 + C_2e^{-x}$. **64.7** $y = \frac{x}{8}(x + \frac{7}{2})e^{3x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

64.8 $y = \frac{2}{5}(3 \sin 2x + \cos 2x) + C_1e^x + C_2e^{-2x}$. **64.9** $y = \frac{1}{4}e^x + (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}$. **64.10** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x$.

64.11 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$. **64.12** $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36} \right) e^{-x}$. **64.13** $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 0,25e^{2x} + 0,1 \cos 2x + 0,05 \sin 2x$.

65.8 $y = \frac{x^4}{48} + \frac{x^2}{8} + \frac{\cos 2x}{32}$. **65.9** $y = x^4 + x^3 + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$.

65.10 $y = C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos x \sqrt{3} + C_3 \sin x \sqrt{3})$. **65.11** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **65.12** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$.

65.13 $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. **65.14** $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 e^{-x}$.

65.15 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. **65.16** $y = -\frac{1}{6} \sin 2x + C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. **65.17** $y = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2 + C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x$. **65.18** $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 + e^x (\frac{3}{2} x - \frac{15}{4}) + C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

66.5 Температура тела $x(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-t/10}$; $x(t) = 25$ при $t = 40$ мин.

66.6 Скорость $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan \sqrt{kg}(C - t)$, $g = 10$, $k = 0.012$,

$C = \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctg \sqrt{\frac{k}{g}} v(0) \approx 1.75$; $v(t) = 0$ при $t = C \approx 1.75$ сек; наиболь-

шая высота $h = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{k}{g} v^2(0) + 1 \right) \approx 16.3$ м (без учёта сопротивления воздуха $t = 2$ сек, $h = 20$ м).

66.7 $(2R - h(t))^{3/2} = 0.45 \pi r^2 \sqrt{2g} \frac{t}{H}$, $h(t) = 0$ при $t = \frac{2RH}{0.45 \pi r^2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx$

≈ 1040 сек. **6.** $H^{5/2} - [h(t)]^{5/2} = \frac{3d^2 H^2 t}{8R^2} \sqrt{2g}$; $h(t) = 0$ при

$t = (4R^2/3d^2) \sqrt{2H/g} \approx 27$ сек. **66.8** $Q(h) = C e^{-kh}$, $Q(4) = Q_0 (\frac{3}{4})^4 \simeq$

$\simeq 0,316 Q_0$. **66.9** Скорость $v(r) = \frac{p\rho}{2\mu} (R^2 - r^2)$. **66.10** $y = Cx^2$.

66.11 $a \ln(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C$. **66.12** $y = C(x^2 + y^2)$.

66.13 $x^2 + y^2 = Cx$.

67.7 $\begin{cases} x = e^{2x} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{2x} ((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$

67.8 $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1. \end{cases}$

67.9 $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$

67.10 $\begin{cases} x = \frac{C_2(t + C_1)}{C_1 + 1}, \\ y = \frac{t + C_1}{C_2 + 1}. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 67.11 \quad & \begin{cases} x = C_2 e^t + C_1, \\ y = -C_1^2 + (2C_1 C_2 t + C_3) e^t + C_2^2 e^{2t}, \\ z = -C_2 e^t + (2C_1 C_2 t + C_3) e^t + C_2^2 e^{2t} - C_1^2. \end{cases} \\
 67.12 \quad & \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}. \end{cases} \quad 67.13 \quad \begin{cases} x = e^{2t}(C_1 + C_2 t), \\ y = -e^{2t}(C_1 + C_2 + C_2 t). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$67.14 \quad \begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = \frac{(C_1 - C_2)}{2} \cos t + \frac{(C_1 + C_2)}{2} \sin t. \end{cases}$$

$$67.15 \quad \begin{cases} x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases} \quad 67.16 \quad \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}. \end{cases}$$

69.1 Да. 69.2 Да. 69.3 Да. 69.4 Да. 69.5 Да. 69.6 Нет. 69.7 Нет. 69.8 Нет. 69.9 $u = \frac{x^3}{2y} + C_1(y)x + C_2(y)$. 69.10 $\frac{x^2 y}{2} + C_1(x) + x C_2(y) + C_3(y)$.

69.11 $\frac{x^2}{2y} + x + C_1(y)$. 69.12 $u = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} y + C_1(x) + C_2(y)$.

69.13 $u = \frac{x}{2} \ln(1 + y^2) + C_1(x) + C_2(y)$. 69.14 $z = \frac{y^2}{2} \arcsin x + C_1(x) + C_2(y)$. 69.15 $V = \frac{z^2}{2y} + C_1(x, y) + C_2(y, z) + C_3(y, z)$.

70.1 $z = y f\left(\frac{x}{y}\right)$. 70.2 $u = \frac{1}{y} f(xy)$. 70.3 $u = e^x f\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right)$.

70.4 $F\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x+y}; \frac{1}{y} + \frac{1}{x-y}\right)$. 70.5 $u = e^x f\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \exp(\operatorname{arctg} \frac{y}{x})\right)$.

70.6 $u = f\left(\sqrt{1 + y^2/x^2} \exp(-\operatorname{arctg} \frac{y}{x})\right)$. 70.7 $z = 2xy$.

70.8 $z = x^2 y^2 (xy - x + y)^{-2}$. 70.9 $z = x^2 - x + \frac{y^2}{2}$. 70.10 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$. 70.11 $\frac{y}{x} = \ln x - z^2$. 70.12 1) $x + y + z = 0$; 2) $x - y - z = 2$. 70.13 $u = x^2 + t e^x - e^{2x}$. 70.14 $u = \frac{t}{2} + \frac{t}{x} + \ln x$.

72.1 Эллиптического. $y - x + 2i = c_1$; $y - x - 2i = c_2$; $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$.

72.2 Параболического. $y + 2x = C$. $u''_{\eta\eta} = (u'_\xi + u'_\eta)/4$. 72.3 Гиперболического. $y + 2x = C_1$, $y + 6x = C_2$. $u''_{\xi\eta} = -(u'_\xi + 13u'_\eta)/16$.

72.4 При $xy \neq 0$ гиперболического. $\frac{y}{x} = C_1$; $xy = C_2$. 72.5 При $xy \neq 0$ эллиптического. $y^2 + ix^2 = C_1$, $y^2 - ix^2 = C_2$. 72.6 При $xy \neq 0$ параболического. $xy = C$. 72.7 При $xy > 0$ гиперболического. $\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} = C_1$, $\sqrt{|y|} + \sqrt{|x|} = C_2$. При $xy < 0$ эллиптического. $\sqrt{|y|} - i\sqrt{|x|} = C_1$, $\sqrt{|y|} + i\sqrt{|x|} = C_2$. При $xy = 0$ параболического. 72.8 При $xy < 0$ гиперболического. $\sqrt{y} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C_1$, $\sqrt{y} = -\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C_2$. При $xy > 0$ эллиптического. $\sqrt{y} = i\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C_1$, $\sqrt{y} = -i\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C_2$. 72.9 При

$x < 0$ гиперболического. $y = \frac{2}{3}\sqrt{-x} + C_1, y = -\frac{2}{3}\sqrt{-x} + C_2$. При $x > 0$ эллиптического. $y = i\frac{2}{3}\sqrt{x} + C_1, y = -i\frac{2}{3}\sqrt{x} + C_2$. При $x = 0$ параболического. **72.10** При $xy \neq 0$ гиперболического. $xy = C_1, ye^{-3x} = C_2$. При $xy = 0$ параболического.

$$\mathbf{74.1} \quad u(t, x) = (l/\pi) \sum_{m=1}^{+\infty} ((1/m) \exp(-(2m\pi/l)^2 t) \sin(2m\pi x/l)).$$

$$\mathbf{74.2} \quad \frac{800}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2k+1)^2} \exp\left(-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 a^2 t\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right) \right).$$

$$\mathbf{74.3} \quad u(x, t) = 15l^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} ((-1)^m \frac{1}{2m+1} \exp(-\lambda_m^2 a^2 t) \cos(\lambda_m x)), \text{ где}$$

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{l}. \quad \mathbf{77.1} \quad u(x, t) = x^2 + t^2. \quad \mathbf{77.2} \quad u(x, t) = xt. \quad \mathbf{77.3} \quad u(x, t) =$$

$$= \sin 2x \cos 2at + \frac{1}{2a} (e^{x+at} - e^{x-at}), \text{ при } 0 < t \leq \frac{x}{6a}; u(x, t) =$$

$$= \sin 2at \cos 2x + \frac{1}{2a} (e^{x+at} - e^{at-x}), \text{ при } t > \frac{x}{a}. \quad \mathbf{77.4} \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(x+at) -$$

$$- \operatorname{sh}(x-at)). \quad \mathbf{77.5} \quad u(x, t) = \frac{200 l^2}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sin(k\pi at/l) \sin(k\pi x/l) \right).$$

$$\mathbf{77.6} \quad \frac{32 l^2}{\pi^3 a} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right). \quad \mathbf{77.7} \quad u(x, t) = \cos \frac{\pi at}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

$$\mathbf{77.8} \quad u(x, t) = \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

81.8 Интеграл не зависит от пути интегрирования. Вариационная задача не имеет смысла. **81.9** В классе непрерывных функций экстремум не достигается. **81.10** Две экстремали $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ и $y = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$. **81.11** $y = -x^3$.

$$\mathbf{81.12} \quad y = \frac{\operatorname{sh}(2-x)}{\operatorname{sh} 1}. \quad \mathbf{81.13} \quad \text{Две экстремали } y = \frac{1 + (3 \pm 2\sqrt{2})(2x-1)^2}{4(\sqrt{2} \pm 1)}.$$

$$\mathbf{82.3} \quad y = \frac{1}{2}(e^{-x} + (1+e)x e^{-x} - 1). \quad \mathbf{82.4} \quad y = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^3.$$

$$\mathbf{82.5} \quad y = \ln x. \quad \mathbf{82.6} \quad y = C_1 \sin(4x - C_2). \text{ В другой форме } y = C_1 \cos 4x +$$

$$C_2 \sin 4x. \quad \mathbf{82.7} \quad y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2. \quad \mathbf{82.8} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$\mathbf{83.6} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

$$\mathbf{83.7} \quad y = (1-x)\operatorname{sh} x. \quad \mathbf{83.8} \quad y = \frac{x^3}{6}(x^3 + 6x + 1). \quad \mathbf{83.9} \quad y = \operatorname{sh} x. \quad \mathbf{83.10}$$

$$y = (C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x, z = 2y + y'', \text{ откуда } z \text{ легко находится после дифференцирования } y(x). \quad \mathbf{83.11} \quad y(x) = \sin 2x, z(x) =$$

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{32 + \pi^2}{8\pi} x. \quad \mathbf{83.12} \quad y(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 5x - 6), z(x) = x.$$

83.13 $y(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$, $z(x) = x$. **83.14** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

83.15 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$.

84.7 $\frac{\varphi' - y'}{1 + y'\varphi'} = 1$, т.е. экстремали должны пересекать кривую $y_1 = \varphi(x_1)$, по которой скользит граничная точка, под углом $\frac{\pi}{4}$.

84.8 $y = \frac{x^5}{120} + \frac{1}{24}(x^2 - x^3)$.

Предметный указатель

- Абсолютно гибкая, 351
Аппроксимация, 265
Банахово пространство, 447
Близость функций и кривых, 452
Вариация аргумента функционала, 452
Векторные линии, 242
Векторные трубки, 242
Верхняя грань, 263
Волновое уравнение, 350
Вынужденные колебания, 353
Гармоники, 384
Гармоническая функция, 312
Граничные (краевые) условия, 58
Граничные условия, 248, 305
Дискриминантная кривая, 54
Дифференциальная задача, 240
Дифференциальные уравнения
 второго порядка, 56
Дифференциальные уравнения
 высших порядков, 115
Дифференциальные уравнения
 первого порядка, 12
Дополнительные условия, 248
Евклидова норма, 446
Задача Дирихле, 306, 312
Задача Дирихле для круга, 406
Задача Коши, 14, 58, 117, 156, 245,
 248, 249, 305
Задача Неймана, 306
Задача колебания струны, 350
Закон Гаука, 351
Изоклина, 21
Интеграл Пуассона, 336
Интеграл Пуассона, 336
Интеграл Фурье, 333
Интеграл дифференциального
 уравнения, 13
Интеграл уравнения, 239
Интегральная кривая, 13, 57, 116
Интегральная линия системы, 156
Интегрирующий множитель, 48
Каноническая форма уравнений, 298
Квазилинейное уравнение, 238, 241
Конвективный теплообмен, 311
Корректная задача, 241
Коэффициенты Фурье, 313
Краевая задача, 58, 117
Краевые условия, 248
Крутильные колебания вала, 357
Левая конечная разность, 256
Левый неясный угол, 259
Линейная зависимость функций, 122
Линейная комбинация функций, 75
Линейно зависимые решения, 76
Линейно независимые решения, 76
Линейное дифференциальное
 уравнение высшего порядка, 121
Линейное неоднородное уравнение,
 30
Линейное однородное уравнение, 30
Линейное уравнение, 238
Линейные дифференциальные
 уравнения n -го порядка с
 постоянными коэффициентами,
 124

- Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, 73
- Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, 30
- Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, 83
- Линейный функционал, 455
- Малые колебания, 352
- Метод Фурье, 380
- Метод Даламбера, 361
- Метод Рунге-Кутты, 194
- Метод Фурье, 312, 323, 380
- Метод Эйлера, 190
- Метод вариации произвольной постоянной, 30
- Метод вариации произвольных постоянных, 93
- Метод интегрируемых комбинаций, 161
- Метод исключения неизвестных, 158
- Метод конечных разностей, 252
- Метод неопределённых коэффициентов, 100
- Метод непосредственного интегрирования, 239
- Метод подбора частного решения, 100
- Метод прогонки, 203, 343
- Метод сеток, 252
- Метрическое пространство, 447
- Начальные условия, 58, 116, 248, 305
- Невязка, 264
- Неоднородное линейное уравнение, 74
- Неоднородное уравнение, 121
- Неявная схема, 259, 342
- Нормированное линейное пространство, 447
- Обертон, 384
- Обратная волна, 361
- Общее решение, 116, 240
- Общее решение дифференциального уравнения, 14
- Общие интегралы, 296
- Общий интеграл, 57, 116, 243
- Общий интеграл дифференциального уравнения, 14
- Обыкновенная точка, 51
- Обыкновенное дифференциальное уравнение, 12
- Однородная плотность, 351
- Однородное линейное уравнение, 74
- Однородное уравнение, 121
- Однородные дифференциальные уравнения, 26
- Определитель Вронского, 77, 122
- Основная лемма вариационного исчисления, 462
- Основной тон, 384
- Особая интегральная кривая, 52
- Особая линия, 52
- Особая точка, 52
- Особое решение, 52
- Первые интегралы, 243
- Плоская задача Дирихле, 406
- Плоские поперечные колебания, 351
- Поле направлений, 17
- Полубесконечная струна, 363, 364
- Порядок аппроксимации, 265
- Порядок дифференциального уравнения, 12
- Порядок сходимости, 264
- Порядок уравнения, 238
- Правая конечная разность, 256
- Правый невязный уголок, 259
- Продольных колебаниях стержня, 354
- Произведение пространств, 448
- Прямая волна, 361
- Разностная задача, 253
- Разностная схема, 253
- Резонанс, 144
- Решение Даламбера, 361
- Решение дифференциального уравнения, 13

- Решение системы
 дифференциальных уравнений, 156
- Решение уравнения, 238
- Ряды Фурье, 313
- Свободные колебания стержня, 355
- Сетка, 252
- Сеточная функция, 253
- Системы дифференциальных уравнений, 155
- Слой, 253
- Смешанная задача, 248, 305
- Смешанная задача Коши, 249
- Собственная частота, 384
- Собственная частота колебаний, 141
- Собственное значение, 124
- Собственные колебания, 383
- Собственные функции, 324, 382
- Собственные числа, 324, 382
- Собственный вектор, 165
- Сравнение сеточных функций, 263
- Стационарные уравнения, 305
- Стоячие волны, 384
- Структура общего решения
 линейных неоднородных
 дифференциальных уравнений
 второго порядка, 91
- Сходимость решения, 264
- Теорема Вейерштрасса, 448
- Теорема Дирихле, 315
- Теорема Коши, 22, 58, 74, 158
- Теорема Лагранжа, 449
- Теорема о среднем значении, 449
- Теорема существования и
 единственности задачи Коши, 245
- Теорема существования и
 единственности решения, 22
- Узловые точки, 252
- Уравнение свободных колебаний, 140
- Уравнение Бернулли, 33
- Уравнение Лапласа, 305, 406
- Уравнение Лапласа в полярных
 координатах, 407
- Уравнение Эйлера, 463
- Уравнение в полных
 дифференциалах, 44
- Уравнение вынужденных колебаний, 140
- Уравнение гиперболического типа, 297
- Уравнение параболического типа, 297, 299
- Уравнение переноса, 250
- Уравнение свободных колебаний
 струны, 304
- Уравнение теплопроводности, 304, 307
- Уравнение эволюционного типа, 303
- Уравнение эллиптического типа, 297, 302
- Уравнения с разделяющимися
 переменными, 23
- Уравнения характеристик, 243, 296
- Уравнения эволюционного типа, 248
- Условие Дирихле, 315
- Условие Куранта, Фридрихса, Леви, 268
- Условие Неймана, 270, 271
- Устойчивость, 267
- Фаза, 384
- Формула Даламбера, 363
- Формула Тейлора, 450
- Фундаментальная
 последовательность, 447
- Фундаментальная система решений, 79, 123
- Функционал, 452
- Характеристики уравнений, 296
- Характеристическая система, 243
- Характеристическое уравнение, 84
- Центральная конечная разность, 256
- Частное решение, 116
- Частное решение
 дифференциального уравнения, 14
- Шаблон, 257
- Шаг сетки, 253
- Явная схема, 341

Список литературы

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Араманович Н.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
4. Берков Н.А. Применение пакета MathCad: *практикум*. — М.: МГИУ, 2006. — 132 с.
5. Берков Н.А. Применение пакета Maxima: *Практикум*. — М.: МГИУ, 2009. — 187 с.
6. Берков Н.А. Программирование на Visual Basic: Учебное пособие. — М.: МГИУ, 1999. — 132 с.
7. Н.А. Берков, А.И. Мартыненко, В.Б. Миносцев, Е.А.Пушкарь, О.Е. Шишанин, Курс высшей математики под ред. В.Б Миносцева. Часть III. М.: МГИУ, 2007.
8. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. — М.: МГУ, 1989.
9. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971.
10. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1977.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. — М.: Высшая школа, 1986. — 415 с.
12. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet. — М.: Нолидж, 1999. — 512 с.
13. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
14. Курс математики для технических высших учебных заведений: Учебное пособие. Часть I. Под ред. В.Б.Миносцева и Е.А.Пушкаря — М.: МГИУ, 2011.
15. Курс математики для технических высших учебных заведений: Учебное пособие. Часть II. Под ред. В.Б.Миносцева и Е.А.Пушкаря — М.: МГИУ, 2011.
16. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.
17. Плис А.И., Сливина Н.А. Matcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999. — 656 с.

18. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
19. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. М.: МГИУ, 2007.
20. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах. Учебно-методическое пособие. М.: МГИУ, 2007.
21. Сборник индивидуальных заданий по «Курсу математики для технических высших учебных заведений». Под ред. В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря. Часть I. М.: МГИУ, 2011.
22. Сборник индивидуальных заданий по «Курсу математики для технических высших учебных заведений». Под ред. В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря. Часть II. М.: МГИУ, 2011.
23. Сборник тестов по «Курсу математики для технических высших учебных заведений». Под ред. В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря. Часть II. М.: МГИУ, 2011.
24. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
25. А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
26. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Интеграл-Пресс, 1998.
27. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т. 2. — М.: Высшая школа, 1978.
28. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

*Николай Андреевич БЕРКОВ,
Виктор Георгиевич ЗУБКОВ,
Вениамин Борисович МИНОСЦЕВ,
Евгений Александрович ПУШКАРЬ*

**КУРС МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ЧАСТЬ 3**

**Дифференциальные уравнения.
Уравнения математической физики.
Теория оптимизации**

*Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря
Учебное пособие*

Издание второе, исправленное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 25.07.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 27,72. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru