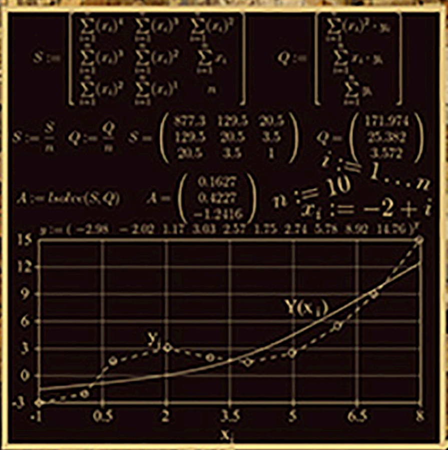
Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря

КУРС МАТЕМАТИКИ
для технических высших учебных заведений

- Теория вероятностей и математическая статистика



ЛАНЬ

Лауреат второго Всероссийского конкурса НМС по математике
Министерства образования и науки РФ «Лучшее учебное издание по математике
в номинации «Математика в технических вузах»

**Н. А. БЕРКОВ, А. И. МАРТЫНЕНКО,
Е. А. ПУШКАРЬ, О. Е. ШИШАНИН**

КУРС МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Часть 4
Теория вероятностей и математическая статистика

Под редакцией
В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря

Издание второе, исправленное

*ДОПУЩЕНО
НМС по математике Министерства образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по инженерно-техническим специальностям*

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2013 •

ББК 22.1я73
К 93

Берков Н. А., Мартыненко А. И., Пушкарь Е. А., Шишанин О. Е.

К 93 Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 304 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1561-8

Учебное пособие соответствует Государственному образовательному стандарту, включает в себя лекции и практические занятия. Четвертая часть пособия содержит 17 лекций и 17 практических занятий по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика».

Пособие предназначено для студентов технических, физико-математических и экономических направлений.

ББК 22.1я73

Рецензенты:

А. В. СЕТУХА — доктор физико-математических наук, профессор, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; *А. А. ПУНТУС* — профессор факультета прикладной математики и физики МАИ, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; *А. В. НАУМОВ* — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей МАИ; *А. Б. БУДАК* — доцент, зам. председателя отделения учебников и учебных пособий НМС по математике Министерства образования и науки РФ; *У. Г. ПИРУМОВ* — профессор, зав. кафедрой вычислительной математики и программирования МАИ (Технический университет), член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

Оглавление

Предисловие 6

Оглавление 8

ГЛАВА XIII. Теория вероятностей и математическая статистика 8

Лекция 85. Случайные события 8

Практическое занятие 85. Алгебра событий 16

Лекция 86. Классическая формула вероятности 21

Практическое занятие 86. Вычисление вероятностей 30

Лекция 87. Основные теоремы теории вероятностей 36

Практическое занятие 87. Теоремы сложения и умножения вероятностей 42

Лекция 88. Испытание Бернулли 48

Практическое занятие 88. Формулы полной вероятности и Бейеса 56

Лекция 89. Дискретные случайные величины 62

Практическое занятие 89. Формула Бернулли 72

Лекция 90. Непрерывные случайные величины 83

Практическое занятие 90. Дискретные случайные величины 93

Лекция 91. Виды распределений 101

Практическое занятие 91. Функция распределения и плотность случайных величин 110

Лекция 92. Нормальное распределение 117

Практическое занятие 92. Виды распределений 123

Лекция 93. Предельные теоремы теории вероятностей 129

Практическое занятие 93. Нормальное распределение 136

Лекция 94. Двумерные случайные величины 142

Практическое занятие 94. Контрольная работа 153

Лекция 95. Коэффициент корреляции 157

Практическое занятие 95. Двумерные случайные величины 167

Лекция 96. Основные понятия математической статистики 176

Практическое занятие 96. Коэффициент корреляции 195

Лекция 97. Регрессионный анализ 202

Практическое занятие 97. Точечные и интервальные оценки параметров распределения 219

Лекция 98. Проверка статистических гипотез 226

Практическое занятие 98. Метод наименьших квадратов 234

Лекция 99. Критерии согласия 238

Практическое занятие 99. Обработка простой статистической совокупности 249

Лекция 100. Дисперсионный анализ 255

Практическое занятие 100. Проверка статистических гипотез 262

Лекция 101. Случайные процессы 269

Практическое занятие 101. Дисперсионный анализ 287

ПРИЛОЖЕНИЯ 289

Ответы 299

Предметный указатель 301

Список литературы 303

Предисловие

Данное учебное пособие рассчитано на выпускников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и имеет целью познакомить их с основными понятиями и терминологией теории вероятностей и основными методами математической статистики. Как и в предыдущих изданиях [12], учебное пособие объединяет лекционный материал, примеры и задачи для практических занятий и лабораторных работ. Авторы считают, что наряду со студентами дневной (очной) формы обучения данное пособие с успехом может быть использовано студентами дистанционной (заочной) формы обучения.

Поскольку имеется достаточное количество известных и признанных учебников теории вероятности и математической статистики как советского периода, так и современных ([3]–[7], [10], [11], [14], [15], [17], [21], [22]), содержащих строгое, безупречное с точки зрения аксиоматики и обоснованности утверждений изложение материала, в данном курсе авторы постарались без излишних математических сложностей дать материал, позволяющий будущему инженеру технической специальности познакомиться с основными понятиями и иметь базу, в случае необходимости, углубить свои знания в этой области, используя вышеуказанные пособия.

Считаем, что выпускники технических высших учебных заведений должны уметь доводить решение до числа, а в сложных случаях это невозможно сделать без использования численных методов и пакетов прикладных программ. С этими вопросами студенты должны начать активно знакомиться уже в курсе математики. Решение сложных задач этих разделов данного курса входит в лабораторные работы, проводимые с использованием пакетов прикладных программ Excel, MathCad, а также для контингента, не имеющего соответствующих лицензий на пользование этими пакетами, в Maxima, находящемся в свободном доступе. Следует отметить, что для решения задач каждого раздела курса математики существуют свои специальные пакеты как свободного доступа, так и лицензионные, как отечественные, так и иностранные. В целях единообразия были выбраны вышеупомянутые пакеты (см. предисловие к [13]).

Кроме изучения материала лекций, решения примеров на практических занятиях, студентам необходимо выполнить индивидуальные задания, выпущенные отдельными сборниками [19]. В последние годы во многих учебных заведениях, в том числе и МГИУ, проверка знаний студентов проводится в компьютерных классах с помощью тестов. Поэтому мы сочли целесообразным в виде отдельного тома [20] включить материал по подготовке к тестам с разбором решения задач, входящих в тест, примеры тестов и задачи для самостоятельного решения.

В.Б.Миносцев, Е.А.Пушкарь

ГЛАВА XIII

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 85. Случайные события

Предмет теории вероятностей. Случайные события. Операции над ними. Относительная частота и её свойства. Статистическое определение вероятности.

85.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей является разделом математики, изучающим закономерности в случайных явлениях. Раздел теории вероятностей — математическая статистика, занимается оценкой характеристик этих закономерностей на основании наблюдений.

Рассмотрим пример. Очевидно, что при однократном бросании монеты невозможно точно предсказать, как она упадёт — орлом или решкой на верхней стороне. Однако было давно отмечено, что если много раз бросать симметричную монету, орел должен выпадать в 50% случаев, причём, чем больше число опытов, тем ближе (в определённом смысле) реальный результат к предсказанному.

Подобные «статистические» закономерности наблюдаются всегда, когда имеют дело с большим количеством однородных случайных явлений. Проявляющиеся при этом закономерности оказываются независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, которые как бы взаимно погашаются и усреднённый результат оказывается практически не случайным. Эта подтверждённая опытом устойчивость массовых случайных явлений служит основой для применения вероятностных методов исследования. Методы теории вероятностей предназначены для предсказания среднего, суммарного результата случайных явлений и не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, который остаётся неопределённым, случайным.

Цель применения вероятностных методов состоит в том, чтобы, не изучая отдельное случайное явление, что сложно и иногда невозможно, установить законы, проявляющиеся в массе этих явлений. Так, в примере с бросанием монеты вместо описания траектории движения отдельной монеты средствами механики, что очень сложно или практически невозможно, изучают долю случаев, в которых выпадает орёл.

Начало систематического исследования задач, относящихся к случайным явлениям, приходится на середину XVII века, хотя отдельные задачи рассматривались и раньше. Теория вероятностей зарождалась на задачах из области азартных игр, представляющих собой хорошую модель случайных явлений. Известна задача Шевалье де Мере, поставленная им перед знаменитым французским учёным Б. Паскалем (1623 — 1662). В современной постановке эта задача звучит так: сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы вероятность того, что пара шестерок появится хотя бы один раз, превысила бы 0,5? Б. Паскаль в 1654 году завязал по этому поводу переписку с известным итальянским математиком П. Ферма (1601 — 1665) и они вдвоём установили некоторые из основных положений теории вероятностей. В дальнейшем в развитии теории вероятностей принимали участие такие знаменитые зарубежные учёные, как К. Гюйгенс (1629 — 1695), Я. Бернулли (1654 — 1705), А. Муавр (1667 — 1754), П. Лаплас (1749 — 1827), К. Гаусс (1777 — 1855), С. Пуассон (1781 — 1840), а также российские математики П.Л. Чебышев (1821 — 1894), А.А. Марков (1856 — 1922), А.М. Ляпунов (1857 — 1918), А.Н. Колмогоров (1903 — 1987), А.Я. Хинчин (1894 — 1959), Н.В. Смирнов (1900 — 1966), В.С. Пугачев (1911 — 1998) и др.

В XX веке методы теории вероятностей стали широко использоваться в физике (квантовая механика), военном деле и технике (теория информации, теория массового обслуживания, теория надежности и проч.)

85.2. Случайные события. Операции над ними

Схема строго аксиоматического изложения основ теории вероятностей приведена, например, в [11], [14], [17], [21] и в приложении 6 к данному Курсу. Приводимые ниже основные понятия и определения теории вероятностей не претендуют на математическую строгость и имеют целью дать студентам нематематических специальностей и направлений возможно более простое и интуитивно понятное изложение вероятностного подхода. Мы будем рассматривать события (явления), которые могут многократно наблюдаться (или не наблюдаться) при осуществлении одних и тех же условий (испытание, опыт). Для сравнения случайных событий между собой следует предположить, что опыт можно повторять сколь угодно много раз, т.е. речь идет о многократно воспроизводимых массовых, однородных случайных событиях.. При этом относительная частота события (отношение числа его появлений к числу произведённых опытов), как показывают многочисленные эксперименты, обладает свойством устойчивости – при большом числе опытов её значение колеблется около некоторого постоянного числа. Будем обозначать случайные события большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$ Всякое осуществление комплекса условий, при которых изучается случайное событие, как было сказано, называется испытанием или опытом. Рассмотрим некоторые типичные для теории вероятностей примеры испытаний.

Пример 85.1. *Испытание: бросание монеты.*
События:

- A — *выпадение «орла»,*
- B — *выпадение «решки».*

Пример 85.2. *Испытание: бросание игральной кости (кубика с пронумерованными от 1 до 6 гранями).*
События:

- C — *выпадение числа 2,*
- D — *выпадение чётного числа,*
- E — *выпадение нечётного числа,*
- F — *выпадение числа, меньшего 10,*
- G — *выпадение числа, большего 8.*

Пример 85.3. *Испытание: розыгрыш тиража лотереи.*
События:

- H — *на данный билет выпал выигрыш,*
- K — *данный билет без выигрыша.*

Пример 85.4. *Испытание: проверка работоспособности электрической лампочки.*
События:

- L — *лампочка работоспособная,*
- M — *лампочка бракованная.*

Пример 85.5. *Испытание: вынимание шара из урны.*

В урне (непрозрачный ящик) имеются шары пронумерованные или разных цветов, например — белые и чёрные. Случайным образом вынимается шар, который после осмотра возвращается или не возвращается в урну.

События:

- N — *вынутый шар белый,*
- P — *вынутый шар чёрный.*

Определение 85.1. *Событие называется достоверным (в дальнейшем U), если оно обязательно появится, и невозможным (в дальнейшем V), если оно никогда не появится в результате испытания.*

События A и B называются несовместными, если они не могут появиться в одном испытании. Если событий больше двух, они могут быть попарно несовместными, если любые два из них несовместны.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в непоявлении A.

В приведённых примерах событие F является достоверным, G — невозможным, события A и B несовместны, также, как H и K. Событие B является противоположным к A: $B = \overline{A}$.

Очевидно, что события A и $\overline{A}$ несовместны.

Определение 85.2. *Суммой двух событий $A + B$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

Произведением двух событий $A \cdot B$ называется событие, состоящее в наступлении каждого из этих событий.

Аналогично определяется сумма и произведение для случая, когда число слагаемых или сомножителей больше двух.

Пример 85.6. *Испытание: из колоды случайным образом извлекается одна карта.*
События:

- R — *появление дамы,*
- S — *появление карты пиковой масти.*

Тогда событие $R \cdot S$ — *появление пиковой дамы,* $R + S$ — *появление карты или пиковой масти, или любой дамы, в том числе — пиковой дамы.*

Операции над событиями обладают следующими свойствами, выводимыми из определений.

$$A + B = B + A, \qquad A \cdot B = B \cdot A,$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C,$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C,$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$
$$A + U = U, \qquad A \cdot U = A,$$
$$A + V = A, \qquad A \cdot V = V,$$
$$A + \overline{A} = U, \qquad A \cdot \overline{A} = V,$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Замечание 85.1. *В соответствии с определением 85.1 события* A *и* B *несовместны* $\Longleftrightarrow$ $A \cdot B = V$. *Заметим также, что в группе попарно несовместных событий одновременное наступление любых из этих событий невозможно, т.е. они несовместны.*

Определение 85.3. *Несколько событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *составляют полную группу, если в результате испытания обязательно появится одно из них:*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = U.$$

Очевидно, что события A и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу.

85.3. Относительная частота и её свойства

Рассмотрим n одинаковых испытаний, в каждом из которых может появиться некоторое событие A.

Определение 85.4. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз. Относительной частотой или просто частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{85.1}$$

Пример 85.7. *Если игральная кость бросалась 10 раз ($N = 10$), а шестёрка выпадала 3 раза ($M = 3$), то частота события A (появления шестёрки) равна 3/10.*

Относительная частота $P^*(A)$ обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1$.
(2) $P^*(U) = 1, \quad P^*(V) = 0$.
(3) Для несовместные событий A и B.

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B). \tag{85.2}$$

Выведем эти свойства.

Свойства 1 и 2 получаются непосредственно из определения 85.4.

Для доказательства свойства 3 обозначим M — число появлений события A, L — число появлений события B, N — общее число проведённых испытаний. Тогда: $P^*(A) = \dfrac{M}{N}, \quad P^*(B) = \dfrac{L}{N}, \quad P^*(A + B) = \dfrac{M + L}{N}$, если события A и B несовместны.
Отсюда следует свойство 3:

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B).$$

Замечание 85.2. *Свойство 3 иногда называют теоремой сложения частот. В общем виде, для любых событий A и B относительная частота суммы двух событий равна сумме их частот минус частота их произведения:*

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B). \tag{85.3}$$

Доказательство. Пусть событие A появилось в M, а событие B в L испытаниях из N, а одновременно события A и B (т.е. A·B) в K испытаниях. Очевидно:

$$P^*(A + B) = \frac{M + L - K}{N} = \frac{M}{N} + \frac{L}{N} - \frac{K}{N} = P^*(A) + P^*(B) - P^*(A \cdot B).$$

В некоторых случаях возникает необходимость рассматривать несколько событий в их взаимосвязи, например, когда необходимо определить как влияет появление или непоявление одного события на частоту другого. В этом случае, кроме частоты события A во всей серии испытаний, вычисляют также частоту события A, учитывая только те испытания, в которых появилось другое интересующее нас событие B. Иными словами, перед определением частоты события A учитывают только те испытания, в которых кроме A появилось и B. Эта характеристика называется *условной частотой* события A при условии появления B и обозначается $P^*(A/B)$ или $P^*_B(A)$.

Определение 85.5. *Условной частотой события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\,, \tag{85.4}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\,, \tag{85.5}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\,. \tag{85.6}$$

Из формул (85.4) — (85.6) вытекает следующая теорема:

Теорема 85.1 (умножения частот). *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{85.7}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{aligned} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{aligned} \tag{85.8}$$

Сравнивая условные частоты $P^*(A/B)$ и $P^*(A/\overline{B})$, можно судить о взаимосвязи событий А и В. Если

$$P^*(A/B) = P^*(A/\overline{B}) = P^*(A)\,, \tag{85.9}$$

то частота события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B. Это будет справедливо для так называемых «независимых событий» A и B, для которых условные частоты (85.9) равны частоте $P^*(A)$, которую можно назвать безусловной.

Для независимых событий формула (85.7) примет вид

$$P^*(AB) = P^*(A) \cdot P^*(B) \ , \tag{85.10}$$

а вместо (85.8) имеем формулу:

$$P^*\Big(\prod_{i=1}^{k} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{k} P^*(A_i). \tag{85.11}$$

85.4. Статистическая вероятность

При небольшом числе испытаний частота может сильно колебаться и является поэтому плохой характеристикой случайного события. Однако по мере увеличения числа испытаний частота постепенно стабилизируется, т.е. принимает значения, мало отличающиеся от некоторого вполне определённого числа. Можно сказать, что чем больше число испытаний, тем реже будут встречаться значительные отклонения этой частоты от этого числа. Таким образом, с рассматриваемым событием можно связать некоторое число, около которого группируются частоты и которое является мерой объективной возможности появления данного события. Это число называется *вероятностью* события. В некоторых учебниках это называется *статистическим* определением вероятности.

Свойство устойчивости частот, многократно проверенное экспериментально и подтверждающееся всем опытом практической деятельности людей, есть одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях.

Характеризуя вероятность события каким-то числом, мы не можем придать этому числу иного реального значения и иного практического смысла, чем относительная частота события при большом числе испытаний. Свойства так определённой вероятности должны быть аналогичны приведённым в пункте 85.3 свойствам относительной частоты. Численная оценка степени возможности события посредством вероятности имеет практический смысл именно потому, что более вероятные события происходят в среднем чаще, чем менее вероятные.

Проверить такое предположение мы можем только для таких событий, вероятности которых можно вычислить другим путем (непосредственно).

Многочисленные опыты, производившиеся со времен возникновения теории вероятности, подтверждают это предположение. Так, при большом n частота появления, например, цифры 6 на верхней грани игральной кости, близка к $1/6$, а частота появления «орла» при бросании монеты близка к $1/2$.

В следующей лекции будет дано другое определение вероятности случайного события, позволяющее вычислять вероятность для большого класса задач. Естественно, что определённая другим способом вероятность будет обладать такими же свойствами.

Практическое занятие 85. Алгебра событий

Пример 85.1. *Событие A означает, что хотя бы один из шести проверяемых двигателей неисправен, событие B – все двигатели исправны. Что означают события $A+B, AB$?*

Р е ш е н и е: Здесь событие $\bar{A}$ означает, что все двигатели исправны, т.е. $\bar{A} = B$. Следовательно, A и B представляют собой противоположные события, для которых $A + B = U, AB = V$.

Пример 85.2. *Пусть событие A – при аварии сработал первый сигнализатор, событие B – сработал второй сигнализатор. Опишите события:*

$$A + B,\ AB,\ A\bar{B},\ \bar{A}\bar{B},\ A\bar{B} + \bar{A}B.$$

Р е ш е н и е: Сумма событий $A+B$ означает, что при аварии сработал либо первый сигнализатор, либо – второй, либо – оба. Событие AB – сработали оба сигнализатора одновременно; $A\bar{B}$ означает, что первый сигнализатор сработал, а второй нет; $\bar{A}\bar{B}$ – не сработали оба сигнализатора. $A\bar{B} + \bar{A}B$ – сработал один сигнализатор, первый или второй.

Пример 85.3. *Доказать, что : а) $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, б) $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$.*

Р е ш е н и е: а) Событие $\bar{A}\bar{B}$ означает непоявление событий ни A, ни B. Противоположное событие $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ состоит в том, что хотя бы одно из событий A или B имеет место, а это и есть сумма событий $A+B$; следовательно $\bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A+B}$.

б) Событие AB состоит в совместном появлении событий A и B; событие $\overline{AB}$ состоит в непоявлении хотя бы одного из этих событий A, B или в появлении хотя бы одного из событий $\bar{A}, \bar{B}$, а это равносильно $\bar{A} + \bar{B}$.

Пример 85.4. *Событие A состоит в том, что хотя бы один из имеющихся десяти цехов не выполняет план; событие B состоит в том, что цехов, не выполняющих план, среди них не менее двух. Описать события: а) $\bar{A}$ и $\bar{B}$, б)$A + B$, в)$A\bar{B}$, г)$\bar{A}B$.*

Решение: а) $\bar{A}$ — все цеха выполняют план, $\bar{B}$ — цехов, не выполняющих план, один или нет ни одного; б) так как наступление события B означает также наступление события A, то $A + B = A$; в) один цех не выполняет план; г) $\bar{A}B = V$, т.к. события $\bar{A}$ и B несовместны.

Пример 85.5. *Производится три выстрела по мишени. Событие A — попадание в мишень при первых двух выстрелах, событие B — промах при третьем выстреле. Что означают события: $A + B$, AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$?*

Решение: Событие $A+B$ — или произошло попадание при двух выстрелах, или произошёл промах при третьем выстреле, либо то и другое. AB — два первых выстрела попали в мишень, третий — нет. $A\bar{B}$ — произошло попадание при всех трёх выстрелах. $\bar{A}B$ — при всех трёх выстрелах промах. $\bar{A}\bar{B}$ — два первых выстрела промах, третий — попадание.

Пример 85.6. *Из множества супружеских пар наудачу выбирается одна. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Что означают события: ABC, $A\bar{B}$, $A\bar{B}C$?*

Решение: ABC — оба супруга старше 30 лет, причём муж старше жены. $A\bar{B}$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены. $A\bar{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, но муж не старше своей жены.

Пример 85.7. *Пусть A, B, C — три произвольных события. Что означают следующие события :*

а) $A + B + C$, б) $AB + AC + BC$, в) ABC, г) $A\bar{B}C$,
д) $A\bar{B}\bar{C}$, е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, ж) $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$,
з) $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$, и) $A + B + C - ABC$?

Р е ш е н и е: а) Произошло по крайней мере одно из трёх событий; б) произошли по крайней мере два события из трёх; в) произошли все три события; г) произошли A и B, а событие C не произошло; д) произошло A, а события B и C не произошли; е) ни одно событие не произошло; ж) произошло только одно событие; з) произошли только два события; и) произошло не более двух событий.

Если рассматривать событие A как попадание в область A, событие $\bar{A}$ как непопадание в область A и ввести аналогичные обозначения для событий B и C, то рассмотренные события можно представить, как попадание в области, заштрихованные на рис. 1

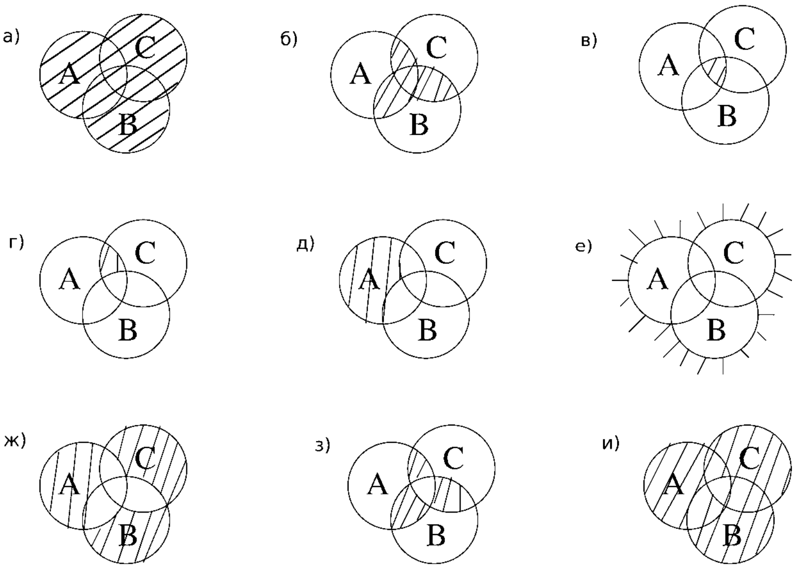


Рис. 1. *Геометрическая иллюстрация операций над событиями*

ПРИМЕР 85.8. *Доказать, что события $A, \bar{A}B, \overline{A+B}$ образуют полную группу попарно несовместных событий.*

Р е ш е н и е: Учитывая, что $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, будем рассматривать события $A, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$. Их сумма

$$A + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = A + \bar{A}(B + \bar{B}) = A + \bar{A}U = A + \bar{A} = U,$$

а произведения

$$A \cdot \bar{A}B = (A\bar{A}) \cdot B = VB = V, \quad A \cdot \bar{A}\bar{B} = (A\bar{A})\bar{B} = V\bar{B} = V,$$
$$\bar{A}B \cdot \bar{A}\bar{B} = (\bar{A}\bar{A})(B\bar{B}) = \bar{A}V = V.$$

События с данными свойствами по определению образуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример 85.9. *Резцом обточено 120 поршней. При проверке оказалось, что только 105 поршней имеют размеры, лежащие в пределах допуска. Найти относительную частоту изготовления годных поршней.*

Р е ш е н и е: Согласно формуле (85.1), частота изготовления годного поршня равна:

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} \approx 0{,}875.$$

Ответ: $P^*(A) = 7/8 \approx 0{,}875$.

Пример 85.10. *Брошены 100 раз две игральные кости. При этом совпадение числа очков было 15 раз, а шестерка на обеих гранях костей выпала 4 раза. Определить условную частоту выпадения шестерок в случае совпадения числа очков.*

Р е ш е н и е: Обозначим: событие A - появление шестерок на обеих гранях, событие B - совпадение числа очков. Тогда событие A появилось $K = 4$ раза, а событие B произошло $L = 15$ раз. Согласно формуле (85.4), условная частота появления двух шестерок равна:

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267.$$

Ответ: $P^*(A/B) = 4/15 \approx 0{,}267$.

Пример 85.11. *Из 300 произведённых изделий 20 обладают дефектом α, причём 5 из них имеют также дефект β. Найти относительную частоту появления изделия с обоими дефектами.*

Р е ш е н и е: Пусть событие A — появление дефекта β, а событие B — дефекта α. Тогда по формуле (85.7) относительная частота произведения этих двух событий определится как

$$P^*(AB) = \frac{20}{300} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017.$$

Ответ: $P^*(AB) = 1/60 \approx 0{,}017$.

Самостоятельная работа

Пример 85.12. *В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A — включен первый выключатель, B включен второй выключатель, C — по цепи идет ток. Выразите события C и $\bar{C}$ через A и B.*

Пример 85.13. *В группе студентов несколько человек являются отличниками; группа делится также по цвету волос на шатенов, брюнетов и блондинов. Из группы наудачу отобраны два человека с разным цветом волос. Пусть событие A — выбран шатен, событие B — выбран брюнет, событие C — выбран отличник. Опишите события: AC, $\bar{A}\bar{B}$, ABC.*

Пример 85.14. *По аналогии с задачей 85.3 доказать, что*
а) $\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2...\bar{A}_n} = A_1 + A_2 + ... + A_n$,
б) $\overline{A_1A_2...A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + ...\bar{A}_n$.

Пример 85.15. *Доказать, что* $(A+B)(A+C) = A + BC$.

Пример 85.16. *Событие A - первый узел автомобиля работает безотказно, событие B - второй узел автомобиля работает безотказно. Опишите события: $\bar{A}$ и $\bar{B}$, $A+B, AB, A\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}+\bar{A}B$; как и в задаче 1.8, сделайте рисунки.*

Пример 85.17. *Процент выполнения задания предприятием в течение 10 дней соответственно равняется*

$$107, 111, 109, 116, 115, 105, 112, 114, 121, 124.$$

Какова относительная частота дней, в которые задание было выполнено более чем на 110 процентов?

Лекция 86. Классическая формула вероятности

Классическая формула вероятности. Элементы комбинаторики

86.1. Классическая формула вероятности

В приложениях теории вероятностей имеется ряд задач, в которых вероятность можно вычислить с помощью так называемой классической формулы. Это задачи, в которых результаты опытов обладают определённой симметрией и являются равновозможными. Каждый из возможных результатов испытания назовем элементарным исходом или элементарным событием. Например, при бросании монеты возможны два элементарных исхода: выпадение «орла» и выпадение «решки»; при бросании игральной кости возможны 6 элементарных исходов: выпадение числа 1, числа 2 и т.д. до 6; при однократном розыгрыше тиража лотереи элементарных исходов столько, сколько билетов лотереи участвует в тираже.

Определение 86.1. *Элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем исходами, благоприятствующими этому событию.*

Так, при бросании игральной кости событию D: «выпало чётное число очков» благоприятствуют 3 элементарных исхода — выпадение 2,4 или 6 очков.

Таким образом, событие D наблюдается, если в испытании наступает один из элементарных исходов, благоприятствующих ему; в этом смысле событие D «подразделяется» на несколько элементарных событий, сами же элементарные события в данной задаче не подразделяются на другие события.

Будем рассматривать *равновозможные* элементарные события, образующие *полную группу попарно несовместных событий.*

Определения последних двух терминов приведены в лекции 85, что же касается равновозможности, то, как правило, это свойство элементарных событий очевидно вытекает из их «равноправности». Так, например, если игральная кость симметричная, то выпадение любого числа очков от 1 до 6 равновозможно.

Описанная схема носит название схемы случаев, а сами элементарные события, обладающие перечисленными свойствами, называются случаями. Вычисление вероятности по формуле (86.1) верно только для схемы случаев, которая неприменима, например, если число возможных исходов бесконечно. Формула (86.1) во многих учебниках по теории вероятностей называется «классическим определением вероятности».

Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{86.1}$$

Из этой формулы вытекают следующие свойства вероятности, аналогичные свойствам $P^*(A)$:

Вероятность случайного события заключена между 0 и 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{86.2}$$

Действительно, для любого события $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому: $0 \leqslant m/n \leqslant 1$.

Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(U) = 1. \tag{86.3}$$

Действительно, в случае достоверного события $m = n$ и $P(U) = n/n = 1$.

Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(V) = 0. \tag{86.4}$$

Действительно, в случае невозможного события $m = 0$ и $P(V) = 0/n = 0$.

Замечание 86.1. *Заметим, что обратные утверждения, вообще говоря, не всегда справедливы. То есть события с нулевыми вероятностями не обязательно невозможны, а события с вероятностью, равной единице, не обязательно достоверны. Так, например, если производить стрельбу по мишени, то при каждом выстреле пуля попадает в какую-то точку (размер пули не учитывается). Поэтому событие A (попадание пули в данную точку) есть возможное событие. Однако число точек в мишени, в которые может попасть пуля при выстреле, настолько велико, что частота попадания в одну и ту же точку стремится к нулю. А это значит, что вероятность $P(A) = 0$.*

Следующее очень важное свойство называется: «Теорема сложения вероятностей для несовместных событий».

Теорема 86.1. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей :*

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = V. \tag{86.5}$$

Действительно, обозначим m — число исходов, благоприятствующих событию A, l — число исходов, благоприятствующих событию B, n — общее число исходов данного испытания. Тогда:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A+B) = \frac{m+l}{n},$$

если события несовместны. Отсюда следует равенство (86.5):

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая теорема:

Теорема 86.2. *Вероятность противоположного к A события равна единице минус вероятность события A:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{86.6}$$

Действительно, событие A и $\overline{A}$ несовместны, а их сумма есть достоверное событие: $A \cdot \overline{A} = V$, $A + \overline{A} = U$. Поэтому:

$$1 = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

С помощью классического определения вероятности можно вычислить вероятности в тех задачах, где применима схема случаев.

Пример 86.1. *Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает чётное число очков.*

Р е ш е н и е: В соответствии с классическим определением вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n}$. В данном примере общее число возможных исходов $n = 6$, количество исходов, благоприятствующих наступлению события A, $m = 3$ (это выпадение 2, 4 и 6 очков). Окончательно

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}5$.

Пример 86.2. *Шифрзамок состоит из 3-х колёсиков по 10 цифр на каждом. Найти вероятность открыть замок с первой попытки при случайном наборе шифра.*

Р е ш е н и е: Общее число возможных комбинаций из 3-х цифр $n = 10^3$ — все числа от 000 до 999. Благоприятствующих исходов — один, $m = 1$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{10^3} = 0{,}001$.

Пример 86.3. *Найти вероятность того, что при случайном выборе карты из колоды в 36 карт появится дама.*

Р е ш е н и е: Общее число возможных исходов $n = 36$, благоприятствующих исходов — четыре: $m = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{9}$.

Для решения более сложных задач познакомимся с некоторыми элементами комбинаторики.

86.2. Элементы комбинаторики

Определение 86.2. *Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ ($n!$ читается «эн факториал»). Факториал нуля считается равным единице:* $0! = 1$.

Определение 86.3. *Перестановками называются различные способы упорядочивания n различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо.*

Можно доказать, что число перестановок

$$P_n = n!. \tag{86.7}$$

Действительно, первый из этих n предметов можно расположить на любом из n мест (n возможных способов расположения), для второго остаётся $n - 1$ свободное место. Каждый способ расположения первого предмета может сочетаться с одним из способов расположения второго, значит эти два предмета можно расположить $n(n - 1)$ способами. Повторяя это рассуждение, получим формулу (86.7).

Пример 86.4. *Найти вероятность того, что при случайном раскладе карточек с буквами* $\boxed{Р}$ $\boxed{И}$ $\boxed{М}$ *получится слово «МИР».*

Р е ш е н и е: Общее число возможных исходов $n = 3! = 6$, число благоприятных исходов $m = 1$. В соответствии с классическим определением вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

Пример 86.5. *Найти вероятность того, что при случайном раскладе карточек с буквами* $\boxed{А}$ $\boxed{А}$ $\boxed{П}$ $\boxed{П}$ *получится слово «ПАПА».*

Р е ш е н и е: Поскольку, в отличие от примера 86.4, здесь имеются карточки с одинаковыми буквами, пронумеруем их: $\boxed{\mathrm{А}_1}$ $\boxed{\mathrm{А}_2}$ $\boxed{\mathrm{П}_1}$ $\boxed{\mathrm{П}_2}$. Общее число возможных исходов $n = 4! = 24$, благоприятными будут исходы, в которых буква А стоит на 2-м и 4-м местах (таких исходов $2! = 2$), а буква П стоит на 1-м и 3-м местах (таких исходов тоже $2! = 2$). Каждый способ расположения букв А может сочетаться с любым способом расположения букв П (перечислите их самостоятельно). Таким образом, число благоприятных исходов $m = 2! \cdot 2! = 4$. Окончательно:

$$P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$.

Определение 86.4. *Размещениями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке.*

Можно доказать, что число размещений из n по m, обозначаемое A_n^m, определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (86.8)$$

Доказательство проведем для A_n^3. Первый из n предметов можно разместить на любом из n мест, т.е. n способами, для второго остаётся $(n-1)$ способ размещения и, поскольку каждый способ размещения первого предмета может сочетаться с любым способом размещения второго, первые два предмета можно разместить $n(n-1)$ способами. Для третьего предмета остаётся (n-2) места, поэтому всего 3 предмета можно разместить $n(n-1)(n-2)$ способами: $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$. Несложными преобразованиями доказывается и вторая из формул (86.8):

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-3)\cdot\ldots\cdot 1} = n(n-1)(n-2).$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n.$$

Действительно, число способов размещения n различных предметов на n местах (A_n^n) равно числу различных способов их упорядочивания, т.е. равно числу перестановок (P_n). 0 предметов можно разместить на n местах единственным способом («ничего не размещать»), а 1 предмет — n способами (или на 1-м месте, или на 2-м и т.д.). Указанные свойства вытекают также из формулы (86.8).

Пример 86.6. *На карточках написаны буквы:* $\boxed{А}$ $\boxed{Б}$ $\boxed{Д}$ $\boxed{Е}$ $\boxed{О}$ $\boxed{П}$ *Найти вероятность того, что при случайном выборе 4-х из этих карточек и расположении слева направо получится слово: «ОБЕД».*

Р е ш е н и е: Общее число возможных исходов $n = A_6^4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$, т.к. порядок букв в слове наряду с их количеством определяет его смысл. Число благоприятных исходов $m = 1$.

Окончательно $P(A) = \dfrac{1}{360} \approx 0{,}003$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{360} \approx 0{,}003$.

Определение 86.5. *Сочетаниями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами.*

Можно доказать, что число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (86.9)$$

Действительно, число размещений из n по m (A_n^m) в $m!$ раз больше числа сочетаний C_n^m, т.к. в сочетаниях не учитываются различные перестановки m предметов на занимаемых ими местах (порядок расположения предметов для сочетаний несущественен):

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! \quad \Longrightarrow \quad C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,
(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,
(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$.

Первое и второе свойства непосредственно вытекают из формулы 86.9 или определения 86.5 (сделайте это самостоятельно).

Для доказательства третьего свойства напомним формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}. \tag{86.10}$$

Полагая $a = b = 1$, получаем свойство 3.

В соответствии с изложенной в предисловии идеологией, решения сложных задач всех разделов математики данного курса производятся с использованием лицензионных пакетов Excel, MathCad и пакета Maxima, находящегося в свободном доступе.

Так, например, при больших значениях m и n вычисление числа размещений и сочетаний является достаточно трудоемкой работой. В этом случае удобно воспользоваться компьютерными пакетами MathCad или Maxima. В эти пакеты встроены функции, которые по рекуррентной формуле вычисляют значение C_n^m для больших значений параметров n и m.

В пакете MathCad для вычисления сочетаний используется функция C_n^k = combin(n,k), а в пакете Maxima – C_n^k = binomial(n,k). В пакете MathCad для вычисления числа размещений встроена функция A_n^k=permut(n,k).

Пример 86.7. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 5 шаров из урны, содержащей 10 шаров, из которых 3 белых и 7 красных, среди выбранных окажется 2 белых и 3 красных.*

Р е ш е н и е: Запишем условия кратко:

$10ш = 3б + 7кр$,
$5ш = 2б + 3кр$.

Будем предполагать, что шары в урне пронумерованы от 1 до 10, причём шары с 1 по 3 — белые, а с 4 по 10 — красные. Общее число возможных исходов n равно числу способов, которыми из 10 шаров можно выбрать 5:

$$n = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Число благоприятствующих исходов m равно числу способов, которыми из 3 белых шаров можно выбрать 2 белых, а из 7 красных шаров можно выбрать 3 красных. Так как каждый способ выбора белых шаров может сочетаться с любым способом выбора красных, получаем:

$$m = C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 105.$$

Окончательно: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \dfrac{105}{252} \approx 0{,}417$.

Ответ: $P(A) \approx 0{,}417$.

Замечание 86.2. *Аналогично получается общая формула так называемого гипергеометрического распределения:*

$$K_ш = L_{\,б} + (K-L)_{кр}, \quad 0 \leqslant L \leqslant K,$$

$$k_ш = l_{\,б} + (k-l)_{кр}, \quad 0 \leqslant l \leqslant min(k, L)$$

$$P(A) = \frac{C_L^l \cdot C_{K-L}^{k-l}}{C_K^k}. \tag{86.11}$$

Пример 86.8. *Найти вероятность того, что при случайном выборе 10 шаров из урны, содержащей 20 шаров, из которых 6 белых и 14 чёрных , среди выбранных окажется 4 белых и 6 чёрных .*

Р е ш е н и е:

Решение данной задачи можно записать в виде $P(A) = \dfrac{C_6^4 \cdot C_{14}^4}{C_{20}^{10}}$.

Maxima-программа, решающая поставленную задачу, имеет вид:

(%i1) P:binomial(6, 4)*binomial(14, 6)/binomial(20, 10);

(%o1)$\dfrac{315}{1292}$

Если результат необходимо получить в виде приближённого десятичного числа, то подаём такую команду:

(%i1) P:binomial(6, 4)*binomial(14, 6)/binomial(20, 10),numer;

(%io) 0.2438080495356

MathCad-программа имеет вид:

$$P := \frac{combin(6,4) \cdot combin(14,6)}{combin(20,10)}$$

$P = 0.244$

Ответ: $P(A) = \dfrac{315}{1292} \approx 0{,}244$.

86.3. Понятие об аксиоматике теории вероятностей

Как отмечалось в начале п. 86.1, классическое определение вероятности применимо только для схемы случаев, что не позволяет использовать его, например, для нахождения вероятности попадания в определённую область плоскости. Так, например, если площадь центральной области мишени составляет 10% от площади всей мишени и промахнуться мимо мишени невозможно, то очевидно, что вероятность попасть в центральную область равна отношению её площади к площади всей мишени, т.е. 0,1. Однако свести эту задачу к подсчёту равновозможных элементарных событий, образующих полную группу, не удаётся. В первой половине XX в. нашим соотечественником А. Н. Колмогоровым было предложено строгое аксиоматическое построение теории вероятностей. Теория вероятностей строится на основании ряда аксиом, некоторые из которых приведены ниже.

(1) Вводится понятие случайных событий и операций над ними, включая сумму бесконечного числа случайных событий.
(2) $P(A) \geqslant 0$.
(3) Для достоверного события U, $P(U) = 1$.
(4) Для попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, вероятность суммы (конечной или бесконечной) равна сумме вероятностей:
$$p\Big(\sum_i A_i\Big) = \sum_i p(A_i).$$

Из этих аксиом выводятся уже известные нам свойства:
$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1,\ p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
и все остальные теоремы теории вероятностей.

Для схемы случаев вычисление вероятности сводится к уже известному классическому определению вероятности. Однако такое построение позволило получить строгий математический подход и решать любые задачи, относящиеся к сфере действия теории вероятностей.

Замечание 86.3. *Попытки решения некоторых задач неприменимыми к ним методами теории вероятностей привели в конце XVIII века к дискредитации среди учёных методов теории вероятностей. Так, например, вычислялась вероятность того, что завтра* *взойдет солнце при условии, что оно ежедневно всходило на протяжении последних 2000 лет. Методы теории вероятностей позволяют это сделать и в результате получается число очень близкое, но все же меньшее единицы. На основании этого делается вывод о том, что существует вероятность того, что солнце может не взойти. Ошибка данного рассуждения состоит в том, что вращение Земли и связанное с ним видимое движение солнца по небосводу подчиняется законам механики, а не теории вероятностей.*

Практическое занятие 86. Вычисление вероятностей

Решение задач непосредственно по формуле (86.1) часто сводится к определению отдельно числителя и знаменателя.

Пример 86.1. *В партии из 80 деталей 11 нестандартных. Взятые для контроля 5 деталей оказались стандартными. Определить вероятности того, что взятая затем деталь будет: а) стандартной, б) нестандартной.*

Р е ш е н и е: Здесь после первой проверки остались 64 стандартных и 11 нестандартных деталей. Число всех деталей перед второй проверкой $n = 75$. а) Число благоприятствующих исходов - появлений стандартной детали (событие A) $m = 64$. Тогда $P(A) = 64/75 \approx 0{,}853$. б) Число благоприятствующих исходов для этого случая – число появлений нестандартной детали (событие B) $m = 11$ и $P(B) = 11/75 \approx$ $\approx 0{,}147$.

Ответ: $P(A = 64/75 \approx 0{,}853$; $P(B) = 11/75 \approx 0{,}147$.

Пример 86.2. *Бросаются три игральные кости. Найти вероятности того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 4, б) на всех гранях выпадает одинаковое число очков, в) на всех гранях выпадает различное число очков.*

Р е ш е н и е: Игральная кость представляет собой куб, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Каждый из исходов бросания одной кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй и третьей, поэтому общее число возможных исходов испытания $n = 6^3$.

а) Здесь благоприятствующих событию A – появлению на трёх костях суммы очков, равной 4, будет $m = 3$ исхода: $1+1+2$, $1+2+1$,

$2+1+1$. Тогда

$$P(A) = 3/6^3 = 1/72 \approx 0{,}014.$$

б) В этом случае число благоприятствующих исходов будет равно числу граней, т.е. 6. Следовательно,

$$P(B) = 6/6^3 = 1/36 \approx 0{,}028.$$

в) Число исходов, когда на трёх гранях выпадает различное число очков, равно числу размещений $A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ и

$$P(C) = 4 \cdot 5 \cdot 6/6^3 = 5/9 \approx 0{,}556.$$

Ответ: $P(A) = 1/72 \approx 0{,}014$; $P(B) = 1/36 \approx 0{,}028$; $P(C) = 5/9 \approx 0{,}556$.

Пример 86.3. *В коробке имеются десять букв: А, А, А, В, И, К, М, О, Т, Т. Найти вероятность того, что если наудачу вынимать одну букву за другой, то можно сложить слово АВТОМАТИКА.*

Р е ш е н и е: Число всех исходов равно всевозможным перестановкам из 10 букв, т.е. 10! В числителе формулы для вероятности мы должны учесть, что букву А можно расположить на трёх местах 3! способами, а букву Т 2! способами. Сочетая каждое расположение букв А с каждым расположением букв Т, найдем:

$$P(A) = 3! \cdot 2!/10! = 1/302400 \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}.$$

Ответ: $P(A) = 1/302400 \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}$.

Пример 86.4. *В цехе из 80 рабочих не выполняют норму выработки 5 человек. По списку случайно отбирается 3 человека. Какова вероятность того, что эти рабочие: а) выполняют норму, б) не выполняют норму?*

Р е ш е н и е: Количество всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 человека из 80, т.е. числу сочетаний C_{80}^3.

а) Благоприятствующими будут те исходы, когда 3 человека отбираются только из тех рабочих, которые выполняют норму, т.е. из $80 - 5 = 75$ рабочих; их число равно C_{75}^3. Вероятность данного события A

$$P(A) = \frac{C_{75}^3}{C_{80}^3} = \frac{75!}{3!72!} \cdot \frac{3!77!}{80!} = \frac{73 \cdot 74 \cdot 75}{78 \cdot 79 \cdot 80} \approx 0{,}822.$$

б) Здесь вычислим вероятность того, что трое рабочих выбираются именно из тех пяти, которые не выполняют норму (событие B). Число таких случаев равно C_5^3; тогда

$$P(B) = \frac{C_5^3}{C_{80}^3} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{78\cdot 79\cdot 80} = \frac{1}{5056} \approx 0{,}198\cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}822$; $P(A) = 1/5056 \approx 0{,}198\cdot 10^{-3}$.

Пример 86.5. *В партии из $N = 100$ изделий имеются $M = 12$ бракованных. Из партии наудачу выбираются $n = 10$ изделий. Определить вероятность того, что среди этих 10 изделий будет ровно $m = 2$ бракованных.*

Р е ш е н и е: Всех равновозможных случаев здесь будет C_{100}^{10}. Обозначим через A событие – появление 2 бракованных изделий среди выбранных наудачу 10 изделий. Так как всех бракованных изделий 12, то число способов, которыми можно вынуть 2 бракованных изделия, равно C_{12}^2. Но каждый из этих способов может дополняться любой группой изделий из числа способов, которыми можно вынуть оставшиеся $10-2$ годных из общего числа годных $100-12$ изделий. Число таких групп равно $C_{100-12}^{10-2} = C_{88}^8$. Таким образом, всех случаев, благоприятствующих событию A, будет $C_{12}^2\cdot C_{88}^8$ и вероятность

$$P(A) = \frac{C_{12}^2\cdot C_{88}^8}{C_{100}^{10}}.$$

Здесь была использована формула гипергеометрического распределения (86.11).

Для вычисления вероятности по полученной формуле, используем Maxima-программу:

(%i1) P:binomial(12,2)*binomial(88, 8)/binomial(100, 10),numer;

(%o1) 0.24507224642386

или MathCad-программу:

$$P = \frac{combin(12,2)\cdot combin(88,8)}{combin(100,10)} \qquad P = 0.245$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}245$.

Пример 86.6. *Телефонный номер состоит из семи цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.*

Р е ш е н и е: Цифры изменяются от 0 до 9, поэтому количество всех номеров будет 10^7, а число номеров с различными цифрами равно числу размещений $A_{10}^7 = 10!/3!$. Следовательно,

$$P(A) = 10!/(3! \cdot 10^7) = 189/5^5 \approx 0{,}061.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}061$.

Пример 86.7. *В автобусе находятся 5 пассажиров, причём каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из оставшихся 7 остановок автобуса. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на одной остановке, б) все выйдут на четвертой остановке, в) все выйдут на разных остановках, г) на одной остановке выйдут три, а на другой два.*

Решение: Общее число случаев $n = 7^5$.

а) Здесь $m = 7$, т.е. числу всех остановок; тогда
$P(A) = 1/7^4 \approx 0{,}416 \cdot 10^{-3}$;

б) $m = 1$, $P(B) = 1/7^5 \approx 0{,}594 \cdot 10^{-5}$;

в) $m = C_7^5 = 21, \qquad P(C) = 21/7^5 = 3/7^4 \approx 0{,}125 \cdot 10^{-2}$;

г) число способов, которыми можно выбрать одну остановку, на которой сойдут три пассажира, равно $C_7^1 = 7$; кроме того, мы должны учесть C_5^3 способов, которыми можно выбрать этих трёх пассажиров из пяти; число способов, которыми можно выбрать остановку, где сойдут оставшиеся два пассажира, равно $C_6^1 = 6$; таким образом,

$$m = C_5^3 \cdot C_7^1 \cdot C_6^1 \quad \text{и} \quad P(D) = 60/7^4 \approx 0{,}025.$$

Ответ: $P(A) = 1/7^4 \approx 0{,}416 \cdot 10^{-3}$; $P(B) = 1/7^5 \approx 0{,}594 \cdot 10^{-5}$; $P(C) = 3/7^4 \approx 0{,}125 \cdot 10^{-2}$; $P(D) = 60/7^4 \approx 0{,}025$.

Пример 86.8. *Из шести карточек с буквами А, В, Д, З, К, О выбираются наудачу в определённом порядке пять. Найти вероятность того, что при этом получится слово ЗАВОД.*

Решение: Заметим, что здесь, в отличие от примера 86.3, производится выборка пяти букв из шести и в нужной последовательности. Тогда вероятность

$P(A) = 1/A_6^5 = 1/720 \approx 0{,}001$.

Ответ: $P(A) = 1/720 \approx 0{,}001$.

Пример 86.9. *Восемь студентов садятся в аудитории случайно на один ряд. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.*

Р е ш е н и е: Всех комбинаций здесь будет $n = 8!$. Трёх определённых студентов можно посадить подряд шестью способами (начиная с 1-го места, со 2-го и т.д., с 6-го), причём нужно учесть, что внутри тройки 3! комбинаций; пятерых оставшихся студентов можно разместить 5! способами. Таким образом,

$$m = 6 \cdot 3! \cdot 5! \quad \text{и} \quad P(A) = 6 \cdot 3! \cdot 5!/8! = \frac{3}{28} \approx 0{,}107.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{3}{38} \approx 0{,}107.$

Самостоятельная работа

Пример 86.10. *В ящике «Спортлото» находится 36 шаров, помеченных номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется с номером, кратным 3?*

Пример 86.11. *Найдите вероятность того, что взятое наудачу двузначное число кратно 5.*

Пример 86.12. *Буквы, составляющие слово РАКЕТА, написаны по одной на шести карточках; карточки перемешаны и положены в пакет. а) Чему равна вероятность того, что, вынимая четыре буквы, получим слово РЕКА? б) Какова вероятность сложить слово КАРЕТА при вынимании всех букв?*

Пример 86.13. *В цех сборки привезли 25 карбюраторов, из которых 20 изготовлены Московским заводом. Найти вероятность того, что среди 10 взятых наудачу карбюраторов окажутся: а) все карбюраторы Московского завода, б) 7 карбюраторов Московского завода.*

Пример 86.14. *Из 36 номеров лотереи 5 выигрышных. В одном билете зачёркиваются наудачу 5 номеров. Какова вероятность того, что из них будут выигрышными: a) 3 номера? b) 4 номера? c) 5 номеров?*

Пример 86.15. *Полная колода содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Взяли 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет шестерка трефовой масти.*

Пример 86.16. *Бригада, состоящая из 20 мужчин и 4 женщин делится наудачу на два равных звена. Найти вероятность того, что в каждом звене окажется по две женщины.*

Пример 86.17. *В студенческой лотерее выпущено 100 билетов, из которых 15 выигрышных. Куплено три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?*

Пример 86.18. *Из колоды в 52 карты наудачу выбирается четыре. Найти вероятность того, что среди них окажется одна десятка.*

Пример 86.19. *В урне 10 белых и 15 чёрных шаров. Из урны вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все они будут чёрными.*

Пример 86.20. *Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется две дамы?*

Пример 86.21. *В конверте среди 80 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 20 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.*

Пример 86.22. *Полная колода карт (52 листа) делится пополам. Найти вероятность того, что число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.*

Пример 86.23. *Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определённые книги окажутся поставленными рядом.*

Пример 86.24. *Четыре пассажира случайным образом рассаживаются по шести вагонам. Определить вероятность того, что в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.*

Пример 86.25. *В лифте имеются 5 пассажиров, которые случайным образом сходят на семи этажах. Определить вероятность того, что на первых пяти этажах сойдет ровно по одному пассажиру.*

Лекция 87. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей. Теорема произведения вероятностей. Формулы полной вероятности и Бейеса

87.1. Теорема сложения вероятностей

Как было доказано в пункте (теорема 86.1) вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей (формула 86.5). Из этой теоремы следует очевидное следствие:

Следствие 87.1. *Вероятность суммы n попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n), \text{ если } A_i A_j = V \text{ при } i \neq j. \tag{87.1}$$

В общем случае верна следующая теорема:

Теорема 87.1 (Теорема сложения вероятностей)**.** *Вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{87.2}$$

Доказательство. Обозначим n — общее число возможных элементарных исходов, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию А, m_2 — число исходов, благоприятствующих событию В, m — число исходов, благоприятствующих одновременному наступлению событий А и В (см. рис. 2).

Как видно из рис. 2, количество исходов, благоприятствующих событию А+В, равно $m_1 + m_2 - m$.

Следовательно:

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - m}{n} =$$
$$= \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример 87.1. *Найти вероятность появления карты пиковой масти или туза при однократном вынимании карты из колоды в 36 карт.*

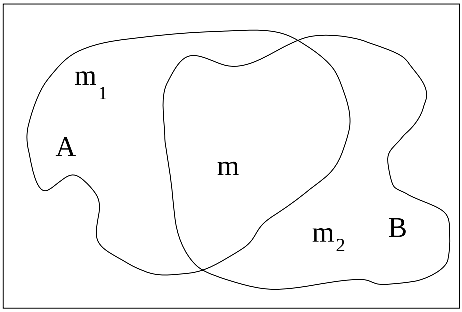


Рис. 2. *Иллюстрация теоремы сложения вероятностей*

Р е ш е н и е: Обозначим A — появление карты пиковой масти, B — появление туза и найдем вероятность $P(A+B)$. Очевидно:

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{9}, \quad P(A \cdot B) = \frac{1}{36}.$$

В соответствии с формулой (87.2), получаем:

$$P(A+B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

87.2. Теорема произведения вероятностей

Определение 87.1. *Условной вероятностью $P(A/B) = P_B(A)$ называют вероятность события A, вычисленную в предположении того, что событие B уже наступило.*

Пример 87.2. *В урне 3 белых и 3 чёрных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие A) при условии, что в первом испытании появился чёрный шар (событие B).*

Р е ш е н и е: После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая вероятность равна:

$$P(A/B) = 3/5 = 0{,}6.$$

Отметим, что безусловная вероятность события A меньше условной:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5,$$

т.к. в последнем случае отсутствует информация относительно исхода первого испытания.

Теорема 87.2 (Теорема произведения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{87.3}$$

Доказательство. Обозначим n — общее количество возможных элементарных исходов, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A, m — число исходов из числа m_1, благоприятствующих событию B (рис. 2).

Очевидно: $P(A) = m_1/n, \quad P(A \cdot B) = m/n, \quad P(B/A) = m/m_1.$

Таким образом:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1} = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие 87.2. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Определение 87.2. *Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \tag{87.4}$$

Легко показать, что свойство независимости событий взаимно. Действительно, в соответствии с (87.3) и с учётом формулы (87.4): $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$. С другой стороны, $P(A \cdot B) = P(B \cdot A) = P(B) \cdot P(A/B)$, откуда, $P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$ и $P(A/B) = P(A)$, т.е. в этом случае событие A независимо от события B и их называют *независимыми.*

Для независимых событий, с учётом определения 87.2, теорема произведения вероятностей 87.3 принимает следующий вид.

Теорема 87.3. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{87.5}$$

Определение 87.3. *Несколько событий называют независимыми в совокупности, если каждое событие независимо со всеми остальными событиями и их возможными произведениями.*

Отметим, что если каждые два события в группе независимы, это ещё не означает их независимости в совокупности. В этом смысле требование независимости в совокупности сильнее требования попарной независимости.

С учётом следствия 87.2 получаем следующее утверждение:

Следствие 87.3. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Теорема 87.4. *Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n).$$

Доказательство. Обозначим $\bar{A}$ — противоположное к A событие, состоящее в ненаступлении ни одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2\ldots, \bar{A}_n.$$

В силу независимости событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}_n$ будут так же независимы в совокупности и

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n), \quad \text{откуда}$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n).$$

Следствие 87.4. *Если события A_1, A_2, $\ldots$, A_n независимы в совокупности и имеют одинаковую вероятность появления p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий (событие A) равна:*

$$P(A) = 1 - (1-p)^n. \tag{87.6}$$

Пример 87.3. *Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз.*

Р е ш е н и е: Обозначим A — событие: «при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз». В силу независимости отдельных попаданий применима формула (87.6):

$$P(A) = 1 - (1 - 0{,}4)^n.$$

Приняв во внимание условие $P(A) \geqslant 0{,}9$, получаем неравенство: $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}9$, откуда: $n \lg 0{,}6 \leqslant \lg 0{,}1$ и, т.к. $\lg 0{,}6 < 0$, получаем: $n \geqslant \lg 0{,}1/\lg 0{,}6$. Поскольку $\lg 0{,}1/\lg 0{,}6 \approx 4,5$ получаем: $n \geqslant 5$.

87.3. Формулы полной вероятности и Бейеса

Теорема 87.5 (Формула полной вероятности)**.** *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \dots H_n$, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$\begin{aligned} P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots \\ \dots + P(H_n)P(A/H_n). \end{aligned} \tag{87.7}$$

Доказательство. По условию, появление события A означает осуществление одного из попарно несовместных событий: $H_1A,\ H_2A, \dots, H_nA$. Пользуясь следствием 87.1 из теоремы сложения и теоремой произведения вероятностей, получаем:

$$\begin{aligned} P(A) = P(H_1A + \dots + H_nA) = P(H_1A) + \dots + P(H_nA) = \\ = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n). \end{aligned}$$

Пример 87.4. *Пять экзаменаторов принимают экзамен. Известно, что вероятность сдать экзамен двум из них («строгим» равна 0,6, а трём остальным («нестрогим») 0,8 . Найти вероятность сдать экзамен произвольному экзаменатору.*

Р е ш е н и е: Обозначим A — событие «экзамен сдан». Экзамен может быть сдан либо «строгом» экзаменатору (гипотеза H_1), либо «нестрогому» (гипотеза H_2):

$$P(H_1) = 2/5 = 0{,}4; \qquad P(H_2) = 3/5 = 0{,}6.$$

Условные вероятности сдать экзамен:

$$P(A/H_1) = 0{,}6; \qquad P(A/H_2) = 0{,}8.$$

Искомая вероятность определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}72.$$

Теорема 87.6 (Формула Бейеса)**.** *В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \ldots, n$:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}. \tag{87.8}$$

Доказательство. По теореме произведения вероятностей:

$$P(H_i \cdot A) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда с использованием формулы полной вероятностей для $P(A)$ получаем:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}.$$

Формула Бейеса позволяет пересчитывать вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого произошло событие A.

Пример 87.5. *В условиях примера 87.4 известно, что студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он сдавал «нестрогому» экзаменатору.*

Р е ш е н и е: По формуле Бейеса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} = \\ = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}8} = \frac{2}{3}.$$

Заметим, что получившаяся вероятность несколько больше «априорной» вероятности $P(H_2) = 3/5$, т.к. осуществившееся событие («экзамен сдан») говорит скорее в пользу гипотезы H_2, чем H_1.

Практическое занятие 87. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример 87.1. *В экскурсионную группу включены 16 рабочих, 6 техников и 8 инженеров. По списку случайно вызывается один человек. Определить вероятность того, что это техник или инженер.*

Р е ш е н и е: Обозначим: событие A – «вызван техник», событие B – «вызван инженер», причём эти события несовместные. Вся группа составляет 30 человек. Тогда по теореме сложения вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{30} + \frac{8}{30} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467.$$

Ответ: $P(A+B) = 7/15 \approx 0{,}467$.

Пример 87.2. *При приемке партии из 40 болтов, среди которых 3 бракованных, проверяются наудачу 20 болтов. Определить вероятность того, что партия будет принята, если условиями приема допускается бракованных болтов не более одного из двадцати.*

Р е ш е н и е: Обозначим через A событие – «при проверке не обнаружено ни одного бракованного болта», а через B событие – «обнаружен один бракованный болт». Искомая вероятность $P = P(A+B)$; так как события A и B несовместны, то $P = P(A) + P(B)$. Из 40 болтов 20 можно выбрать C_{40}^{20} способами, а из 37 небракованных болтов 20 можно выбрать C_{37}^{20} способами, поэтому

$$P(A) = C_{37}^{20}/C_{40}^{20}.$$

С другой стороны,

$$P(B) = C_3^1 \cdot C_{37}^{19}/C_{40}^{20}.$$

Таким образом,

$$P = \frac{1}{C_{40}^{20}}(C_{37}^{20} + C_3^1 \cdot C_{37}^{19}).$$

Для вычисления значения используем Maxima-программу:

```
(%i1) P:(binomial(37,20)+binomial(3,1)*
      binomial(37,19))/binomial(40, 20),numer;
(%o1) 0.5
```

или MathCad-программу

$$P := \frac{combin(37,20) + combin(3,1)\cdot combin(37,19)}{combin(40,20)}$$

$P = 0{,}5$

Ответ: $P(A) = 0{,}5$.

Пример 87.3. *Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление трёх очков имело вероятность, большую 0,75?*

Р е ш е н и е: Вероятность того, что на любой грани появится число очков, не равное трем, будет равна при одном бросании $5/6$, а при n бросаниях $-(5/6)^n$. Вероятность появления трёх очков равна $1 - (5/6)^n$. Таким образом, необходимо, чтобы $1 - (5/6)^n > 0{,}75$. Отсюда $(5/6)^n < 0{,}25$,

$$n \ln \frac{5}{6} < \ln \frac{1}{4}, \quad n > \frac{\ln 4}{\ln 1{,}2} \approx 7{,}6.$$

Следовательно, $n \geqslant 8$.
Ответ: $n \geqslant 8$.

Пример 87.4. *В коробке 11 зелёных, 5 синих и 9 красных карандашей. Из коробки наудачу берут три карандаша. Какова вероятность того, что все они будут зелёными? Рассмотреть случаи, когда карандаши: а) возвращаются в коробку, б) не возвращаются в коробку.*

Р е ш е н и е: Всего в коробке находится 25 карандашей. а) В этом случае каждый из трёх опытов будет независимым. По теореме умножения

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

найдем вероятность появления трёх зелёных карандашей:

$$P_1 = (11/25)^3 \approx 0{,}085.$$

б) Вероятность того, что первый вынутый карандаш будет зелёным, равна $11/25$; для следующих двух карандашей она соответственно будет равна $10/24$ и $9/23$. По теореме умножения вероятностей для трёх зависимых событий

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)$$

вероятность появления трёх зелёных карандашей

$$P_2 = \frac{11}{25} \cdot \frac{10}{24} \cdot \frac{9}{23} \approx 0{,}072.$$

Ответ: $P_1 \approx 0{,}085$; $P_2 \approx 0{,}072$.

Пример 87.5. *Деталь последовательно изготавливается тремя автоматами. Первый автомат допускает брак с вероятностью* 0,05, *второй* – 0,03, *третий* – 0,02. *Найти вероятности получения: а) годной детали, б) бракованной детали.*

Р е ш е н и е: Вероятности получения бракованной детали соответственно равны: $p_1 = 0{,}05; p_2 = 0{,}03; p_3 = 0{,}02$, а вероятности противоположного события, т.е. получения годной детали, будут равны $q_i = 1 - p_i$ или $q_1 = 0{,}95; q_2 = 0{,}97; q_3 = 0{,}98$.

а) Здесь $P_1 = q_1q_2q_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}98 \approx 0{,}903$.

б) Деталь будет бракованной, если хотя бы один автомат допускает брак. Тогда $P_2 = 1 - q_1q_2q_3 \approx 0{,}097$. Заметим, что пример также можно решить другим способом, если использовать формулу

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

для трёх совместных событий A, B, C.

Тогда вероятность получения бракованной детали

$$P = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3 \approx 0{,}097.$$

Ответ: $P_1 \approx 0{,}903$; $P_2 \approx 0{,}097$.

Пример 87.6. *Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются четыре карты. а) Найти вероятность того, что все они будут разных мастей; б) решить ту же задачу, когда каждая карта после вынимания возвращается в колоду; в) найти вероятность того, что среди вынутых четырёх карт будет хотя бы одна пиковая и одна бубновая.*

Р е ш е н и е:

$$\text{а)} \qquad P(A) = 1 \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 0{,}106;$$

$$\text{б)} \quad P(B) = 1 \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{26}{52} \cdot \frac{13}{52} \approx 0{,}094.$$

Обозначим $\bar{C}$ событие – нет ни пиковой, ни бубновой карты. Тогда

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49} \approx 0{,}945.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}106$; $P(B) \approx 0{,}094$; $P(C) \approx 0{,}945$.

Пример 87.7. *Для первой бригады вероятность выполнить норму равна* 0,8, *для второй* – 0,85 *и для третьей* – 0,9. *Найти вероятности того, что норму: а) выполнит только одна бригада, б) выполнят только две бригады, в) выполнят все три бригады, г) выполнит вторая бригада, д) не выполнит третья бригада, е) не выполнят все три бригады, ж) выполнит по крайней мере одна бригада.*

Р е ш е н и е: Здесь вероятности выполнения нормы $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}85$; $p_3 = 0{,}9$, а вероятности невыполнения нормы $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}15$; $q_3 = 0{,}1$. Используя результаты примера 85.7, получаем:

а)$P_1 = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0{,}056$.

Затем найдем: б) $P_2 = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}363$;

в) $P_3 = p_1p_2p_3 = 0{,}612$; г) $P_4 = q_1p_2q_3 = 0{,}017$;

д) $P_5 = p_1p_2q_3 = 0{,}068$; е) $P_6 = q_1q_2q_3 = 0{,}003$;

ж) $P_7 = 1 - q_1q_2q_3 = 0{,}997$.

Ответ: $P_1 \approx 0{,}056$; $P_2 \approx 0{,}363$; $P_3 \approx 0{,}612$; $P_4 \approx 0{,}017$; $P_5 \approx 0{,}068$; $P_6 \approx 0{,}003$; $P_7 \approx 0{,}997$.

Поскольку в последнем случае события совместные (выполнение нормы одной бригадой не исключает выполнение или невыполнение нормы двумя другими бригадами), то последний пункт примера можно также решить с помощью формулы, приведённой в примере 87.5.

Пример 87.8. *Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя* $p = 0{,}0003$. *а) Определить вероятность того, что в изготовленной партии из* 300 *генераторов окажется хотя бы один бракованный. б) Из скольких генераторов должна состоять партия, чтобы вероятность наличия в ней хотя бы одного бракованного была не более* $p_1 = 0{,}02$*?*

Р е ш е н и е: а) По теореме о вероятности появления хотя бы одного события $P = 1 - q^n$, где $q = 0{,}9997$, $n = 300$. Вычисляя с помощью логарифмирования q^n, получим $P \approx 0{,}067$.

б) Решая неравенство

$$1 - 0{,}9997^n \leqslant 0{,}02,$$

получим

$$0{,}9997^n \geqslant 0{,}98, \quad n \cdot \lg 0{,}9997 \geqslant \lg 0{,}98, \quad n \leqslant \frac{\lg 0{,}98}{\lg 0{,}9997}, \quad n \leqslant 88.$$

Заметим, что n здесь было вычислено по формуле

$$n \leqslant \lg(1 - p_1)/\lg(1 - p).$$

Ответ: $P \approx 0{,}067$; $n \leqslant 88$.

Пример 87.9. *Из двадцати изделий – три бракованных. Определить вероятность того, что из девяти взятых для проверки изделий, окажется хотя бы одно бракованное.*

Р е ш е н и е: Согласно формуле $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, имеем:

$$P(A) = 1 - \frac{C_{17}^9}{C_{20}^9} = 1 - \frac{11}{76} = \frac{65}{76} \approx 0{,}855.$$

Здесь противоположное событие $\bar{A}$ — не окажется ни одного бракованного изделия. Ответ: $P(A) = 65/76 \approx 0{,}855$.

Самостоятельная работа

Пример 87.10. *Через данную остановку с одинаковым интервалом проходят* 39 *автобусов, из них* 14 *автобусов маршрута* $N1$, 12 *автобусов маршрута* $N2$ *и* 13 *автобусов маршрута* $N3$. *Какова вероятность того, что первый подходящий автобус будет иметь маршрут* $N1$ *или* $N3$*?*

Пример 87.11. *При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью* 0,95. *Найти вероятность того, что двигатель начнёт работать при втором включении зажигания.*

Пример 87.12. *В лабораторию поступило два прибора, изготовленных на одном заводе, и три прибора, изготовленных на другом заводе. Вероятность того, что прибор, поступивший с первого завода, имеет высшее качество, равна* 0,75, *а со второго –* 0,6. *Найти вероятности того, что: а) все приборы имеют высшее качество, б) по крайней мере один из них имеет высшее качество, в) ни один из них не имеет высшее качество.*

Пример 87.13. *Отдел технического контроля проверяет две партии изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие из первой партии стандартно, равна* 0,92, *а из второй –* 0,96. *Из каждой партии берутся по одному изделию. Найти вероятность того, что только одно из них будет стандартно.*

Пример 87.14. *Из полной колоды* 52 *карт наудачу вынимаются одна за другой три карты без возвращения. Какова вероятность того, что в первый раз будет извлечена тройка, во второй – семерка, в третий – туз.*

Пример 87.15. *Из группы студентов в* 12 *человек каждый раз наудачу назначают дежурных по четыре человека. Найти вероятность того, что после трёх дежурств каждый студент отдежурил по одному разу.*

Пример 87.16. *Из 20 автомобилей, отправленных на ремонт, 6 требуют ремонта коробки передач. Найти вероятность того, что из трёх выбранных случайно автомобилей по крайней мере один требует ремонта коробки передач.*

Пример 87.17. *Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса равна 0,0002. а) Определить вероятность того, что в партии из 400 шариков содержится хотя бы один ниже третьего класса. б) Какой должен быть объём партии, чтобы вероятность наличия в ней хотя бы одного бракованного шарика была не более* $p_1 = 0{,}03$*?*

Пример 87.18. *В коробке лежат 20 галстуков, причём 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из трёх вынутых наудачу галстуков все они окажутся одного цвета.*

Пример 87.19. *Из двух наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся ладьями?*

Пример 87.20. *Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наудачу. а) Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места. б) Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечётная?*

Пример 87.21. *В урне* m *белых и* n *чёрных шаров. Из урны вынимаются одновременно два шара. Определить вероятность того, что оба шара будут: а) белыми, б) разных цветов.*

Пример 87.22. *В партии, состоящей из 30 деталей, имеются 5 бракованных. Из партии выбирается для проверки 10 деталей. Если среди контрольных окажется более двух бракованных, партия не принимается. Найти вероятность того, что данная партия не будет принята.*

Пример 87.23. *В урне 10 белых и 5 чёрных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут чёрный шар.*

Пример 87.24. *Какова вероятность того, что в группе из 30 случайно отобранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения? А в группе из 50 студентов?*

Пример 87.25. *В лотерее* 10000 *билетов, из которых* 1000 *выигрышных. Участник лотереи покупает* 10 *билетов. Определить вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.*

Лекция 88. Испытание Бернулли

Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появлений события A. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона. Отклонение частоты от вероятности

88.1. Формула Бернулли

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Обозначим $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Будем записывать возможные результаты испытаний в виде комбинаций букв A и $\bar{A}$; например, запись $A\bar{A}\bar{A}A$ означает, что событие A осуществилось в 1-м и 4-м испытаниях и не осуществилось во 2-ом и 3-м. Всякую комбинацию, в которой A встречается m раз, а $\bar{A}$ встречается $n-m$ раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству способов, которыми можно выбрать m мест из n, чтобы разместить буквы A (буквы $\bar{A}$ на оставшихся местах разместятся однозначно), т.е. числу сочетаний из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вероятности всех благоприятных комбинаций одинаковы, в каждой из них событие A (также, как и $\bar{A}$) происходит одинаковое количество раз, поэтому посчитаем вероятность комбинации
$B_1 = AA\ldots A\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}$, в которую A входит m раз, а $\bar{A}/n-m$ раз.

Вероятность этой комбинации в силу независимости испытаний на основании теоремы умножения вероятностей, равна

$$P(B_1) = p^m q^{n-m},$$

также как и для остальных комбинаций:

$$P(B_2) = \cdots = P(B_k) = p^m q^{n-m},$$

где количество комбинаций $k = C_n^m$.

Все благоприятные комбинации являются несовместными, поэтому по теореме сложения:

$$P_n(m) = P(B_1 + \cdots + B_k) = P(B_1) + \cdots + P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Мы получили формулу Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{88.1}$$

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (88.1), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p), а в пакет MathCad – dbinom(m,n,p).

Пример 88.1. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,6. *Какова вероятность того, что* 8 *выстрелов дадут* 5 *попаданий?*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 8$, $m = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
По формуле (88.1) имеем:

$$P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}279.$$

Maxima-программа решения данной задачи имеет вид:
(%i1) load(distrib);
(%i2) pdf_binomial(5, 8, 0.6);
(%o2) 0.27869184
В пакете MathCad достаточно написать одну строку:
dbinom(5, 8, 0.6)=0.279
Ответ: $P \approx 0{,}279$.

Пример 88.2. *В условиях примера 88.1 найти вероятность того, что число попаданий будет не больше* 5 *и не меньше* 3-*х*.

Р е ш е н и е: Обозначим искомую вероятность $P_8(3 \leqslant m \leqslant 5)$. Эта вероятность в соответствии с формулой (88.1) представляется в виде суммы вероятностей попарно несовместных событий:

$$P_8(3 \leqslant m \leqslant 5) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5).$$

Находя по формуле Бернулли каждое слагаемое, получаем:
$P_8(3 \leqslant m \leqslant 5) = C_8^3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^5 + C_8^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^4 + C_8^5 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx$
$\approx 0{,}124 + 0{,}232 + 0{,}279 = 0{,}635.$

Замечание 88.1. *Формулу (87.6), полученную в предыдущей лекции, можно получить, используя формулу Бернулли. Действительно, по формуле Бернулли получим:*

$$P(\bar{A}) = C_n^0 p^0 q^n = (1-p)^n \implies P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1-p)^n.$$

Пример 88.3. *В условии примера 88.1 найти вероятность хотя бы одного попадания в цель при 8 выстрелах.*

Решение: Сначала найдем вероятность противоположного события, т.е. вероятность ни разу не попасть в цель при 8 выстрелах:

$$P(\bar{A}) = (1-p)^n = 0{,}4^8 \approx 0{,}001 \implies P(A) \approx 0{,}999.$$

Замечание 88.2. *Формула Бернулли обобщается на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода A и $\bar{A}$, а несколько. Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Тогда вероятность того, что в k_1 опытах появится событие A_1, …, в k_m опытах — событие A_m $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \tag{88.2}$$

88.2. Наивероятнейшее число появления события A

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна; это значение m называется наивероятнейшим числом m^* наступления события A в n испытаниях.

Можно показать, что

$$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p. \tag{88.3}$$

Если неравенству (88.3) удовлетворяют два целых значения m^*, имеется два наивероятнейших числа.

Так, в примере 88.1 имеем $9 \cdot 0{,}6 - 1 \leqslant m^* \leqslant 9 \cdot 0{,}6$. Этому неравенству удовлетворяет единственное целое значение $m^* = 5$.

ПРИМЕР 88.4. *Найти наивероятнейшее число выпадений орла при 11 бросаниях монеты.*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 1$, $p = \dfrac{1}{2}$. В соответствии с неравенством (88.3) получаем:

$$12 \cdot \frac{1}{2} - 1 \leqslant m^* \leqslant 12 \cdot \frac{1}{2}.$$

Этому неравенству удовлетворяют два значения $m^* = 5$ и $m^* = 6$. В данном примере два наивероятнейших значения с одинаковыми вероятностями:

$$P_{11}(5) = P_{11}(6) = C_{11}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = C_{11}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0{,}226.$$

88.3. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Вычисления по формуле Бернулли при больших n громоздки и приводят к значительным погрешностям. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

Теорема 88.1 (Локальная теорема Лапласа). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}. \tag{88.4}$$

Значения функции $\varphi(x)$ имеются в таблицах в учебниках по теории вероятностей (см. приложение 1) и вычисляются в математических и статистических программах для компьютеров (например, в Excel, MathCad, Maxima, MathLab и прочих). В данном пособии таблицы $\varphi(x)$ приведены для $0 \leqslant x \leqslant 4$. Пользуясь очевидными свойствами функции $\varphi(x)$, можно найти её значения при любых x:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0.$$

Пример 88.5. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,6. *Найти вероятность того, что* 100 *выстрелов дадут* 50 *попаданий.*

Р е ш е н и е: По условию $n = 100$, $m = 50$, $p = 0{,}6$. Воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \cdot \varphi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0{,}6}{\sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx$$
$$\approx 0{,}2041 \cdot \varphi(2,04) \approx 0{,}2041 \cdot 0{,}0498 = 0{,}010.$$

Для решения такой трудоемкой задачи лучше использовать компьютерные математические пакеты.

Рассмотрим решение примера 88.5 в рамках пакета Maxima.

(%i1) load(distrib); numer:true;

/* *Задаём функцию, соответствующую локальной теореме Лапласа**/

(%i2) L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1−p)),
sqrt2*%pi* exp(−0.5*((m−n*p)*y)^ 2));

/* *Вычисляем значение функции при* $n = 100$, $m = 50$ *и* $p = 0{,}6$*/

(%i2) PL:L_Lapl(50, 100, 0.6);

(%o2) 0.01014

В первой строке загружается библиотека distrib. В этой библиотеке собраны многочисленные функции, предназначенные для решения задач теории вероятностей и математической статистики. Во второй строке программируется формула локальной теоремой Лапласа, а в третьей строке вычисляется значение по этой формуле.

Функцию pdf_binomial, вычисляющую вероятность по формуле Бернулли, можно применять и при больших значениях числа испытаний. Используем формулу Бернулли для нашей задачи:

/* *Решаем пример 88.5 используя точную формулу Бернулли**/

(%i3) PB:pdf_binomial(50, 100, 0.6);

(%o3) 0.010338

(%i4) PB−PL;

(%o4) $1.9783067 * 10^{-4}$

Таким образом, точность локальной теоремы Лапласа для примера 88.5 $\approx 0{,}0002$.

MathCad-программа для решения примера 88.5 имеет вид:

$$dLapl := \left| \begin{array}{l} y \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot exp\Big[-0.5 \cdot \big[(m - n \cdot p) \cdot y \big]^2 \Big] \end{array} \right.$$

$dLapl(50, 100, 0.6) = 0.01$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах (см. пример 88.2) при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 88.1. *Функцией Лапласа* $\Phi(x)$ *называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{88.5}$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

(1) $\Phi(x)$ непрерывная, возрастающая функция,
(2) Её область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
(3) $\Phi(0) = 0$,
(4) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,
(5) $\Phi(+\infty) = 0{,}5, \quad \Phi(-\infty) = -0{,}5$.

Примем свойства 1 и 2 без доказательства. Для доказательства свойства 3 заметим, что

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.$$

Для доказательства свойства 4 произведём замену переменных в определённом интеграле:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\langle \begin{array}{c} t = -u \\ dt = -du \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi(x).$$

Свойство 5 вытекает из известного равенства для интеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi} \implies \Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{в силу чётности подынтегральной функции.}$$

Значения функции Лапласа также имеются в таблицах в учебниках по теории вероятностей (см. приложение 2) и вычисляются в математических и статистических программах для компьютеров (например, в EXCEL, Maxima, MathCad, MathLab). В данном пособии таблицы $\Phi(x)$ приведены для $0 \leqslant x \leqslant 5$. Пользуясь приведёнными свойствами $\Phi(x)$, можно найти её значения при любых x.

Теорема 88.2 (Интегральная теорема Лапласа)**.** *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1, но не более m_2 раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{88.6}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ *— функция Лапласа.*

Теоремы 88.1 и 88.2 примем без доказательства.

В пакетах Maxima и MathCad для вычисления функции Лапласа применяется функция cdf_normal(x,a, σ) и pnorm(x,a, σ),соответственно, которые определяют функцию распределения для нормального закона (лекция 92) равную интегралу $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$

Тогда функция Лапласа вычисляется по формуле:
$\Phi(x) = cdf\_normal(x, 0, 1) - 0{,}5$ в пакета Maxima и
$\Phi(x) = pnorm(x, 0, 1) - 0{,}5$ – в пакете MathCad.

88.4. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1 , то теоремы 88.1 и 88.2 неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 88.3. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \tag{88.7}$$

Замечание 88.3. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\bar{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 88.6. *Вероятность появления опечатки на одной странице книги равна* 0,01*. Найти вероятность того, что в книге из* 100 *страниц имеется более одной опечатки.*

Р е ш е н и е: Найдём вероятность противоположного события, т.е. вероятность $P(\bar{B})$ того, что в книге не более одной опечатки (0 или 1 опечатка).

Так как $np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$, то

$$P(\bar{B}) = P_{100}(0) + P_{100}(1) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} \approx 0{,}736.$$

Искомая вероятность равна $P(B) \approx 1 - 0{,}736 = 0{,}264$.

88.5. Отклонение частоты от вероятности

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε, т.е. найдем $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\}$. Заменяя неравенство равносильным и применяя интегральную теорему Лапласа, получим в условиях теоремы 88.2:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n}-p \leqslant \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{np - n\varepsilon \leqslant m \leqslant np + n\varepsilon\right\} \approx \Phi\left(\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В последнем равенстве мы воспользовались нечётностью функции Лапласа. Итак, мы получили, что при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{88.8}$$

Пример 88.7. *Вероятность того, что лампочка бракованная $p=0{,}1$. Определить, сколько лампочек нужно отобрать для проверки, чтобы с вероятностью $0{,}9544$ можно было утверждать, что относительная частота бракованных лампочек отличается от вероятности p по абсолютной величине не более, чем на $0{,}03$.*

Р е ш е н и е: Здесь $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}03$;

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| \leqslant 0{,}03\right\} = 0{,}9544.$$

Найдём n. По формуле (88.8):

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) = 0{,}9544 \implies \Phi(0{,}1\cdot\sqrt{n}) =$$

$$= 0{,}4772 \implies 0{,}1\sqrt{n} = 2 \implies n = 400.$$

Полученный результат означает, что в партии из 400 лампочек количество m бракованных будет с вероятностью близкой к 1 заключено в пределах от $400\cdot 0{,}1 - 400\cdot 0{,}03 = 28$ до $400\cdot 0{,}1 + 400\cdot 0{,}03 = 52$.

Практическое занятие 88. Формулы полной вероятности и Бейеса

Метод решения задач на формулу полной вероятности сводится к следующему. В условиях теоремы 87.5 обозначается событие A, вероятность которого нужно найти в примере. Затем обозначаются гипотезы H_i, и вычисляются их вероятности $P(H_i)$. Наконец, определяются условные вероятности события A, и по формуле полной вероятности (87.7) находится искомая вероятность события A.

Пример 88.1. *На трёх шлифовальных станках было обработано* 120 *валов, причём первым, вторым и третьим станками было обработано соответственно* 50, 34 *и* 36 *валов. Вероятность того, что первый станок производит обработку отличного качества равна* 0,96*, второй –* 0,93*, третий –* 0,95*. Определить вероятность того, что случайно выбранный вал имеет обработку отличного качества.*

Решение: Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный вал обработан отлично. Гипотезами здесь будут: H_1 – наудачу взятый вал обработан первым станком, H_2 – вторым, H_3 – третьим. Их вероятности равны:

$$P(H_1) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}, \quad P(H_2) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}, \quad P(H_3) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}96, \quad P(A/H_2) = 0{,}93, \quad P(A/H_3) = 0{,}95.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{5}{12} \cdot 0{,}96 + \frac{17}{60} \cdot 0{,}93 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}95 = 0{,}9485 \approx 0{,}949.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}949$.

Пример 88.2. *В первом ящике содержится* 30 *деталей, из которых* 25 *окрашенных, а во втором –* 27*, из которых* 21 *окрашена. При перевозке одна деталь из первого ящика выпала и её положили во второй ящик. Затем для работы из второго ящика извлекли деталь. Определить вероятность того, что она будет окрашена.*

Решение: Событие A – появление окрашенной детали; гипотезы: H_1 – переложена окрашенная деталь, H_2 – переложена неокрашенная деталь. Вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \qquad P(H_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}, \qquad P(A/H_2) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Вероятность события A

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{131}{168} \approx 0{,}780.$$

Ответ: $P(A) = 131/168 \approx 0{,}780$.

Пример 88.3. *В коробке находятся* 20 *новых резцов и* 5 *уже использованных. Из коробки наудачу берут три резца, которые после работы возвращают обратно. Назавтра из коробки снова берут три резца. Найти вероятность того, что эти три резца будут новыми.*

Р е ш е н и е: Здесь гипотезы H_i, где $i = 0, 1, 2, 3$, – в первый день работы берут i новых резцов; их вероятности определяются по формуле:

$$P(H_i) = C_{20}^{i} \cdot C_5^{3-i}/C_{25}^3.$$

Событие A - на второй день взято три новых резца. Условные вероятности этого события $P(A/H_i) = C_{20-i}^3/C_{25}^3$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{(C_{25}^3)^2}(C_5^3 \cdot C_{20}^3 + C_{20}^1 \cdot C_5^2 \cdot C_{19}^3 + C_{20}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{18}^3 + C_{20}^3 \cdot C_{17}^3) \approx 0{,}332.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}332$.

Пример 88.4. *Работа двигателя контролируется двумя регуляторами. В течение определённого отрезка времени вероятность безотказной работы первого регулятора равна* 0,8, *второго* – 0,9. *При отказе обоих регуляторов двигатель выходит из строя. При отказе одного из регуляторов двигатель выходит из строя с вероятностью* 0,7. *Найти вероятность безотказной работы двигателя.*

Р е ш е н и е: Событие A – двигатель работает безотказно. Гипотезы: H_1 – оба регулятора не отказали, H_2 – один отказал, H_3 – оба отказали. Вероятности гипотез равны:

$P(H_1) = p_1 p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$,

$P(H_2) = p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$,

$P(H_3) = q_1 q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$;

здесь $p_1 = 0{,}8,\ p_2 = 0{,}9,\ q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2,\ q_2 = 1 - p_2 = 0{,}1$.

Условные вероятности данных гипотез следующие:

$$P(A/H_1) = 1, \quad P(A/H_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, \quad P(A/H_3) = 0.$$

Окончательно найдем:

$$P(A) = 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}26 \cdot 0{,}3 + 0{,}02 \cdot 0 = 0{,}798.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}798$.

Пусть теперь событие A произошло. Тогда если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, то после опыта условные вероятности гипотез будут определяться уже по формуле Бейеса (87.8).

Пример 88.5. *Имеются три партии шатунов: в первой из них 5 расточенных резцом и 7 не расточенных; во второй – 8 расточенных и 6 не расточенных; в третьей – 10 расточенных. Наудачу выбирается одна из партий и из неё берется шатун. Этот шатун оказался расточенным. Найти вероятности того, что данный шатун взят из первой, второй и третьей партии.*

Решение:

Гипотезы $H_i (i = 1, 2, 3)$ – выбор i-той партии; их вероятности ввиду равнозначности выбора $P(H_i) = 1/3$. У нас событие A – взят расточенный шатун; условные вероятности этого события будут:

$$P(A/H_1) = 5/12, \quad P(A/H_2) = 4/7, \quad P(A/H_3) = 1.$$

Искомые вероятности найдутся по формуле Бейеса

$$P(H_i/A) = \frac{1}{3}P(A/H_i)/\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} P(A/H_j) = P(A/H_i)/\sum_{j=1}^{3} P(A/H_j).$$

Тогда переоценка гипотез, сделанная после того, как событие A произошло, нам даст:

$$P(H_1/A) = \frac{5/12}{5/12 + 4/7 + 1} = \frac{35}{167} \approx 0{,}210,$$

$$P(H_2/A) = \frac{48}{167} \approx 0{,}287, P(H_3/A) = \frac{84}{167} \approx 0{,}503.$$

Заметим, что до опыта вероятности всех гипотез были одинаковы и равнялись 1/3.

Ответ: $P(H_1/A) = 35/167 \approx 0{,}210$; $P(H_2/A) = 48/167 \approx 0{,}287$; $P(H_3/A) = 84/167 \approx 0{,}503$.

Пример 88.6. *В трёх цехах завода производится соответственно 40%, 35% и 25% всей однотипной продукции; причём брак каждого цеха составляет 4%, 3% и 5% соответственно. а) Какова вероятность того, что изделие, выбранное случайно, будет бракованным? б) Пусть теперь случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Найти вероятности того, что оно было сделано в первом, втором, третьем цехах.*

Р е ш е н и е: а) Событие A – выбранное изделие браковано. Гипотезы H_1, H_2, H_3 состоят в том, что изделие произведено соответственно в первом, втором, третьем цехах. Тогда

$$P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 0{,}35, \quad P(H_3) = 0{,}25,$$

а условные вероятности

$$P(A/H_1) = 0{,}04, \quad P(A/H_2) = 0{,}03, \quad P(A/H_3) = 0{,}05.$$

Полная вероятность

$$P(A) = \sum_{i=3}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}039.$$

Вероятности того, что бракованное изделие сделано в первом, втором, третьем цехах, найдем по формуле Бейеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}039} = \frac{16}{39} \approx 0{,}410,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}269,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{25}{78} \approx 0{,}321.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}039$; $P(H_1/A) = 16/39 \approx 0{,}410$; $P(H_2/A) = 7/26 \approx 0{,}269$; $P(H_3/A) = 25/78 \approx 0{,}321$.

Пример 88.7. *Станком обрабатываются детали, причём* 95% *данной продукции удовлетворяет принятым допускам. Первоначальный контроль признает пригодным детали, находящиеся в пределах допуска, с вероятностью* $0{,}97$*, а те, которые не удовлетворяют допуску, с вероятностью* $0{,}08$*. Найти вероятность того, что деталь, прошедшая контроль (признанная годной), действительно удовлетворяет допуску.*

Р е ш е н и е: Гипотеза H_1 – деталь находится в пределах допуска, а H_2 – не находится. По данным задачи $P(H_1) = 0{,}95$, $P(H_2) = 0{,}05$. Событие A – деталь при проверке находится в пределах допуска. Тогда

$$P(H_1/A) = 0{,}97, \qquad P(H_2/A) = 0{,}08.$$

Таким образом,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}97}{0{,}95 \cdot 0{,}97 + 0{,}05 \cdot 0{,}08} \approx 0{,}996.$$

Ответ: $P(H_1/A) \approx 0{,}996$.

Самостоятельная работа

Пример 88.8. *В цехе имеется* 5 *станков одного типа и* 4 *станка второго типа. Вероятность того, что в течение рабочей смены станок первого типа не выйдет из строя, равна* 0,92, *а второго типа –* 0,96. *Проводится проверка работы наудачу выбранного станка. Найти вероятность того, что этот станок в течение всей рабочей смены будет работать.*

Пример 88.9. *В магазин поступили телевизоры с двух заводов. Продукция первого завода содержит* 5% *телевизоров со скрытым дефектом, второго –* 3%. *Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если с первого завода поступило* 60% *всех телевизоров, имеющихся в магазине, а со второго –* 40%*?*

Пример 88.10. *Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех даёт* 3% *брака, второй –* 5%. *Для контроля отобраны* 10 *деталей из первого цеха и* 12 *– из второго. Эти детали смешаны в одну партию и из неё наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?*

Пример 88.11. *Партия изделий содержит* 90% *высококачественной продукции,* 8% *изделий низкого качества и* 2% *бракованных изделий. Если подвергнуть изделие испытанию, то все высококачественные изделия его выдерживают, из числа изделий низкого качества* 60% *проходят это испытание и* 10% *бракованных изделий также выдерживают испытание. Какова вероятность того, что наудачу выбранное изделие, прошедшее испытание, относится к числу высококачественных?*

Пример 88.12. *В первом трамвае из* 36 *пассажиров* 2 *не имеют билета; для второго и третьего трамваев – эти цифры соответственно равны:* 27 *и* $1, 48$ *и* 3. *Контролер выбирает наугад один из данных трамваев. Найти вероятности того, что: а) первый пассажир, которого проверяет контролер, не имеет билета; б) два проверенных пассажира имеют билеты.*

Пример 88.13. *В урну, содержащую* 5 *шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету не отличаются друг от друга.*

Пример 88.14. *Два из трёх студентов, сдавших экзамен, ответили на «отлично». Найти вероятность того, что ответили на «отлично» второй и третий студенты, если первый, второй и третий студенты знают соответственно* $85\%, 90\%$ *и* 95% *данного курса. Рекомендация: рассмотреть гипотезы* H_1 *– сдали на «отлично» первый и второй студенты,* H_2 *– первый и третий,* H_3 *– второй и третий.*

Пример 88.15. *Цех производит приборы, причём* 9% *продукции имеет какой-либо дефект. Вначале все приборы проверяются контролером, который обнаруживает дефект с вероятностью* $0{,}96$. *Не забракованные контролером приборы поступают в отдел технического контроля завода, где дефект обнаруживается с вероятностью* $0{,}98$. *Данный прибор оказался забракованным. Найти вероятности того, что он забракован: а) контролером, б) отделом технического контроля.*

Лекция 89. Дискретные случайные величины

Закон распределения. Математическое ожидание. Дисперсия

89.1. Закон распределения

Кроме случайных событий и вероятностей их появления, в теории вероятностей нас обычно интересуют некоторые величины, связанные со случайными событиями и называемые случайными величинами. Так, в азартных играх, кроме вероятностей выигрыша, обычно интересуются размером выигрыша.

Полностью корректное с точки зрения математики определение случайной величины приведено в приложении 6. Здесь мы введем определение, достаточное для решения большинства прикладных задач.

Определение 89.1. *Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает то или иное значение в зависимости от исхода испытания.*

Пример 89.1. *Число родившихся девочек среди 10 младенцев есть случайная величина, принимающее значения* $0, 1, 2, \ldots, 10$.

Измеренная величина роста человека есть случайная величина, принимающая значения из некоторого $(a; b)$. *Например, можно считать, что, измеренная в метрах, эта величина находится в интервале* $(0{,}3; 3)$.

Случайные величины будем изображать греческими буквами: ξ (кси), ζ (дзета), η (эта), θ (тета) и т.д., а их возможные значения строчными латинскими буквами: x, y, z и т.д.

Определение 89.2. *Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные значения из конечного или бесконечного счётного множества.*

Т.е. все эти значения можно «пересчитать» — поставить им в соответствие натуральные числа. Так, в примере 89.1 число родившихся девочек — дискретная случайная величина, а измеренный рост не является таковой.

Дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей, в которой перечислены все значения, принимаемые случайной величиной и соответствующие им вероятности (см. табл. 89.1.)

Таблица 89.1

Закон распределения				
ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

В таблице 89.1 для случайной величины ξ, принимающей n значений $x_1, \ldots, x_n$, перечислены вероятности $p_i = P\{\xi = x_i\}$.

Поскольку в данном испытании случайная величина ξ обязательно принимает одно из своих n значений, события $\xi = x_1, \xi = x_2, \ldots, \xi = x_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий. Применяя теорему сложения вероятностей (87.1), получаем, что сумма их вероятностей равна вероятности достоверного события, т.е. 1:

$$p_1 + \ldots + p_n = 1.$$

Пример 89.2. *При бросании монеты игрок получает 1\$ при выпадении орла и платит 1\$ при выпадении решки. Случайная величина* ξ, *равная выигрышу в одной игре, задаётся законом распределения:*

ξ	1	−1
p	0,5	0,5

Пример 89.3. *Случайная величина ξ задана законом распределения:*

ξ	1	2	5	10
p	0,1		0,3	0,2

Найти отсутствующую вероятность.

Решение: Из условия $0{,}1+p_2+0{,}3+0{,}2 = 1$ определяем: $p_2 = 0{,}4$. Ответ: $p_2 = 0{,}4$.

Иногда удобно изобразить закон распределения графически: по оси абсцисс отложить значение x_i, а по оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Полученные точки соединяют отрезками прямых. Получившийся график называется *многоугольником вероятностей.* На рис. 3 изображён многоугольник вероятностей для дискретной случайной величины из примера 89.3.

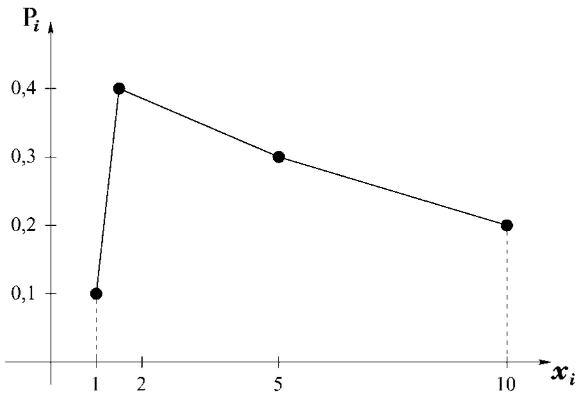


Рис. 3. *Многоугольник вероятностей*

Кроме одномерных случайных величин, изучают также двумерные, трёхмерные и многомерные случайные величины.

Рассмотрим точку на плоскости со случайными координатами $(\xi;\zeta)$. Вначале рассмотрим случай, когда обе составляющие — дискретные случайные величины, т.е. множество их значений конечно или счётно.

Определение 89.3. *Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называется перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел* $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, *и их вероятностей* $p_{ij} = P\{\xi = x_i; \zeta = y_i\}$.

Закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i, которые могут принимать ξ и ζ и их вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \zeta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Так как события $\{\xi = x_i, \zeta = y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие, сумма всех вероятностей равна 1.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот). Например, для ξ имеем:

$$\begin{gathered} P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = x_i, \zeta = y_1\} + P\{\xi = x_i, \zeta = y_2\} + \ldots \\ \ldots + P\{\xi = x_i, \zeta = y_m\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i\cdot}\ . \end{gathered} \tag{89.1}$$

Аналогично для ζ получим

$$P\{\zeta = y_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{\cdot j}\ . \tag{89.2}$$

Итак, сложив вероятности по строкам и записав их в последний столбец, мы получим распределение составляющей ξ. Сложив вероятности по столбцам и записав их в последнюю строчку, мы получим распределение составляющей ζ.

89.2. Математическое ожидание

Закон распределения полностью определяет дискретную случайную величину. Однако иногда удобнее характеризовать её с помощью нескольких числовых характеристик, каждая из которых определяет одно из свойств этой случайной величины. Одной из таких числовых характеристик является математическое ожидание.

Определение 89.4. *Математическим ожиданием $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ называется сумма произведений всех её значений на соответствующие вероятности:*

$$M(\xi) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ \ldots + x_np_n. \tag{89.3}$$

Замечание 89.1. *Математическое ожидание случайной величины не является случайной величиной, это вполне определённое число.*

Замечание 89.2. *Если $y = f(x)$ – непрерывная функция, то для дискретной случайной величины ξ, $\zeta = f(\xi)$ также будет случайной величиной и её математическое ожидание вычисляется по формуле:*

$$M(f(\xi)) = f(x_1) \cdot p_1 + \cdots + f(x_n) \cdot p_n.$$

Пример 89.4. *Для случайной величины из примера 89.3 найти математическое ожидание.*

Решение: $M(\xi) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}2 = 4{,}4$.
Ответ: $M(\xi) = 4{,}4$.

Для определения вероятностного смысла математического ожидания рассмотрим следующий пример.

Пример 89.5. *Из 10 оценок данного студента 7 троек, 2 четвёрки и 1 пятерка. Какова средняя оценка данного студента?*

Решение: Простые вычисления дают результат:

$$\frac{7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{10} = 3{,}4.$$

Записав эти вычисления в виде

$$3{,}4 = 3 \cdot \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10},$$

получим, что средняя оценка равна сумме произведений оценок на их относительную частоту. Как отмечалось, при увеличении числа испытаний относительная частота стабилизируется вокруг вероятности. Из сказанного можно сделать вывод, что сумма произведений значений случайной величины на их соответствующие вероятности равна среднему значению этой величины. В этом заключается *вероятностный смысл математического ожидания: математическое ожидание равно среднему значению случайной величины.*

Замечание 89.3. *Происхождение термина «математическое ожидание» объясняется тем, что на раннем этапе теория вероятностей в основном занималась азартными играми и игрока интересовал средний ожидаемый выигрыш.*

Перечислим свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание константы равно константе:

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Так как константа задаётся следующим законом распределения:

ξ	C
p	1

,

её математическое ожидание очевидно равно

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi).$$

Доказательство. Если случайная величина ξ задана законом распределения — таблицей 89.1, то случайная величина $C\xi$, очевидно, задаётся следующей таблицей:

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	$\dots$	Cx_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

и её математическое ожидание равно:

$$M(C\xi) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + \dots + x_np_n) = CM(\xi).$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi + \zeta) = M(\xi) + M(\zeta).$$

Замечание 89.4. *Как следует из свойств 1 и 3,* $M(\xi + C) = M(\xi) + C$.

Замечание 89.5. *Свойства 2 и 3 позволяют для любого конечного числа случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ и чисел $C_1, \dots, C_n$ написать:*

$$M(C_1\xi_1 + \dots + C_n\xi_n) = C_1M(\xi_1) + \dots + C_nM(\xi_n).$$

В частности: $M(\xi - \zeta) = M(\xi) - M(\zeta)$.

Для того, чтобы иметь возможность сформулировать следующее свойство, дадим определение независимых дискретных случайных величин.

Определение 89.5. *Две дискретные случайные величины ξ и ζ называются независимыми, если вероятности p_{ij} в законе распределения двумерной дискретной случайной величины $(\xi;\zeta)$ равны произведению соответствующих вероятностей одномерных распределений составляющих:*

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}.$$

Как будет показано в лекции 94 (замечание 94.1) это означает, что для независимых случайных величин закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

Если, например, две независимые случайные величины ξ и ζ имеют законы распределения, определяемые таблицами 89.2 и 89.3, то их произведение будет иметь распределение, задаваемое таблицей 89.4.

Таблица 89.2

ξ	x_1	x_2
p	p_1	p_2

Таблица 89.3

ζ	y_1	y_2
p	g_1	g_2

Таблица 89.4

$\xi \cdot \zeta$	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
p	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

Действительно, в соответствии с определением 89.5, например, для первой вероятности из таблицы 89.4 имеем:

$$P\{\xi \cdot \zeta = x_1y_1\} = P\{\xi = x_1,\ \zeta = y_1\} = P\{\xi = x_1\} \cdot P\{\zeta = y_1\} = p_1g_1.$$

Теперь мы можем сформулировать последнее свойство математического ожидания:

4. Математическое ожидание двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi \cdot \zeta) = M(\xi) \cdot M(\zeta).$$

Доказательство для случайных величин, задаваемых таблицами 89.2, 89.3, 89.4, студентам рекомендуется провести самостоятельно.

Аналогично тому, как это было сделано для двумерных дискретных случайных величин, закон распределения n-мерной дискретной случайной величины задают в виде таблицы с n входами, в которой указывают значения вероятностей $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ того, что n-мерный случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ принял значение $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$, где каждая компонента может принимать значение из конечного или счётного множества.

Зная n-мерное распределение $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ можно получить распределение каждой составляющей $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_n}$ (обратное, вообще говоря, неверно).

Определение 89.6. *Независимыми называются n дискретных случайных величин, если вероятности $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ равны произведению соответствующих вероятностей одномерных распределений составляющих:*

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_n} = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}.$$

Из свойства 4 можно легко вывести следующее следствие:

Следствие 89.1. *Для n независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий.*

$$M(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M(\xi_1) \cdot \ldots \cdot M(\xi_n).$$

89.3. Дисперсия

Поскольку рассматриваемые величины случайные, кроме среднего значения, полезно было бы знать характеристику степени их разброса вокруг среднего значения. В качестве такой характеристики нельзя рассматривать отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi - M(\xi)$, т.к. оно случайно. В среднем это отклонение равно нулю: $M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0$. Поэтому в качестве характеристики разброса случайной величины вокруг её среднего значения рассматривают математическое ожидание квадрата отклонения.

Определение 89.7. *Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения от математического ожидания:*

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{89.4}$$

В соответствии с замечанием 89.2, для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i. \tag{89.5}$$

Из определения ясно, что дисперсия случайной величины сама является неслучайной величиной.

Пример 89.6. *Для случайной величины из примера 89.3 найти дисперсию.*

Решение: В примере 89.4 было найдено её математическое ожидание: $M(\xi) = 4,4$. По формуле (89.5) определяем:

$D(\xi) = (1-4,4)^2{\cdot}0{,}1+(2-4,4)^2{\cdot}0{,}4+(5-4,4)^2{\cdot}0{,}3+(10-4,4)^2{\cdot}0{,}2 \approx$ $\approx 9,472$.

Иногда для вычисления дисперсии удобнее пользоваться другой формулой, которую выведем, пользуясь свойствами математического ожидания:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{89.6}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= M(\xi - M(\xi))^2 = M\big(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + (M(\xi))^2\big) = \\ &= M(\xi^2) - 2M(\xi)M(\xi) + (M(\xi))^2 = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \end{aligned}$$

Для дискретной случайной величины вычисление дисперсии по формуле (89.6) сводится к вычислению суммы:

$$D(\xi) = \sum_i x_i^2 p_i - (M(\xi))^2. \tag{89.7}$$

Самостоятельно убедитесь, что вычисление по формуле (89.7) в примере 89.6 даёт тот же результат.

Приведем свойства дисперсии.

(1) $D(\xi) \geqslant 0$.

Действительно, все слагаемые в формуле (89.5) неотрицательны.

(2) $D(C) = 0$.
Действительно: $D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 =$
$= M(0) = 0$

(3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$.
Доказательство.

$$D(C \cdot \xi) = M(C \cdot \xi - M(C \cdot \xi))^2 = M(C \cdot \xi - C \cdot M(\xi))^2 =$$
$$= M\big(C \cdot (\xi - M(\xi))\big)^2 = M\big(C^2 \cdot (\xi - M(\xi))^2\big) =$$
$$= C^2 \cdot M(\xi - M(\xi))^2 = C^2 \cdot D(\xi).$$

(4) Для независимых случайных величин ξ и ζ:
$D(\xi + \zeta) = D(\xi) + D(\zeta)$.
Доказательство этого свойства получится из определения 89.7 после несложных алгебраических преобразований. Проведите его самостоятельно.

Следствие 89.2. *Для независимых случайных величин* $D(\xi - \zeta) = D(\xi) + D(\zeta)$.

Действительно:

$$D(\xi - \zeta) = D\big(\xi + (-1) \cdot \xi\big) = D(\xi) + (-1)^2 \cdot D(\xi) = D(\xi) + D(\zeta).$$

Свойство 4 распространяется на сумму любого числа независимых случайных величин.

Вероятностный смысл дисперсии заключается в том, что она характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Однако, если среднее значение $M(\xi)$ имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, то $D(\xi)$ имеет другую размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Это не всегда удобно, поэтому ввели другую характеристику рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама случайная величина.

Определение 89.8. *Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{89.8}$$

Заметим, что дисперсия выражается через $\sigma(\xi)$ по формуле: $D(\xi) = \sigma^2(\xi)$.

В примере 89.6 была найдена $D(\xi) = 9,84$. Найдём среднее квадратическое отклонение этой случайной величины: $\sigma(\xi) = \sqrt{9{,}84} \approx 3{,}14$.

Свойства среднего квадратического отклонения:

(1) $\sigma(\xi) \geqslant 0$;
(2) $\sigma(C) = 0$;
(3) $\sigma(C\xi) = |C| \cdot \sigma(\xi)$;
(4) Для независимых случайных величин ξ и ζ:
$\sigma(\xi + \zeta) = \sqrt{\sigma^2(\xi) + \sigma^2(\zeta)}$.

Так же как и дисперсия, $\sigma(\xi)$ характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Практическое занятие 89. Формула Бернулли

Пример 89.1. *Прибор состоит из* 10 *узлов. Вероятность безотказной работы в течение определённого времени для каждого узла равна* 0,98. *Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за данное время откажут ровно два узла.*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 10$, $q = 0{,}98$, $p = 1 - q = 0{,}02$, $m = 2$. По формуле Бернулли (88.1)

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 \approx 0{,}015.$$

Ответ: $P_{10}(2) \approx 0{,}015$.

Пример 89.2. *Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна* 0,9. *Определить вероятности того, что из пяти наудачу взятых изделий* $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *окажутся стандартными*

Р е ш е н и е: По формуле (88.1) при $n = 5$, $m = 0$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ найдем вероятность того, что среди пяти взятых изделий не окажется стандартных

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 = 10^{-5}.$$

Как видим, это событие оказалось маловероятным. При других m будем иметь:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-4} = 0{,}00045,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 0{,}0081,$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}729 \cdot 10^{-2} = 0{,}0729,$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805,$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}59049.$$

Здесь сумма всех вероятностей

$$\sum_{m=0}^{5} P_5(m) = 1.$$

Так как вероятность $p_5(5) \approx 0{,}591$ довольно высокая, то наиболее вероятным оказался выпуск пяти стандартных изделий.

Решение данного примера является достаточно трудоемкой задачей, поэтому проще воспользоваться компьютерным пакетом.

Maxima-программа:

(%i1) load(distrib)$ fpprintprec:5$
(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.9), k, 0, 5);
(%o3) [1.0 10^{-5}, 4.5 10^{-4}, 0.0081, 0.0729, 0.328, 0.59]
(%i4) sum(P[k], k, 1, 6)
(%o4) 1.0

Во второй строке программы создаётся список в который записываются вероятности вычисленные по формуле Бернулли при $k = 0, 1, \cdots, 5$: $P_5(0), \cdots, P_5(5)$.

MathCad-программа:

k:=0..5 $\quad P_k := dbinom(k, 5, 0.9)$
$P^T = \begin{pmatrix} 10 \times 10^{-6} & 4.5 \times 10^{-4} & 8.1 \times 10^{-3} & 0.073 & 0.328 & 0.59 \end{pmatrix}$
$\sum P = 1$

Ответ: $P \approx \{10^{-5},\ 0{,}00005,\ 0{,}0081,\ 0{,}0729,\ 0{,}328,\ 0{,}59\}$.

Пример 89.3. *Продукция моторного завода содержит 7% брака. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных шести двигателей: а) не окажется ни одного бракованного, б) не более двух будут бракованными, в) более двух будут бракованными.*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 6$, $p = 0{,}07$, $q = 0{,}93$.

а) Вероятность P_1 того, что не окажется ни одного бракованного двигателя, найдем по формуле Бернулли при $m = 0$:

$P_1 = P_6(0) = C_6^0 \cdot (0{,}07)^0 \cdot (0{,}93)^6 \approx 0{,}647.$

б) найдем сначала вероятности $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot (0{,}07)^1 \cdot (0{,}93)^5 \approx 0{,}292,$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot (0{,}07)^2 \cdot (0{,}93)^4 \approx 0{,}055.$$

Тогда вероятность P_2 того, что не более двух двигателей будут бракованными, определится как сумма

$$P_2 = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx 0{,}994.$$

в) Так как

$$\sum_{m=0}^{6} P_6(m) = 1,$$

то искомая вероятность P_3 того, что более двух двигателей будут бракованными, определяется как сумма вероятностей:

$$P_3 = \sum_{m=3}^{6} P_6(m) = \sum_{m=0}^{6} P_6(m) - \sum_{m=0}^{2} P_6(m) \approx 1 - 0{,}994 = 0{,}006.$$

Приведем Maxima-программу решающую данную задачу:
(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 6, 0.07), k, 0, 6);
(%o3[0.0647, 0.292, 0.055, 0.00552, $3.11\,10^{-4}$, $9.378\,10^{-6}$, $1.176\,10^{-7}$
(%i5) P2:sum(P[k], k, 1, 3);
(%o4) 0.994
(%i5) P3:sum(P[k], k, 4, 7);
(%o5) 0.00584
MathCad-программа:
k:=0..6 P_k:=dbinom(k, 6, 0.07)
$P^T = \left(0.647\; 0.292\; 0.055\; 5.518{\cdot}10^{-3}\; 3.115{\cdot}10^{-4}\; 9.378{\cdot}10^{-7}\; 1.176{\cdot}10^{-6}\right)$

$$P2 := \sum_{k=0}^{2} P_k \qquad P2 = 0.994 \qquad P3 := \sum_{k=3}^{6} P_k \qquad P3 = 5.839 \times 10^{-3}$$

Ответ: $P_1 \approx 0{,}647$ $P_2 \approx 0{,}994$ $P_3 \approx 0{,}006$.

Пример 89.4. *Рабочий производит с вероятностью* 0,92 *годное изделие, с вероятностью* 0,06 *– изделие с устранимым браком и с вероятностью* 0,02 *– с неустранимым браком. Произведено* 50 *изделий. Определить вероятность того, что среди них будет три изделия с устранимым браком и одно с неустранимым браком.*

Р е ш е н и е: Применим для решения данной задачи формулу (88.2) полиномиального распределения. Здесь

$$n = 50, \quad p_1 = 0{,}92, \quad p_2 = 0{,}06, \quad p_3 = 0{,}02,$$

$$k_2 = 3, \quad k_3 = 1, \quad k_1 = n - k_2 - k_3 = 46.$$

Тогда

$$P_{50}(46, 3, 1) = \frac{50!}{46!3!1!} \cdot 0{,}92^{46} \cdot 0{,}06^3 \cdot 0{,}02^1 =$$

$$= \frac{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{6} \cdot 0{,}02162 \cdot 0{,}000216 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}086.$$

Здесь величину $0{,}92^{46}$, а также все выражение можно, например, вычислить в Maxima или Mathcad.

В примере 89.2 наиболее вероятное число выпуска стандартных изделий было определено только после вычисления всех вероятностей появления этих изделий. Однако наивероятнейшее число m^* появления события A в n независимых испытаниях можно определить по формуле (88.3).

Пример 89.5. *Заявки на получение инструмента поступают на склад от восьми цехов ежедневно и независимо. Вероятность получения заявки от каждого склада равна* 0,6*. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.*

Р е ш е н и е: Здесь $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Тогда

$$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p \quad \text{или} \quad 4,4 \leqslant m^* \leqslant 5,4.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $m^* = 5$. Вероятность пяти заявок из восьми равна

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 \approx 0{,}279.$$

Ответ: $m^* = 5$, $P_8(5) \approx 0{,}279$.

Пример 89.6. *Вероятность получения в цехе изделий первого сорта равна* 0,75*. На контроль принята партия в* 103 *изделия. Какое число изделий первого сорта в ней наиболее вероятно?*

Р е ш е н и е: Обозначим $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 103$. Тогда

$$0{,}75 \cdot 104 - 1 \leqslant m^* \leqslant 0{,}75 \cdot 104 \quad \text{или} \quad 77 \leqslant m^* \leqslant 78.$$

Так как здесь $(n+1)p$ есть целое число, то существуют два наивероятнейших числа: $m^* = 77$, $m^* = 78$.

Ответ: $m^* = 77$ и 78.

Рассмотрим задачи с применением локальной и интегральной теорем Лапласа.

Пример 89.7. *Вероятность того, что изделия некоторого производства будут отнесены к первому сорту, равна* 0,56. *Чему равна вероятность того, что из* 120 *случайно взятых изделий производства* 67 *окажется первого сорта?*

Решение: В данной задаче

$$n = 120,\ p = 0{,}56,\ \ q = 0{,}44,\ \ m = 67,\ \ npq = 29,568.$$

Применим локальную теорему Лапласа. Так как

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{67 - 120 \cdot 0{,}56}{\sqrt{29,568}} \approx -0{,}04, \quad \varphi(-0{,}04) = \varphi(0{,}04) = 0{,}3986,$$

то:

$$P_{120}(67) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3986}{\sqrt{29,568}} \approx 0{,}073.$$

Нетрудно убедиться в том ,что наивероятнейшее число здесь $m^* = 67$, однако вероятность появления m^*, как видим, сравнительно мала ($\approx$ 0,07). Это объясняется тем, что значения вероятности распределены от $m = 0$ до $m = 120$.

Maxima-программа:

```
(%i1) numer:true$
(%i2) L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1—p)),
          y/sqrt(2*%pi)* exp(— 0.5*((m—n*p)*y)^2) );
(%i3)L_Lapl(67,120,0.56);
(%o3) 0.0733
```

MathCad-программа:

$$L\_Lapl := \left| \begin{array}{l} y \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot exp\Big[-0.5 \cdot \big[(m - n \cdot p) \cdot y\big]^2 \Big] \end{array} \right.$$

$L\_Lapl(67, 120, 0.56) = 0.073$

Ответ: $P_{120}(67) \approx 0{,}073$.

Пример 89.8. *В цехе находится* 150 *станков. Вероятность того, что один станок в течение смены потребует к себе внимания, равна* 0,2. *Найти вероятности того, что: а) за смену* 40 *станков* *потребуют к себе внимания, б) от 25 до 35 станков потребуют к себе внимания.*

Р е ш е н и е: а) В первом случае можно применить локальную теорему Лапласа, так как $n = 150$, т.е. $n > 100$, а при $p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$ величина $npq = 24 > 20$. Здесь $m = 40$,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 150 \cdot 0{,}2}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2,04.$$

По таблице найдем $\varphi(2{,}04) = 0{,}05$ и, согласно (88.4), получим:

$$P_{150}(40) \approx 0{,}05/\sqrt{24} \approx 0{,}010.$$

б) Во втором случае используем интегральную теорему (88.2). Здесь $m_1 = 25,\ m_2 = 35$,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 30}{\sqrt{24}} \approx -1{,}02, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 30}{\sqrt{24}} \approx 1{,}02.$$

С помощью (88.6) найдем

$$P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx \Phi(1{,}02) - \Phi(-1,02) = 2\Phi(1{,}02) \approx 2 \cdot 0{,}346 = 0{,}692.$$

MathCad-программа:
(%i1) fpprintprec:4$ n:150$ p:0.2$; m1:25$ m2:35$
(%i6) load(distrib)$
(%i7) pdf_binomial(40,n,p);
(%o7) 0.011
(%i8) c:1/sqrt(n*p*(1 — p)); x1:(m1—n*p)*c; x2:(m2 — n*p)*c;
(%o9) –1.021
(%o10) 1.021
/* *Результаты по интегральной теореме Лапласа.**/
(%i11) PL:cdf_normal(x2, 0, 1) — cdf_normal(x1, 0, 1);
(%o11) 0.693
/* *Результаты по формуле Бернулли.**/
(%i12) PB:sum(pdf_binomial(k,n,p),k,m1,m2);
(%o12) 0.739
MathCad-программа:
n:=150 p:=0.2 q=1—p m1:=25 m2:=35
dbinom(40, n, p)=0.011

$$x1 := \frac{m1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad x1 = -1.021 \quad x2 := \frac{m2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad x2 = 1.021$$

/* *Результаты по интегральной теореме Лапласа.**/

PL:=pnorm(x2,0,1) − pnorm(x1,0,1)   PL=0.693

/* *Результаты по формуле Бернулли.* */

$$PB := \sum_{k=m1}^{m2} dbinom(k, n, p) \qquad PB = 0.739$$

Результаты по интегральной теореме Лапласа дают несколько заниженные значения.

Ответ: $P_{150}(40) \approx 0{,}011$; $P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx 0{,}739$.

Пример 89.9. *Доля изделий продукции завода высшего качества составляет* 40%. *Найти вероятности того, что из отобранных 300 изделий окажется высшего качества: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

Р е ш е н и е: Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. Здесь $n = 300$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

а) Найдем аргументы функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = 0{,}872.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.

б) В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Соответствующая вероятность

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = 0{,}881.$$

в) Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = 0{,}119.$$

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$.

Для случая, когда n велико и p мало (меньше 0,1) выражение (88.6) даёт плохую оценку. В этом случае пользуются асимптотической формулой Пуассона.

Пример 89.10. *При перевозке автомобилей по железной дороге вероятность того, что один автомобиль в пути получит повреждение, равна* 0,003. *Найти вероятности того, что в пути будет повреждено три автомобиля, если их отправлено* 200.

Решение: Поскольку $n = 200$, $p = 0{,}003$, $np = 0{,}6$, то при $m = 3$

$$P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 \cdot e^{-0{,}6}}{3!} \approx 0{,}019.$$

Ответ: $P_{200}(3) \approx 0{,}019$.

Пример 89.11. *Вероятность остановки автобуса из-за поломки в течение смены равна* 0,004. *Найти вероятности того, что в течение смены из* 1000 *машин, вышедших на линии, остановятся: а) две машины, б) пять машин, в) ни одна не остановится.*

Решение: В данном случае $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $np = 4$, поэтому можно применить формулу Пуассона.

а) Здесь $m = 2$ и

$$P_{1000}(2) = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = \frac{8}{e^4} \approx 0{,}147.$$

б) Так как $m = 5$, то

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx \frac{128}{15 \cdot 54,6} \approx 0{,}156.$$

в) При $m = 0$

$$P_{1000}(0) = \frac{1}{e^4} \approx \frac{1}{54,6} \approx 0{,}018.$$

Ответ: $P_{1000}(2) \approx 0{,}147$; $P_{1000}(5) \approx 0{,}156$; $P_{1000}(0) \approx 0{,}018$.

Пример 89.12. *Продукция некоторого производства содержит* 1% *бракованных изделий. Найти вероятность того, что среди* 200 *изделий окажется бракованных: а) ровно три, б) менее трёх, в) более трёх, г) хотя бы одно.*

Р е ш е н и е: Так как $n = 200$, $p = 0{,}01$, то $np = 2$.

а) Вероятность того, что три изделия будут бракованными,

$$P_{200}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}180.$$

б) Вероятность того, что менее трёх изделий будут бракованными, найдется как сумма

$$P_{200}(m < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0{,}677.$$

в) Поскольку сумма

$$\sum_{m=0}^{200} P_{200}(m) = 1,$$

то вероятность наличия более трёх бракованных изделий

$$P_{200}(m > 3) = 1 - \sum_{m=0}^{3} P_{200}(m) \approx 1 - (0{,}677 + 0{,}180) = 0{,}143.$$

г) События «хотя бы одно изделие бракованное» и «ни одно изделие небракованное» противоположные, поэтому искомая вероятность

$$P = 1 - P_{200}(0) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865.$$

Ответ: $P_{200}(3) \approx 0{,}180$; $P_{200}(m < 3) \approx 0{,}677$; $P_{200}(m > 3) \approx 0{,}143$.

Если в условиях применимости интегральной теоремы Лапласа требуется оценить отклонение относительной частоты появления события от соответствующей вероятности, то используют приближённую формулу (88.8).

Пример 89.13. *Вероятность появления события в каждом из* 800 *независимых испытаний равна* 0,6. *Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на* 0,03.

Р е ш е н и е: Здесь $n = 800$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}03$. Нужно найти вероятность

$$P\Big(\Big|\frac{m}{800} - 0{,}8\Big| \leqslant 0{,}03\Big).$$

По формуле (88.8) эта вероятность равна

$$2 \cdot \Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{800}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx 2 \cdot \Phi(1{,}73).$$

По таблицам найдем $\Phi(1{,}73) \approx 0{,}4582$. Следовательно, искомая вероятность равна $2 \cdot 0{,}4582 = 0{,}9164$.

Ответ: $\approx 0{,}916$.

Самостоятельная работа

Пример 89.14. *Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной* 0,51*, девочки —* 0,49.

Пример 89.15. *Вероятность изготовления бракованного изделия равна* 0,02*. Из большой партии изделий отбирается* 10 *штук и проверяется их качество. Если среди них окажется два или более бракованных, то вся партия не принимается. Определить вероятность того, что вся партия будет отвергнута.*

Пример 89.16. *Брак выпускаемых цехом деталей составляет* 6%*. Определить наиболее вероятное число годных деталей в партии из* 500 *штук.*

Пример 89.17. *Брак изделий цеха составляет* 12%*. Найти вероятность того, что из* 300 *изделий цеха будет забраковано* 35.

Пример 89.18. *Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна* 0,25*. Найти вероятность того, что среди* 200 *случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от* 40 *до* 50.

Пример 89.19. *Вероятность, что изделие фабрики будет отличного качества, равна* 0,75*. Найти вероятность того, что из* 100 *изделий фабрики отличного качества будет: а) не менее* 71 *и не более* 80 *изделий, б) не менее* 71 *изделий, в) не более* 70 *изделий.*

Пример 89.20. *Вероятность брака при производстве деталей равна* 0,001*. Найти вероятности того, что в партии из* 5000 *деталей окажется: а) две бракованные детали, б) не менее двух бракованных деталей.*

Пример 89.21. *На факультете* 1000 *студентов. Вероятность того, что один студент заболеет в течение недели, равна* 0,002*. Найти вероятность того, что в течение недели заболеет более трёх студентов.*

Пример 89.22. *Отдел технического контроля проверяет* 625 *изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна*

0,02. *Найти с вероятностью* 0,95 *границы, в которых будет заключено число* m *бракованных изделий среди проверенных.*

Пример 89.23. *Вероятность того, что диаметр вала меньше допустимого, больше допустимого и в допустимых пределах, равны соответственно* 0,05, 0,08, 0,87. *Из общей партии берутся для проверки* 100 *валов. Определить вероятность того, что среди них будет два вала с меньшим диаметром и один вал с большим диаметром.*

Пример 89.24. *Вероятность появления события в каждом испытании равна* 0,7. *Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось* 10*?*

Лекция 90. Непрерывные случайные величины

Функция распределения. Функция распределения непрерывной случайной величины. Плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия непрерывных случайных величин

90.1. Функция распределения

Как было отмечено в предыдущей лекции, дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей 89.1. Однако наряду с дискретными случайными величинами, принимающими отдельные значения, существуют другие, принимающие все значения из некоторого промежутка. Их невозможно задать перечислением всех принимаемых ими значений, поэтому был предложен универсальный способ задания случайной величины, пригодный во всех случаях.

Определение 90.1. *Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{90.1}$$

Пример 90.1. *Найти $F(x)$ и построить её график для случайной величины из примера 89.3.*

Р е ш е н и е: Проще всего решить эту задачу, находя значение $F(x)$ в отдельных точках по формуле (90.1):

$$F(0) = P\{\xi < 0\} = 0; \quad F(0{,}5) = P\{\xi < 0{,}5\} = 0;$$
$$F(1) = P\{\xi < 1\} = 0; \quad F(2) = P\{\xi < 2\} = 0{,}1;$$
$$F(1,1) = P\{\xi < 1,1\} = 0{,}1; \quad F(1,9) = P\{\xi < 1,9\} = 0{,}1;$$
$$F(2,1) = P\{\xi < 2,1\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5;$$
$$F(4) = P\{\xi < 4\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5;$$
$$F(5) = P\{\xi < 5\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5;$$
$$F(6) = P\{\xi < 6\} = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8;$$
$$F(9) = P\{\xi < 9\} = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8;$$
$$F(10) = P\{\xi < 10\} = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8; \text{ и т.д.}$$

Понятно, что F(x) имеет вид неубывающей ступенчатой функции, непрерывной слева:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1; \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 5; \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 10; \\ 1 & \text{при} \quad 10 < x. \end{cases}$$

Её график изображен на рис. 4.

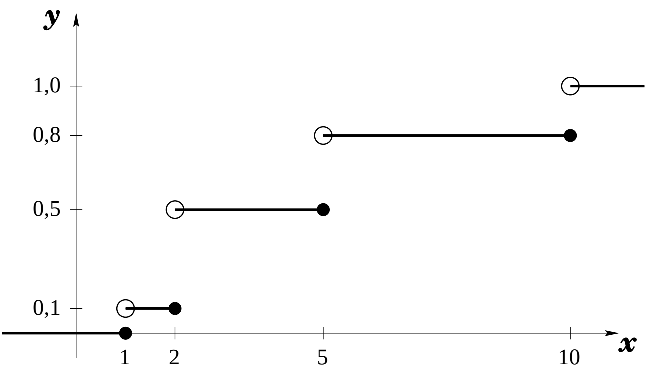


Рис. 4. *Функция распределения дискретной случайной величины*

Рассмотрим свойства функции распределения.

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1;$
(2) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1);$
(3) $F(x)$ не убывает;
(4) $F(x)$ непрерывна слева;
(5) Для дискретной случайной величины, задаваемой таблицей 89.1, функция распределения ступенчатая с разрывами в точках x_i и высотой ступенек равной сумме всех вероятностей значений, не превосходящих данных (см. рис. 4).

Свойство 1 непосредственно вытекает из определения 90.1.

Для доказательства свойства 2 запишем $F(x_2) = P\{\xi < x_2\}$ в виде суммы вероятностей несовместных событий:

$$F(x_2) = P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1 \text{ или } x_1 \leqslant \xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + \\ + P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_1) + P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \Longleftrightarrow F(x_2) = F(x_1) + \\ + P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \Longleftrightarrow P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойство 3 немедленно вытекает из только что доказанного, т.к. для $x_2 > x_1$ получаем:

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \geqslant 0 \implies F(x_2) \geqslant F(x_1).$$

Свойство 4 примем без доказательства. Напомним, что функция $F(x)$ называется непрерывной слева в точке x, если $\lim\limits_{x \to a-} F(x) = F(a)$. Как видно из рис. 4, это свойство выполняется для функции распределения дискретной случайной величины. Для остальных рассмотренных в данной книге случайных величин оно также будет выполнено, т.к. $F(x)$ будет непрерывна.

90.2. Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение 90.2. *Функция $F(x)$ обладает кусочно непрерывной производной, если её производная $F'(x)$ непрерывна везде, кроме конечного (или бесконечного счётного) множества точек, в которых $F'(x)$ может иметь разрывы 1-го рода.*

В частности, если производная $F'(x)$ непрерывна, то она кусочно непрерывна, т.к. множество точек разрыва пусто.

Определение 90.3. *Случайная величина ξ называется непрерывной, если её функция $F(x)$ непрерывна и обладает кусочно непрерывной производной $F'(x)$.*

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины :

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;
(2) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
(3) $F(x)$ не убывает;
(4) $F(x)$ непрерывна;
(5) $P\{\xi = a\} = 0$ для любого числа a.

Доказательства первых 3 свойств дословно повторяют приведённые в пункте 90.1. Свойство 4 следует из определения 90.2. Докажем свойство 5: $P\{a \leqslant \xi < a+\Delta x\} = F(a+\Delta x) - F(a)$ при $\Delta x > 0$ в соответствии со свойством 2. Отсюда, пользуясь свойством 4, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} P\{a \leqslant \xi < a+\Delta x\} = \lim_{\Delta x \to 0+} \big(F(a+\Delta x) - F(a)\big) = F(a) - F(a) = 0.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} P\{a \leqslant \xi < a+\Delta x\} = P\{a \leqslant \xi \leqslant a\} = P\{\xi = a\}$, откуда получаем свойство 5: непрерывная случайная величина принимает каждое свое значение с нулевой вероятностью.

График функции распределения рассматриваемых в данной книге непрерывных случайных величин может иметь один из видов, представленных на рис. 5.

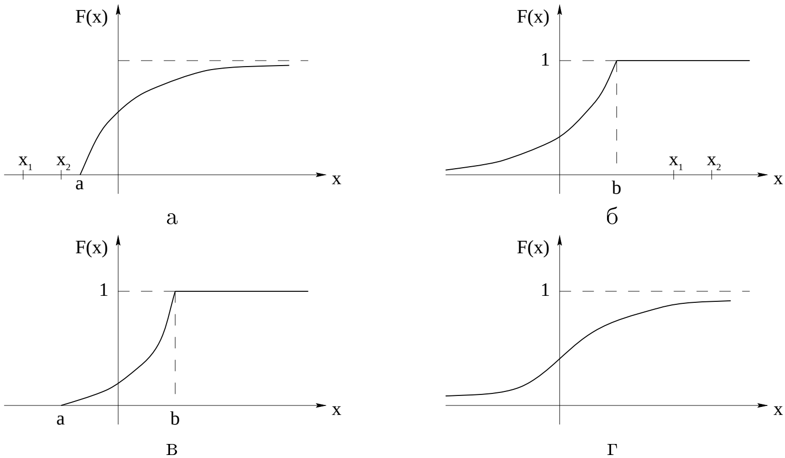


Рис. 5. *Функция распределения непрерывной случайной величины*

Заметим, что для представленной на рис. 5,а функции распределения случайная величина с нулевой вероятностью принимает значения из промежутков, лежащих левее точки a: $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = 0 - 0 = 0$. Для функции распределения (рис. 5,б) случайная величина с нулевой вероятностью принимает значения из промежутков, лежащих правее точки b: $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = 1 - 1 = 0$.

Для функции распределения рис. 5,в ненулевая вероятность попасть в заданный промежуток будет только для промежутков, принадлежащих $(a; b)$.

Замечание 90.1. *Свойство 2 означает, что вероятность того, что случайная величина попала в заданный промежуток, равна приращению функции распределения на этом промежутке: чем больше выросла функция распределения, тем больше эта вероятность. Причём для непрерывных случайных величин не имеет значения, строгое или нестрогое равенство, т.к. в соответствии со свойством 5 это не изменяет вероятность попадания в промежуток.*

90.3. Плотность распределения

В соответствии с только что сделанным замечанием вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток зависит от скорости роста функции распределения. Поэтому непрерывную случайную величину задают, используя производную от функции распределения.

Определение 90.4. *Плотностью распределения* $\varphi(x)$ *(или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины* ξ *называют первую производную от её функции распределения:*

$$\varphi(x) = F'(x). \tag{90.2}$$

Замечание 90.2. *Поскольку функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатую форму, для её описания плотность распределения неприменима.*

Свойства плотности распределения:

(1) $\varphi(x) \geqslant 0$;
(2) $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$;
(3) $\varphi(x)$ кусочно непрерывная функция;
(4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$;
(5) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx$;
(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$.

Первые четыре свойства являются непосредственным следствием определения 90.3 и соответствующих свойств функции распределения (докажите их самостоятельно).

Свойство 5 является по сути известной формулой Ньютона – Лейбница, т.к. $F(x)$ — первообразная для $\varphi(x)$:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx.$$

Отсюда немедленно вытекает свойство 6:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = P\{-\infty < \xi < +\infty\} = 1.$$

Свойство 5 означает, что площадь криволинейной трапеции над промежутком $[x_1;\ x_2)$ под графиком $\varphi(x)$ равна вероятности попадания в этот промежуток (см. рис. 6).

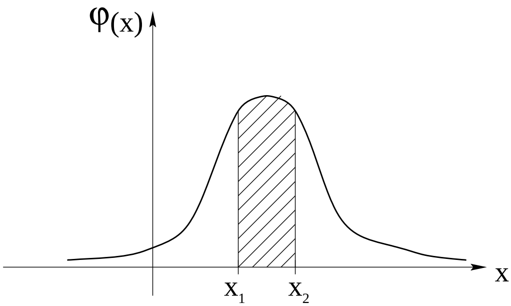


Рис. 6. *Вероятность попадания в промежуток*

Если x_2 близко к x_1, промежуток мал и площадь криволинейной трапеции можно заменить площадью прямоугольника. Мы получим, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $(x;\ x + \Delta x)$ приближённо равна $\varphi(x) \cdot \Delta x$.

Вероятностный смысл плотности $\varphi(x)$ заключается в следующем. *Плотность $\varphi(x)$ непрерывной случайной величины ξ равна вероятности попадания в малый интервал $(x;\ x + \Delta x)$, отнесённой к длине этого интервала.*

Для функций распределения, представленных на рис. 5, плотности распределения будут иметь вид, показанный рис. 7.

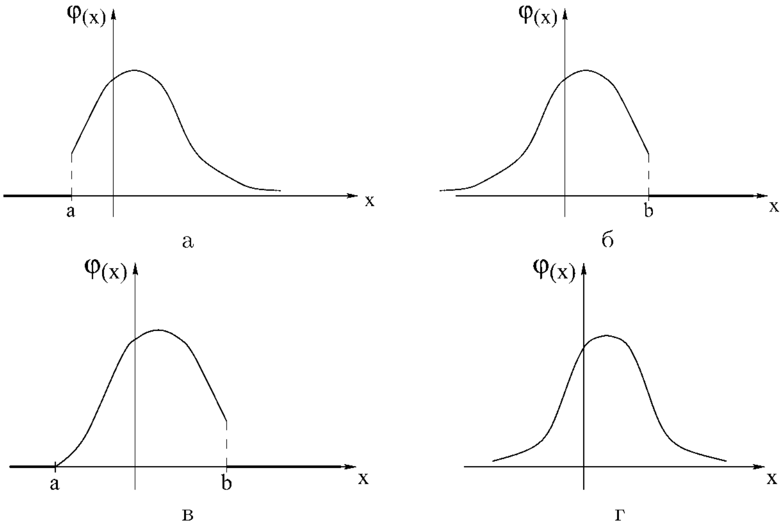


Рис. 7. *Плотность распределения*

Пример 90.2. *Плотность непрерывной случайной величины ξ задана формулами:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} C & \textit{при} \quad x \in [0;4]; \\ 0 & \textit{при} \quad x \notin [0;4]. \end{cases}$$

Найти константу C и вычислить $P\{0 < \xi < 3\}$.

Р е ш е н и е: На основании свойства 6 плотности распределения имеем:

$$\int_0^4 C dt = 1 \quad \Longrightarrow \quad C \cdot 4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{4}.$$

Таким образом $\varphi(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{при} \quad x \in [0;4]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;4]. \end{cases}$

Далее на основании свойства 5 плотности имеем:
$P\{0 < \xi < 3\} = \int\limits_0^3 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} t \Big|_0^3 = \frac{3}{4}$.

Ответ: $C = \frac{1}{4}$; $\quad P\{0 < \xi < 3\} = \frac{3}{4}$.

90.4. Математическое ожидание и дисперсия непрерывных случайных величин

Распространим понятие математического ожидания и дисперсии на непрерывные случайные величины. Допустим, что непрерывная случайная величина ξ принимает все значения из некоторого $[a;\ b]$. Разобьём его на n маленьких отрезков длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и выберем в каждом из них произвольную точку C_i $(i = 1, 2,\ \ldots, n)$. Считая, что случайная величина ξ может принимать только значение C_i с вероятностями $p_i = \varphi(C_i)\Delta x_i$ (вероятности попадания в i-й отрезок), найдем математическое ожидание этой дискретной случайной величины:

$$\sum_i C_i \varphi(C_i) \Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего из частных отрезков, получим определённый интеграл $\displaystyle\int_a^b x\varphi(x)dx$.

Определение 90.5. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $\varphi(x)$ называется:*

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx. \tag{90.3}$$

Замечание 90.3. *Математическое ожидание непрерывной функции $f(x)$ от непрерывной случайной величины ξ вычисляется по формуле:*

$$M(f(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ – плотность распределения ξ.

Определение дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения полностью сохраняется для непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = M\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^2.$$

Вычисление дисперсии непрерывной случайной величины с учётом замечания 90.3 следует вести по следующей формуле:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bigl(x - M(\xi)\bigr)^2 \varphi(x)dx. \qquad (90.4)$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведённые в предыдущей лекции, сохраняются в этом случае.

В свойстве 4 математического ожидания используется понятие независимых случайных величин, которое было введено в п. 89.2 для дискретных случайных величин. Для того, чтобы распространить это понятие на произвольные случайные величины, определим двумерную случайную величину $(\xi;\zeta)$ как вектор, координаты которого являются одномерными случайными величинами и для которого определена функция распределения $F(x;y)$:

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \zeta < y\}.$$

Общие свойства функции распределения $F(x;y)$ подробно изложены в лекции 94. Здесь отметим только, что зная функцию распределения $F(x;y)$ двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$, можно получить функцию распределения каждой составляющей $F_\xi(x)$ и $F_\zeta(y)$ (см. п. 94.2). Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 90.6. *Две случайные величины ξ и ζ называются независимыми, если функция распределения $F(x;y)$ двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$ равна произведению функций распределения составляющих:*

$$F(x;y) = F_\xi(x) \cdot F_\zeta(y).$$

Аналогичным образом вводится понятие независимости n случайных величин через их функцию распределения:

$$F(x_1;x_2;\ldots;x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n), \text{ где}$$

$$F(x_1;x_2;\ldots;x_n) = P(\xi_1 < x_1; \xi_2 < x_2; \ldots; \xi_n < x_n).$$

Для дискретных случайных величин, задаваемых таблицей распределения, это определение сводится к изложенному в п. 89.2.

К вопросу о независимости случайных величин более подробно мы вернёмся в лекциях 94, 95.

Доказательства свойств дисперсии для дискретной случайной величины не были привязаны к формуле (89.3) и остаются справедливыми для непрерывных случайных величин.

Так, например, вычисление дисперсии удобнее проводить по формуле (89.6), которая для непрерывных случайных величин принимает вид:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx - \big(M(\xi)\big)^2. \tag{90.5}$$

Наряду с дисперсией, для характеристики разброса непрерывной случайной величины около её среднего значения используется среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{90.6}$$

Пример 90.3. *Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины из примера 90.1.*

Решение: По формуле (90.3), поскольку плотность $\varphi(x)$ отлична от нуля только при $x \in [0;\ 4]$, $M(\xi) = \int\limits_0^4 \frac{1}{4}\, xdx = \left.\frac{x^2}{8}\right|_0^4 = 2.$

По формуле (90.5), поскольку плотность $\varphi(x)$ отлична от нуля только при $x \in [0;\ 4]$, с учётом $M(X) = 2$, найденного в примере 90.1, получаем:

$$D(\xi) = \int\limits_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{4}dx - (2)^2 = \left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4 - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}.$$

По формуле (90.6) находим $\sigma(x)$: $\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155.$

Ответ: $M(\xi) = 2,\ D(\xi) = \frac{4}{3} \approx 1{,}333,\ \sigma(\xi) \approx 1{,}155.$

Замечание 90.4. *В заключение данной лекции отметим, что наряду с рассматриваемыми числовыми характеристиками, используются и другие.*

Модой случайной величины называется её значение, соответствующее максимумам плотности или многоугольника распределения (для непрерывной или дискретной случайной величины соответственно).

Медианой распределения случайной величины называется наименьшее значение x, при котором функция распределения $F(x) = \frac{1}{2}$.

Практическое занятие 90. Дискретные случайные величины

Пример 90.1. *Дискретная случайная величина задана следующим законом распределения:*

ξ	*4*	*6*	*7*	*10*	*11*
p	*0,1*	*0,3*	*0,2*	*0,3*	*0,1*

Построить многоугольник распределения.

Р е ш е н и е: Возьмём прямоугольную систему координат, причём по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Нанесем точки

$$M_1(4;0{,}1), M_2(6;0{,}3), M_3(7;0{,}2), M_4(10;0{,}3), M_5(11;0{,}1)$$

и соединим их отрезками прямых. С учётом боковых ординат получим замкнутый многоугольник.

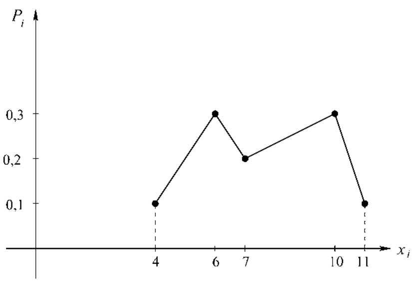


Рис. 8. *Многоугольник распределения примера 6.1*

Пример 90.2. *Случайная величина ξ – число появлений цифры 5 при однократном бросании игральной кости. Найти ряд распределения этой случайной величины.*

Решение: Случайная величина ξ может принять значение 0, если при бросании игральной кости цифра 5 не появится, и 1, если цифра 5 появится. Их вероятности

$$P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \qquad P\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}.$$

Таблица распределения имеет вид:

ξ	1	1
p	5/6	1/6

Пример 90.3. *В группе из* 15 *туристов* 10 *человек из Москвы. Наудачу отобраны* 3 *туриста. Составить закон распределения числа туристов из Москвы среди отобранных.*

Решение: Дискретная случайная величина ξ – число туристов из Москвы среди отобранных – принимает следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Вероятности возможных значений ξ найдутся здесь по формуле гипергеометрического распределения:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k} / C_N^m,$$

где N – общее число туристов, n – количество туристов из Москвы, m – число отобранных туристов, k – число туристов из Москвы среди отобранных. Тогда

$$P\{\xi = 0\} = \frac{C_{10}^0 \cdot C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}, \quad P\{\xi = 1\} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91},$$

$$P\{\xi = 2\} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_5^1}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P\{\xi = 3\} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^0}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}.$$

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
p	2/91	20/91	45/91	24/91

Здесь сумма вероятностей равна единице.

Пример 90.4. *В коробке имеются* 4 *карточки с номерами от* 0 *до* 3. *Наудачу достали две карточки. Принять за случайную величину сумму номеров карточек. Построить ряд распределения.*

Р е ш е н и е: Из четырёх чисел можно составить всего шесть сумм:

$$0+1,\ 0+2,\ 0+3,\ 1+2,\ 1+3,\ 2+3.$$

Вероятности получения каждой суммы одинаковы и равны $1/6$, но сумма, определяемая числом 3, встречается два раза. Таким образом, получаем следующий ряд распределения для сумм:

ξ	1	2	3	4	5
p	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

Пример 90.5. *На пути движения автомашины* 4 *светофора, каждый из которых либо разрешает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью* 0,3*, либо запрещает с вероятностью* 0,7*. Пусть случайная величина* ξ *– число пройденных машиной светофоров до первой остановки. Построить таблицу распределения вероятностей.*

Р е ш е н и е: Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Здесь имеет место геометрическое распределение, где $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. $P\{\xi = 0\}$ есть вероятность, что автомашина не пройдет ни одного светофора, т.е. остановится перед первым. Но эта вероятность, согласно условию, равна 0,7. Итак, $P\{\xi = 0\} = 0{,}7$. С другой стороны, $P\{\xi = 1\}$ есть вероятность совмещения двух событий: машина пройдет первый светофор и остановится перед вторым.

Следовательно,

$$P\{\xi = 1\} = p \cdot q = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21.$$

Аналогично рассуждая, найдем, что

$$P\{\xi = 2\} = p \cdot q^2 = 0{,}063, \qquad P\{\xi = 3\} = p \cdot q^3 = 0{,}0189,$$

$$P\{\xi = 4\} = q^4 = 0{,}0081.$$

Таким образом, таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,7000	0,2100	0,0630	0,0189	0,0081

Пример 90.6. *Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать годное изделие с вероятностью* p*. Переналадка линии производится сразу же после выпуска первого бракованного изделия. Найти ряд распределения числа изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.*

Р е ш е н и е: Здесь будет также геометрическое распределение, так как линия работает до тех пор, пока не появится бракованное изделие. Вероятность выпуска первого же изделия бракованным равна $1 - p = q$, т.е. $P\{\xi = 1\} = q$. Линия выпустит два изделия, если первое изделие будет годным, а второе бракованным. Тогда по теореме умножения $P\{\xi = 2\} = p \cdot q$. Аналогично

$$P\{\xi = 3\} = p^2 \cdot q, ..., P\{\xi = m\} = p^{m-1} \cdot q, ...$$

Окончательно таблица распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	...
p	q	pq	p^2q	...

По сравнению с обычной записью геометрического распределения p и q в данном случае поменялись местами.

Рассмотрим числовые характеристики дискретных случайных величин.

Пример 90.7. *Случайная величина ξ определяется следующим рядом распределения:*

ξ	*1,2*	*1,6*	*2,3*	*3,2*	*4,5*
p	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,2*	*0,1*

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

Р е ш е н и е: Математическое ожидание равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

или

$$M(\xi) = 1{,}2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6 \cdot 0{,}4 + 2{,}3 \cdot 0{,}1 + 3{,}2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5 \cdot 0{,}1 = 2{,}2.$$

Для нахождения дисперсии по формуле

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 .$$

Сначала найдем $M(\xi^2)$:

$M(\xi^2) = 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}3^2 \cdot 0{,}1 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5^2 \cdot 0{,}1 =$
$= 1{,}44 \cdot 0{,}2 + 2{,}56 \cdot 0{,}4 + 5{,}29 \cdot 0{,}1 + 10{,}24 \cdot 0{,}2 + 20{,}25 \cdot 0{,}1 = 5{,}914.$

Таким образом, дисперсия

$$D(\xi) = 5{,}914 - 2{,}2^2 = 1{,}074.$$

Среднее квадратичное отклонение найдем как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1{,}074} \approx 1{,}036.$$

Ответ: $M(\xi) = 2{,}2$; $D(\xi) = 1{,}074$; $\sigma(\xi) \approx 1{,}036$.

Пример 90.8. *Найти математическое ожидание случайной величины ζ, если*

$$\zeta = 4\xi + 3\eta, \quad M(\xi) = 11, \quad M(\eta) = 8.$$

Решение: Поскольку математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин и постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, то

$$M(\zeta) = M(4\xi + 3\eta) = M(4\xi) + M(3\eta) =$$
$$= 4 \cdot M(\xi) + 3 \cdot M(\eta) = 4 \cdot 11 + 3 \cdot 8 = 68.$$

Ответ: $M(\xi) = 68$.

Пример 90.9. *Случайные величины ξ и η независимы. Найти дисперсию случайной величины $\zeta = 5\xi - 6\eta$, если $D(\xi) = 3$, $D(\eta) = 2$.*

Решение: С учётом того, что дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых и что постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат, получим:

$$D(\zeta) = D(5\xi - 6\eta) = D(5\xi) + D(6\eta) =$$
$$= 25 \cdot D(\xi) + 36 \cdot D(\eta) = 25 \cdot 3 + 36 \cdot 2 = 147.$$

Ответ: $D(\xi) = 147$.

Пример 90.10. *Дискретная случайная величина ξ принимает три возможных значения: x_1 с вероятностью p_1; $x_2 = 5$ с вероятностью $p_2 = 0{,}4$ и $x_3 = 4$ с вероятностью $p_3 = 0{,}5$. Найти x_1 и p_1, зная, что математическое ожидание $M(\xi) = 6$.*

Решение: Так как в любом законе распределения сумма вероятностей равна 1, то $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 0{,}1$. Подставляя в равенство

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

числовые данные, получим $6 = x_1 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}5$. Отсюда найдем $x_1 = 20$.

Ответ: $x_1 = 20$; $p_1 = 0{,}1$.

Пример 90.11. *Возможные значения дискретной случайной величины равны:* $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$. *Кроме того, известны математические ожидания этой величины и её квадрата:* $M(\xi) = 4{,}4$; $M(\xi^2) = 22$. *Найти вероятности* p_1, p_2, p_3, *соответствующие значениям* x_1, x_2, x_3.

Р е ш е н и е: С учётом заданных условий можно составить систему следующих трёх уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 2 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2 + 6 \cdot p_3 = 4{,}4 \\ 2^2 \cdot p_1 + 5^2 \cdot p_2 + 6^2 \cdot p_3 = 22. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = 0{,}3 \quad p_2 = 0{,}4, \quad p_3 = 0{,}3.$$

Ответ: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}3$.

Пример 90.12. *В ящике лежит* n *изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. Составить ряд распределения числа вынутых изделий. Найти* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$ *этой случайной величины* ξ.

Р е ш е н и е: Вероятность того, что первое вынутое изделие будет бракованным, равна $p_1 = 1/n$. Вероятность того, что первое изделие будет годным, а второе бракованным, по теореме умножения равна

$$p_2 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Если два первых изделия годные, а третье – нет, то

$$p_3 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

и т.д. Таким образом, получаем закон распределения

ξ	1	2	3	...	n
p	1/n	1/n	1/n	...	1/n

Для решения задачи воспользуемся известными суммами:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тогда

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{n+1}{2}.$$

$$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$D(\xi) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Ответ: $M(\xi) = \dfrac{n+1}{2}$; $D(\xi) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

ПРИМЕР 90.13. *Брошены три игральные кости. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех трёх гранях.*

Р е ш е н и е: Обозначим через ξ_i дискретную случайную величину – число очков, выпавших на грани i-ой кости, а через ξ – сумму числа очков, которые выпадут на всех гранях. Тогда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + M(\xi_3).$$

Кроме того, поскольку случайные величины ξ_i независимы, то

$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + D(\xi_3).$$

Случайные величины ξ_i имеют одинаковое распределение, а следовательно, и одинаковые числовые характеристики. С учётом этого получим:

$$M(\xi) = 3 \cdot M(\xi_1), \qquad D(\xi) = 3 \cdot D(\xi_1).$$

Вероятности выпадения любого числа очков равны, поэтому закон распределения для ξ_1 имеет вид:

ξ_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Так как математическое ожидание

$$M(\xi_1) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2},$$

то $M(\xi) = 3 \cdot (7/2) = 21/2$.

Математическое ожидание для квадрата одной случайной величины

$$M(\xi_1^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6},$$

а соответствующая дисперсия

$$D(\xi_1) = M(\xi_1^2) - M^2(\xi_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Дисперсия суммы числа очков на всех гранях $D(\xi) = 3 \cdot 35/12 = 35/4$.

Ответ: $M(\xi) = 21/2$; $D(\xi) = 35/4$.

Самостоятельная работа

Пример 90.14. *Дискретная случайная величина задана следующим законом распределения:*

ξ	*2*	*5*	*6*	*10*	*12*
p	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,2*

Построить многоугольник распределения.

Пример 90.15. *Дискретная случайная величина* ξ *задана следующим законом распределения:*

ξ	*4*	*6*	*10*	*12*
p	*0,4*	*0,1*	*0,2*	*0,3*

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Пример 90.16. *В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули три шара. Случайная величина* ξ *– сумма номеров шаров. Найти закон распределения случайной величины* ξ.

Пример 90.17. *В лаборатории имеются* 15 *приборов, среди которых* 4 *требуют ремонта. Студент случайным образом берет* 3 *прибора, не зная, какие из них пригодны к работе. Составить закон распределения случайного числа непригодных к работе приборов, содержащихся в выборке.*

Пример 90.18. *На пути движения автомашины три светофора. Вероятность, что светофор запрещает дальнейшее движение автомашины* 0,4, *а что разрешает* 0,6. *Пусть случайная величина* ξ *– число светофоров, пройденных машиной. Составить таблицу распределения вероятностей.*

Пример 90.19. *Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ, которая может принимать только два значения: x_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}1$ и x_2, причём $x_1 < x_2$. Математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсия $D(\xi)$ известны: $M(\xi) = 3{,}9$, $D(\xi) = 0{,}09$.*

Пример 90.20. *Возможные значения дискретной случайной величины равны: $-2, 1, 4$. При условии, что заданы математическое ожидание $M(\xi) = 1{,}9$, а также $M(\xi^2) = 7{,}3$, найти вероятности p_1, p_2, p_3, которые соответствуют дискретным значениям случайной величины.*

Пример 90.21. *Брошены три игральные кости. Найти математическое ожидание суммы квадратов числа очков, которые выпадут на всех гранях.*

Лекция 91. Виды распределений

Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Гипергеометрическое и геометрическое распределения. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение

91.1. Биномиальное распределение

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ – случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P\{\xi = m\} = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1-p,\ m = 0{,}1,\ \ldots, n. \quad (91.1)$$

Определение 91.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется биномиальным.*

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\ldots$	p^k

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.

Докажем, что сумма всех вероятностей равна 1.

Действительно, в соответствии с биномом Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Но, с другой стороны: $(p+q)^n = \big(p+(1-p)\big)^n = 1$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины. Для этого представим ξ в виде суммы n независимых случайных величин ξ_i $(i=1,2,\ \ldots,n)$, таких, что $\xi_i = 1$, если в i-м испытании появилось событие A, и $\xi_i = 0$, если в i-м испытании появилось событие $\bar{A}$. Очевидно, что

$$\xi = \xi_1 + \ \ldots + \xi_n. \tag{91.2}$$

В этой сумме столько единиц, сколько раз появилось событие A в n испытаниях; остальные слагаемые равны нулю.

Распределение каждой из случайных величин ξ_i задаётся таблицей:

ξ_i	1	0
p	p	$1-p$

Очевидно, что

$$M(\xi_i) = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p,$$

$$D(\xi_i) = M(\xi_i^2) - \big(M(\xi_i)\big)^2 = 1^2\cdot p + 0^2\cdot(1-p) - p^2 = p - p^2 =$$

$= p(1-p) = p\cdot q.$

Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, получаем два независимых слагаемых в формуле (91.2):

$$M(\xi) = M(\xi_1) + \ldots + M(\xi_n) = n\cdot p,$$
$$D(\xi) = D(\xi_1) + \ldots + D(\xi_n) = n\cdot p\cdot q.$$

Итак, для биномиально распределённой случайной величины ξ получим:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \tag{91.3}$$

Пример 91.1. *Монета брошена 4 раза. Написать закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию числа выпадений орла.*

Р е ш е н и е: Найдём вероятности выпадения орла по формуле Бернулли при $n = 4$, $p = 0{,}5$:

$$P_4(0) = 0{,}5^4 \approx 0{,}0625; \quad P_4(1) = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}25;$$
$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}375;$$
$$P_4(3) = p_4(1) = 0{,}25; \quad P_4(4) = p_4(0) \approx 0{,}0625.$$

Искомый закон распределения задаётся таблицей:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

По формулам (91.3) находим:

$$M(\xi) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}5 = 2; \quad D(\xi) = nqp = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1.$$

Ответ: $M(\xi) = 2$, $D(\xi) = 1$.

91.2. Распределение Пуассона

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to a$. Тогда, как отмечалось в п. 89.4, вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P\{\xi = m\} = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \quad a > 0. \tag{91.4}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 91.2. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (91.4), называется распределением Пуассона или пуассоновским распределением.*

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$
p	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	$\ldots$	$\frac{a^m}{m!}e^{-a}$	$\ldots$

Распределение Пуассона определяется одним параметром a. Докажем, что сумма всех вероятностей равна 1.

Действительно, используя разложение в ряд Тейлора для e^a, получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^a = 1.$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины.

$$M(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{(m-1)!} e^{-a} =$$
$$= a \cdot e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a \cdot e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = a \cdot e^{-a} \cdot e^a = a.$$

Примем без доказательства, что $D(\xi) = a$.

Итак, для случайной величины, имеющей распределение Пуассона, получим:

$$M(\xi) = D(\xi) = a. \tag{91.5}$$

91.3. Гипергеометрическое и геометрическое распределения

С гипергеометрическими распределениями мы встречались в лекции 86 (замечание 86.2).

Таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	$\ldots$	l
p	$\frac{C_L^0 C_{K-L}^k}{C_K^k}$	$\frac{C_L^1 C_{K-L}^{k-1}}{C_K^k}$	$\frac{C_L^2 C_{K-L}^{k-2}}{C_K^k}$	$\ldots$	$\frac{C_L^l C_{K-L}^0}{C_K^k}$

Здесь $k \leqslant K$, $l = min(k; L)$, $L \leqslant K$ и сумма всех вероятностей равна единице.

Типичное толкование: случайная величина ξ равна числу белых шаров, попавших в выборку без возвращения k шаров из урны, содержащей K шаров, из которых L белых.

$$M(\xi) = k \cdot \frac{L}{K}.$$

Дискретная случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, если таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	3	$\ldots$
p	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\ldots$

Легко доказывается то, что сумма всех вероятностей равна единице (проделайте это самостоятельно).

Типичное толкование: ξ равна количеству непоявлений события A в испытаниях Бернулли до первого появления события A, если $p = p(A)$ в каждом испытании. Можно доказать, что:

$$M(\xi) = \frac{1-p}{p}, \quad D(\xi) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Рассмотренные распределения являются распределениями дискретных случайных величин. Далее рассмотрим некоторые распределения непрерывных случайных величин.

91.4. Равномерное распределение

Определение 91.3. *Распределение непрерывной случайной величины называется равномерным на $[a;b]$, если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} C & \textit{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \textit{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Используя 6 свойство плотности распределения (п. 90.3), найдём константу C.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \implies \int\limits_a^b C dx = 1 \implies$$

$$\implies Cx\Big|_a^b = 1 \implies C(b-a) = 1 \implies C = \frac{1}{b-a}.$$

Итак, плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{91.6}$$

С помощью свойства 4 плотности (п. 90.3) найдем функцию распределения:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{При} & x < a & F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0; \\
\text{при} & a \leqslant x \leqslant b & F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}; \\
\text{при} & x > b & F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int\limits_{b}^{x} 0dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.
\end{array}$$

Итак, мы получили функцию распределения равномерно распределённой на $[a; b]$ случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad b < x. \end{cases} \tag{91.7}$$

Равномерное распределение определяется двумя параметрами a и b. Графики плотности и функции распределения равномерной на [a;b] случайной величины представлены на рис. 9.

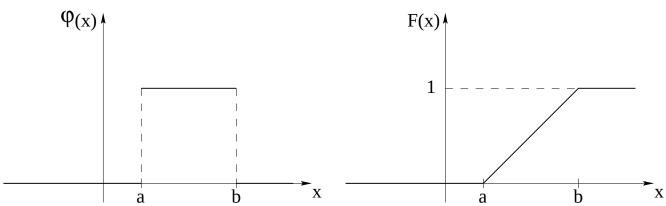


Рис. 9. *Плотность и функция распределения равномерного распределения*

Найдём математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_b^a = \frac{(b-a)^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \int\limits_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^3}{3 \cdot (b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$= \frac{4 \cdot (a^2 + ab + b^2) - 3 \cdot (a+b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак, для равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины получим:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{91.8}$$

Замечание 91.1. *Найдём $P\{x \leqslant \xi < x + \Delta x\}$ при условии, что $a \leqslant x < x + \Delta x \leqslant b$. Пользуясь свойством 5 плотности (п. 90.3), получаем:*

$$P\{x \leqslant \xi < x+\Delta x\} = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \varphi(x)dt = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x + \Delta x - x}{b-a} = \frac{\Delta x}{b-a}.$$

Как видим, эта вероятность не зависит от x, т.е. от положения промежутка внутри $[a;b]$, а только от длины промежутка Δx. Этим объясняется название распределения — равномерное. Вероятность распределена «равномерно» по отрезку $[a;b]$ (плотность постоянна). Очевидно, что в этом случае среднее значение случайной величины равно середине отрезка: $M(\xi) = \frac{a+b}{2}$.

Пример 91.2. *Плотность распределения постоянна на отрезке $[0;4]$ и равна нулю вне его. Найти плотность и функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.*

Р е ш е н и е: В соответствии с определением 91.3 эта случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[0;4]$. Следовательно:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad x \in [0;4], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;4], \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x}{4} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4, \end{cases}$$

$$M(\xi) = 2; \quad D(\xi) = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{4}{3} \approx 1{,}333.$$

Ответ $M(\xi) = 2$; $D(\xi) = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

91.5. Экспоненциальное распределение

Определение 91.4. *Распределение непрерывной случайной величины называется экспоненциальным (показательным), если плотность распределения имеет вид:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x < 0, \quad \textit{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{91.9}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda>0$.

Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \geqslant 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x};$$

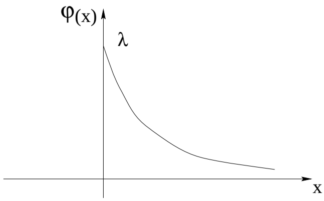
$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Итак, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{91.10}$$

Графики плотности и функции распределения экспоненциального распределения представлены на рис. 10.

Найдём математическое ожидание и дисперсию.



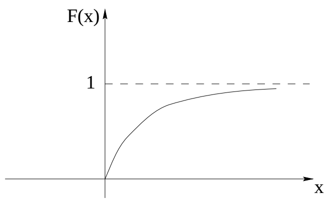


Рис. 10. *Плотность и функция распределения экспоненциального распределения*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dt = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} & v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = -xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Самостоятельно проведите выкладки и докажите, что:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак, для экспоненциально распределённой случайной величины получим:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{91.11}$$

Замечание 91.2. *Можно доказать, что если через независимые случайные промежутки времени $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, имеющие экспоненциальное распределение с параметром λ, происходит какое-либо событие (например, поступает вызов на телефонную станцию или приходит покупатель в магазин), то количество этих событий, произошедших за любой промежуток времени t, является случайной величиной, имеющей пуассоновское распределение с параметром $a = \lambda t$.*

Практическое занятие 91. Функция распределения и плотность случайных величин

Дискретную случайную величину можно определить с помощью функции распределения.

Пример 91.1. *Случайная величина ξ – число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.*

Решение: Возможные значения данной случайной величины – числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом, вероятность того, что ξ примет любое из этих значений, одна и та же и равна $1/6$. Таблица распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений, меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 1/6$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:

$$F(x) = P(\xi < x) = P\{(\xi < 2) + (2 \leqslant \xi < 3)\} = P(\xi < 2) + P(2 \leqslant \xi < 3).$$

Но $P(\xi < 2) = 1/6$, а $P(2 \leqslant \xi < 3)$ также равно $1/6$, так как полуинтервалу $2 \leqslant x < 3$ принадлежит только одно возможное значение, принимаемое ξ, а именно 2. Таким образом, если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = 1/6 + 1/6 = 1/3$. Аналогично, если $3 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 3) + P(3 \leqslant \xi < 4) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Для $4 < x \leqslant 5$

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x) + P(4 \leqslant \xi < 5) = 1/2 + 1/6 = 2/3,$$

а для $5 < x \leqslant 6$ $F(x) = 2/3 + 1/6 = 5/6$. Наконец, если $x \geqslant 6$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 6) + P(6 \leqslant \xi < x) = 5/6 + 1/6 = 1.$$

График этой функции $F(x)$ оказывается ступенчатой линией со скачками в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, равными 1/6, рис. 11.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/6, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1/3, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1/2, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 2/3, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/6, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{при} \quad 6 < x. \end{cases}$$

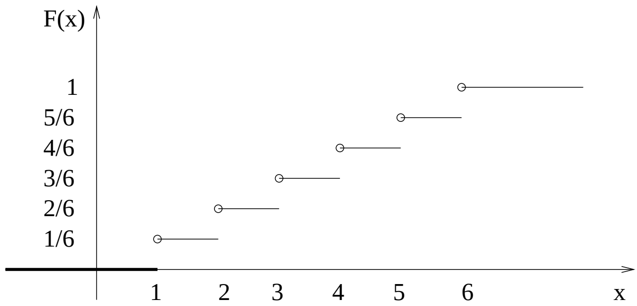


Рис. 11. *Решение примера 91.1*

Используя определение функции распределения (90.1), рассмотрим ряд задач и на непрерывные случайные величины.

Пример 91.2. *Случайная величина ξ задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -2, \\ (x+2)^2 \text{ при } -2 < x \leqslant -1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2, -1)$.

Р е ш е н и е: Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2, -1)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(-3/2 < \xi < -1) = F(-1) - F(-3/2) = (-1+2)^2 - (-3/2+2)^2 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

Пример 91.3. *Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения $\varphi(x) = \cos x$ в интервале $(0,\pi/2)$; вне этого интервала $\varphi(x) = 0$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/4, \pi/3)$.*

Р е ш е н и е: Применим формулу

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

По условию, $a = \pi/4$, $b = \pi/3$, $\varphi(x) = \cos x$. Следовательно, данная вероятность

$$P(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}159.$$

Ответ: $\approx 0{,}159$.

Пример 91.4. *Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ (x-1)^2 \text{ при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $\varphi(x)$.

Р е ш е н и е: Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Пример 91.5. *ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\varphi(x)$, заданной следующим образом:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{3}{32}(4x - x^2), \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) вероятность попадания ξ в интервал $(1;2)$; б) функцию распределения $F(x)$.

Р е ш е н и е: а) Вероятность

$$P(1<\xi<2)=\int_1^2\varphi(x)dx=\int_1^2\frac{3}{32}(4x-x^2)dx=\frac{3}{32}\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=$$

$=\dfrac{11}{32}\approx 0{,}344.$

б) Функция распределения $F(x)$ для непрерывной случайной величины даётся формулой

$$F(x)=\int_{-\infty}^x\varphi(t)dt.$$

Если $-\infty<x\leqslant 0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^x 0dt=0;$$

если $0<x\leqslant 4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^0\varphi(t)dt+\int_0^x\varphi(t)dt=\frac{6x^2-x^3}{32};$$

если, наконец, $x>4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^0 0dt+\int_0^4\frac{3}{32}(4t-t^2)dt+\int_0^x 0dt=1.$$

Ответ: $P(1<\xi<2)=11/32\approx 0{,}344$,
$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \frac{6x^2-x^3}{32}, \text{ если } 0<x\leqslant 4,\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$

Пример 91.6. *Случайная величина ξ имеет на всей числовой оси плотность распределения $\varphi(x)=a/(1+x^2)$ (закон Коши). Найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$.*

Р е ш е н и е: Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=a\cdot\operatorname{arctg}x\big|_{-\infty}^{+\infty}=a\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=a\pi=1.$$

Отсюда найдем, что $a = 1/\pi$, а плотность распределения $\varphi(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

Ответ: $a = 1/\pi \approx 0{,}318$, $F(x) = 0{,}5 + \operatorname{arctg}(x)/\pi$.

Пример 91.7. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения $\varphi(x) = x/8$ в интервале $(0, 4)$; вне этого интервала $\varphi(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

Решение: Поскольку плотность равна 0 вне (0, 4),

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{0}^{4} x\varphi(x)dx.$$

Подставив $\varphi(x) = x/8$, получим

$$M(\xi) = \frac{1}{8}\int_{0}^{4} x^2dx = \frac{1}{8}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{8}{3} \approx 2{,}667.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int_{a}^{b} x^2\varphi(x)dx - M^2(\xi)$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{8}\int_{0}^{4} x^3dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^4 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$$

Ответ: $M(\xi) = 8/3 \approx 2{,}667$, $D(\xi) = 8/9 \approx 0{,}889$.

Пример 91.8. *График плотности вероятности случайной величины ξ изображен на рисунке 12 (закон Симпсона). Найти математическое ожидание и дисперсию.*

Решение:

Из графика $\varphi(x)$ видно, что плотность вероятности определяется уравнениями:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \in (-1, 0), \\ -x+1 \text{ при } x \in (0, 1), \\ 0 \text{ при } x \leqslant -1,\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi(x)$ задана на интервале $(-1, 1)$ двумя аналитическими выражениями, то

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)dx = 0.$$

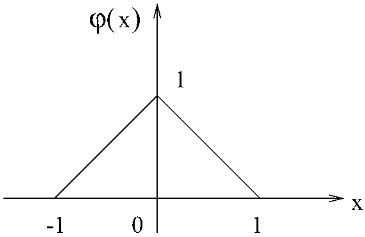


Рис. 12. *График плотности распределения*

Далее, учитывая, что $M(\xi)=0$, найдем дисперсию

$$D(\xi)=\int_{-1}^{0}x^2(x+1)dx+\int_{0}^{1}x^2(-x+1)dx=\frac{1}{6}\approx 0{,}167.$$

Ответ: $M(\xi)=0$, $D(\xi)=1/6\approx 0{,}167$.

Пример 91.9. *Плотность вероятности распределения Лапласа имеет вид:* $\varphi(x)=(\lambda/2)\cdot\exp(-\lambda|x|)$ $(\lambda>0)$. *Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины* ξ.

Р е ш е н и е: Математическое ожидание

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx=\frac{1}{2}\lambda\int_{-\infty}^{0}xe^{\lambda x}dx+\frac{1}{2}\lambda\int_{0}^{\infty}xe^{-\lambda x}dx.$$

Проводя интегрирование по частям, получим $M(\xi)=0$. Этот результат можно было получить сразу, поскольку подынтегральная функция нечётная.

Аналогично найдем дисперсию

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{2}/\lambda$.

Ответ: $M(\xi)=0$, $D(\xi)=2/\lambda^2$, $\sigma(x)=\sqrt{2}/\lambda$.

Пример 91.10. *Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея:*

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 1-\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ при } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности φ, моду и медиану распределения.

Р е ш е н и е:

Плотность вероятности

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Модой распределения $M_0(\xi)$ называется значение аргумента, при котором плотность вероятности достигает максимума. Здесь

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)$$

и так как $x \geqslant 0$, то $\varphi'(x) = 0$ только при $x = \sigma$. Поскольку $\varphi'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x = \sigma$, то φ в этой точке будет иметь максимум. Следовательно, мода $M_0(\xi) = \sigma$.

Медианой распределения $M_e(\xi)$ называют величину x, определяемую из равенства $F(x) = 1/2$. В данной задаче

$$1/2 = 1 - \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad 1/2 = \exp(-x^2/2\sigma^2).$$

Отсюда найдем $x = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$ или $M_e(\xi) = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$.

Самостоятельная работа

Пример 91.11. *Дискретная случайная величина задана законом распределения*

ξ	*3*	*5*	*6*	*9*
p	*0,3*	*0,4*	*0,2*	*0,1*

Найти функцию распределения $F(x)$ и начертить её график.

Пример 91.12. *Случайная величина ξ задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + \operatorname{arctg}(x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(0, \sqrt{3})$.*

Пример 91.13. *Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ в интервале $(0, 2)$ задана как $\varphi(x) = Ax^3$; вне этого интервала $\varphi(x) = 0$. Определить A, найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(0, 1)$ и её математическое ожидание.*

Пример 91.14. *Дана функция распределения непрерывной случайной величины* ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1/2 - (1/2)\cos 3x \text{ при } 0 < x \leqslant \pi/3, \\ 1 \text{ при } x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $\varphi(x)$.

Пример 91.15. *Функция распределения непрерывной случайной величины* ξ *задана выражением*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ ax^3 \text{ при } 0 < x \leqslant 4, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Определить: коэффициент a, *плотность распределения* ξ, *вероятность попадания* ξ *в интервал* $(2,3)$.

Пример 91.16. *Плотность распределения случайной величины* ξ *имеет вид:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x > \pi, \\ (1/2)\sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Пример 91.17. *Случайная величина* ξ *имеет плотность вероятности* $\varphi(x) = (2/\pi)\cdot\cos^2 x$ *при* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *и* $\varphi(x) = 0$ *вне указанного интервала. Найти среднее квадратическое отклонение величины* ξ.

Лекция 92. Нормальное распределение

Плотность и функция распределения. Вероятность заданного отклонения. Стандартная нормальная случайная величина

92.1. Плотность и функция распределения

Рассмотрим ещё одно распределение непрерывной случайной величины, имеющее большое теоретическое и прикладное значение.

Определение 92.1. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{92.1}$$

Этот факт будем записывать так: $\xi\sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ.

Докажем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$. Действительно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\begin{array}{c}\frac{(x-a)}{\sigma}=t\implies x=\sigma t+a\\ dx=\sigma dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Используя несобственные двойные интегралы можно доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}. \tag{92.2}$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона. Подставив этот результат в последнее выражение, получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$.

Найдем функцию распределения:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Выразим функцию распределения нормального закона $F(x)$ через функцию Лапласа, введённую в п. 88.3 (формула 88.5), для чего сделаем замену переменных:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt = \left[\begin{array}{c} \frac{(t-a)}{\sigma} = z \implies z = \sigma z + a \\ dt = \sigma dz \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz == \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{0}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Здесь использовался тот факт, что из четности подынтегральной функции в интеграле Пуассона следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Итак, для функции распределения нормального закона получим выражение:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (92.3)$$

Найдём математическое ожидание нормально распределённой случайной величины.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\begin{array}{c} \frac{(x-a)}{\sigma} = t \implies x = \sigma\sigma t + a \\ dx = \sigma t \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t + a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0 + a = a.$$

Самостоятельно докажите, что дисперсия равна σ^2, т.е.

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx - a^2 = \sigma^2.$$

Итак, для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{92.4}$$

Графики плотности и функции распределения нормального закона приведены на рис. 13. График плотности нормального распределения иногда называют кривой Гаусса.

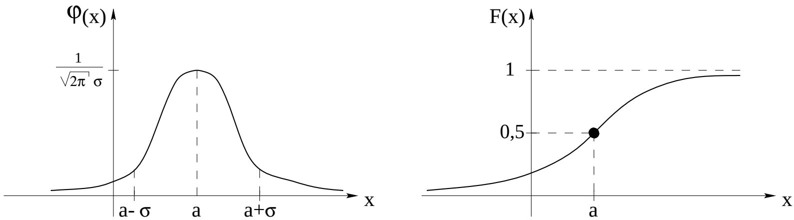


Рис. 13. *Плотность и функция распределения нормального распределения*

В соответствии со свойством 2 функции распределения (п. 90.1) получаем формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right) -$$

$$-\left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \tag{92.5}$$

В частности, если интервал полубесконечный, учитывая тот факт, что $\Phi(+\infty) = 0{,}5$, $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, получаем:

$$P\{\xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) + 0{,}5,$$

$$P\{x \leqslant \xi\} = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

92.2. Вероятность заданного отклонения для нормального распределения

Пользуясь формулой (92.5), можно получить формулу для вычисления вероятности заданного отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания:

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \xi - a < \varepsilon\} = P\{a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon\} =$$
$$= \Phi\Big(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big).$$

Окончательно имеем:

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big). \qquad (92.6)$$

Замечание 92.1. *Познакомившись с нормальным распределением, заметим, что локальная и интегральные теоремы Лапласа дают приближения для вероятностей биномиально распределённой случайной величины через соответствующие вероятности нормально распределённой случайной величины. Аналогично, с помощью формулы (92.5) получается приближённая формула (88.7) для вероятности отклонения частоты от вероятности в испытаниях Бернулли.*

Пример 92.1. $\xi \sim N(20; 10)$. *Найти* $P\{|\xi - 20| < 3\}$ *и* $P\{|\xi - 10| < 3\}$.

Решение: По формуле (92.5) определяем

$$P\{|\xi - 20| < 3\} = 2\Phi\Big(\frac{3}{10}\Big) \approx 2 \cdot 0{,}1179 = 0{,}2358.$$

Значение $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$ находим по таблице приложения 2.

Для нахождения $P\{|\xi - 10| < 3\}$ нельзя применить формулу (92.5), т.к. $a = 20 \neq 10$. Эту вероятность найдём по формуле (92.4):

$$P\{|\xi - 10| < 3\} = P\{-3 < \xi - 10 < 3\} = P\{7 < \xi < 13\} =$$
$$= \Phi\Big(\frac{13-20}{10}\Big) - \Phi\Big(\frac{7-20}{10}\Big) = \Phi(1,3) - \Phi(0{,}7) \approx$$
$$\approx 0{,}4032 - 0{,}2580 = 0{,}1452.$$

Ответ: $P\{|\xi - 20| < 3\} \approx 0{,}236$; $P\{|\xi - 10| < 3\} \approx 0{,}145$.

Применим формулу (92.5) для вычисления вероятности отклонения при $\varepsilon = 3\sigma$.

$$P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = 2\Phi\Big(\frac{3\sigma}{\sigma}\Big) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Мы получили известное в технике «правило трёх сигм»: *для нормально распределённой случайной величины практически невозможно её отклонение от математического ожидания по абсолютной величине более трёх σ.*

На практике в менее ответственных случаях можно также применять аналогичное «правило двух сигм» т.к.

$$P\{|\xi - a| < 2\sigma\} \approx 0{,}9544.$$

92.3. Стандартная нормальная случайная величина

Теорема 92.1. *Если $\xi \sim N(a;\sigma)$, то $\zeta = k\xi + b \sim N(ka+b;\ |k|\ \sigma)$.*

Доказательство. Найдём функцию распределения $F_\zeta(x)$ случайной величины ζ при $k > 0$:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{k\xi + b < x\} = P\Big\{\xi < \frac{x-b}{k}\Big\} =$$
$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\frac{x-b}{k} - a}{\sigma}\right) = 0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x-(ka+\sigma)}{k\sigma}\Big).$$

Таким образом, доказано, что $\zeta \sim N(ka+\sigma;\ k\sigma)$ при $k > 0$. Проведем аналогичные выкладки при $k < 0$:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{k\xi + b < x\} = P\Big\{\xi > \frac{x-b}{k}\Big\} =$$
$$= 1 - P\Big\{\xi < \frac{x-b}{k}\Big\} = 1 - 0{,}5 - \Phi\left(\frac{\frac{x-b}{k} - a}{\sigma}\right) =$$
$$= 0{,}5 - \Phi\Big(\frac{x-(ka+b)}{k\sigma}\Big) = 0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x-(ka+b)}{-k\sigma}\Big),$$

т.е. при $k < 0$ $\zeta \sim N(ka+\sigma;\ -k\sigma)$. Обобщая эти два вывода, получим утверждение теоремы.

Теорема 92.2. *Если $\zeta \sim N(a;\ \sigma)$, то $\xi_{cm} = \dfrac{\zeta - a}{\sigma} \sim N(0;1)$.*

Действительно, так как $\xi_{\text{ст}} = \dfrac{\zeta}{\sigma} - \dfrac{a}{\sigma}$, то по теореме 92.1 для $k = \dfrac{1}{\sigma}$, $b = -\dfrac{a}{\sigma}$, получаем, что $\xi_{\text{ст}}$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$\frac{1}{\sigma}\cdot a - \frac{a}{\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma}\cdot\sigma = 1.$$

Определение 92.2. *Случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, называется стандартной (нормированной) нормальной случайной величиной , а её распределение — стандартным (нормированным) нормальным.*

Плотность и функция стандартного нормального распределения даются формулами:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad F_{\text{СТ}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5 + \Phi(x). \qquad (92.7)$$

Практическое занятие 92. Виды распределений

Вначале рассмотрим два дискретных закона распределения.

Пример 92.1. *Вероятность попадания стрелком в мишень равна 0,8. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа попаданий в мишень при трёх выстрелах.*

Р е ш е н и е: Данная случайная величина имеет следующие возможные значения: 0 (стрелок не попал в мишень ни разу), 1 (попал один раз), 2 (попал два раза), 3 (ни разу не промахнулся). Здесь $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 3$.

По формуле Бернулли (7.1) найдем:

$$P(0) = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(1) = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = \frac{12}{125},$$
$$P(2) = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = \frac{48}{125}, \quad P(3) = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = \frac{64}{125}.$$

Maxima-программа:

(%i1) kill(all)$ load(distrib)$

(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 3, 0.8), k, 0, 3);

(%o3) [0.008, 0.096, 0.384, 0.512]

MathCad-программа:

$k := 0..6 \qquad P_k := dbinom(k, 3, 0.8)$

$P^T = \begin{pmatrix} 0.008 & 0.096 & 0.384 & 0.512 \end{pmatrix}$

Ряд распределения примет вид:

Ответ:

ξ	0	1	2	3
p	0,512	0,384	0,096	0,008

Пример 92.2. *Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна* 0,02. *Производится выборка* 120 *изделий. Записать закон распределения числа бракованных изделий в выборке.*

Решение: Здесь $n = 120$ и $p = 0{,}02$. Поскольку первая величина больше 100, а вторая – меньше 0,1, то для решения задачи можно применить формулу Пуассона (91.4). Параметр $a = np = 120 \cdot 0{,}02 = 2{,}4$; из таблицы найдем, что $e^{-2{,}4} = 0{,}0907$. Тогда

$$P\{\xi = 0\} = \frac{2{,}4^0 \cdot e^{-2{,}4}}{0!} = 0{,}0907, \quad P\{\xi = 1\} = \frac{2{,}4^1 \cdot e^{-2{,}4}}{1!} = 0{,}2177,$$

$$P\{\xi = 2\} = 0{,}2612, \quad P\{\xi = 3\} = 0{,}2090, \ldots$$

Здесь наибольшая вероятность при $k = 2$. Распределение Пуассона можно записать следующим образом:

ξ	0	1	2	3	...	k	...
p	0,0907	0,2177	0,2612	0,2090	...	$2{,}4^k \cdot e^{-2{,}4}/k!$	...

Для вычисления распределения Пуассона $P(\xi = m) = \dfrac{a^m}{m!}\, e^{-m}$ в компьютерный пакет Maxima встроена функция pdf_poisson(m,a), а в пакет MathCad – dpois(m,a).

Maxima-программа.

(%i1) load(distrib)$

(%i2) fpprintprec:5$ n:120$ p:0.02$ a:n*p;

(%i5) P:makelist(pdf_poisson(k, a), k, 0, n);

(%o5) [0.091, 0.218, 0.261, 0.209, 0.125, 0.06, 0.024, 0.008, ...

MathCad-программа.

n:=120 p:=0.02 a:=p*n k:=0..n

$P_k := dpois(k, a) \qquad X_k := k \sum P = 1$

$P^T = \begin{pmatrix} 0.091 & 0.218 & 0.261 & 0.209 & 0.125 & 0.06 & 0.024 & 0.008\ldots \end{pmatrix}$

Пример 92.3. *В диспетчерской автопредприятия среднее число заявок, поступающих в одну минуту, равно* 2. *Найти вероятности того, что за одну минуту: не поступит вызова, поступит* $1, 2, 3, \ldots$ *вызовов.*

Решение: Количество вызовов ξ, поступивших за время t, имеет распределение Пуассона:

$$P_t\{\xi = k\} = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$

где λ - среднее число событий в единицу времени (интенсивность). В данном случае $\lambda = 2,\ t = 1$. Следовательно,

$$P_1\{\xi = 0\} = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0{,}135, \quad P_1\{\xi = 1\} = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0{,}271,$$

$$P_1\{\xi = 2\} = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0{,}271, \quad P_1\{\xi = 3\} = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}180, \ldots$$

Ответ:

ξ	0	1	2	3	...
p	0,135	0,271	0,271	0,180	...

Пример 92.4. *На складе* 20% *приборов являются неточными. Взяты 5 приборов для проверки. Составить таблицу распределения случайной величины ξ – числа точных приборов среди проверенных. Определить математическое ожидание $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

Р е ш е н и е: Вероятность отбора неточного прибора $q = 0{,}2$, а точного прибора $p = 1 - q = 0{,}8$. В данной задаче имеем биномиальное распределение. Запишем ряд распределения:

ξ	0	1	2	3	4
p	$0{,}2^5$	$C_5^1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4$	$C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3$	$C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	$C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2$
ξ	5				
p	$0{,}8^5$				

Для получения числовых значений используем Maxima-программу:

(%i1) load(distrib)$ fpprintprec:4$

(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.8), k, 0, 5);

(%o4) $[3.2 * 10^{-4},\ 0.0064,\ 0.0512,\ 0.205,\ 0.41,\ 0.328]$

MathCad-программа решения этой задачи:

$k := 0..5 \qquad P_k := dbinom(k, 5, 0.8)$

$P = \left(3.2 \times 10^{-4}\ \ 6.4 \times 10^{-3}\ \ 0.051\ \ 0.205\ \ 0.41\ \ 0.328\right)$

Согласно формулам (91.3), математическое ожидание $M(\xi) = np = 5 \cdot 0{,}8 = 4$, а дисперсия $D(\xi) = npq = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$.

Ответ: $M(\xi) = 4,\ D(\xi) = 0{,}8$.

Из непрерывных законов на этом занятии изучим равномерное и экспоненциальное распределения.

Пример 92.5. *Цена деления шкалы измерительного прибора равна* 0,1. *Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при снятии показаний прибора будет сделана ошибка, превышающая* 0,03.

Р е ш е н и е: Ошибку округления до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину ξ, которая распределена равномерно между двумя целыми делениями. Плотность равномерного распределения находим по формуле (91.6), где длина интервала $b - a$ в данной задаче равна 0,1. Ошибка отсчёта превысит 0,03, если она будет заключена в интервале (0,03; 0,07). По формуле

$P(a < \xi < b) = \int_a^b \varphi(x)dx, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [0; 0{,}1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; 0{,}1]. \end{cases}$

найдем:

$$P(0{,}03 < \xi < 0{,}07) = \int_{0{,}03}^{0{,}07} 10\,dx = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4.

Пример 92.6. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, распределённой равномерно в отрезке [1,9].*

Р е ш е н и е: Математическое ожидание и дисперсия определяются в данном случае выражениями (91.8). Так как $a = 1,\ b = 9$, то сразу найдем

$$M(\xi) = \frac{1+9}{2} = 5, \quad D(\xi) = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} \approx 5{,}333.$$

Ответ: $M(\xi) = 5,\ D(\xi) = 16/3 \approx 5{,}333$.

Пример 92.7. *Случайная величина ξ распределена равномерно с $M(\xi) = 9/2$ и $D(\xi) = 25/12$. Найти функцию распределения случайной величины ξ.*

Р е ш е н и е: Функция распределения в формуле (91.7) зависит от параметров a и b. Используя (91.8), для определения a и b составим следующие уравнения:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}, \qquad \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отсюда, с учётом того, что $b > a$, получим $a = 2,\ b = 7$. Функция распределения окончательно примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 2, \\ \frac{x-2}{5} \text{ при } x \in (2, 7], \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$$

Пример 92.8. *Для какого значения a функция $\varphi(x) = ae^{-\lambda x}$ при $x \geqslant 0$ и $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$ является плотностью показательного закона?*

Решение: Так как $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$, то

$$\int_0^\infty \varphi(x)dx = \int_0^\infty ae^{-\lambda x}dx = 1.$$

Отсюда

$$-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow a/\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = a.$$

Ответ: $a = \lambda$.

Пример 92.9. *Непрерывная случайная величина распределена по экспоненциальному закону (91.9) с параметром $\lambda = 0{,}07$. Найти математическое ожидание и вероятность того, что в результате испытания ξ попадёт в интервал (2, 10).*

Решение: С учётом (91.11) математическое ожидание $M(\xi) = 1/\lambda = 1/0{,}07 = 100/7$. С другой стороны, используя выражение (91.10) для функции распределения, искомую вероятность найдем как приращение этой функции на интервале (2, 10):

$P(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-0{,}7} - 1 + e^{-0{,}14} \approx$
$\approx 0{,}869 - 0{,}497 = 0{,}373$.

Эту же вероятность можно вычислить как

$$P(2 < \xi < 10) = \int_2^{10} 0{,}07e^{-0{,}07t}dt = -e^{-0{,}07t}|_2^{10} \approx 0{,}372.$$

Ответ: $P(2 < \xi < 10) \approx 0{,}372$.

Пример 92.10. *Время безотказной работы элемента распределено по экспоненциальному закону $\varphi(x) = 0{,}03 \cdot e^{-0{,}03t}(t > 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 200 часов.*

Решение: Длительность времени безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение, у которого функция распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Тогда вероятность безотказной работы t (так называемая функция надежности) имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность отказов или среднее число отказов в единицу времени. В данном примере интенсивность отказов $\lambda = 0{,}03$. Искомая вероятность

$$R(200) = e^{-0{,}03\cdot 200} = e^{-6} \approx 0{,}003.$$

Самостоятельная работа

Пример 92.11. *Вероятность того, что расход горючего одним автомобилем в день не будет превышать нормы равна* 0,9. *Найти вероятность того, что из четырёх машин автобазы расход горючего за день будет в норме для k автомобилей ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).*

Пример 92.12. *В цехе находится четыре станка. Вероятность того, что каждый из них будет остановлен в течение определённого отрезка времени для смены деталей, равна* 0,3. *Определить вероятности того, что за это время будут остановлены* $0, 1, 2, 3, 4$ *станка. Найти математическое ожидание и дисперсию числа остановившихся станков.*

Пример 92.13. *Завод отправил на базу* 300 *изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна* 0,01. *Составить ряд распределения числа повреждённых изделий в пути. Воспользоваться законом Пуассона.*

Пример 92.14. *Брак продукции цеха составляет* 4%. *Определить математическое ожидание и дисперсию числа забракованных изделий цеха из 150 проверенных.*

Пример 92.15. *Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна* 0,005. *Телефонная станция обслуживает* 400 *абонентов. Чему равны дисперсия и среднее число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа? Воспользоваться законом Пуассона.*

Пример 92.16. *Интервал движения трамвая* 6 *минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай менее 4 минут.*

Пример 92.17. *Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной ξ, распределённой по показательному закону со средним временем ожидания, равным* 10 *минут. Найти вероятности того, что: а) 5мин $< \xi <$15мин, б) $\xi \geqslant 20$ мин.*

Лекция 93. Предельные теоремы теории вероятностей

Законы больших чисел. Центральная предельная теорема. Начальные и центральные моменты. Распределения, используемые в статистике

93.1. Законы больших чисел

В данной лекции мы познакомимся с разделом теории вероятностей, посвящённым получению приближённых формул для вероятностей суммы большого числа случайных величин.

С некоторыми из этих приближённых формул мы уже познакомились в лекции 88.

Теорема 93.1. *(Неравенство Чебышева.) Для случайной величины ξ при $\forall\ \varepsilon > 0$ верно неравенство:*

$$P\{|\xi - M(\xi)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство проведём для непрерывной случайной величины ξ с плотностью $\varphi(x)$, хотя теорема верна и для дискретных случайных величин. Оценим вероятность противоположного события:

$$P\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\} = P\{\xi \geqslant M(\xi)+\varepsilon \text{ или } \xi \leqslant M(\xi)-\varepsilon\} =$$

$$= P\{\xi \leqslant M(\xi)-\varepsilon\} + P\{\xi \geqslant M(\xi)+\varepsilon\} = \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} \varphi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}\varphi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}\varphi(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}\varphi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)}^{+\infty} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}\varphi(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2\varphi(x)dx = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Первое неравенство в этой цепочке объясняется тем, что подынтегральные функции умножили на выражение $\dfrac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}$, которое больше или равно 1, т.к. в области интегрирования x удовлетворяет неравенству $|x - M(\xi)| \geqslant \varepsilon$. Второе неравенство верно, т.к. при увеличении интервала интегрирования интеграл от неотрицательной функции не уменьшается.

Из полученного неравенства: $P\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$; переходя к вероятности противоположного события, получаем неравенство Чебышева.

Пример 93.1. *В партии 10 лампочек вероятность отказа каждой из которых* 0,05. *Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения числа отказавших ламп от математического ожидания меньше одного.*

Р е ш е н и е: Пусть ξ — число отказавших лампочек; эта случайная величина имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$, $p = 0{,}05$.

$$M(\xi) = np = 0{,}5;\ \ D(\xi) = npq = 0{,}475.$$

По теореме 93.1 имеем:

$$P\{|\xi - 0{,}5| < 1\} \geqslant 1 - \frac{0{,}475}{1}.$$

Другими словами: $P\{|\xi - 0{,}5| < 1\} \geqslant 0{,}525$.

Замечание 93.1. *Неравенство Чебышева используется при доказательстве ряда теорем (иногда его называют лемма Чебышева), однако оно даёт довольно грубую оценку для приведённой вероятности. Так, в примере 93.1, раскрывая модуль, мы получили неравенство:*

$$P\{-0{,}5 < \xi < 1{,}5\} \geqslant 0{,}525.$$

Однако приведённый интервал может быть заведомо уменьшен, т.к. $\xi \geqslant 0$*:*

$$P\{-0{,}5 < \xi < 1{,}5\} = P\{0 \leqslant \xi < 1{,}5\}.$$

Теорема 93.2. *(Закон больших чисел в форме Чебышева.) Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *— независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями* $\Big(D(\xi_i) \leqslant C, i = 1, 2, \ldots\Big)$*, то для* $\forall\ \varepsilon > 0$ *будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n} \right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим $\zeta_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$M(\zeta_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n}, \quad D(\zeta_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}D(\xi_i)}{n^2} \leqslant \frac{n\cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

На основании неравенства Чебышева для ζ_n получаем:

$$P\{|\zeta_n - M(\zeta_n)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\zeta_n)}{\varepsilon^2} \iff$$

$$\iff 1 \geqslant P\left\{\left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n} \right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, поскольку пределы левой и правой частей равны 1, получаем утверждение теоремы.

Закон больших чисел в форме Чебышева утверждает, что для большого числа независимых случайных величин практически невозможны значительные отклонения их среднего арифметического от среднего арифметического их математических ожиданий.

Следствие 93.1. *Если в условиях теоремы 93.2* $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots = a$*, то для* $\forall\ \varepsilon > 0$ *будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum \xi_i}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Действительно, в этом случае $M(\zeta_n) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n} = \dfrac{na}{n} = a.$

Замечание 93.2. *На практике закон больших чисел в форме Чебышева применяют, например, в теории ошибок. Следует отметить, что результат любого измерения есть случайная величина. При этом различают грубые ошибки измерения, которые можно устранить, основываясь на физической природе измеряемого объекта, Так, если в ряду измерения роста группы людей встретилось значение* 17,8 *м. — это, очевидно, грубая ошибка измерения. Данный результат следует изъять, если нельзя его уточнить. Далее, бывают систематические ошибки измерения. Эти ошибки, как правило, вызываются неисправностью измерительного прибора; они не являются случайными и их можно устранить, проверив прибор и внеся поправку в измерения. Так, например, если часы спешат на* 5 *минут, то от измеренной величины нужно отнять* 5 *минут, чтобы получить верное время. Наконец, все остальные ошибки — случайные ошибки измерения, вызываются множеством различных факторов: дрожание стрелки прибора, неточное считывание показаний («косо взглянул» на стрелку), отклонения в условиях измерения и проч. Таким образом, результат измерения можно считать случайной величиной, равной сумме большого числа других случайных величин. В соответствии с теоремой 93.2 для уточнения результата нужно произвести n независимых измерений и усреднить их результат. Следует, однако, заметить, что все равно результат будет получен с точностью, не превышающей точности самого измерительного прибора, которая обычно указывается в технической документации на него.*

Теорема 93.3. *(Закон больших чисел в форме Бернулли.) В независимых испытаниях Бернулли с вероятностью p появления события A в каждом для $\forall\ \varepsilon > 0$ будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

здесь m — число появлений события A в n испытаниях.

Доказательство. Представим относительную частоту $\dfrac{m}{n}$ в виде отношения $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$, где случайная величина $\xi_i = 1$, если в i-м испытании появилось событие A (см. п. 91.1). Для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ \ldots, \xi_n$ выполняется следствие 93.1, т.к. $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots =$, $= p$, $D(\xi_1) = D(\xi_2) = \ldots = pq \leqslant 1$. На основании следствия 93.1 получаем утверждение теоремы 93.3.

Теорема 93.3 даёт теоретическое обоснование статистическому определению вероятности, т.к. утверждает, что при большом числе независимых испытаний практически невозможны значительные отклонения относительной частоты события A от вероятности р его появления в каждом испытании.

Из законов больших чисел не следует, что при $n \to \infty$ предел последовательности случайных величин равен какому-то числу (среднему арифметическому математических ожиданий). Обычное понятие предела неприменимо к последовательности случайных величин.

Определение 93.1. *Последовательность случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n, \dots$ *сходится по вероятности к числу* a*, если для* $\forall\ \varepsilon > 0$ *будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} = 1.$$

Итак, закон больших чисел в форме Чебышева утверждает, что при выполнении определённых условий среднее арифметическое n независимых случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий при $n \to \infty$.

Самостоятельно сформулируйте закон больших чисел в форме Бернулли, используя сходимость по вероятности.

93.2. Центральная предельная теорема

Известно, что нормальные случайные величины широко распространены на практике, что и объясняет их название. В чём причина этого? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема, доказанная русским математиком А.М. Ляпуновым.

Теорема 93.4. *(Центральная предельная теорема.) Если случайная величина* ζ_n *является суммой большого числа* n *независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Ляпунова, то* ζ_n *имеет распределение, близкое к нормальному:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\zeta_n - A_n}{B_n} < x\right\} = 0{,}5 + \Phi(x),$$

$$\text{где} \quad \zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad A_n = M(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$B_n^2 = D(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Условие Ляпунова заключается в следующем:

(1) Все случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковое распределение.

(2) Все дисперсии $D(\xi_1), D(\xi_2), \ldots$ конечны и отличны от нуля.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\bigl|\xi_i - M(\xi_i)\bigr|^{2+\delta}}{\Bigl(\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Bigr)^{\frac{2+\delta}{2}}} = 0$ для некоторого $\delta > 0$.

Условия Ляпунова приводят к тому, что в сумме $\dfrac{\zeta_n - A_n}{B_n}$ каждое слагаемое оказывает на сумму малое влияние. Мы примем эту теорему без доказательства.

93.3. Начальные и центральные моменты

Определение 93.2. *Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется:*

$$\mu_k = M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^k\right]. \tag{93.1}$$

Заметим, что центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а второго порядка есть дисперсия:

$$\mu_1 = M\bigl(\xi - M(\xi)\bigr) = M(\xi) - M\bigl(M(\xi)\bigr) = M(\xi) - M(\xi) = 0,$$
$$\mu_2 = M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^2\right] = \sigma^2.$$

Определение 93.3. *Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется*

$$\nu_k = M(\xi^k). \tag{93.2}$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $\nu_1 = M(\xi)$.

Между начальными и центральными моментами существует связь:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\text{т.к.}\quad D(\xi) = M(\xi^2) - \bigl(M(\xi)\bigr)^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания, получаем:

$$\mu_3 = M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^3\right] = M\Bigl(\xi^3 - 3\xi^2 M(\xi) + 3\xi\bigl(M(\xi)\bigr)^2 - \bigl(M(\xi)\bigr)^3\Bigr) =$$
$$= M(\xi^3 - 3\xi^2\nu_1 + 3\xi\nu_1^2 - \nu_1^3) = M(\xi^3) - 3\nu_1 M(\xi^2) + 3\nu_1^2 M(\xi) - \nu_1^3 =$$
$$= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 3\nu_1\nu_1 - \nu_1^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Аналогично доказываются остальные соотношения:

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 \quad \text{и т.д.}$$

Аналогично тому, как коэффициенты ряда Тейлора дают все более точное приближение для функции, моменты случайной величины всё более точно определяют её распределение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 93.4. *Коэффициентом асимметрии распределения случайной величины ξ называется:*

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^3\right]}{\sqrt{D(\xi)}^3}.$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой плотности распределения расположена справа от математического ожидания и отрицательна, если — слева (см. рис. 14).

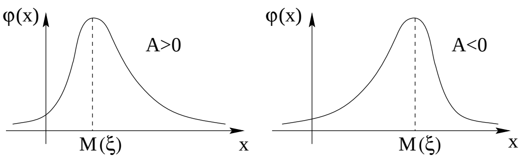


Рис. 14. *Асимметрия*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 93.5. *Эксцессом распределения случайной величины ξ называется:*

$$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^4\right]}{\bigl(D(\xi)\bigr)^2} - 3.$$

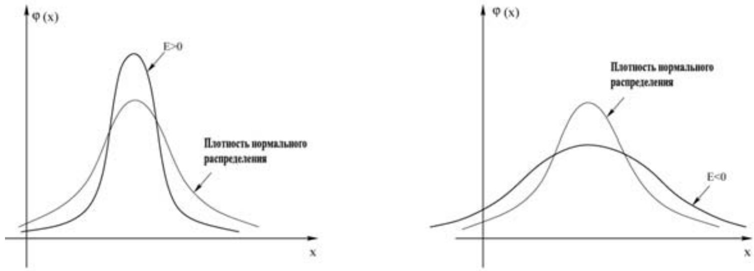


Рис. 15. *Эксцесс*

Для нормального распределения $E = 0$; если $E > 0$, то плотность распределения имеет более высокую и «острую» вершину по сравнению с кривой Гаусса; если $E < 0$, то более низкую и «плоскую» (см. рис. 15)

Практическое занятие 93. Нормальное распределение

В Maxima значения функции плотности распределения (92.1) и функции распределения (92.3) для нормального закона вычисляются при помощи встроенных в пакет функций pdf_normal(x, a, σ) и cdf_normal(x, a, σ). В пакете MathCad эти функции имеют вид: dnorm(x, a, σ) и pnorm(x, a, σ).

Пример 93.1. *Написать плотность вероятности нормально распределённой случайной величины ξ, зная, что $M(\xi) = 4$, $D(\xi) = 25$.*

Решение: Так как математическое ожидание $a = 4$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{25} = 5$, то по формуле (92.1) получаем плотность распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/50}.$$

Пример 93.2. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Определить: а) $P(-2 < \xi < 3)$, б) $P(\xi < 1)$, в) $P(\xi > 3)$.*

Решение: а) Применим формулу (92.5), полагая $a = 0$, $\sigma = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Тогда

$$P(-2 < \xi < 3) = \Phi\Big(\frac{3-0}{1}\Big) - \Phi\Big(\frac{-2-0}{1}\Big) = \Phi(3) - \Phi(-2) =$$
$= \Phi(3) + \Phi(2) \approx 0{,}499 + 0{,}477 = 0{,}976.$

Значения $\Phi(3)$ и $\Phi(2)$ найдены из таблицы, $\Phi(-2) = -\Phi(2)$.

б) $P(\xi < 1) = P(-\infty < \xi < 1) = \Phi\left(\frac{1-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-0}{1}\right) =$
$= \Phi(1) + \Phi(+\infty) \approx 0{,}3413 + 0{,}500 = 0{,}841.$

в) $P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\frac{\infty-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{3-0}{1}\right) =$
$= \Phi(+\infty) - \Phi(3) \approx 0{,}500 - 0{,}499 = 0{,}001.$

Maxima-программа:

```
(%i1) load(distrib)$   fpprintprec:5$   numer:true$   a:0$   s:1$
(%i6) cdf_normal(3, a, s) − cdf_normal( −2, a, s);
(%o6) 0.976
(%i67) cdf_normal(1, a, s) − cdf_normal( −100, a, s);
(%o7) 0.841
(%i8) cdf_normal(100, a, s) − cdf_normal( 3, a ,s);
(%o8) 0.00135
```

MathCad-программа:

```
a:=0      σ:=1
pnorm(3, a, σ) − pnorm( −2, a, σ) = 0.976
pnorm(1, a, σ) − pnorm(−∞, a, σ)= 0.841
pnorm(∞, a, σ) − pnorm(3, a, σ) = 0.135 × 10^−3
```

Ответ: $P(-2 < \xi < 3) \approx 0{,}976$; $P(\xi < 1) \approx 0{,}726$;
$P(\xi > 3) \approx 0{,}001$.

Пример 93.3. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$.*
Найти: а) $P(2 < \xi < 3)$, б) $P(|\xi - 3| < 0{,}1)$.

Р е ш е н и е: а) По формуле (92.5) имеем:

$$P(2 < \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) = \Phi(0) - \Phi(-0{,}5) =$$
$= \Phi(0) + \Phi(0{,}5) \approx 0 + 0{,}192 = 0{,}192.$

б) Так как $a = 3$, то для нахождения вероятности неравенства $|\xi - 3| < 0{,}1$, применим формулу (92.6), где $\varepsilon = 0{,}1$. В этом случае

$$P(|\xi - 3| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}05) \approx 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04.$$

Ответ: $P(2 < \xi < 3) \approx 0{,}192$; $P(|\xi - 3| < 0{,}1) \approx 0{,}04$.

Пример 93.4. *Вычислить вероятность того, что случайная величина ξ, подчинённая нормальному закону, при трёх испытаниях хотя бы один раз окажется в интервале (4, 6), если* $M(\xi) = 3{,}8$, $\sigma(\xi) = 0{,}6$.

Р е ш е н и е: Сначала найдем вероятность того, что случайная величина ξ будет заключена в интервале (4, 6):

$$P(4 < \xi < 6) = \Phi\Big(\frac{6 - 3{,}8}{0{,}6}\Big) - \Phi\Big(\frac{4 - 3{,}8}{0{,}6}\Big) =$$
$$= \Phi(3{,}67) - \Phi(0{,}33) \approx 0{,}500 - 0{,}129 = 0{,}371.$$

Тогда вероятность попадания вне интервала (4, 6) будет равна $1 - 0{,}371 = 0{,}629$. Вероятность того, что случайная величина ξ при трёх испытаниях все три раза окажется вне интервала (4, 6), найдется по теореме умножения независимых событий как $0{,}6294^3 \approx 0{,}2489$. Следовательно, искомая вероятность $p = 1 - 0{,}249 = 0{,}751$.

Ответ: $\approx 0{,}75$.

Пример 93.5. *Длина изготовляемых болтов является нормально распределённой случайной величиной ξ с математическим ожиданием $a = 8{,}46$. Вероятность того, что наудачу взятый болт имеет размер от* 8,40 *до* 8,43*, равна* 0,25. *Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятого болта будет в пределах от* 8,49 *до 8,52 см?*

Р е ш е н и е: Поскольку кривая плотности нормального распределения симметрична относительно математического ожидания a, то в данном случае

$P(8{,}49 < \xi < 8{,}52) = P(8{,}40 < \xi < 8{,}43) = 0{,}25$.

Пример 93.6. *Длина детали представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону и имеющую поле допуска от* 78 *до* 84 *см. Известно, что брак по заниженному размеру (длина деталей меньше* 78 *см) составляет* 4%*, а брак по завышенному размеру (длина деталей больше* 84 *см)* 6%. *Найти средний размер детали a и среднее квадратическое отклонение σ.*

Р е ш е н и е: Поле допуска находится от 78 до a и от a до 84. Вероятность попадания в первый интервал $0{,}5 - 0{,}04 = 0{,}46$, а во второй:
$0{,}5 - 0{,}06 = 0{,}44$. Поскольку

$$P(78 < \xi < a) = \Phi(0) - \Phi\left(\frac{78 - a}{\sigma}\right) \approx 0{,}46,$$

$$P(a < \xi < 84) = \Phi\left(\frac{84 - a}{\sigma}\right) - \Phi(0) \approx 0{,}44$$

и функция Лапласа $\Phi(0) = 0$, то

$$\Phi\Big(\frac{78 - a}{\sigma}\Big) \approx -0{,}46, \qquad \Phi\Big(\frac{84 - a}{\sigma}\Big) \approx 0{,}44.$$

Из таблицы найдем: $(78 - a)/\sigma = -1{,}75$, $(84 - a)/\sigma = 1{,}28$.

Из последних уравнений получим: $\sigma = 1{,}98$, $a = 81{,}47$.

Пример 93.7. *Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с $a = 15$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. Найти вероятность брака P при условии, что разрешается допуск для диаметра подшипника $\pm 0{,}8$ мм. Какую точность диаметра подшипника можно гарантировать с вероятностью $0{,}92$?*

Р е ш е н и е: Так как здесь отклонение $\varepsilon = 0{,}8$, то, согласно (92.6),

$$P(|\xi - 15| < 0{,}8) = 2 \cdot \Phi\Big(\frac{0{,}8}{0{,}4}\Big) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954.$$

Отсюда вероятность брака найдется как вероятность противоположного события: $P = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$.

Во второй части задачи, наоборот, задана вероятность $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ и нужно найти отклонение ε. Подставим известные данные в формулу (92.6). Тогда $0{,}92 = 2 \cdot \Phi(\varepsilon/0{,}4)$, $\Phi(\varepsilon/0{,}4) = 0{,}46$. Из таблицы найдем, что $\varepsilon/0{,}4 = 1{,}75$ или $\varepsilon = 0{,}7$ мм.

Ответ: $P \approx 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}7$.

Пример 93.8. *Размер диаметра втулок считается нормально распределённым с $a = 2{,}5$ см и $\sigma = 0{,}01$ см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки ξ, если за вероятность практической достоверности принимается $0{,}9973$?*

Р е ш е н и е: Согласно правилу «3σ» (трёх сигм):

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Отсюда получим: $|\xi - a| < 3\sigma$, $a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$, $2,5 - 0{,}03 < \xi < 2,5 + 0{,}03$ или $2{,}47 < \xi < 2{,}53$.

Ответ: $\xi \in (2{,}47; 2{,}53)$.

Пример 93.9. *Найти для нормальной случайной величины ξ её центральные моменты третьего и четвёртого порядков.*

Р е ш е н и е: Согласно (93.1), для нормально распределённой случайной величины с математическим ожиданием a центральный момент порядка k определяется как

$$\mu_k = M(\xi - a)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k \varphi(x) dx.$$

После подстановки сюда плотности распределения (92.1) получим:

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

После подстановки $t = (x-a)/(\sigma\sqrt{2})$ центральный момент

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dt.$$

Здесь при $k = 1, 3, 5, ...$ подынтегральная функция будет нечётной и интеграл обратится в нуль. Это означает, что центральные моменты нечётного порядка данного распределения равны нулю. Так как асимметрия пропорциональна μ_3, то, в частности, для нормального закона она равна нулю.

Предполагая, что k чётно, и применяя интегрирование по частям, можно получить рекуррентное соотношение: $\mu_k = (k-1)\sigma^2 \mu_{k-2}$. Отсюда, учитывая, что $\mu_k = \sigma^2$, получим: $\mu_4 = 3\sigma^4$, $\mu_6 = 15\sigma^6$ и т. д. С учётом первого равенства отношение $\mu_4/\sigma^4 = 3\sigma^4/\sigma^4 = 3$. Следовательно, эксцесс нормального распределения $E = \mu_4/\mu_2^2 - 3 = 0$.

Пример 93.10. *Найти абсциссы точек перегиба кривой распределения $\varphi(x)$ нормального закона.*

Р е ш е н и е: Продифференцируем функцию (92.1). Тогда

$$\varphi'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Дифференцируя последнее выражение как произведение, получим:

$$\varphi''(x) = \frac{(x-a)^2 - \sigma^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Правая часть будет равна нулю, если $(x-a)^2 = \sigma^2$. Тогда $x = a \pm \sigma$. Это означает, что точки перегиба графика плотности распределения отстоят на величину σ от математического ожидания.

Самостоятельная работа

Пример 93.11. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 1$, $\sigma = 0{,}5$. Определить: а) $P(-1 < \xi < 1)$, б) $P(0 < \xi < 3)$, в) $P(|\xi - 1| < 0{,}1)$.*

Пример 93.12. *Процент выполнения задания (норма выработки) рабочего является случайной величиной, подчинённой нормальному закону распределения с математическим ожиданием 110% и средним квадратическим отклонением 2%. Определить вероятность того, что: а) выполнение нормы выработки одним рабочим окажется в пределах от 101 до 105%, б) выполнение нормы выработки хотя бы одним из трёх наудачу взятых рабочих окажется в пределах от 107 до 111%.*

Пример 93.13. *Размер гайки задан полем допуска $90 - 95$ мм. На ОТК завода средний размер детали оказался 92,7 мм, а среднее квадратическое отклонение 1,2 мм. Считая, что размер гайки подчиняется нормальному закону, определить отдельно вероятность брака по: а) заниженному, б) завышенному размерам. (В случае а нужно искать вероятность того, что $\xi < 90$, а в случае б — вероятность того, что $\xi > 95$).*

Пример 93.14. *Длина изготавливаемой на станке детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону. Её среднее значение равно 30 см, а $\sigma = 0{,}25$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?*

Пример 93.15. *Производится взвешивание драгоценного металла без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 5 мг.*

Пример 93.16. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0{,}3$, $\sigma = 0{,}5$. В каких границах должна изменяться величина ξ, чтобы вероятность неравенства $|\xi - 0{,}3| < \varepsilon$ была равна 0,9642?*

Пример 93.17. *Наблюдения показали, что внешний диаметр подшипников данного типа является нормально распределённой случайной величиной ξ со средним значением $a = 100$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}001$ мм. В каких границах можно практически гарантировать внешний диаметр подшипника, если за вероятность практической достоверности принять* 0,9973.

Лекция 94. Двумерные случайные величины

Дискретные двумерные случайные величины. Двумерная функция распределения и плотность. Регрессия. Коэффициент корреляции. Прямые среднеквадратической регрессии

94.1. Дискретные двумерные случайные величины.

Кроме одномерных случайных величин, рассмотренных в предыдущих лекциях, изучают двумерные, трёхмерные и т.д. случайные величины.

Будем рассматривать точку на плоскости со случайными координатами $(\xi; \zeta)$. Сначала рассмотрим случай, когда обе составляющие — дискретные случайные величины.

Определение 94.1. *Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P\{\xi = x_i; \zeta = y_j\}$.*

Закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i и вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \zeta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Таблица 94.1

Распределение двумерной дискретной случайной величины						
$\xi \backslash \zeta$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P\{\xi = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
$P\{\zeta = y_j\}$	$p_{\cdot 1}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	$p_{\cdot m}$	1

Так как события $\{\xi = x_i, \zeta = y_i\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие, сумма всех вероятностей равна 1.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот). Действительно:

$$\begin{gathered} P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = x_i, \zeta = y_1\} + P\{\xi = x_i, \zeta = y_2\} + \dots \\ \dots + P\{\xi = x_i, \zeta = y_m\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i\cdot}. \end{gathered} \tag{94.1}$$

Аналогично

$$P\{\zeta = y_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{\cdot j}. \tag{94.2}$$

Итак, сложив вероятности «по строкам» и записав их в последний столбец, мы получим распределение составляющей ξ (первый и последний столбец таблицы 94.1). Сложив вероятности по столбцам и записав их в последнюю строчку, мы получим распределение составляющей ζ (первая и последняя строки таблицы 94.1).

Зная распределение составляющих, можем найти числовые характеристики каждой из них:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\cdot}, \qquad M(\zeta) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{\cdot j}. \tag{94.3}$$

Определение 94.2. *Точка с координатами $\big(M(\xi); M(\zeta)\big)$ называется центром распределения.*

Отметим, что таблица 94.1, кроме информации о распределении каждой составляющей, содержит также информацию об их взаимном влиянии.

Найдём, например, условные вероятности $P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\}$ и $P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\}$. Из формулы (87.3) следует, что

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}. \tag{94.4}$$

Поэтому

$$P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = \frac{P\{\xi = x_i, \zeta = y_j\}}{P\{\xi = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}. \tag{94.5}$$

Аналогично:

$$P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}. \tag{94.6}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{m} P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$, так же, как и $\sum\limits_{i=1}^{n} P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = 1$ для $j = 1, \ldots, m$ (докажите самостоятельно).

Вероятности $P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\}$ для $j = 1, \ldots, m$ образуют условное распределение случайной величины ζ при фиксированном значении ξ. В частности, можно найти условное математическое ожидание ζ при фиксированном значении ξ:

$$M(\zeta/\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n \tag{94.7}$$

и условное математическое ожидание ξ при фиксированном значении ζ:

$$M(\xi/\zeta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{94.8}$$

Замечание 94.1. *Легко показать, что для независимых дискретных случайных величин ξ и ζ*

$$P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = P\{\zeta = y_j\} \quad \text{и} \quad P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}.$$

Другими словами, закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

Действительно, по определению 89.5 для независимых дискретных случайных величин ξ и ζ вероятность $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$, поэтому:

$$P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}}{p_{i\cdot}} = p_{\cdot j} \ .$$

Аналогично получаем:

$$P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = p_{i\cdot} \ .$$

Пример 94.1. *Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей 94.2.*

Таблица 94.2

Условие примера 94.1			
$\xi\backslash\zeta$	1	3	5
1	0,1	0,2	0,3
2	0,0	0,3	0,1

Найти безусловное и условное математическое ожидание ζ при условии $\xi = 2$, а также безусловное и условное математическое ожидание ξ при условии $\zeta = 1$.

Р е ш е н и е: Сначала найдём безусловные распределения ξ и ζ, суммируя вероятности по строкам и столбцам таблицы 94.2, и допишем их в таблицу распределения (в последний столбец и строку) (см. табл. 94.3).

Таблица 94.3

Решение примера 94.1				
$\xi\backslash\zeta$	1	3	5	$P\{\xi = x_i\}$
1	0,1	0,2	0,3	0,6
2	0,0	0,3	0,1	0,4
$P\{\zeta = y_i\}$	0,1	0,5	0,4	1

Искомые безусловные математические ожидания получатся как обычно для дискретных распределений:

$$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}4,$$
$$M(\zeta) = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}4 = 3{,}6.$$

Далее, по формулам (94.5) и (94.6) найдём условные распределения $P\{\zeta = y_j/\xi = 2\}$ и $P\{\xi = x_i/\zeta = 1\}$:

$$P\{\zeta = y_j/\xi = 2\} = \frac{P\{\zeta = y_j,\ \xi = 2\}}{P\{\xi = 2\}} = \frac{P\{\zeta = y_j,\ \xi = 2\}}{0{,}4},$$

$$P\{\xi = x_i/\zeta = 1\} = \frac{P\{\xi = x_i,\ \zeta = 1\}}{P\{\zeta = 1\}} = \frac{P\{\xi = x_i,\ \zeta = 1\}}{0{,}1}.$$

Результаты представлены в таблицах 94.4, 94.5.

Условные распределения

Таблица 94.4

ζ	1	3	5
$P\{\zeta = y_j/\xi = 2\}$	0	3/4	1/4

Таблица 94.5

ξ	1	2
$P\{\xi = x_i/\zeta = 1\}$	1	0

Найдём теперь условные математические ожидания по формулам (94.7), (94.8) для данных из таблиц 94.4, 94.5.

$$M(\xi/\zeta = 1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1,$$

$$M(\zeta/\xi = 2) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = 3{,}5.$$

Как видим, условные и соответствующие безусловные математические ожидания различаются.

Ответ: $M(\xi) = 1{,}4$; $M(\zeta) = 3{,}6$; $M(\xi/\zeta = 1) = 1$; $M(\zeta/\xi = 2) = 3{,}5$.

94.2. Двумерная функция распределения и плотность

Приводимое ниже определение 94.3 функции распределения справедливо для любой двумерной случайной величины. Заметим, однако, что дискретная случайная величина полностью определяется таблицей 94.1, работать с которой удобнее, чем с функцией распределения двумерной дискретной случайной величины.

Определение 94.3. *Функцией распределения двумерной случайной величины* $(\xi;\zeta)$ *называют*

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \zeta < y\}. \tag{94.9}$$

Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant F(x;y) \leqslant 1$;
(2) $F(-\infty;y) = F(x;-\infty) = F(-\infty;-\infty) = 0 \quad F(+\infty;+\infty) = 1$;

(3) $F(x;y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу;

(4) Функции распределения каждой составляющей получаются предельным переходом:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = F(x;+\infty),$$
$$F_\zeta(y) = P\{\zeta < y\} = F(+\infty;y);$$

(5) Вероятность попадания в прямоугольник выражается через функцию распределения по формуле:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2; y_1 \leqslant \zeta < y_2\} = \\ = \big(F(x_2;y_2) - F(x_2;y_1)\big) - \big(F(x_1;y_2) - F(x_1;y_1)\big). \tag{94.10}$$

Доказательства свойств 1, 2 непосредственно следуют из определения 94.3 (проведите их самостоятельно). Доказательство свойства 3 аналогично доказательству свойства 3 функции распределения $F(x)$ в п. 90.2.

Свойство 4 очевидно:
$F(x;+\infty) = P\{\xi < x; \zeta < +\infty\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x)$.

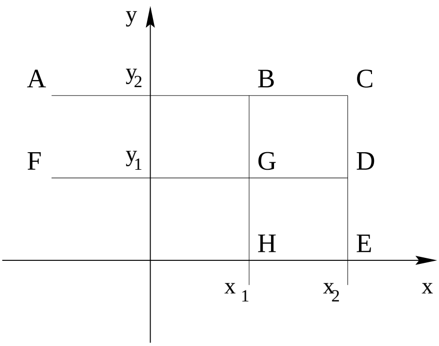


Рис. 16. *Вероятность попадания в прямоугольник*

Для доказательства свойства 5 заметим, что согласно определению 94.3 $F(x_2;y_2)$ есть вероятность попадания двумерной случайной величины в угол ACE, $F(x_2;y_1)$ — в угол FDE; следовательно $\big(F(x_2;y_2) - F(x_2;y_1)\big)$ есть вероятность попадания в полуполосу $ACDF$ (рис. 16). Аналогично $\big(F(x_1;y_2) - F(x_1;y_1)\big)$ есть вероятность попадания в полуполосу $ABGF$. Следовательно, разность этих вероятностей есть вероятность попадания в прямоугольник $BCDG$.

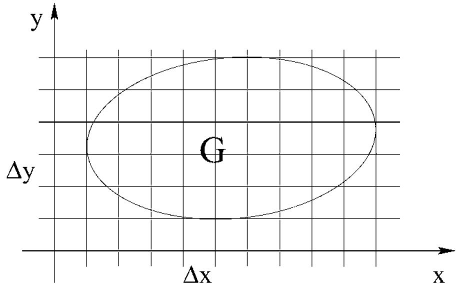


Рис. 17. *Вероятность попадания в область*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 94.4. *Двумерная случайная величина $(\xi;\zeta)$ называется непрерывной, если её функция распределения $F(x;y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные второго порядка всюду (за исключением быть может, конечного числа кривых).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 94.5. *Плотностью распределения двумерной непрерывной случайной величины $(\xi;\zeta)$ называется вторая смешанная частная производная функции распределения:*

$$\varphi(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}. \tag{94.11}$$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

(1) $\varphi(x;y) \geqslant 0$;
(2) $\varphi(-\infty;y) = \varphi(x;-\infty) = \varphi(\pm\infty;\pm\infty) = 0$;
(3) $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi(s;t)dsdt$;
(4) Вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$ в область G равна:

$$P\{(\xi;\zeta) \in G\} = \iint\limits_{G} \varphi(x;y)dxdy;$$

(5) $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x;y)dxdy = 1$.

Свойство 1 есть следствие свойства 3 $F(x;y)$: производная от неубывающей функции неотрицательна. Свойство 2 вытекает из свойства 2 $F(x;y)$, т.к. производная константы равна нулю.

Свойство 3 следует из определения 94.5, поскольку $F(x;y)$ является первообразной для $\varphi(x;y)$.

Для доказательства свойства 4 область G следует разбить на множество прямоугольников со сторонами Δx и Δy (рис. 17). Вероятность попадания в i-й из них определяется с помощью свойства 5 функции распределения $F(x;y)$. Применим к правой части этого равенства формулу Лагранжа:

$$\begin{gathered}P\{x_{1i} \leqslant \xi < x_{2i}; y_{1i} \leqslant \zeta < y_{2i}\} = \big(F(x_{2i};y_{2i}) - F(x_{2i}y_{1i})\big) - \\ - \big(F(x_{1i};y_{2i}) - F(x_{1i}y_{1i})\big) = F''_{xy}(s_i;t_i)\Delta x\Delta y = \varphi(s_i;t_i)\Delta x\Delta y,\end{gathered} \tag{94.12}$$

где точка $(s_i;t_i)$ находится внутри i-го прямоугольника.

Очевидно, что вероятность попадания в область G приближённо равна сумме вероятностей попадания в эти прямоугольники:

$$P\{(\xi;\zeta) \in G\} \approx \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i;t_i)\Delta x\Delta y.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ $(n \to \infty)$, получим свойство 4 плотности $\varphi(x;y)$.

Теперь свойство 5 очевидно, т.к. вероятность попасть во всю плоскость с одной стороны равна $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x;y)dxdy$, а с другой стороны — есть достоверное событие.

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $\varphi(x;y)$ по формулам (94.13):

$$\varphi_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x;y)dy; \qquad \varphi_\zeta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x;y)dx. \tag{94.13}$$

Действительно, поскольку $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi(s;t)dsdt$, получаем $F_\xi(x) = F(x;+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s;t)dsdt$. Продифференцировав обе части этого равенства, получим:

$$\varphi_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s;t)dsdt\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x;t)dt.$$

Из равенства (94.12) следует, что вероятностный смысл двумерной плотности состоит в том, что $\varphi(x;y)$ равна вероятности попадания случайной точки в прямоугольник с вершиной $(x;y)$, с малыми сторонами $\Delta x, \Delta y$, отнесённой к площади этого прямоугольника.

Аналогично тому, как это было сделано для дискретной случайной величины, найдём условную плотность составляющей ζ при фиксированной величине ξ и наоборот.

Определение 94.6. *Условной плотностью $\varphi(y/\xi = x)$ распределения ζ при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$\varphi(y/\xi = x) = \frac{\varphi(x;y)}{\varphi_\xi(x)} \quad \text{при} \quad \varphi_\xi(x) \neq 0. \tag{94.14}$$

Условной плотностью $\varphi(x/\zeta = y)$ распределения ξ при условии, что $\zeta = y$, называется:

$$\varphi(x/\zeta = y) = \frac{\varphi(x;y)}{\varphi_\zeta(y)} \quad \text{при} \quad \varphi_\zeta(y) \neq 0. \tag{94.15}$$

Заметим, что формулы (94.14), (94.15) соответствуют формуле (94.4), если учесть вероятностный смысл плотности. Так, например:

$$\frac{\varphi(x;y)\Delta x\Delta y}{\varphi_\xi(x)\Delta x} = \frac{\varphi(x;y)\Delta y}{\varphi_\xi(x)} = \varphi(y/\xi = x)\Delta y.$$

Определение 94.7. *Условным математическим ожиданием ζ при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$M(\zeta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y/\xi = x)dy. \tag{94.16}$$

Условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\zeta = y$, называется:

$$M(\xi/\zeta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x/\zeta = y)dx. \qquad (94.17)$$

Заметим, что $M(\zeta/\xi = x)$ есть функция от x: $M(\zeta/\xi = x) = f_{\zeta/\xi}(x)$. Аналогично $M(\xi/\zeta = y)$ является функцией от y:
$M(\xi/\zeta = y) = \psi_{\xi/\zeta}(y)$.

Определение 94.8. *Функцию $f_{\zeta/\xi}(x)$ называют регрессией ζ на ξ. Другими словами, регрессией ζ на ξ называется условное математическое ожидание ζ при фиксированном $\xi = x$. Аналогично $\psi_{\xi/\zeta}(y)$ называется регрессией ξ на ζ.*

Пример 94.2. *Плотность $\varphi(x;y)$ определяется формулой:*

$$\varphi(x;y) = \begin{cases} C & \text{при} \quad x^2+y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$$

Определить константу C и функции регрессии ζ на ξ и ξ на ζ.

Р е ш е н и е: Для определения константы C воспользуемся свойством 5 плотности:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x;y)dxdy = 1 \implies \iint\limits_{x^2+y^2<R} C\,dxdy = 1 \implies C \iint\limits_{x^2+y^2<R} dxdy = 1.$$

Воспользуемся тем, что $\iint\limits_{x^2+y^2<R} dxdy$ равен объёму цилиндра с основанием, площадь которого πR^2, и высотой равной 1.

$$C \cdot \pi R^2 = 1 \implies C = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Определим теперь плотности составляющих по формулам (94.13): при $|x| > R \quad \varphi_\xi(x) = 0$; при $|x| < R$

$$\varphi_\xi(x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}.$$

Окончательно:

$$\varphi_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |x| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > R. \end{cases} \tag{94.18}$$

Аналогично:

$$\varphi_\zeta(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |y| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > R. \end{cases} \tag{94.19}$$

Теперь по формулам (94.14), (94.15) определяем:

$$\varphi(y/\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} & \text{при} \quad x^2 + y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 > R^2; \end{cases},$$

$$\varphi(x/\zeta = y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}} & \text{при} \quad x^2 + y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Наконец, по формулам (94.16), (94.17) найдём уравнения регрессии:

$$M(\zeta/\xi = x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y \, \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 0,$$

$$M(\xi/\zeta = y) = \int\limits_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} x \, \frac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}} dx = 0.$$

Практическое занятие 94. Контрольная работа

Примерный вариант контрольной работы

Пример 94.1. *Прибор состоит из трёх последовательно соединённых блоков. Отказ прибора наступает в случае отказа хотя бы одного блока. Блоки отказывают независимо, вероятность отказа первого блока равна* 0,1*; второго —* 0,2*; третьего —* 0,5*. Найти вероятность того, что прибор исправен.*

Пример 94.2. *В ящике среди* 100 *деталей находится одна бракованная. Из ящика наудачу извлечены* 10 *деталей. Найти вероятность того, что среди них окажется одна бракованная.*

Пример 94.3. *В коробке* 5 *одинаковых изделий, причём три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажется хотя бы одно окрашенное изделие.*

Пример 94.4. *Два станка производят детали, поступающие на общий конвейер. Вероятность брака на первом станке равна* 0,04*, на втором —* 0,06*. Производительность первого станка втрое больше производительности второго. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь небракованная.*

Пример 94.5. *Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ, дописав предварительно недостающую вероятность.*

ξ	0,2	0,4	0,7	0,8	1,0
P	0,10		0,25	0,20	0,30

Пример 94.6.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ k \cdot x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 5, \\ 1 & \text{при} \quad 5 < x. \end{cases}$$

Найти k, $\varphi(x)$, $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $\varphi(x)$, $F(x)$.

Пример 94.7. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами: $a = 2$, $\sigma = 1$. Найти ε, если*
$P\{|\xi - 2| < \varepsilon\} = 0{,}67$.

Решение примерного варианта контрольной работы

Пример 94.1.

Решение: Обозначим A — событие, состоящее в исправности прибора. A_1, A_2, A_3 — соответственно исправность 1-го, 2-го и 3-го блоков. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По теореме произведения вероятностей для независимых событий получаем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \\ = (1 - 0{,}1)(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}5) = 0{,}36$$

Пример 94.2.

Решение: С помощью формулы (86.11) имеем:

$$\begin{array}{l} 100_{\text{д}} = 1_{\text{б}} + 99_{\text{н.б.}} \\ 10_{\text{д}} = 1_{\text{б}} + 9_{\text{н.б.}} \end{array} \qquad P(A) = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1 \cdot 99! \cdot 10! \cdot 90!}{9! \cdot 90! \cdot 100!} = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

Пример 94.3.

Решение: Найдем сначала вероятность противоположного события $\bar{A}$ — среди двух извлеченных ни одного окрашенного. Аналогично предыдущему примеру получаем:

$$\begin{array}{l} 5_{\text{изд}} = 3_{\text{о}} + 2_{\text{н.о.}} \\ 2_{\text{изд}} = 0_{\text{о}} + 2_{\text{н.о.}} \end{array} \qquad P(\bar{A}) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1! \cdot 2! \cdot 3!}{5!} = \frac{12}{120} = 0{,}1$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Пример 94.4.

Решение: Задача решается по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2),$$

где A — событие, заключающееся в том, что наудачу взятая деталь небракованная, H_1 — выбранная деталь поступила с первого станка, H_2 — со второго. Поскольку первый станок в единицу времени производит втрое больше деталей, чем второй, $P(H_1) = \frac{3}{4}$, $P(H_2) = \frac{1}{4}$. Поскольку дано, что $P_{H_1}(\bar{A}) = 0{,}04$, $P_{H_2}(\bar{A}) = 0{,}06$, заключаем, что $P_{H_1}(A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$; $P_{H_2}(A) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$. Окончательно имеем:

$$P(A) = 0{,}96 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}94 \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}955.$$

Пример 94.5.

Р е ш е н и е: Из условия: $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$ находим недостающую вероятность P_2 : $0{,}10 + P_2 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}30 = 1 \Rightarrow P_2 = 0{,}15$.

$$M(\xi) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}15 + 0{,}7 \cdot 0{,}25 + 0{,}8 \cdot 0{,}20 + 1,0 \cdot 0{,}30 = 0{,}715,$$

$$D(\xi) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}15 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}25 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}20 + 1,0^2 \cdot 0{,}30 - 0{,}715^2 \approx$$
$$\approx 0{,}067, \qquad \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}067} \approx 0{,}259.$$

Пример 94.6.

Р е ш е н и е: Поскольку функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна, заключаем, что

$$F(5) = 1 \Rightarrow k \cdot 5 = 1 \Rightarrow k = 0{,}2$$

Найдем плотность $\varphi(x) = F'(x)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 0 \quad \text{и при} \quad x>5, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 5. \end{cases} .$$

Графики $F(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рис. 18

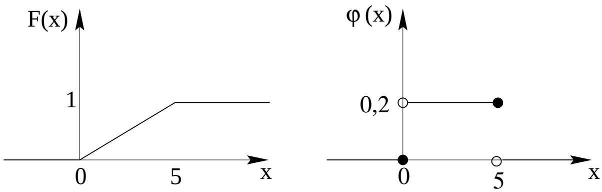


Рис. 18. *Графики $F(x)$ и $\varphi(x)$ к примеру 94.6*

Найдем остальные характеристики.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{5} 0{,}2xdx = 0{,}1x^2\Big|_0^5 = 2{,}5$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx - 2{,}5^2 = \int\limits_{0}^{5} 0{,}2x^2dx - 2{,}5^2 = \frac{0{,}2x^3}{3}\Bigg|_0^5 - 2{,}5^2 \approx 2{,}083$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} \approx 1{,}443.$$

Пример 94.7.

Р е ш е н и е:
Пользуясь формулой (92.6) лекции , получаем:

$$P\left\{|\xi-2|<\varepsilon\right\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{1}\right)=0{,}67\Rightarrow\Phi(\varepsilon)=0{,}335.$$

По таблицам функции Лапласа (приложение 2) по значению $\Phi(\varepsilon)$ находим аргумент $\varepsilon\approx 0{,}97$.

Самостоятельная работа

Решите вариант контрольной работы

Пример 94.8. *Проводятся* 5 *независимых испытаний. Какова вероятность того, что событие* A *появится не менее, чем в двух испытаниях, если вероятность появления события* A *в каждом испытании равна* 0,9.

Пример 94.9. *Из колоды в* 36 *карт наугад вынимают* 3 *карты. Какова вероятность того, что среди них окажется* 2 *туза.*

Пример 94.10. *При изготовлении детали заготовка должна пройти три операции. Предполагая появление брака на отдельных операциях событиями независимыми, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции равна* 0,02, *на второй —* 0,01, *на третьей —* 0,03.

Пример 94.11. *На сборку попадают детали с трёх автоматов. Известно, что первый автомат даёт* 3% *брака, второй —* 2% *и третий —* 4%. *Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого поступило* 1000, *со второго —* 2000 *и с третьего —* 2500 *деталей.*

Пример 94.12. *Найти* $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$ *случайной величины* ξ, *дописав предварительно недостающую вероятность*

ξ	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*
P	*0,3*		*0,2*	*0,15*	*0,25*

Пример 94.13.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ k \cdot x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти k, $F(x)$, $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $\varphi(x)$, $F(x)$.

Пример 94.14. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами: $a = 1$, $\sigma = 3$. Найти $P\{|\xi - 1| < 2\}$.*

Лекция 95. Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции. Прямые среднеквадратической регрессии. Двумерное нормальное распределение

95.1. Коэффициент корреляции

Напомним, что в соответствии с определением 90.6, две случайные величины называются независимыми, если

$$F(x; y) = F_\xi(x) \cdot F_\zeta(y).$$

Теорема 95.1. *Для независимости непрерывных случайных величин ξ и ζ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x; y) = \varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\zeta(y)$.*

Доказательство. Если ξ и ζ независимы, то по определению 90.6

$$F(x; y) = F_\xi(x) \cdot F_\zeta(y) \implies \varphi(x; y) = \frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\Big(F'_\xi(x) \cdot F'_\zeta(y)\Big) = F'_\xi(x) \cdot F'_\zeta(y) = \varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\zeta(y).$$

Если $\varphi(x; y) = \varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\zeta(y)$, то

$$F(x; y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi(s; t) ds dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi_\xi(s) \cdot \varphi_\zeta(t) ds dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_\xi(s) ds \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi_\zeta(t) dt = F_\xi(x) \cdot F_\zeta(y).$$

Следовательно, ξ и ζ независимы по определению 90.6.

Замечание 95.1. *Можно показать, что для независимых непрерывных случайных величин ξ и ζ*

$$\varphi(y/\xi = x) = \varphi_\zeta(y) \text{ и } \varphi(x/\zeta = y) = \varphi_\xi(x) \text{ при } \varphi_\xi(x) \neq 0,\ \varphi_\zeta(y) \neq 0.$$

Т.е. закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой. Действительно, по теореме 95.1 для независимых непрерывных ξ и ζ выполняется $\varphi(x; y) = \varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\zeta(y)$, поэтому при $\varphi_\xi(x) \neq 0$ получаем:

$$\varphi(y/\xi = x) = \frac{\varphi(x; y)}{\varphi_\xi(x)} = \frac{\varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\zeta(y)}{\varphi_\xi(x)} = \varphi_\zeta(y).$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Пример 95.1. *Установить, будут ли зависимы составляющие ξ и ζ примера 94.2.*

Р е ш е н и е: Как было установлено в примере 94.2, плотности равны:

$$\varphi(x; y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & \text{при} \quad x^2 + y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 > R^2; \end{cases}$$

$$\varphi_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |x| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > R; \end{cases}$$

$$\varphi_\zeta(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} & \text{при} \quad |y| < R, \\ 0 & \text{при} \quad |y| > R. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi(x; y) \neq \varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\zeta(y)$, случайные величины ξ и ζ зависимы. Этот факт следует также из того, что $\varphi(x/\zeta = y) \neq \varphi_\xi(x)$ и $\varphi(y/\xi = x) \neq \varphi_\zeta(y)$.

Ответ: ξ и ζ зависимы.

Для описания зависимости между двумя случайными величинами ξ и ζ введённые ранее числовые характеристики $M(\xi), D(\xi), M(\zeta), D(\zeta)$ неприменимы. Введём понятие корреляционного момента и коэффициента корреляции.

Определение 95.1. *Корреляционным моментом $\mu_{\xi\zeta}$ случайных величин ξ и ζ называют:*

$$\mu_{\xi\zeta} = M\left(\left(\xi - M(\xi)\right)\left(\zeta - M(\zeta)\right)\right).$$

Легко убедиться, что корреляционный момент можно также вычислять по формуле:

$$\mu_{\xi\zeta} = M(\xi \cdot \zeta) - M(\xi) \cdot M(\zeta). \tag{95.1}$$

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания, получаем:

$$\mu_{\xi\zeta} = M\left[\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\zeta - M(\zeta)\big)\right] = M\big(\xi\zeta - \xi M(\zeta) - \zeta M(\xi) +$$
$$+ M(\xi) \cdot M(\zeta)\big) = M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta) - M(\zeta)M(\xi) + M(\xi)M(\zeta) =$$
$$= M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta).$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (95.1) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$\mu_{\xi\zeta} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_iy_j - M(\xi) \cdot M(\zeta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$\mu_{\xi\zeta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(xy)dxdy - M(\xi) \cdot M(\zeta).$$

Теорема 95.2. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания из формулы (95.1), получаем для независимых ξ и ζ:

$$\mu_{\xi\zeta} = M(\xi \cdot \zeta) - M(\xi) \cdot M(\zeta) = M(\xi) \cdot M(\zeta) - M(\xi) \cdot M(\zeta) = 0.$$

Теорема 95.3. *Модуль корреляционного момента не превышает произведения среднеквадратических отклонений:* $|\mu_{\xi\zeta}| \leqslant \sigma_\xi\sigma_\zeta$.

Доказательство. Рассмотрим $D(\sigma_\zeta \cdot \xi - \sigma_\xi \cdot \zeta) \geqslant 0$. Учитывая (95.1), а также: $\sigma_\xi^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi)$, $\sigma_\zeta^2 = M(\zeta^2) - M^2(\zeta)$, получаем:

$$D(\sigma_\zeta \cdot \xi - \sigma_\xi \cdot \zeta) = M(\sigma_\zeta \cdot \xi - \sigma_\xi \cdot \zeta)^2 - \big(M(\sigma_\zeta \cdot \xi - \sigma_\xi \cdot \zeta)\big)^2 =$$
$$= M(\sigma_\zeta^2 \cdot \xi^2 - 2\sigma_\xi \sigma_\zeta \cdot \xi \cdot \zeta + \sigma_\xi^2 \cdot \zeta^2) - \big(\sigma_\zeta M(\xi) - \sigma_\xi M(\zeta)\big)^2 =$$
$$= \sigma_\zeta^2 M(\xi^2) - 2\sigma_\xi \sigma_\zeta M(\xi\zeta) + \sigma_\xi^2 M(\zeta^2) - \sigma_\zeta^2 M^2(\xi) + 2\sigma_\xi \sigma_\zeta M(\xi) M(\zeta) -$$
$$= \sigma_\xi^2 M^2(\zeta) = \sigma_\zeta^2\big(M(\xi^2) - M^2(\xi)\big) + \sigma_\xi^2\big(M(\zeta^2) - M^2(\zeta)\big) -$$
$$-2\sigma_\xi \sigma_\zeta \big(M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta)\big) =$$
$$= \sigma_\zeta^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\xi^2 \sigma_\zeta^2 - 2\sigma_\xi \sigma_\zeta \mu_{\xi\zeta} = 2\sigma_\xi^2 \sigma_\zeta^2 - 2\sigma_\xi \sigma_\zeta \mu_{\xi\zeta}.$$

Из неравенства $2\sigma_\xi^2 \sigma_\zeta^2 - 2\sigma_\xi \sigma_\zeta \mu_{\xi\zeta} \geqslant 0$ получаем: $\mu_{\xi\zeta} \leqslant \sigma_\xi \sigma_\zeta$. Аналогично, рассмотрев $D(\sigma_\zeta \xi + \sigma_\xi \zeta) \geqslant 0$, получим: $\mu_{\xi\zeta} \geqslant -\sigma_\xi \sigma_\zeta$. Объединяя два неравенства, получим: $-\sigma_\xi \sigma_\zeta \leqslant \mu_{\xi\zeta} \leqslant \sigma_\xi \sigma_\zeta$.

На практике пользуются безразмерной характеристикой — коэффициентом корреляции.

Определение 95.2. *Коэффициентом корреляции $r_{\xi\zeta}$ случайных величин ξ и ζ называется*

$$r_{\xi\zeta} = \frac{\mu_{\xi\zeta}}{\sigma_\xi \sigma_\zeta} = \frac{M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta)}{\sigma_\xi \sigma_\zeta}. \tag{95.2}$$

Пример 95.2. *Определить коэффициент корреляции случайных величин из примера 94.2.*

Решение: Поскольку плотности составляющих ξ и ζ, определяемые по формулам (94.18), (94.19), являются чётными функциями, математические ожидания составляющих равны нулю:

$$M(\xi) = \int_{-R}^{R} x \cdot \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} dx = 0$$

как интеграл от нечётной функции по симметричному относительно нулю интервалу. Аналогично:

$$M(\zeta) = \int_{-R}^{R} y \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} dy = 0.$$

Найдём $M(\xi \cdot \zeta)$:

$$M(\xi \cdot \zeta) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y\varphi(xy)\ dxdy = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{-R}^{+R} xdx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{-R}^{+R} x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = 0 \quad \text{по той же причине.}$$

Итак:

$$\mu_{\xi\zeta} = M(\xi \cdot \zeta) - M(\xi) \cdot M(\zeta) = 0 \implies r_{\xi\zeta} = \frac{\mu_{\xi\zeta}}{\sigma_\xi \sigma_\zeta} = 0.$$

Ответ: $r_{\xi\zeta} = 0$.

Перечислим свойства коэффициента корреляции.

(1) Для независимых ξ и ζ коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\zeta} = 0$,

(2) $|r_{\xi\zeta}| \leqslant 1$,

(3) $|r_{\xi\zeta}| = 1 \iff \zeta = k\xi + b$ или $\xi = k\zeta + b$.

Свойство 1 является следствием определения 95.2 и теоремы 95.2. Свойство 2 немедленно следует из теоремы 95.3:

$$r_{\xi\zeta} = \frac{\mu_{\xi\zeta}}{\sigma_\xi \sigma_\zeta} \implies -1 \leqslant r_{\xi\zeta} \leqslant 1.$$

Свойство 3 будет доказано в следующем пункте.

Замечание 95.2. *Из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость случайных величин.*

Действительно, в примере 95.2 определено, что коэффициент корреляции случайных величин из примера 94.2 равен нулю, а в примере 95.1 установлено, что эти случайные величины зависимы.

Определение 95.3. *Случайные величины ξ и ζ называются некоррелированными, если их коэффициент корреляции равен нулю:* $r_{\xi\zeta} = 0$.

Из свойства 1 и замечания 95.2 следует связь между независимостью и некоррелированностью:

$$\begin{array}{rcl} \text{независимость} & \Longrightarrow & \text{некоррелированность;} \\ \text{некоррелированность} & \not\Longrightarrow & \text{независимость;} \\ \text{коррелированность} & \Longrightarrow & \text{зависимость;} \\ \text{зависимость} & \not\Longrightarrow & \text{коррелированность.} \end{array}$$

95.2. Прямые среднеквадратической регрессии

Рассмотрим двумерную случайную величину $(\xi;\zeta)$. Поставим задачу: «наилучшим образом» приблизить случайную величину ζ функцией $g(\xi)$. «Наилучшим образом» будет пониматься в смысле минимизации среднеквадратического отклонения, т.е. $M\left[\big(\zeta - g(\xi)\big)^2\right]$ должно принимать наименьшее возможное для данного класса функций $g(\xi)$ значение.

Определение 95.4. *Функция $y = g(x)$ такая, что $M\left[\big(\zeta - g(\xi)\big)^2\right]$ принимает наименьшее возможное для данного класса функций $g(\xi)$ значение, называется среднеквадратической регрессией ζ на ξ. Если наименьшее значение ищется в классе линейных функций*

$$g(x) = kx + b,$$

то регрессия называется линейной среднеквадратической регрессией ζ на ξ; её графиком является, очевидно, прямая.

Теорема 95.4. *Линейная среднеквадратическая регрессия ζ на ξ имеет вид:*

$$y = M(\zeta) + r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi}\big(x - M(\xi)\big). \tag{95.3}$$

Доказательство. Для $g(x) = kx + b$ получим:

$$\Phi(k;b) = M\left[\big(\zeta - g(\xi)\big)^2\right] = M\left[(\zeta - k\xi - b)^2\right] =$$

$$= M(\zeta^2 + k^2\xi^2 + b^2 - 2k\xi\zeta - 2\zeta b + 2kb\xi) =$$

$$= M(\xi^2) + k^2M(\xi^2) + b^2 - 2kM(\xi\zeta) - 2bM(\zeta) + 2kbM(\xi).$$

Для нахождения значений коэффициентов k и b, обеспечивающих минимум этой функции, приравняем к нулю частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial k} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2kM(\xi^2) - 2M(\xi\zeta) + 2bM(\xi) = 0, \\ 2b - 2M(\zeta) + 2kM(\xi) = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b = M(\zeta) - kM(\xi), \\ k = \dfrac{M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta)}{M(\xi^2) - M^2(\xi)}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\sigma_\xi^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi)$, $\quad r_{\xi\zeta} = \dfrac{M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta)}{\sigma_\xi \sigma_\zeta}$, получаем:

$$k = r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi}, \quad b = M(\zeta) - kM(\xi). \tag{95.4}$$

Окончательно получаем функцию (95.3):

$$y = r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi} + M(\zeta) - r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi} \cdot M(\xi).$$

Можно доказать, что найденные таким образом из необходимого условия экстремума функции $\Phi(k;b)$ значения k и b обеспечивают на самом деле её минимум. Примем это без доказательства.

Подставив найденные значения коэффициентов k и b из (95.4) в функцию $\Phi(k;b)$, получим её минимальное значение:

$$\sigma_\zeta^2(1 - r_{\xi\zeta}^2), \tag{95.5}$$

которое называют *остаточной дисперсией*. Она характеризует величину ошибки, которую мы допускаем при замене ζ функцией $g(\xi) = k\xi + b$.

Замечание 95.3. *Когда* $|r_{\xi\zeta}| = 1$ *остаточная дисперсия*

$$\sigma_\zeta^2(1 - r_{\xi\zeta}^2) = 0,$$

что означает, что нет ошибки при замене ζ *функцией* $g(\xi)$, *т.е.* $\zeta = k\xi + b$ *при* $r_{\xi\zeta} = \pm 1$.

Верно также обратное утверждение: если $\zeta = k\xi + b$, *то остаточная дисперсия* $\sigma_\zeta^2(1 - r_{\xi\zeta}^2) = 0 \implies r_{\xi\zeta}^2 = 1 \implies r_{\xi\zeta} = \pm 1$. *Тем самым доказано свойство 3 коэффициента корреляции.*

Замечание 95.4. *Чем ближе значение* $r_{\xi\zeta}$ *к 0, тем больше остаточная дисперсия, т.е. ошибка при замене зависимости* $\zeta = g(\xi)$

линейной. Чем ближе $|r_{\xi\zeta}|$ к 1, тем меньше эта ошибка. Отсюда следует вероятностный смысл коэффициента корреляции: коэффициент корреляции показывает близость зависимости между двумя случайными величинами к линейной. Чем ближе $|r_{\xi\zeta}|$ к 1, тем «ближе» зависимость между ξ и ζ к линейной.

Замечание 95.5. *Аналогично можно получить уравнение прямой среднеквадратической регрессии ξ на ζ:*

$$x = M(\xi) + r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\zeta}\big(y - M(\zeta)\big). \tag{95.6}$$

Обе прямые регрессии (95.3) и (95.5) проходят через точку $\big(M(\xi);\ M(\zeta)\big)$ — центр распределения.

Обе прямые совпадают, если $r_{\xi\zeta} = \pm 1$.

Коэффициент $r_{\xi\zeta}\dfrac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi}$ называется коэффициентом регрессии ζ на ξ $\left(r_{\xi\zeta}\dfrac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi}\text{ — коэффициент регрессии } \xi \text{ на } \zeta\right)$. Знак коэффициента регрессии совпадает со знаком коэффициента корреляции $r_{\xi\zeta}$. Так, например, при $r_{\xi\zeta} > 0$ линейная среднеквадратическая регрессия ζ на ξ возрастает, при $r_{\xi\zeta} < 0$ — убывает.

95.3. Двумерное нормальное распределение

Определение 95.5. *Двумерным нормальным распределением (нормальным законом распределения на плоскости) называют распределение непрерывной двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$ с плотностью:*

$$\varphi(x;y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\zeta\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}}\cdot$$

$$\cdot exp\left[-\frac{1}{2(1-r_{\xi\zeta}^2)}\left(\frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{(y-a_\zeta)^2}{\sigma_\zeta^2} - 2r_{\xi\zeta}\frac{(x-a_\xi)}{\sigma_\xi}\frac{(y-a_\zeta)}{\sigma_\zeta}\right)\right]. \tag{95.7}$$

Можно доказать, что его параметры имеют следующий вероятностный смысл: $a_\xi = M(\xi)$, $a_\zeta = M(\zeta)$, $\sigma_\xi^2 = D(\xi)$, $\sigma_\zeta^2 = D(\zeta)$, $r_{\xi\zeta}$ — коэффициент корреляции ξ и ζ.

Замечание 95.6. *Используя формулы (94.13), можно доказать, что составляющие ξ и ζ имеют нормальное распределение с параметрами $\xi \sim N(a_\xi;\, \sigma_\xi)$ и $\zeta \sim N(a_\zeta; \sigma_\zeta)$ соответственно.*

Теорема 95.5. *Если составляющие двумерной нормальной случайной величины некоррелированы, то они независимы.*

Доказательство. Если $r_{\xi\zeta} = 0$, то из (95.7) следует, что

$$\varphi(x;y) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{(x-a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_\zeta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{(y-a_\zeta)^2}{2\sigma_\zeta^2}} = \varphi_\xi(x)\cdot\varphi_\zeta(y).$$

Т.е. двумерная плотность равна произведению плотностей составляющих, что в соответствии со следствием 95.2 означает их независимость.

Итак, для нормального распределения двумерной случайной величины понятие некоррелированности и независимости составляющих равносильны.

Определение 95.6. *Если обе функции регрессии ζ на ξ (т.е. $y = M(\zeta/\xi = x)$) и ξ на ζ (т.е. $x = M(\xi/\zeta = y)$) линейны, то говорят, что ξ и ζ связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Можно доказать, что в этом случае эти функции регрессии совпадают с прямыми среднеквадратической регрессии (95.3) и (95.5) соответственно.

Теорема 95.6. *Составляющие двумерной нормальной случайной величины связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Доказательство. Обозначив $u = \dfrac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}$, $v = \dfrac{y-a_\zeta}{\sigma_\zeta}$, запишем плотность (95.7) в виде:

$$\varphi(x;y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\zeta\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}} \cdot e^{-\dfrac{1}{2(1-r_{\xi\zeta}^2)}\left(u^2+v^2-2r_{\xi\zeta}u\cdot v\right)}.$$

Плотность распределения составляющей ξ в соответствии с замечанием 95.6 имеет вид:

$$\varphi_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{u^2}{2}}.$$

Найдём условную плотность распределения ζ при фиксированной ξ:

$$\varphi(y/\xi = x) = \frac{\varphi(x;y)}{\varphi_\xi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\zeta\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}} \cdot e^{-\dfrac{1}{2(1-r_{\xi\zeta}^2)}(v - r_{\xi\zeta}u)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Big(\sigma_\zeta\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}\Big)} \cdot e^{-\dfrac{\left(\dfrac{y-a_\zeta}{\sigma_\zeta} - r_{\xi\zeta}\dfrac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2}{2\Big(\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}\Big)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Big(\sigma_\zeta\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}\Big)} \cdot e^{-\dfrac{\Big(y - \big(a_\zeta + r_{\xi\zeta}\dfrac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi}(x-a_\xi)\big)\Big)^2}{2\Big(\sigma_\zeta\sqrt{1-r_{\xi\zeta}^2}\Big)^2}}.$$

Как видим, полученное условное распределение нормально с математическим ожиданием (функцией регрессии ζ на ξ):

$$M(\zeta/\xi = x) = a_\zeta + r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi}(x - a_\xi)$$

и дисперсией $\sigma_\zeta^2(1 - r_{\xi\zeta}^2)$.

Аналогично можно получить функцию регрессии ξ на ζ:

$$M(\xi/\zeta = y) = a_\xi + r_{\xi\zeta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\zeta}(y - a_\zeta).$$

Так как обе функции регрессии линейны, утверждение теоремы доказано.

Заметим, что эти функции совпадают с линейной среднеквадратической регрессией (95.3) и (95.5).

Практическое занятие 95. Двумерные случайные величины

Пример 95.1. *Задана дискретная двумерная случайная величина* (ξ, ζ)*:*

$\xi \backslash \zeta$	*4*	*7*	*8*
3,4	*0,05*	*0,11*	*0,15*
5,1	*0,32*	*0,13*	*0,24*

Найти законы распределения составляющих ξ *и* ζ*, безусловное и условное математическое ожидание* ξ *при условии* $\zeta = 7$*, а также безусловное и условное математическое ожидание* ζ *при* $\xi = 5,1$*.*

Р е ш е н и е: Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	3,4	5,1
p	0,31	0,69

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей ζ:

ζ	4	7	8
p	0,37	0,24	0,39

С помощью последних таблиц легко найдем безусловные математические ожидания:

$$M(\xi) = 3{,}4 \cdot 0{,}31 + 5,1 \cdot 0{,}69 = 4{,}573,$$

$$M(\zeta) = 4 \cdot 0{,}37 + 7 \cdot 0{,}24 + 8 \cdot 0{,}39 = 6{,}280.$$

Вероятность $P(\zeta = 7) = 0{,}11 + 0{,}13 = 0{,}24$. Согласно (94.6), условные вероятности

$$P(\xi = 3,4 | \zeta = 7) = 0{,}11/0{,}24 = 11/24,$$

$$P(\xi = 5,1 | \zeta = 7) = 0{,}13/0{,}24 = 13/24.$$

Условный закон распределения ξ примет вид:

ξ	3,4	5,1
$P(\xi = x_i \| \zeta = 7)$	11/24	13/24

Соответствующее условное математическое ожидание

$$M(\xi|\zeta = 7) = 3{,}4 \cdot 11/24 + 5{,}1 \cdot 13/24 \approx 4{,}321.$$

Вероятность $P(\xi = 5{,}1) = 0{,}32 + 0{,}13 + 0{,}24 = 0{,}63$. Далее по формуле (94.5) вычисляем условные вероятности

$$P(\zeta = 4|\xi = 5{,}1) = 0{,}32/0{,}69 = 32/69,$$

$$P(\zeta = 7|\xi = 5{,}1) = 0{,}13/0{,}69 = 13/69,$$

$$P(\zeta = 8|\xi = 5{,}1) = 0{,}24/0{,}69 = 24/69.$$

По условному закону распределения ζ

ζ	4	7	8
$P(\zeta = y_i\|\xi = 5,1)$	32/69	13/69	24/69

найдем математическое ожидание

$$M(\zeta|\xi = 5{,}1) = 4 \cdot 32/69 + 7 \cdot 13/69 + 8 \cdot 24/69 \approx 5{,}957.$$

Ответ: 4,321; 5,957.

Пример 95.2. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x, y) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos y \ \textit{при}\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2, \\ 0 \ \ \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, ζ) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \pi/4$.

Р е ш е н и е:

Используем формулу (94.11):

$P(x_1 < \xi < x_2,\ y_1 < \zeta < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)) -$
$- (F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1))$.

Положив $x_1 = \pi/4,\ x_2 = \pi/2,\ y_1 = 0,\ y_2 = \pi/4$, получим

$$P = (\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos 0) - (\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos 0) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0{,}207.$$

Ответ: $\approx 0{,}207$.

Пример 95.3. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by}) \ \textit{при}\ x > 0,\ y > 0, \\ 0 \ \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности (ξ, ζ).

Р е ш е н и е: Согласно (94.12), плотность вероятности есть вторая смешанная частная производная функции распределения. Производная по y отличной от нуля части равна:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = b(1-e^{-ax})e^{-by}.$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$\varphi(x,y) = abe^{-ax-by}$$

при $x > 0,\ y > 0$ и, кроме того, $\varphi(x,y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$.

Ответ: $\varphi(x,y) = \begin{cases} abe^{-ax-by} \text{ при } x > 0,\ y > 0, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Пример 95.4. *Задана двумерная плотность вероятности системы двух случайных величин:* $\varphi(x,y) = (1/2)\cos(x+y)$ *в квадрате* $-\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4,\ -\pi/4 \leqslant y \leqslant \pi/4$*; вне этого квадрата* $\varphi(x,y) = 0$*. Найти функцию распределения системы* (ξ, ζ)*.*

Р е ш е н и е: Для решения задачи воспользуемся формулой:

$$F(x,y) = \int_{-\pi/4}^{x}\int_{-\pi/4}^{y} \varphi(x,y)dxdy.$$

Тогда: а) при $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{x} dx \int_{-\pi/4}^{y} \cos(x+y)dy = \frac{1}{2}(\cos(x-\pi/4)+\cos(y-\pi/4)-$$
$$-\cos(x+y)).$$

б) при $x < -\dfrac{\pi}{4}$ или $y < -\dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} 0dy = 0.$$

в) при $x > \dfrac{\pi}{4},\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx \int_{-\pi/4}^{y} \cos(x+y)dy = \frac{1}{2}(1+\cos(y-\pi/4)-\cos(y+\pi/4)).$$

г) при $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4},\ y > \dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(1+\cos(x-\pi/4)-\cos(x+\pi/4)).$$

д) при $x > \dfrac{\pi}{4}$ и $y > \frac{\pi}{4}$

$$F(x, y) = 1.$$

Пример 95.5. *Задана двумерная плотность вероятности $\varphi(x, y) = a/(x^2 + y^2 + 2)^4$ системы двух случайных величин (ξ, ζ). Найти постоянную a.*

Решение: Воспользуемся свойством 5 плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)dxdy = 1.$$

Для вычисления интегралов удобнее перейти к полярным координатам. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(x^2 + y^2 + 2)^4}dxdy = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2 + 2)^4}rdr = 1.$$

После вычисления независимых интегралов по φ и r получим: $\pi a/24 = 1 \Rightarrow a = 24/\pi \approx 7{,}639$.

Ответ: $a = 24/\pi \approx 7{,}639$.

Пример 95.6. *Система случайных величин (ξ, ζ) имеет плотность вероятности $\varphi(x, y) = a/((1 + x^2)(4 + y^2))$. Определить коэффициент a; найти функцию распределения $F(x, y)$; вычислить вероятность попадания случайной точки (ξ, ζ) в прямоугольник G : $x \in [0, 1]$, $y \in 0, 2]$; установить, являются ли величины ξ и ζ зависимыми.*

Решение: Коэффициент a найдем также с помощью свойства 5 плотности:

$$a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{4 + y^2} = 1, \quad a\cdot\left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

$$a\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad a\cdot\frac{\pi^2}{2} = 1, \quad a = \frac{2}{\pi^2}.$$

Таким образом,

$$\varphi(\xi, \zeta) = \frac{2}{\pi^2(1 + x^2)(4 + y^2)}.$$

Согласно свойству 3 двумерной плотности, функция распределения

$$F(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{4+y^2} = \frac{2}{\pi^2}\Big(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Вероятность попадания в прямоугольник G определим с помощью найденной функции распределения:

$$P((\xi,\zeta)\in G) = F(1,2) - F(0,2) - (F(1,0) - F(0,0)) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left(\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{4}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{16}.$$

Заметим, что эту же вероятность можно непосредственно найти с помощью плотности распределения согласно её свойству 4. Плотности распределения составляющих найдем по формулам (94.13):

$$\varphi_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy = \frac{2}{\pi^2(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично найдем, что

$$\varphi_\zeta(y) = \frac{2}{\pi(4+y^2)}.$$

Поскольку здесь $\varphi(x,y) = \varphi_\xi(x)\cdot\varphi_\zeta(y)$, то делаем вывод о том, что случайные величины ξ и ζ независимы.

Пример 95.7. *Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины $\varphi(x,y) = a(x^2+xy)$ при $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ и $\varphi(x,y) = 0$ вне указанного квадрата. Вычислить значение постоянной a и математические ожидания составляющих или центр распределения.*

Р е ш е н и е: Постоянную a найдем из условия

$$\int_0^2\int_0^2 \varphi(x,y)dxdy = 1.$$

Тогда

$$a\int_0^2 dx\int_0^2 (x^2+xy)dy = 1$$

и после интегрирования по y получим:

$$a\int_0^2\left(2x+\frac{8}{3}\right)dx=1.$$

Вычисляя определённый интеграл, придем к уравнению: $a\cdot 28/3=1$. Отсюда получим значение $a=3/28$. Таким образом, отличное от нуля значение плотности распределения будет $\varphi(x,y)=$ $=(3/28)(x^2+xy)$. Математические ожидания случайных величин ξ и ζ определятся как

$$M(\xi)=\int_0^2\int_0^2 x\varphi(x,y)dxdy=\frac{3}{28}\int_0^2 xdx\int_0^2(x^2+xy)dy=\frac{10}{7},$$

$$M(\zeta)=\int_0^2\int_0^2 y\varphi(x,y)dxdy=\frac{3}{28}\int_0^2 dx\int_0^2 y(x^2+xy)dy=\frac{8}{7}.$$

Таким образом, центром распределения является точка $(10/7;8/7)$.

Пример 95.8. *Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины* (ξ,ζ)

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+2xy+2y^2)}.$$

Найти плотности распределения составляющих и условные плотности распределения этих составляющих.

Р е ш е н и е: Плотности распределения составляющих определяются формулами (94.13). Тогда

$$\varphi_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(y+x/2)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Здесь интеграл по y был вычислен с помощью интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}\text{ и подстановки } t=2(y+x/2).$$

Во втором случае

$$\varphi_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+y)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}.$$

Условная плотность распределения ζ при условии, что $\xi=x$

$$\varphi(y/\xi=x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_\xi(x)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-(1/2)\ (x+2y)^2}.$$

Условная плотность распределения ξ при условии, что $\zeta = y$

$$\varphi(x/\zeta = y) = \frac{\varphi(x,y)}{\varphi_\zeta(y)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+y)^2}.$$

Пример 95.9. *Непрерывная двумерная случайная величина* (ξ, ζ) *распределена равномерно внутри прямоугольного треугольника с вершинами* $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(6,0)$. *Найти плотность системы и плотности составляющих двумерной величины.*

Р е ш е н и е: Распределение двумерной непрерывной случайной величины называют равномерным, если в области, которой принадлежат все возможные значения (x, y), плотность вероятности сохраняет постоянное значение, т.е. $\varphi(x, y) = a$. Уравнение прямой AB есть $y = 6 - x$. Постоянную a найдем с помощью свойства 5 двумерной плотности. Тогда

$$\int_0^6 dx \int_0^{6-x} a dy = 1, \quad a\int_0^6 (6-x)dx = 1,$$

$18a = 1$, $a = 1/18$, $\varphi(x, y) = 1/18$ внутри треугольника; вне этой области плотность равна нулю.

Согласно (94.14), плотности составляющих двумерной величины будут равны:

$$\varphi_\xi(x) = \int_0^{6-x} \frac{1}{16}\, dy = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}x \ (0 < x < 6),$$

$$\varphi_\zeta(y) = \int_0^{6-y} \frac{1}{16}\, dx = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}y \ (0 < y < 6).$$

Вне указанных интервалов эти функции равны нулю.

Пример 95.10. *Дана плотность двумерной случайной величины*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \ln^2 4 \cdot 4^{-x-y} \ \text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \ \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

Р е ш е н и е: В данном случае

$$M(\xi) = \int_0^\infty \int_0^\infty x \cdot \varphi(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^\infty x \cdot \ln^2 4 \cdot 4^{-x-y} dxdy =$$

$$= \ln 4 \int_0^\infty x \cdot 4^{-x} dx = \frac{1}{\ln 4}.$$

Здесь последний интеграл по x был вычислен по частям. Аналогично найдем

$$M(\zeta) = \int_0^\infty \int_0^\infty y \cdot \varphi(x, y) dx dy = \frac{1}{\ln 4}.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 \cdot \varphi(x, y) dx dy - M^2(\xi).$$

Подставляя сюда значение плотности вероятности и проводя два раза интегрирование по частям, получим:
$D(\xi) = 1/\ln^2 4$. Очевидно, $D(\zeta) = 1/\ln^2 4$.

Самостоятельная работа

Пример 95.11. *Задана дискретная двумерная случайная величина* (ξ, ζ)*:*

$\xi\backslash\zeta$	*9*	*11*	*12*	*15*
2	*0,01*	*0,08*	*0,21*	*0,12*
4	*0,07*	*0,15*	*0,23*	*0,04*

Найти математические ожидания $M(\xi),\ M(\zeta)$.

Пример 95.12. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + 5^{-x-y} \ \textit{при}\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \ \textit{при}\ x < 0 \ \textit{или}\ y < 0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, ζ) *в прямоугольник, ограниченный прямыми* $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2$.

Пример 95.13. *Дана функция распределения системы двух случайных величин*

$$F(x, y) = k(1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y^2}), (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$$

Вне первой четверти $F(x, y)$ *равняется нулю. Найти выражение для плотности вероятности и коэффициент* k*. Определить вероятность попадания случайной точки в область* D*, которая представляет собой четверть круга радиуса* R $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

Пример 95.14. *Двумерная случайная величина* (ξ, ζ) *имеет плотность*

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}.$$

Найти коэффициент a *и одномерные плотности случайных величин* ξ *и* ζ.

Пример 95.15. *Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины имеет следующий вид:*

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} a(x+y) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 \text{ вне указанной области.} \end{cases}$$

Определить константу a *и вычислить центр распределения.*

Пример 95.16. *Дана плотность вероятности двумерной случайной величины* (ξ, ζ):

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x+y), \quad x \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\ y \in [0, \dfrac{\pi}{2}], \\ 0 \text{ вне этой области.} \end{cases}$$

Определить функцию распределения системы и математические ожидания величин ξ *и* ζ.

Пример 95.17. *Двумерная случайная величина распределена равномерно внутри квадрата со стороной* a *и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти выражение для плотности вероятности* $\varphi(\xi, \zeta)$.

Лекция 96. Основные понятия математической статистики

Предмет математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Эмпирическая функция распределения и гистограмма. Числовые характеристики статистического распределения

96.1. Предмет математической статистики

Математическая статистика — это наука, которая методами теории вероятностей на основании результатов наблюдений изучает закономерности в массовых случайных явлениях. Математическая статистика (не путать со статистикой — разделом экономической теории) указывает способы сбора и группировки статистических данных (результатов наблюдений), разрабатывает методы их обработки для оценки характеристик распределения, для установления зависимости случайной величины от других, для проверки статистических гипотез о виде распределения или значениях его параметров. Математическая статистика возникла и развивалась параллельно с теорией вероятностей.

96.2. Генеральная совокупность и выборка

Значительная часть математической статистики связана с необходимостью описать большую совокупность объектов. Её называют генеральной. Если *генеральная совокупность* слишком многочисленна, или её объекты труднодоступны, или имеются другие причины, не позволяющие изучить все объекты, прибегают к изучению какой-то части объектов. Эта выбранная для полного изучения часть называется *выборкой*. Необходимо, чтобы выборка наилучшим образом представляла генеральную совокупность, т.е. была *репрезентативной* (представительной). Если генеральная совокупность мала или совсем неизвестна, не удаётся предложить ничего лучшего, чем чисто случайный выбор.

Пример 96.1. *Пусть необходимо оценить качество изделий, выпускаемых определённым цехом машиностроительного предприятия. Для этого выбирают партию изделий и подвергают их контролю* *с целью дефектирования. Доля бракованных изделий для выбранной партии распространяется затем на всю продукцию цеха.*

Здесь генеральная совокупность — все изделия, выпускаемые цехом, выборка — отобранные для проверки изделия.

Пример 96.2. *Пусть необходимо оценить будущий урожай пшеницы. Для этого выбирают небольшой участок поля, например один квадратный метр, и подсчитывают число зерен во всех колосках и их массу. Приближённо весь урожай равен площади поля в метрах, умноженной на массу зерен, собранную с данного участка. Здесь генеральная совокупность — весь ожидаемый урожай, а выборка — урожай, собранный с одного квадратного метра. Если выбрать «плохой» участок (например, близко к краю поля), то оценка урожая будет заниженной. Если же участок имеет преимущества перед другими (например, лучше освещается солнцем), то оценка урожая будет завышенной.*

Пример 96.3. *Производится социологическое исследование с целью прогноза результатов предстоящих выборов мэра города. Здесь генеральная совокупность — все избиратели города, а выборка — число опрошенных респондентов. Большое значение имеет способ, которым получена выборка. Ошибки при выборе способа отбора приводят к тому, что выборка становится нерепрезентативной. Если в качестве респондентов взять, например, сто первых встречных с* 10 *до* 12 *часов дня, то социологи узнают мнение не всех слоев населения, а только домохозяек, направляющихся в это время за покупками.*

Будем проводить испытания и в каждом из них фиксировать значения, которые приняла случайная величина ξ. В результате m испытаний получим выборку n значений, образующих простую статистическую совокупность наблюдений.

Определение 96.1. *Количество наблюдений n называется объёмом выборки.*

При большом числе наблюдений (сотни, тысячи) простая статистическая совокупность перестаёт быть удобной формой записи статистического материала — она становится слишком громадной. Для более экономичной записи наблюдаемые значения группируют.

Пусть в выборке значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, ..., x_k — n_k раз и $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ — объём выборки.

Определение 96.2. *Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а их последовательность, записанную в возрастающем порядке — вариационным рядом. Числа наблюдений $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называют частотами.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот — табл. 96.1.

Таблица 96.1

Статистическое распределение			
варианты x_i	x_1	...	x_k
частоты n_i	n_1	...	n_k

96.3. Эмпирическая функция распределения и гистограмма

С каждым испытанием, в котором наблюдается некоторая случайная величина ξ, можно связать случайное событие $\xi = x_i$, но иногда удобнее рассматривать событие $\xi < x_i$.

Определение 96.3. *Эмпирической (статистической) функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F^*(x)$, которая при каждом x равна относительной частоте события $\xi < x$, т.е. отношению n_x — числа наблюдений меньших x к объёму выборки n:*

$$F^*(x) = P^*(\xi < x) = \frac{n_x}{n} .$$

Пример 96.4. *Построить эмпирическую функцию распределения для данной выборки:*

Варианты x_i	*1*	*4*	*6*	*7*	*8*	*10*
Частоты n_i	*5*	*10*	*15*	*5*	*10*	*5*

Решение: Объём выборки n равен 5+10+15+5+10+5=50. Наименьшая варианта равна 1, следовательно $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant 1$. Значение $x < 3$, а именно $x = 1$ наблюдалось 5 раз, следовательно $F^*(x) = \frac{5}{50} = 0{,}1$ при $1 < x \leqslant 4$. Значения $x < 6$, а именно $x = 1$ и $x = 4$ наблюдались 5+10=15 раз, следовательно $F^*(x) = \frac{15}{50} = 0{,}3$ при

$4 < x \leqslant 6$. Аналогично получаем $F^*(x) = \frac{30}{50} = 0{,}6$ при $6 < x \leqslant 7$ и т.д. Так как 10 — наибольшая варианта, $F^*(x) = 1$ при $x > 10$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 6, \\ 0{,}6 & \text{при} \quad 6 < x \leqslant 7, \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 7 < x \leqslant 8, \\ 0{,}9 & \text{при} \quad 8 < x \leqslant 10, \\ 1 & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$$

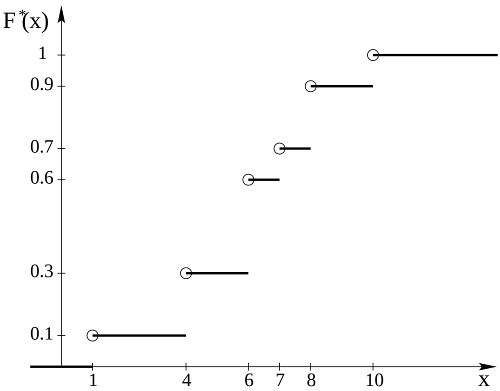


Рис. 19. *Эмпирическая функция распределения*

График найденной функции представлен на рис. 19.
Из определения $F^*(x)$ вытекают её свойства:

1) $0 \leqslant F^*(x) \leqslant 1$;
2) $F^*(x)$ — ступенчатая неубывающая функция;
3) если x_1 — наименьшая, а x_k — наибольшая варианты, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Гистограмма представляет выборку более наглядно. Для построения гистограммы разделим весь диапазон наблюдений на s интервалов вида $(a_{j-1}; a_j]$ и определим количество наблюдений m_j, попавших в j-й интервал. Относительная частота наблюдений, попавших в j-й интервал равна $P_j^* = \dfrac{m_j}{n}$ $(m_1 + \ldots + m_s = n)$, сумма всех частот, очевидно, равна единице. Для построения гистограммы по оси ординат откладываются значения $\dfrac{P_j^*}{\Delta a_j} = \dfrac{m_j}{n \cdot (a_j - a_{j-1})}$. Полученная фигура, состоящая из прямоугольников, называется гистограммой относительных частот. Площадь каждого прямоугольника равна относительной частоте наблюдений, попавших в данный интервал. Для данных примера 96.4 получаются следующие значения:

N п/п	a_{j-1}	a_j	m_j	$P_j^* = \dfrac{m_j}{n}$	$\dfrac{P_j^*}{\Delta a_j}$
1	0	3	5	0.1	1/30
2	3	6	25	0.5	5/30
3	6	9	15	0.3	3/30
4	9	12	5	0.1	1/30

Получившаяся гистограмма представлена на рис. 20.

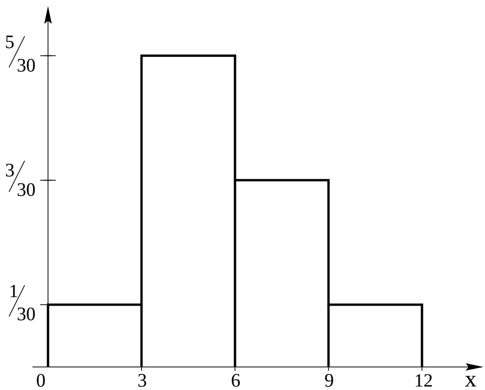


Рис. 20. *Гистограмма относительных частот*

Другим наглядным способом представления распределения является полигон относительных частот. Для его построения по оси абсцисс откладываются варианты, а по оси ординат — относительные частоты (рис. 21), и полученные точки соединяются ломаной линией.

Для выборки из генеральной совокупности значений непрерывной случайной величины гистограмма является статистическим аналогом

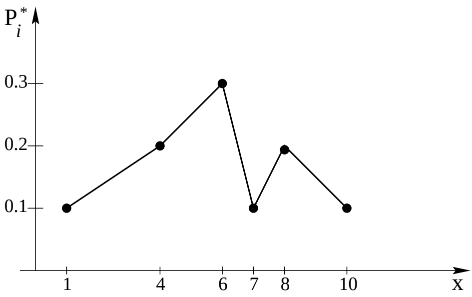


Рис. 21. *Полигон относительных частот*

плотности распределения, а для дискретной случайной величины полигон относительных частот является статистическим аналогом многоугольника вероятностей. При увеличении объёма выборки эти статистические характеристики в определённом смысле приближаются к своим теоретическим аналогам.

ЗАМЕЧАНИЕ 96.1. *Наряду с гистограммой и полигоном относительных частот иногда рассматривают соответственно гистограмму и полигон частот, отличающиеся масштабом по оси ординат — все значения по оси ординат умножаются на n — объём выборки. Понятно, что форму получаемых фигур это не изменяет.*

96.4. Числовые характеристики статистического распределения

Статистическая функция распределения и гистограмма являются полными характеристиками результатов наблюдения случайной величины в данной серии испытаний. Однако иногда целесообразно ограничиться более простой, хотя и неполной характеристикой распределения.

Простейшей характеристикой распределения является *выборочное среднее*, которое для простой статистической совокупности вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (96.1)$$

Если данные сгруппированы, то:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i. \tag{96.2}$$

Иными словами, выборочное среднее представляет собой среднее взвешенное значение, причём веса равны соответствующим частотам.

Для характеристики разброса значений случайной величины относительно её среднего значения используется *выборочная дисперсия*

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} \tag{96.3}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{96.4}$$

для сгруппированного распределения.

Очевидно, выборочная дисперсия имеет ту же размерность, что и квадрат случайной величины. Практически удобно пользоваться величиной, имеющей ту же размерность, что и данная случайная величина.

Для этого достаточно из дисперсии извлечь квадратный корень.

Эта величина

$$S = \sqrt{S^2} \tag{96.5}$$

называется *выборочным средним квадратическим отклонением* (СКО).

На практике вместо формулы (96.3) бывает удобнее применять другую:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \tag{96.6}$$

для простой совокупности и

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \tag{96.7}$$

для сгруппированного распределения.

Докажем формулу (96.6):

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

Пример 96.5. *Покажем, как построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения, вычислить числовые характеристики статистического распределения с помощью программы на Mathcad. Сформируем массив x выборки $n = 500$ с помощью датчика случайных чисел.*

$ORIGIN := 1$ $\qquad$ $n := 500$ $\qquad$ /**Объём выборки**/

/**Массив значений выборки генерируем при помощи датчика псевдослучайных чисел по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 145$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 15$ и «искривляем» его другими случайными числами в диапазоне от 0 до 10.**/

$x := rnorm(n, 145, 15)$ $\qquad$ $i := 1..n$ $\qquad$ $x_i = x_i + rnd(10)$

$x^T =$

1	2	3	4	5	6	7	8	⋯	500
149.59	145.7	133.5	138.9	143.1	155.8	118.5	154.1	⋯	110.6

/**Построим вариационный ряд, расположив значения по возрастанию. Сортируем выборку по возрастанию:**/

$x := sort(x)$

$x^T =$

1	2	3	4	5	6	7	8	⋯	500
104.5	104.9	105.2	105.5	106.5	107.9	108.2	111.4	⋯	194.8

/**Для построения гистограммы весь диапазон полученных значений от x_1 до x_n разобьем на 20 интервалов одинаковой длины Δ и посчитаем число наблюдений h_m, попавших в m–й интервал.**/

/**Диапазон изменения значений.**/

$x_1 = 104.5$ $\qquad$ $x_n = 194.9$

$s := 20$ $\quad$ $\Delta := \dfrac{x_n - x_1}{s}$ $\quad$ $\Delta = 4.52$

/**Длина интервала.**/

$m := 1..s + 2$ $\quad$ $k := 1..s + 3$ $\quad$ $T_k = x_1 + \Delta\cdot(k - 2)$

/**Границы интервалов.**/

$t_m := \frac{T_{m+1}+T_m}{2}$ $\qquad$ /**Середины интервалов.**/

$h := hist(T, x)/n$ /**Вычисление значений ординат гистограммы.**/

$\sum_m h_m = 1$ /**Контроль суммы относительных частот.**/

/**Ниже представлены график полученной гистограммы, рис. 22.**/

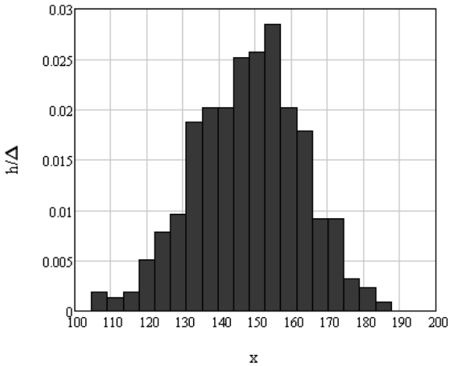


Рис. 22. *Гистограмма относительных частот для примера 96.4*

/**Найдем значения эмпирических значений функции распределения $F^*(x)$ для значений x с шагом Δ и построим ее график:**/

$$j := 2..M \qquad F_1 := h_1 \qquad F_j := F_{j-1} + h_j$$

$F^T =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	0.008	0.014	0.022	0.044	0.078	0.12	0.202	0.29	...

/**Ниже представлен график эмпирической функции распределения, рис. 23**/

/**Найдем также некоторые числовые характеристики данной выборки:**/

$Mx := mean(x)$ $Mx = 148.378$. /**Выборочное среднее.**/

$var(x) = 238.26$ /**Смещённая выборочная дисперсия.**/

$Var(x) = 238.737$ /**Несмещённая выборочная дисперсия.**/

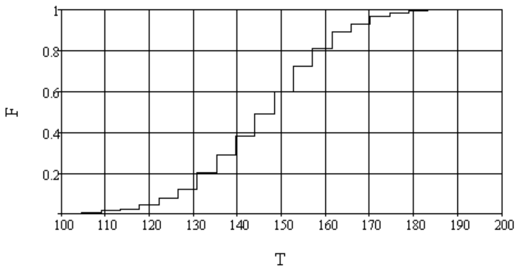


Рис. 23. *Эмпирическая функция распределения для примера 96.5*

$stdev(x) = 15.436$. /**Выборочное среднее квадратическое отклонение.**/

$Stdev(x) = 15.451$. /**Несмещённое выборочное среднее квадратическое отклонение.**/

$median(x) = 148.615$ /**Медиана — значение варианты, для которого количество элементов находящихся слева и справа, одинаково.**/

Maxima-программа:

```
(%i0) kill(all)$   fpprintprec:4$   numer:true$  n:500$
(%i4) load(distrib)$
```

/**Генерируем выборку объёма n псевдослучайными числами.* */

```
(%i5) x:random_normal(145, 15, n)$
```

/**Изменяем значение выборки добавлением случайных чисел в диапазоне от 0 до 10.**/

```
(%i6)x:makelist(x[i]+random(10),i,1,n)$
```

/**Загружаем библиотеку descriptive.**/

```
(%i7) load (descriptive)$
```

/**Строим гистограмму частот.**/

```
(%i8) histogram(x, nclasses=20, title="закон распределения",
       xlabel="x", ylabel="частоты",
        fill_color=black, fill_density=0.05);
```

/**Сортируем список в порядке возрастания значений.**/

```
(%i9) x:sort(x)$
```

/**Разбиваем выборку объёма n на s интервалов длиной delta.** */

```
(%i10) s:20$  delta:(x[n]-x[1])/s;
```

/**T – массив узловых координат разбиения.** */

```
(%i12) T:makelist(x[1]+delta*k,k,-1,s+1);
```

/**Координаты средних точек отрезков.**/

```
(%i13) t:makelist((T[m]+T[m+1])/2,m,1,s+2);
```

/* *Частоты попадания в соответствующие отрезки.**/

```
(%i14) h:makelist(0, i, 1, s+2); for j:1 while j<=n do(
      k:fix((x[j] -x[1])/delta)+1,h[k]:h[k]+1);
```

/**Контрольная сумма объёма выборки.**/

```
(%i15)  sum(h[i],i,1,s+2);
(%o15) 500
```

/**Эмпирическая функция распределения.**/

```
(%i16) F[1]:h[1]; for j:2 while j<=s+2 do(F[j]:F[j-1]+h[j]);
(%i17) listarray(F);
```

/**График эмпирическая функция распределения.**/

```
(%i18) wxplot2d([['discrete,makelist([t[j],F[j]/n],j,1,s+2)]],
       [style,[lines,3,5]],  [gnuplot_preamble,"set grid"],
       [ylabel,""])$
```

/* *Найдем также некоторые числовые характеристики данной выборки: Выборочное среднее.**/

```
(%i19) mean(x);
```

/* *Выборочная дисперсия.*

```
(%i20) var(x);
```

/* *Выборочное среднее квадратическое отклонение.**/

```
(%i21) std(x);
```

/* *Несмещенная выборочная дисперсия.**/

```
(%i22) var1(x);
```

/* *Несмещенное среднее квадратическое отклонение.**/

```
(%i23) std1(x);
```

/* *Медиана.**/

```
(%i24) median(x);
```

96.5. Точечные оценки параметров распределения

Выборочное среднее, выборочная дисперсия и СКО являются примерами точечных оценок параметров распределения.

Определение 96.4. *Точечной оценкой $\widetilde{a}_n$ неизвестного параметра a распределения случайной величины ξ называется функция от наблюдений:*

$$\widetilde{a}_n = \widetilde{a}(x_1, \ \ldots, x_n).$$

Для изучения свойств этой оценки её рассматривают как функцию от n независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, имеющих такое же распределение, что и ξ; $x_1, \ldots, x_n$ в этом случае рассматриваются как наблюдения над этими случайными величинами: x_1 — полученное значение ξ_1, x_2 — наблюденное значение ξ_2 и т.д. Сама оценка $\widetilde{a}_n$ в этом случае является случайной величиной.

Перечислим свойства точечной оценки $\widetilde{a}_n$, которые могут считаться «хорошими».

Определение 96.5. *Оценка $\widetilde{a}_n$ называется состоятельной, если при $n \to \infty$ она сходится по вероятности к оцениваемому параметру a:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\widetilde{a}_n - a| < \varepsilon\} = 1 \text{ для } \forall \ \varepsilon > 0.$$

Определение 96.6. *Оценка $\widetilde{a}_n$ называется несмещенной, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру a:*

$$M(\widetilde{a}_n) = a.$$

Иногда точечные оценки обладают более слабым свойством: их смещение $M(\widetilde{a}_n) - a$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Такие оценки называются асимптотически несмещёнными.

Определение 96.7. *Несмещённая оценка $\widetilde{a}_n$ называется эффективной, если её дисперсия наименьшая по сравнению с другими несмещёнными оценками.*

На практике оценка не всегда удовлетворяет всем этим требованиям одновременно.

Пример 96.6. *Доказать, что выборочное среднее $\bar{x}$ является несмещённой и состоятельной оценкой для математического ожидания (генерального среднего) случайной величины.*

Р е ш е н и е: Обозначим $M(\xi) = a$, $D(\xi) = \sigma^2$. Рассматривая $\bar{x}$ как случайную величину, найдем её математическое ожидание. При этом, как было отмечено ранее, считаем

$M(\xi_1) = \ldots = M(\xi_n) = a, \quad D(\xi_1) = \ldots = D(\xi_n) = \sigma^2.$

$$M(\xi) = M\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

Несмещённость выборочного среднего доказана. Оценим теперь дисперсию выборочного среднего:

$$D(\xi) = D\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

В соответствии с неравенством Чебышева (теорема 93.1) получаем $\forall\, \varepsilon > 0$:

$$1 \geqslant P\{|\xi - M(\xi)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}.$$

Заменяя $M(\xi) = a$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$1 \geqslant \lim_{n\to\infty} P\{|\xi - a| < \varepsilon\} \geqslant 1,$$

откуда получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P\big\{|\xi - a| < \varepsilon\big\} = 1.$$

Это равенство и означает состоятельность оценки $\bar{x}$.

Замечание 96.2. *Можно доказать, что выборочное среднее будет эффективной оценкой математического ожидания в случае, когда случайная величина имеет нормальное распределение.*

Аналогично доказывается, что выборочная дисперсия S^2 является состоятельной и смещённой оценкой дисперсии σ^2:

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2. \tag{96.8}$$

Примем это без доказательства.

При малых объёмах выборки n для оценки дисперсии σ^2 используют исправленную выборочную дисперсию S^{*^2}:

$$S^{*^2} = \frac{n}{n-1}\,S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{96.9}$$

Оценка S^{*^2} является несмещённой, состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

Формула (96.9) позволяет вычислять S^{*^2} для простой совокупности. Для сгруппированных данных используют аналогичную формулу (96.10):

$$S^{*^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2. \tag{96.10}$$

Замечание 96.3. *Исправленное СКО S^* является смещённой оценкой СКО S.*

96.6. Распределения, используемые в статистике

Познакомимся с некоторыми непрерывными распределениями, которые применяются в математической статистике.

Распределение χ^2 (хи-квадрат).

Пусть имеется n независимых стандартных нормальных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\quad \xi_i \sim N(0;1)$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 96.8. *Распределение случайной величины* $\chi_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$ *называется* χ^2*—распределением с* n *степенями свободы.*

Очевидно, что случайная величина $\chi_n^2 \geqslant 0$.

Плотность этого распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ — гамма функция, являющаяся обобщением понятия факториала: $\Gamma(x) = (x-1)!$ при $x \geqslant 1$.

Замечание 96.4. *Если случайные величины* $\xi_1, \ \ldots, \xi_n$ *связаны какой-нибудь зависимостью, например* $\xi_1 + \ldots + \xi_n = n \cdot \overline{x}$, *то число степеней свободы уменьшается, случайная величина* $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$ *будет иметь распределение* χ_{n-1}^2.

Распределение Стьюдента.

Пусть имеется $n+1$ независимая стандартная случайная величина $\zeta, \xi_1, \ \ldots, \xi_n$.

Определение 96.9. *Распределение случайной величины*

$$t = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

называется распределением Стьюдента с n *степенями свободы.*

Плотность этого распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n}}.$$

Поскольку распределение симметрично относительно нуля (плотность — чётная функция), математическое ожидание равно нулю.

Стьюдент — псевдоним английского статистика Госсета.

F—Распределение Фишера—Снедекора.
Пусть имеется $n+k$ независимых стандартных величин: $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$; $\xi_i \sim N(0;1)$, $i=1, \ldots, n$; $\zeta_i \sim N(0;1)$, $j=1, \ldots, k$.

Определение 96.10. *Распределение случайной величины*

$$F_{n,k} = \frac{\frac{\chi_n^2}{n}}{\frac{\chi_k^2}{k}}$$

называется F—распределением Фишера—Снедекора (распределением Фишера или F—распределением) с n, k степенями свободы.

Очевидно, что случайная величина $F_{n,k} \geqslant 0$.

Плотность этого распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\Big(\dfrac{m+k}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)\cdot\Gamma\Big(\dfrac{k}{2}\Big)}\Big(\dfrac{n}{k}\Big)^{\frac{n}{2}}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}\Big(1+\dfrac{n}{k}x\Big)^{-\frac{n+k}{2}} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Для всех этих распределений имеются таблицы плотности и функции распределения; их можно также вычислить с помощью прикладных программ на ЭВМ (таких, как Excel, Mathcad, Maxima и проч.).

96.7. Интервальные оценки параметров распределения

Наряду с рассмотренными точечными оценками, определяемыми одним числом, используют интервальные оценки неизвестных параметров, определяемые двумя числами — концами интервала, дающими вероятностную оценку сверху и снизу неизвестного параметра распределения.

Интервальные оценки целесообразно применять при малом объёме выборки, когда дисперсия точечной оценки велика и она может сильно отличаться от оцениваемого параметра.

Определение 96.11. *Доверительным интервалом для несмещённого параметра a называют интервал $(a_1; a_2)$ со случайными границами, зависящими от наблюдений: $a_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n)$, $a_2 = a_2(x_1, \ldots, x_n)$, накрывающий неизвестный параметр с заданной вероятностью γ: $P\{a \in (a_1; a_2)\} = \gamma$. Вероятность γ называется* *доверительной вероятностью или надежностью доверительного интервала.*

Обычно γ задают равным 0,95; 0,99 и более.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет вид:

$$\left(\bar{x} - \tau_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \tau_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{96.11}$$

где величина $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ определяется из уравнения:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} \tag{96.12}$$

по таблицам функции Лапласа или с помощью компьютера, а $\bar{x}$ — выборочное среднее.

Замечание 96.5. *При возрастании объёма выборки n, как видно из (96.11), доверительный интервал уменьшается. При увеличении надежности γ увеличивается величина $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$, т.к. функция Лапласа в (96.12) возрастающая; следовательно, увеличивается и доверительный интервал (96.11).*

Для получения доверительного интервала (96.11) заметим, что если независимые случайные величины $\xi_i \sim N(a;\sigma)$, $i = 1, \ldots, n$, то среднее арифметическое $\bar{\xi} = (\xi_1 + \ldots \xi_n)/n$ тоже распределено нормально с параметрами:

$$M(\bar{\xi}) = a, \quad \sigma(\bar{\xi}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{96.13}$$

Формулы (96.13) были получены в примере 96.1. Будем искать доверительный интервал для a в виде:

$$P\{|\bar{\xi} - a| < \varepsilon\} = \gamma, \tag{96.14}$$

где γ — заданная доверительная вероятность. Для определения ε воспользуемся формулой (92.6), которая в данном случае с учётом (96.13) принимает вид:

$$P\{|\bar{\xi} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Найдём ε из уравнения:

$$2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)=\gamma \implies \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)=\frac{\gamma}{2} \implies \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}=\tau_{\frac{\gamma}{2}} \implies$$
$$\varepsilon=\tau_{\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

С учётом полученной величины ε доверительный интервал (96.14) принимает вид (96.11).

Пример 96.7. *Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a нормально распределённой случайной величины со средним квадратическим отклонением $\sigma=2$ по выборке объёма $n=64$ с выборочным средним $\bar{x}=5{,}2$. Надежность доверительного интервала $\gamma=0{,}95$.*

Р е ш е н и е: Из уравнения (96.12) по таблице приложения 2 находим для $\frac{\gamma}{2}=0{,}475$ $\tau_{\frac{\gamma}{2}}=1{,}96$. Подставляя найденное значение в (96.11), получаем (4,71;5,69).

Ответ: (4,71;5,69).

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии имеет вид:

$$\Big(\bar{x}-t_\gamma\frac{S^*}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+t_\gamma\frac{S^*}{\sqrt{n}}\Big), \tag{96.15}$$

где величина t_γ определяется по таблице приложения 3 критических точек распределения Стьюдента для $\alpha=1-\gamma$ и $k=n-1$ или с помощью компьютера из уравнения для функции распределения Стьюдента $F_{st}(x)$ с $n-1$ степенью свободы:

$$F_{st}(t_\gamma)=\frac{1+\gamma}{2}, \tag{96.16}$$

где $\bar{x}$ и S^* — соответственно выборочное среднее и исправленное СКО.

Для получения доверительного интервала (96.15) примем без доказательства, что если независимые случайные величины $\xi_i\sim N(a;\sigma)$, $i=1,\ \ldots,n$, то случайная величина

$$t=\frac{\bar{\xi}-a}{S^*/\sqrt{n}} \tag{96.17}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы (см п. 93.4).

Обозначим t_γ значение, при котором с вероятностью γ выполняется следующее неравенство:

$$P\{|t| < t_\gamma\} = \gamma. \tag{96.18}$$

С учётом четности плотности распределения Стьюдента $\varphi_{st}(t)$ значение t_γ определяется из условия:

$$P\{|t| < t_\gamma\} = \gamma \iff P\{|t| > t_\gamma\} = 1 - \gamma \implies P\{t > t_\gamma\} = \frac{1-\gamma}{2} \iff$$
$$\iff 1 - F_{st}(t_\gamma) = \frac{1-\gamma}{2} \iff F_{st}(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Подставляя в (96.18) выражение (96.17), получаем:

$$P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a}{S^*/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right\} = \gamma \iff P\left\{-t_\gamma < \frac{\bar{\xi} - a}{S^*/\sqrt{n}} < t_\gamma\right\} = \gamma,$$

откуда получаем для a доверительный интервал в виде (96.15).

Замечание 96.6. *В некоторых пакетах прикладных программ для ЭВМ, например в Excel, под распределением Стьюдента понимается $1 - F_{st}(x)$. Поэтому, задавая значение $1-\gamma$ и число свободы, с помощью обратной функции можно сразу получить значение t_γ для двустороннего интервала (без использования (96.16)). Указанные особенности можно узнать из инструкций к программам.*

Пример 96.8. *Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a нормально распределённой случайной величины с выборочным средним $\bar{x} = 10{,}5$ и исправленным СКО $S^* = 1{,}6$ по выборке объёма $n = 16$. Надежность доверительного интервала $\gamma = 0{,}99$.*

Р е ш е н и е: По таблице приложения 3 для числа степеней свободы $k = n - 1 = 15$ и $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}01$ находим $t_\gamma = 2{,}95$. Подставляя полученное значение в (96.15), получаем значение для радиуса доверительного интервала ε:

$$\varepsilon = t_\gamma \frac{S^*}{\sqrt{n}} = 2{,}95 \frac{1{,}6}{\sqrt{16}} = 2{,}95 \cdot 0{,}4 = 1{,}18.$$

Находим доверительный интервал $(10{,}5-1{,}18; 10{,}5+1{,}18) = (9{,}32; 11{,}68)$.

Ответ: (9,32; 11,68).

Практическое занятие 96. Коэффициент корреляции

Пример 96.1. *В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 5%, а вследствие дефекта B – 2%. Годная продукция составляет 94%. Пусть ξ – случайная величина, равная 1 или 0 в зависимости от того, обладает или не обладает взятое изделие дефектом A, а ζ – дефектом B. Составить закон распределения двумерной случайной величины (ξ, ζ). Найти коэффициент корреляции дефектов A и B.*

Р е ш е н и е: Случайная величина ξ принимает значение 1, если взятое изделие обладает дефектом A, и равна 0, если не обладает. Аналогично величина ζ равна 1 или 0 в зависимости от того, обладает или нет это изделие дефектом B. Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Обозначим вероятности $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \zeta = y_j\}$. Вероятность $p_{22} = P\{\xi = 0, \zeta = 0\} = 0{,}94$. При $x_2 = 0$ $y_1 = 1$ или $y_2 = 0$; тогда по теореме сложения вероятностей имеем $P(x_2) = p_{21} + p_{22}$. Так как $P(x_2) = 0{,}95$ и $p_{22} = 0{,}94$, то $p_{21} = P(x_2) - p_{22} = 0{,}01$. Аналогично найдем, что $p_{12} = P(y_2) - p_{22} = 0{,}98 - 0{,}94 = 0{,}04$. Поскольку $P(x_1) = 0{,}05$, то из уравнения $P(x_1) = p_{11} + p_{12}$ определим $p_{11} = 0{,}01$.

Искомое распределение можно записать в виде таблицы:

$\xi \backslash \zeta$	$y_1{=}1$	$y_2{=}0$
$x_1{=}1$	0,10	0,04
$x_2{=}0$	0,01	0,94

Распределения составляющих двумерной случайной величины равны:

ξ	1	0	ζ	1	0
p	0,05	0,95	p	0,02	0,98

Отсюда найдем, что $M(\xi) = 0{,}05$, $M(\xi^2) = 0{,}05$, $D(\xi) = 0{,}0475$, $M(\zeta) = 0{,}02$, $M(\zeta^2) = 0{,}02$, $D(\zeta) = 0{,}0196$.

С помощью таблицы распределения величины (ξ, ζ) напишем закон распределения для произведения $\xi \cdot \zeta$:

$\xi \cdot \zeta$	0	1
p	0,04+0,01+0,94=0,99	0,01

и найдем математическое ожидание $M(\xi\cdot\zeta)=0{,}01$. По формуле (95.2) определим коэффициент корреляции

$$r_{\xi\zeta}=\frac{0{,}01-0{,}001}{\sqrt{0{,}0475\cdot 0{,}0196}}\approx\frac{0{,}009}{0{,}0305}\approx 0{,}295.$$

Пример 96.2. *Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ,ζ) равна:*

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(x-y)\ \textit{при}\ x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ y\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ 0\ \textit{при}\ x\notin[0,\frac{\pi}{2}]\ \textit{или}\ y\notin[0,\frac{\pi}{2}].\end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и ζ.

Р е ш е н и е: Поскольку здесь система случайных величин является непрерывной, то математические ожидания величин ξ и ζ определим по формулам:

$$M(\xi)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,y)dxdy,\qquad M(\zeta)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(x,y)dxdy.$$

Тогда вычисляя интеграл по x по частям, найдем

$$M(\xi)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}xdx\int_0^{\pi/2}\cos(x-y)dy=\frac{\pi}{4}.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно ξ и ζ (функция $\cos(x-y)$ чётная) следует, что $M(\zeta)=M(\xi)=\pi/4$. Дисперсия

$$D(\xi)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x,y)dxdy-M^2(\xi).$$

или

$$D(\xi)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x^2dx\int_0^{\pi/2}\cos(x-y)dy-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Здесь интеграл по x вычисляли два раза по частям. Дисперсия $D(\zeta)=D(\xi)$. Кроме того, необходимо найти математическое ожидание произведения случайных величин. Тогда в общем случае

$$M(\xi\cdot\zeta)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)dxdy,$$

а при данной плотности вероятности

$$M(\xi\cdot\zeta)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x dx\int_0^{\pi/2}y\cos(x-y)dy=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}+1.$$

Последний интеграл по x и по y вычисляли по частям. Подставляя найденные значения в формулу (95.2), определим коэффициент корреляции:

$$r_{\xi\zeta}=\Bigl(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi^2}{16}\Bigr)/\Bigl(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\Bigr)=\frac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}\approx 0{,}245.$$

Пример 96.3. *Система двух независимых случайных величин* (ξ,ζ) *подчинена нормальному закону распределения с параметрами*

$$M(\xi)=2,\quad M(\zeta)=-5,\quad D(\xi)=9,\quad D(\zeta)=4.$$

Написать выражения для плотности вероятности и функции распределения системы (ξ,ζ).

Р е ш е н и е: Поскольку здесь случайные величины некоррелированы, то положим в формуле (95.7) $r_{\xi\zeta}=0$. Тогда получим при заданных параметрах следующую плотность распределения:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{12\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{4}\right)}.$$

Здесь учли, что $\sigma_\xi=3$, $\sigma_\zeta=2$. Поскольку функция распределения системы

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy,$$

то

$$F(x,y)=\frac{1}{12\pi}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}dx\cdot\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}dy=$$

$$=\frac{1}{12\pi}\Bigl(\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}dx+\int_0^{x}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}dx\Bigr)\cdot\Bigl(\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}dy+\int_0^{y}e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}dy\Bigr).$$

Первые интегралы в скобках найдем с помощью интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2/2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Вторые интегралы выразим через функцию Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Для этого введем новые переменные: $u = (x-2)/3$, $v = (y+5)/2$. Тогда

$$\int_0^x e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}dx = 3\cdot\int_0^{\frac{x-2}{3}} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 3\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{x-2}{3}\right),$$

$$\int_0^y e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}dy = 2\cdot\int_0^{\frac{y+5}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}}dv = 2\sqrt{2\pi}\Phi(\frac{y+5}{2}).$$

Следовательно, функция распределения

$$F(x,y) = \frac{1}{12\pi}\left(\frac{\sqrt{18\pi}}{2} + 3\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{x-2}{3}\right)\right)\left(\sqrt{2\pi} + 2\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{y+5}{2}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-2}{3}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{y+5}{2}\right)\right).$$

Пример 96.4. *Двумерная случайная величина (ξ,ζ) подчинена закону распределения с плотностью $\varphi(x,y) = axy$ в области G и $\varphi(x,y) = 0$ вне этой области. Область G – треугольник, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Найти величину a и коэффициент корреляции $r_{\xi\zeta}$.*

Р е ш е н и е: Параметр a найдем из условия

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dxdy = 1.$$

Тогда

$$a\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xydy = 1 \Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{24} = 1 \Leftrightarrow a = 24.$$

Математическое ожидание

$$M(\xi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,y)dxdy = 24\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} ydy = \frac{2}{5}.$$

Аналогично найдем, что $M(\zeta) = 2/5$. Дисперсия

$$D(\xi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x,y)dxdy = 24\int_0^1\int_0^{1-x} x^3ydy - (\frac{2}{5})^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}.$$

Можно показать также, что $D(\zeta) = 1/25$. Для математического ожидания произведения случайных величин $\xi \cdot \zeta$ получим:

$$M(\xi \cdot \zeta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x,y)dxdy = 24\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} y^2dy = \frac{2}{15}.$$

По формуле (95.2) коэффициент корреляции численно определится как

$$r_{\xi\zeta} = \left(\frac{2}{15} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right) / \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{3}.$$

Пример 96.5. *Случайные величины ξ и ζ независимы и распределены нормально с параметрами $M(\xi) = M(\zeta) = 0$, $\sigma(\xi) = \sigma(\zeta) = 1$. Найти вероятность того, что случайная точка (ξ,ζ) попадёт в круг G радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.*

Р е ш е н и е: Так как ξ и ζ независимы, то их совместная плотность распределения $\varphi(x,y) = \varphi_\xi(x)\cdot\varphi_\zeta(y)$. По условию

$$\varphi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad \varphi_\zeta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x,y) = \varphi_\xi(x)\cdot\varphi_\zeta(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Искомая вероятность

$$P = \iint\limits_G \varphi(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\iint_G e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy.$$

Вычисляя двойной интеграл в полярных координатах, получим:

$$P = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G e^{-\frac{1}{2}r^2}rdrd\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}rdr = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865.$$

Пример 96.6. *Случайные величины ξ и ζ независимы и распределены нормально с параметрами $M(\xi) = M(\zeta) = 0$, $\sigma(\xi) = \sigma(\zeta) = 1$. Найти радиус круга R с центром в начале координат, вероятность попадания в который случайной точки (ξ,ζ) равна* 0,9.

Р е ш е н и е: Согласно предыдущей задаче, данная вероятность

$$P = \int_0^R e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = -e^{-\frac{1}{2}r^2}\Big|_0^R = 1 - e^{-\frac{1}{2}R^2}.$$

Для определения R получим уравнение: $1 - e^{-R^2/2} = 0{,}9$. Отсюда найдем, что $R \approx 2{,}145$.

Пример 96.7. *Случайная величина (ξ, ζ) подчиняется нормальному распределению с параметрами $M(\xi) = M(\zeta) = 0$, σ_ξ, σ_ζ, $r_{\xi\zeta} = 0$. Вычислить вероятность попадания случайной точки в область G, ограниченную эллипсом с полуосями $a = k\sigma_\xi$, $b = k\sigma_\zeta$.*

Р е ш е н и е: Уравнение эллипса $x^2/(k\sigma_\xi)^2 + y^2/(k\sigma_\zeta)^2 = 1$, а искомая вероятность

$$P((\xi,\zeta) \in G) = \iint\limits_G \varphi(x,y)dxdy,$$

где плотность

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\zeta} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{y^2}{\sigma_\zeta^2})}.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к обобщённой полярной системе координат, где $x = \sigma_\xi r\cos\varphi$, $y = \sigma_\zeta r \sin\varphi$, а якобиан этого преобразования $I = \sigma_\xi\sigma_\zeta r$. После подстановки вероятность

$$P((\xi,\zeta) \in G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^k re^{-r^2/2}dr = 1 - e^{-k^2/2}.$$

Самостоятельная работа

Пример 96.8. *Изготавливаемые детали цилиндрической формы сортируются по отклонению их длины от определённого размера на* 0,4; 0,5; 0,6 *мм и по разбросу их диаметра на* 0,12; 0,14 *мм. Совместное распределение отклонений длины ξ и диаметра ζ задано таблицей*

$\xi\backslash\zeta$	0,4	0,5	0,6
0,12	0,05	0,2	0,15
0,14	0,15	0,25	0,2

Найти математические ожидания случайных величин ξ и ζ и коэффициент корреляции между ними.

Пример 96.9. *В продукции предприятия брак вследствие дефекта α составляет 3%, а вследствие дефекта β - 4,5%. Годная продукция составляет 95%. Найти коэффициент корреляции дефектов α и β.*

Пример 96.10. *Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ,ζ): $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\sin x \sin y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $\varphi(x,y) = 0$. Найти дисперсии составляющих и коэффициент корреляции.*

Пример 96.11. *Система случайных величин (ξ,ζ) подчинена закону распределения с плотностью*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) \text{ при } x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ y \in [0,\frac{\pi}{2}], \\ 0 \text{ при } x \notin [0,\frac{\pi}{2}] \text{ или } y \notin [0,\frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти средние квадратические отклонения σ_ξ, σ_ζ, а также коэффициент корреляции $r_{\xi\zeta}$.

Пример 96.12. *Система двух случайных величин (ξ,ζ) подчиняется нормальному закону с плотностью вероятности*

$$\varphi(x,y) = ae^{-\frac{(x+1)^2}{7}-\frac{(y-4)^2}{2}}.$$

Найти коэффициент a.

Пример 96.13. *Случайная точка (ξ,ζ) на плоскости распределена по нормальному закону с центром распределения $(M(\xi), M(\zeta)) = (0{,}1)$ и среднеквадратическими отклонениями $\sigma_\xi = 1$, $\sigma_\zeta = 2$. Вычислить вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $(-1;1), (2;1), (2;3), (-1;3)$.*

Пример 96.14. *Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,ζ) задана формулой*

$$\varphi(x,y) = \frac{5}{8\pi}e^{-\frac{25}{32}((x-2)^2-(6/5)(x-2)(y+3)+(y+3)^2)}.$$

Найти коэффициент корреляции величин ξ, ζ.

Пример 96.15. *Случайные величины ξ и ζ независимы и нормально распределены с $M(\xi) = M(\zeta) = 0$, $D(\xi) = D(\zeta) = 1$. Найти вероятность того, что случайная точка попадёт в кольцо $2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3$.*

Лекция 97. Регрессионный анализ

Метод наименьших квадратов. Выборочный коэффициент корреляции. Выборочные уравнения прямых среднеквадратической регрессии

97.1. Метод наименьших квадратов (МНК)

Разберём один из методов получения эмпирической зависимости для ряда наблюдений независимой переменной x и значений функции y.

Пусть в результате эксперимента получена таблица эмпирических значений функции y для ряда значений независимой переменной x (табл. 97.1).

Таблица 97.1

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Требуется подобрать функцию $y = f(x)$, как можно лучше описывающую зависимость y от x.

Метод наименьших квадратов (МНК) заключается в выборе такой функции из некоторого класса непрерывных функций, для которой сумма квадратов отклонений значений функции $f(x_i)$ от соответствующих наблюдаемых значений y_i была бы наименьшей:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - y_i\big)^2 \underset{f(x)}{\longmapsto} \min\,. \tag{97.1}$$

В данном пособии мы ограничимся выбором функций $f(x)$ из класса многочленов. Геометрически это условие означает минимизацию суммы квадратов расстояний от наблюдаемых точек $(x_i; y_i)$ до расчётных с той же абсциссой: $\big(x_i; f(x_i)\big)$.

Рассмотрим применение МНК для нахождения линейной зависимости: $f(x) = ax + b$.

Для нахождения значений a и b, обеспечивающих минимум функции Φ, воспользуемся необходимым условием экстремума: приравняем к нулю частные производные по a и по b функции Φ. Можно доказать, что найденные таким образом значения a и b обеспечат минимум функции Φ.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Приравнивая их к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a\sum x_i^2 + 2b\sum x_i - 2\sum x_i y_i = 0, \\ 2a\sum x_i + 2nb - 2\sum y_i = 0. \end{cases}$$

После небольших преобразований получаем систему:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\dfrac{\sum x_i^2}{n} + b\dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n}, \\ a\dfrac{\sum x_i}{n} + b = \dfrac{\sum y_i}{n} \end{cases} \tag{97.2}$$

или, обозначив:

$$\frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}, \quad \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}, \quad \frac{\sum x_i^2}{n} = \overline{x^2}, \quad \frac{\sum x_i y_i}{n} = \overline{xy},$$

получим систему (97.3) для определения коэффициентов a и b:

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\bar{x} = \overline{xy}, \\ a\bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases} \tag{97.3}$$

Пример 97.1. *В таблице 97.2 приведены значения y при различных значениях x. Полагая, что зависимость между x и y имеет вид $y = kx + b$, найти методом наименьших квадратов k и b.*

Таблица 97.2

N	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y_i	-1.08	0.24	1.64	2.98	4.26	5.62	7.04	8.3

Р е ш е н и е: Система (97.3) для данного примера принимает вид:

$$\begin{cases} 8,875k + 2,750b = 13,496, \\ 2,750k + b = 3,625, \end{cases}$$

откуда находим: $k = 2{,}687$; $b = -3{,}765$. Найденная линейная зависимость имеет вид: $y = 2{,}687x - 3{,}765$.

Посчитаем значения $f(x_i)$ и найдём значение функции Φ по формуле (97.1). Результаты вычислений сведены в таблицу 97.3, где $r_i = \big(f(x_i) - y_i\big)^2$.

Таблица 97.3

N	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
y_i	−1,08	0,24	1,64	2,98	4,26	5,62	7,04	8,30
$f(x_i)$	−1,08	0,27	1,61	2,95	4,30	5,64	6,98	8,33
r_i	0	0,0007	0,0010	0,0008	0,0013	0,0004	0,0032	0,0007

Просуммировав значения в последней строке табл. 97.3, получим минимальное значение функции Φ: $\Phi_{\min} = 0{,}0081$. Полученное значение даёт представление о накопленной ошибке при замене значений y_i на $f(x_i)$.

Ответ: $y = 2{,}687x - 3{,}765$.

Аналогичным образом получается система для определения коэффициентов a, b, c для квадратичной зависимости $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a\overline{x^4} + b\overline{x^3} + c\overline{x^2} = \overline{x^2 y}, \\ a\overline{x^3} + b\overline{x^2} + c\overline{x} = \overline{xy}, \\ a\overline{x^2} + b\overline{x} + c = \overline{y}. \end{cases} \tag{97.4}$$

Пример 97.2. *Покажем использование МНК с применением программы Mathcad и Maxima.*

Линейная зависимость

$ORIGIN := 1 \qquad n := 12$

/**Массив абсцисс*: */

$i := 1 \ldots n \quad x_i := 0.5 + i \cdot 0.5$

/**Массив ординат*: */

$y := (\ -1.79\ -0.47\ 1.74\ 3.87\ 4.36\ 6.56\ 7.94\ 8.32\ 9.34\ 11.68\ 13.45\ 12.87\ )^T$

/**Решим систему (97.3), представленную в матричном виде: $S{\cdot}A = Q$. Здесь A — матрица искомых коэффициентов, S — матрица системы и Q — столбец свободных членов.**/

/* *Формирование системы линейных алгебраических уравнений* */

$$S := \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \quad S := \frac{S}{n} \quad Q := \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \quad Q := \frac{Q}{n}$$

/* *Решение системы* $S \cdot A = Q$ */:

$$A := lsolve(S, Q) \quad S = \begin{pmatrix} 17.0417 & 3.75 \\ 3.75 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 32.5996 \\ 6.4892 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2.7743 \\ -3.9146 \end{pmatrix}$$

/* *Получаем уравнения сглаживающей прямой линии*: */

$Y(x) := A_1 \cdot x + A_2$.

/* *Находим сумму квадратов отклонений теоретического и экспериментальных значений исследуемой функции (минимальное значение функции Ф)*: */

$$\Phi_{min} := \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y(x_i))^2 \qquad \Phi_{min} = 5.4591.$$

/* *Графики данной зависимости и сглаживающей прямой приведены на чертеже.* */

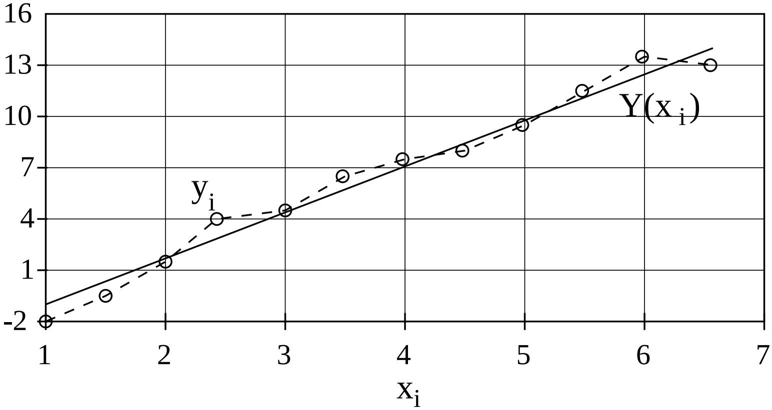


Рис. 24. *Линейная зависимость*

Maxima-программа:

```
(%i1) kill(all)$  numer:true$ ratprint:true$  n:12$
        fpprintprec:5$
(%i5) x:makelist(0.5+i*0.5,i,1,n);
(%i16) y:[-1.79,-0.47, 1.74, 3.87,4.36, 6.56,7.94,8.32, 9.34,
        11.68, 13.45, 12.87];
```

*/*Формируем систему линейных уравнений.*/*

```
(%i7) x1:sum(x[i], i, 1, n)/n; x2:sum(x[i]^2, i, 1, n)/n;
(%i9) y1:sum(y[i], i, 1, n)/n; xy:sum(x[i]*y[i], i, 1, n)/n;
```

*/*Решаем систему линейных уравнений.*/*

```
(%i11) [globalsolve: true,programmode: true];
( %i12) linsolve([x2*k+x1*b=xy, x1*k+b=y1], [k,b]);
```

*/*Строим график.*/*

```
( %i13)wxplot2d([[discrete,x,y],k*t+b],[t,x[1],x[n]],
       [style,[points,3,2,5],[lines,2,5]], [xlabel,"x"],
       [ylabel,"y"],[gnuplot_preamble, "set grid"],
       [legend,"",""])$
```

*/*Вычисляем сумму квадратов отклонений. */*

```
(%i14) Fmin:sum((y[i]-(k*x[i]+b))^2,i,1,n);
(%o14) 5.4591
```

Квадратичная зависимость

$n := 10 \qquad i := 1 \ldots n$

*/*Массив абсцисс:*/*

$x_i := -2 + i$

*/*Массив ординат:*/*

$y := (\,-2.98\;\; -2.02\;\; 1.17\;\; 3.03\;\; 2.57\;\; 1.75\;\; 2.74\;\; 5.78\;\; 8.92\;\; 14.76\,)^T$

$$S := \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^4 & \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^3 & \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^3 & \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^1 & n \end{bmatrix} \qquad Q := \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^2 \cdot y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i \cdot y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{bmatrix}$$

$$S := \frac{S}{n} \quad Q := \frac{Q}{n} \quad S = \begin{pmatrix} 877.3 & 129.5 & 20.5 \\ 129.5 & 20.5 & 3.5 \\ 20.5 & 3.5 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 171.974 \\ 25.382 \\ 3.572 \end{pmatrix}$$

$$A := lsolve(S, Q) \qquad A = \begin{pmatrix} 0.1627 \\ 0.4227 \\ -1.2416 \end{pmatrix}$$

/* *Получаем уравнение сглаживающей параболы*: */

$$Y(x) := A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x + A_3$$

$$\Phi_{min} := \sum_{i=1}^{n}(y_i - Y(x_i))^2 \qquad \Phi_{min} = 28.8735$$

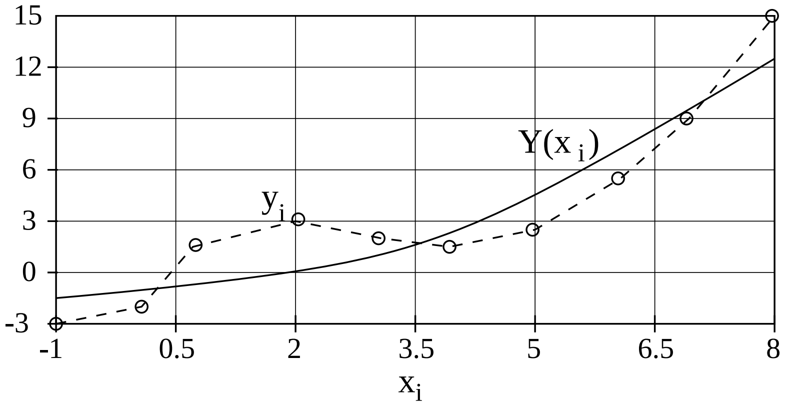


Рис. 25. *Квадратичная зависимость*

Maxima-программа:

```
(%i1) kill(all)$  fpprintprec:5$  ratprint:true$
        numer:true$  n:10$
(%i5) x:makelist(-2+i, i, 1, n);
(%i6) y:[-2.98, -2.02, 1.17, 3.03, 2.57, 1.75, 2.74,
        5.78, 8.92, 14.76]
```

/ Формируем систему линейных уравнений.*/*

```
(%i7) x1:sum(x[i], i, 1, n)/n;   x2:sum(x[i]^2,i, 1, n)/n;
(%i9) x3:sum(x[i]^3, i, 1, n)/n; x4:sum(x[i]^4, i, 1, n)/n;
(%i11) y1:sum(y[i], i, 1, n)/n; xy:sum(x[i]*y[i], i, 1,n)/n;
(%i13) x2y:sum(x[i]^2*y[i], i, 1, n)/n;
```

/ Решаем систему линейных уравнений.*/*

```
(%i14)[globalsolve: true, programmode: true];
(%i15) linsolve([x4*a+x3*b+x2*c=x2y, x3*a+x2*b+x1*c=xy,
                          x2*a+x1*b+c=y1], [a,b,c]);
```

/ Строим график.*/*

```
(%i16)wxplot2d([[discrete,x,y],a*t^2+b*t+c],[t,x[1],x[n]],
    [style,[points,3,2,5],[lines,2,5]],[legend,"f","ft"])$
```

/ Вычисляем сумму квадратов отклонений. */*

```
 (%i14) Fmin:sum((y[i]-(a*x[i]^2+b*x[i]+c))^2,i,1,n);
  (%o14) 28.873
```

Полиномиальная зависимость

$M := 3 \quad /*(Кубическая\ зависимость)*/$

$n := 10 \qquad i := 1 \ldots n$

$/*$ *Массив абсцисс:* $*/$

$x_i := -2 + i$

$/*$ *Массив ординат:* $*/$

$y := (\ -2.98\ \ -2.02\ \ 1.17\ \ 3.03\ \ 2.57\ \ 1.75\ \ 2.74\ \ 5.78\ \ 8.92\ \ 14.76\ )^T$

$$S := \left| \begin{array}{l} for\, i \in 1 \ldots M+1 \\ \quad for\, j \in 1 \ldots M+1 \\ \qquad A_{i,j} \leftarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^{(2\cdot M+2-i-j)} \end{array} \right._{A} \qquad Q := \left| \begin{array}{l} for\, i \in 1 \ldots M+1 \\ \quad B_i \leftarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^{(M+1-i)} \cdot y_k \end{array} \right._{B}$$

$$S := \frac{S}{n} \quad Q := \frac{Q}{n} \quad A := lsolve(S, Q) \quad A = \begin{pmatrix} 0.0873 \\ -0.754 \\ 2.3519 \\ -0.5083 \end{pmatrix}$$

$$Y(x) := \sum_{m=1}^{M+1} A_m \cdot x^{M+1-m}$$

$$\Phi_{min} := \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y(x_i))^2 \qquad \Phi_{min} = 5.335$$

Maxima-программа

```
(%i1) kill(all)$  fpprintprec:5$  ratprint:true$
        numer:true$  n:10$
(%i6) x:makelist(-2+i, i, 1, n);
(%i7) y:[ -2.98, -2.02, 1.17,3.03,2.57,1.75,2.74,
        5.78,8.92,14.76];
```

/* *Формируем двумерный массив A.* */

```
(%i8) for i:1 while i<=m+1 do (
        if abs(x[i])<0.000001 then x[i]:0.000001,
        B[i,1]:sum(x[k]^(m+1-i)*y[k], k, 1, n)/n,
        for j:1 while j<=m+1 do(
          A[i,j]:sum(x[k]^(2*m+2-i-j), k, 1, n)/n));
```

/* *Создаем правую часть системы линейных уравнений.* */

```
(%i9) b:genmatrix(B, m+1, 1);
```

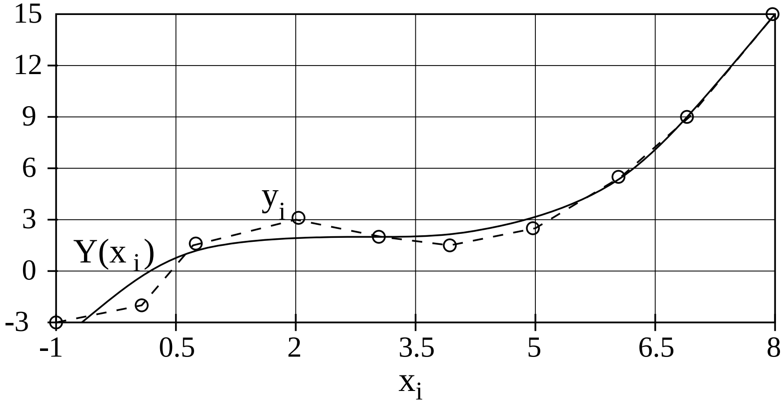


Рис. 26. *Полиномиальная зависимость*

/* *Создаем матрицу A из двумерного массива A.**/

```
(%i10) C:genmatrix(A, m+1, m+1);
```

/**Решаем систему линейных уравнений.**/

```
(%i11) D:lu_factor(C, generalring);
(%i12) a:lu_backsub(D, b);
```

/**Задаем функцию в виде полинома степени m.**/

```
(%i13)  yt(t):=sum(a[k][1]*t^(m+1-k), k, 1, m+1);
```

/**Строим график.**/

```
(%i14) wxplot2d([[discrete,x,y], yt(t)], [t, x[1], x[n]],
      [style, [points, 3, 2, 5], [lines, 2, 5]],
      [legend,"f","ft"])$
```

/* *Вычисляем сумму квадратов отклонений.* */

```
(%i15) F:sum((yt(x[i]) -y[i])^2, i, 1, n);
```

97.2. Выборочный коэффициент корреляции

Рассмотрим выборку объёма n из генеральной совокупности значений двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$, т.е. n пар наблюдений $(x_i;y_i)$. Поскольку многие значения в этой выборке могут повторяться, их заносят в так называемую корреляционную таблицу (табл. 97.4). В первом столбце этой таблицы перечислены значения x_i, во втором — y_i в виде вариационных рядов. На пересечении i-й строки

Таблица 97.4

Корреляционная таблица					
$\xi\backslash\zeta$	y_1	y_2		y_s	$n_{i\cdot}$
x_1	n_{11}	n_{12}		n_{1s}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}		n_{2s}	$n_{2\cdot}$
x_k	n_{k1}	n_{k2}		n_{ks}	$n_{k\cdot}$
$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$		$n_{\cdot s}$	n

и j-го столбца — соответствующая частота n_{ij}, т.е. количество раз, которое наблюдение $(x_i;y_j)$ встретилось в выборке. При обработке корреляционной таблицы в последнем столбце указывают сумму частот по строкам $n_{i\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{s} n_{ij}$, а в последней строке — сумму частот по столбцам $n_{\cdot j} = \sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij}$. Сумма всех элементов последнего столбца или строки даст объём выборки

$$n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} n_{\cdot j}.$$

Первый и последний столбцы корреляционной таблицы образуют статистическое распределение выборки случайной величины ξ, а первая и последняя строки образуют выборку случайной величины ζ. Обработав их, как описано в п. 96.4 предыдущей лекции, получим числовые характеристики

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_{i\cdot}x_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_{i\cdot}x_i^2}{n}, \quad S_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2,$$

$$\overline{y} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} n_{\cdot j} y_j}{n}, \quad \overline{y^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} n_{\cdot j} y_j^2}{n}, \quad S_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2.$$

Определение 97.1. *Выборочным коэффициентом корреляции r_{xy}^* называется:*

$$r_{xy}^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x \cdot S_y}\ , \quad \text{где} \tag{97.5}$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{s} n_{ij} x_i y_j}{n}\ . \tag{97.6}$$

Выборочный коэффициент корреляции является статистической оценкой коэффициента корреляции, рассмотренного в лекции 95, и он обладает следующими свойствами, которые мы приведем без доказательства:

1) $r_{xy}^* = r_{yx}^*$;

2) Выборочный коэффициент корреляции находится в пределах от -1 до 1: $-1 \leqslant r_{xy}^* \leqslant 1$;

3) $|r_{xy}^*| = 1$ тогда и только тогда, когда между значениями x_i и y_i имеется линейная зависимость. Чем ближе r_{xy}^* к нулю, тем хуже эта зависимость аппроксимируется линейной.

Определение 97.2. *Условным средним $\overline{y_x}$ называют среднее арифметическое значений ζ при фиксированном значении $\xi = x$.*

Для корреляционной таблицы 97.4 условное среднее $\overline{y_x}$ получается усреднением значений ζ по строке, соответствующей $\xi = x$. Так, например, $\overline{y_{x_1}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{S} y_j n_{1j}}{n_{1\cdot}}$. Аналогично определяется условное среднее $\overline{x_y}$.

В лекции 95 было введено понятие регрессии ζ на ξ: $M(\zeta/\xi = x) = f_{\zeta/\xi}(x)$ и ξ на ζ: $M(\xi/\zeta = y) = \Psi_{\xi/\zeta}(y)$ и получены формулы (95.2) и (95.4) для прямых среднеквадратической регрессии. Ниже будут введены их статистические аналоги.

97.3. Выборочные уравнения прямых среднеквадратической регрессии

По данным наблюдений над двумерной случайной величиной, представленных в корреляционной таблице 97.4, найдём методом наименьших квадратов выборочное уравнение прямой линии среднеквадратической регрессии ζ на ξ:

$$\overline{y_x} = \rho^*_{\zeta/\xi} \cdot x + b^*.$$

В соответствии с этим методом коэффициенты подбираются так, чтобы обеспечить минимум функции $\Phi(\rho^*_{\zeta/\xi}; b^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\rho^*_{\zeta/\xi} \cdot x_i + b^* - y_i)^2$, выражающей сумму квадратов отклонений y_i от $f(x_i)$. Приравняв к нулю частные производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \rho^*_{\zeta/\xi}}$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial b^*}$, получим систему линейных уравнений (97.3) для нахождения коэффициентов $\rho^*_{\zeta/\xi}$ и b^*, обеспечивающих минимум данной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \rho^*_{\zeta/\xi}} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b^*} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^*_{\zeta/\xi} \overline{x^2} + b^* \overline{x} = \overline{x_i y_i}, \\ \\ \rho^*_{\zeta/\xi} \overline{x} + b^* n = \overline{y_i}, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \rho^*_{\zeta/\xi} = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \\ \\ b^* = \overline{y} - \rho^*_{\zeta/\xi} \overline{x}. \end{cases} \tag{97.7}$$

Коэффициент $\rho^*_{\zeta/\xi}$ называется выборочным коэффициентом регрессии ζ на ξ. Он выражается через выборочный коэффициент корреляции по формуле:

$$\rho^*_{\zeta/\xi} = r^*_{xy} \frac{S_y}{S_x}. \tag{97.8}$$

Таким образом, уравнение прямой получилось следующим:

$$\overline{y_x} = r^*_{xy} \frac{S_y}{S_x} (x - \overline{x}) + \overline{y}\ . \tag{97.9}$$

Определение 97.3. *Уравнение (97.9) называется выборочным уравнением прямой регрессии ζ на ξ.*

Заметим, что знак коэффициента регрессии совпадает со знаком коэффициента корреляции: если $r^*_{xy} > 0$, то линейная функция регрессии ζ на ξ возрастает, если $r^*_{xy} < 0$ — убывает.

Аналогично можно получить выборочное уравнение прямой регрессии ξ на ζ:

$$\overline{x_y} = r^*_{xy}\frac{S_x}{S_y}(y - \overline{y}) + \overline{x}. \tag{97.10}$$

Оба уравнения допускают следующую симметричную форму записи:

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r^*_{xy}\frac{S_y}{S_x}(x - \overline{x}) \ ,$$

$$\overline{x_y} - \overline{x} = r^*_{xy}\frac{S_x}{S_y}(y - \overline{y}) \ .$$

Обе прямые проходят через точку $(\overline{x};\ \overline{y})$, называемую центром распределения.

Обе прямые совпадают тогда и только тогда, когда $|r^*_{xy}| = 1$. В этом случае, как уже упоминалось, между значениями x_i и y_i имеется линейная зависимость. Прямая регрессии и является этой зависимостью.

Пример 97.3. *Найти выборочные уравнения прямых регрессии и построить их график для данных корреляционной таблицы:*

$\xi\backslash\zeta$	40	60	80	$n_{i\cdot}$
60	5	—	3	8
80	—	2	19	21
100	7	6	—	13
120	14	4	—	18
$n_{\cdot j}$	26	12	22	60

Р е ш е н и е: Объём выборки $n = 60$. По формулам (96.2), (96.4), (97.5) определяем характеристики выборки:

$$\overline{x} = \frac{5620}{60} \approx 93{,}7; \qquad \overline{y} = \frac{3520}{60} \approx 58{,}6;$$

$$\overline{x^2} = \frac{552400}{60} \approx 9206{,}7; \qquad \overline{y^2} = \frac{225600}{60} \approx 3760;$$

$$S^2_x \approx 433{,}2; \qquad S^2_y \approx 318{,}2;$$

$$S_x \approx 20{,}8; \qquad S_y \approx 17{,}8; \overline{xy} = \frac{317600}{60} \approx 5293{,}3;$$

$$r^*_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{S_x\ S_y} \approx -0{,}55; \qquad \rho^*_{\zeta/\xi} = r^*_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x} \approx -0{,}47;$$

$$\rho^*_{\xi/\zeta} = r^*_{xy} \cdot \frac{s_x}{s_y} \approx -0{,}64.$$

Выборочные уравнения прямых регрессии находим по формулам (97.9), (97.10):

$$a)\overline{y_x} = -0{,}47x + 102{,}3,$$
$$b)\overline{x_y} = -0{,}64y + 131{,}3.$$

Их графики приведены на рис. 27

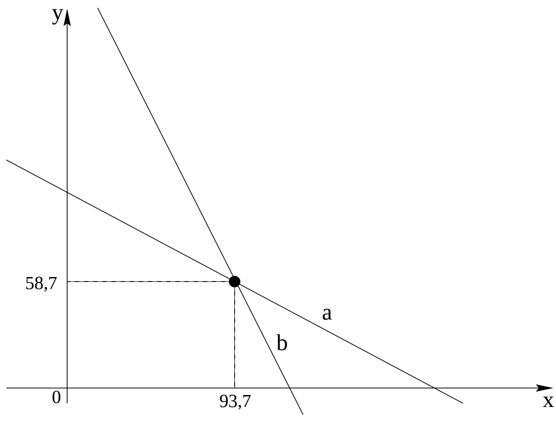


Рис. 27. *Прямые регрессии*

Замечание 97.1. *Аналогично методом наименьших квадратов можно найти коэффициенты квадратичной регрессии ζ на ξ, т.е. подобрать коэффициенты квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ так, чтобы обеспечить минимум функции $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$. Значения коэффициентов выборочной квадратичной регрессии определяются из системы (97.4).*

Аналогичным образом можно определить коэффициенты параболической корреляции третьего (т.е., $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$) и более высоких порядков, что, впрочем, используется редко.

Иногда на практике приходится исследовать для данной трёхмерной выборки зависимость $z = f(x; y)$ такую, что значения $z_i^* = f(x_i; y_i)$, вычисленные для наблюдаемых значений x_i и y_i, близки в смысле минимума суммы квадратов отклонений к наблюдаемым выборочным значениям z_i (так называемая множественная регрессия). В простейшем случае определяются коэффициенты линейной зависимости $z = ax + by + c$. Метод наименьших квадратов в этом случае даёт следующие формулы для коэффициентов:

$$a = \frac{r_{xz}^* - r_{yz}^* \cdot r_{xy}^*}{1 - r_{xy}^{*2}} \cdot \frac{S_z}{S_x}, \quad b = \frac{r_{yz}^* - r_{xz}^* \cdot r_{xy}^*}{1 - r_{xy}^{*2}} \cdot \frac{S_z}{S_y},$$
$$c = \overline{z} - a\overline{x} - b\overline{y}.$$

Пример 97.4. *Найдем выборочные уравнения прямых регрессии с помощью программ Maxima и Mathcad. Во избежание путаницы с переменными в уравнениях регрессии обозначим наблюдения большими буквами X и Y.*

Корреляционная таблица дана для 4-х значений X_j и 3-х значений Y_i.

Maxima-программа:

```
(%i1) numer : true$   fpprintprec : 6$   nx : 4$   ny : 3$
(%i5) X : makelist(40 + 20 * i, i, 1, nx);
(%o5) [60, 80,100, 120]
(%i6) Y : makelist(20+20*j, j, 1, ny);
(%o6)[40,60,80]
(%i7) m : matrix([5,0,3], [0,2,19], [7,6,0], [14, 4, 0]);
(%i8) n : sum(sum(m[i,j], j, 1, ny), i, 1, nx);
(%i9) nj : makelist(sum(m[i,j], j, 1, ny), i, 1, nx);
(%o9)[8, 21, 13, 18]
(%i10) ni : makelist(sum(m[i,j], i, 1, nx), j, 1, ny);
(%o10)[26, 12, 22]
(%i11) Mx : sum(nj[i]*X[i], i, 1, nx)/n;
(%o11)93.6667
(%i12) My : sum(ni[j]*Y[j], j, 1, ny)/n;

(%i13) Sx2 : sum(nj[i]*(X[i]-Mx)^2, i, 1, nx)/n;

(%o13)433.222
```

(%i14) Sx : sqrt(Sx2);
(%o14) 20.814

```
(%i15) Sy2 : sum(ni[j]*(Y[j]-My)^2, j, 1, ny)/n;
```

(%o15) 318.222
(%i16) Sy : sqrt(Sy2);
(%o16) 17.8388
(%i17) xy : sum(sum(X[i]*Y[j]*m[i,j], j, 1, ny), i, 1, nx)/n;
(%o17) 5293.33
(%i18) R : (xy-Mx*My)/(Sx*Sy);
(%o18) -0.5434
(%i19) Rxy : R*Sy/Sx; Ryx:R*Sx/Sy;
(%o19) -0.4658
(%o20) -0.6341
(%i21) yx(x) := Rxy*(x-Mx)+My$
(%i22) xy(y):= Ryx*(y-My)+Mx$
(%i23) wxplot2d([yx(x) ,xy(x)], [x, 50, 200],[y, 0, 80],
[gnuplot_preamble, "set grid;"])$

MathCad-программа:

$ORIGIN := 1 \qquad nx := 4 \qquad ny := 3$
$i := 1..nx \qquad j := 1..ny \qquad X_i := 40 + 20 \cdot i \qquad Y_j := 20 + 20 \cdot j$
$X^T = (\ 60 \ \ 80 \ \ 100 \ \ 120) \qquad Y^T = (\ 40 \ \ 60 \ \ 80\ )$
/* *Соответствующие частоты* $m_{i,j}$ *приведены в матрице* m:*/

$$m := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 19 \\ 7 & 6 & 0 \\ 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

/* *Найдем объём выборки* n *и суммы по строкам* nj *и по столбцам* ni: */

$n := \sum_j \sum_i m_{i,j} \qquad n = 60$

$$nj_i := \sum_j m_{i,j} \qquad nj = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad ni_j := \sum_i m_{i,j} \qquad ni = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \\ 22 \end{pmatrix}$$

/**Найдем выборочные средние:* */

$$Mx := \frac{1}{n}\cdot\sum_i nj_i\cdot X_i \quad Mx = 93.667 \quad My := \frac{1}{n}\cdot\sum_j ni_j\cdot Y_j \quad My = 58.667$$

/**и выборочные средние квадратические отклонения:* /

$$Sx2 := \frac{1}{n}\cdot\sum_i nj_i\cdot(X_i - Mx)^2 \quad Sx2 = 433.222 \quad Sx := \sqrt{Sx2} \quad Sx = 20.814$$

$$Sy2 := \frac{1}{n}\cdot\sum_j ni_j\cdot(Y_j - My)^2 \quad Sy2 = 318.222 \quad Sy := \sqrt{Sy2} \quad Sy = 17.839$$

/**Найдем выборочный коэффициент корреляции:**/

$$xy := \frac{1}{n}\cdot\sum_i\sum_j X_i\cdot Y_j\cdot m_{i,j} \quad xy = 5293 \quad R := \frac{xy - Mx\cdot My}{Sx\cdot Sy} \quad R = -0.543$$

$$\rho\zeta\xi := \frac{R\cdot Sy}{Sx} \qquad \rho\xi\zeta := \frac{R\cdot Sx}{Sy} \qquad \rho\zeta\xi = -0.466 \qquad \rho\xi\zeta = -0.634$$

/**и выборочные уравнения прямых регрессии:**/

$$yx(x) := \rho\zeta\xi\cdot(x - Mx) + My \qquad xy(y) := \rho\xi\zeta\cdot(y - My) + Mx$$

/**Построим их графики:* */

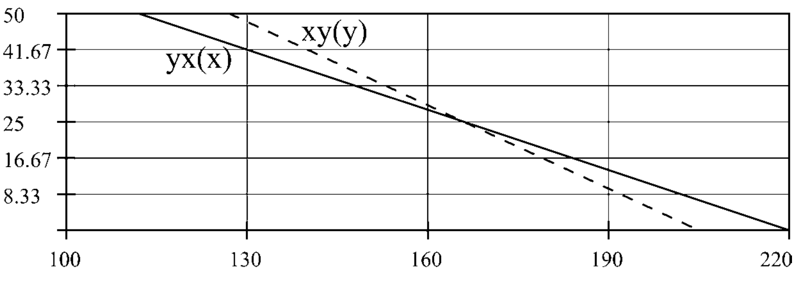


Рис. 28. *Прямые регрессии для примера 97.4*

Практическое занятие 97. Точечные и интервальные оценки параметров распределения

Пример 97.1. *Выборка задана в виде распределения частот:*

x_i	3	5	8	10	11
n_i	20	25	30	15	10

Найти распределение относительных частот.

Р е ш е н и е: Здесь объём выборки

$$n = 20 + 25 + 30 + 15 + 10 = 100.$$

Найдем относительные частоты:

$$P_1^* = 20/100 = 1/5, \quad P_2^* = 25/100 = 1/4, \quad , P_3^* = 30/100 = 3/10,$$

$$P_4^* = 15/100 = 3/20, \qquad P_5^* = 10/100 = 1/10.$$

Тогда распределение относительных частот примет вид:

x_i	3	5	8	10	11
P_i^*	1/5	1/4	3/10	3/20	1/10

Из этой таблицы нетрудно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{5} P_i^* = 1.$$

Пример 97.2. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма* $n = 80$*:*

x_i	0,9	1	1,2	1,4	1,5
n_i	10	25	20	15	10

Найти несмещённую оценку генерального среднего, математического ожидания, выборочную дисперсию, а также выборочное среднее квадратическое отклонение.

Р е ш е н и е: Несмещённой оценкой генерального среднего является выборочное среднее. Тогда по формуле (96.2) найдем:

$$\bar{x} = \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}9 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1{,}2 + 15 \cdot 1{,}4 + 10 \cdot 1{,}5) = 1{,}175.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой (96.7):

$$S^2 = \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}9^2 + 25 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1{,}2^2 + 15 \cdot 1{,}4^2 + 10 \cdot 1{,}5^2) - (1{,}175)^2 \approx$$

$\approx 1{,}4225 - 1{,}3806 \approx 0{,}042.$

Заметим, что отличная от нуля дисперсия является всегда положительной величиной. Выборочное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{0{,}042} \approx 0{,}205$.

Пример 97.3. *По выборке объёма $n = 50$ найдена смещённая оценка $S^2 = 9{,}8$ генеральной дисперсии. Найти несмещённую оценку дисперсии генеральной совокупности.*

Р е ш е н и е: Согласно (96.9), исправленная выборочная дисперсия, являющаяся в то же время несмещённой оценкой

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{50}{49} \cdot 9{,}8 = 10.$$

Пример 97.4. *Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормального распределения, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$, выборочное среднее $\bar{x} = 32$ и объём выборки $n = 36$.*

Р е ш е н и е: В данном примере воспользуемся выражением (96.11). Поскольку здесь $\gamma = 0{,}99$, то параметр $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ найдем с помощью равенства:

$$\Phi(\tau_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495.$$

Отсюда по таблицам функции Лапласа определим $\tau_{\frac{\gamma}{2}} = 2{,}57$. Здесь левая граница интервала

$$\bar{x} - \tau_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32 - 2{,}57 \cdot \frac{3}{6} = 32 - 1{,}285 = 30{,}715.$$

Правая граница определится как $32 + 1{,}285 = 33{,}285$. Таким образом, искомый доверительный интервал для математического ожидания a будет

$$30{,}715 < a < 33{,}285.$$

Пример 97.5. *Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 16$:*

x_i	3,5	4,1	4,7	5,4	5,6	6,2
n_i	2	3	2	4	3	2

Оценить с надежностью 0,95 *математическое ожидание* a *нормально распределённой случайной величины по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.*

Р е ш е н и е: В данном случае дисперсия неизвестна и доверительный интервал определяется по формуле (96.15). Выборочное среднее вычислим по формуле (96.2):

$$\bar{x} = \frac{1}{16}(2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4{,}1 + 2 \cdot 4{,}7 + 4 \cdot 5{,}4 + 3 \cdot 5{,}6 + 2 \cdot 6{,}2) \approx 4{,}969.$$

Выборочную дисперсию удобнее искать с помощью выражения (96.7):

$$S^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i^2 - 4{,}969^2 \approx 2{,}426.$$

Согласно (96.9), исправленная выборочная дисперсия

$$S^{*2} = \frac{16}{15} \cdot 2{,}426 = 2{,}587.$$

Отсюда находим исправленное СКО $S^* \approx 1{,}608$. При $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$ и числе степеней свободы $n - 1 = 15$ из таблицы приложения 3 определим $t_\gamma = 2{,}15$ и границы интервала

$$\bar{x} - t_\gamma \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} \approx 4{,}104, \qquad \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} \approx 5{,}833.$$

Таким образом, искомый доверительный интервал будет:

$$4{,}1042 < a < 5{,}8333.$$

Покажем, как найти доверительный интервал с использованием компьютерных пакетов Mathcad и Maxima.

Пример 97.6. *Найти доверительные интервалы для математического ожидания* a, *для приведённой выборки из нормального распределения непрерывной случайной величины* ξ *с надежностью a)* $\gamma = 0{,}95$ *и b)* $\gamma = 0{,}99$.

$ORIGIN := 1 \quad k := 12 \quad i := 1 \ldots k$

*/*Значения вариант приведены в массиве x:*/*

$x := (904.3\ \ 910.2\ \ 916.6\ \ 928.8\ \ 935\ \ 941.2\ \ 947.4\ \ 953.6\ \ 959.8\ \ 966\ \ 972.2\ \ 978.4\ )^T$

*/*Значения частот приведены в массиве m:*/*

$m := (3\ \ 1\ \ 2\ \ 7\ \ 8\ \ 10\ \ 4\ \ 2\ \ 4\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ )^T$

*/*Найдем объём выборки: */*

$n := \sum_i m_i \qquad n = 44$

/*Найдем выборочное среднее: */

$Mx := \frac{1}{n} \cdot \sum_i m_i \cdot x_i \qquad Mx = 938.693$

/*и выборочную дисперсию:*/

$S2 := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i m_i \cdot (x_i - Mx)^2 \quad S2 = 282.988$

/* для нахождения границ доверительного интервала с надежностью 0.95, найдем t_γ из уравнения (96.16):*/

$t95 := qt\left(1 - \frac{0.05}{2}, n\right) \quad t95 = 2.015,$

/*где qt — обратная к функции распределения Стьюдента.*/

/*Найдем радиус доверительного интервала при надёжности 0,95:

$\varepsilon 95 := t95 \cdot \sqrt{\frac{S2}{n}} \quad \varepsilon 95 = 5.111$

/*а также левую $xLeft95$ и правую $xRight95$ границы интервала:*/

$xLeft95 := Mx - \varepsilon 95 \qquad xRight95 := Mx + \varepsilon 95$

$xLeft95 = 933.582 \qquad xRight95 = 943.804$

/* Найдём те же величины для надежности 0.99:*/

$t99 := qt\left(1 - \frac{0.01}{2}, n\right) \quad t99 = 2.692,$

/*Найдем радиус доверительного интервала при надёжности 0,99:

$\varepsilon 99 := t99 \cdot \sqrt{\frac{S2}{n}} \quad \varepsilon 99 = 6.828$

/*а также левую $xLeft99$ и правую $xRight99$ границы интервала:*/

$xLeft99 := Mx - \varepsilon 99 \qquad xRight99 := Mx + \varepsilon 99$

$xLeft99 = 931.865 \qquad xRight99 = 945.521$ Maxima-программа:

```
(%i1) kill(all)$ numer:true$ fpprintprec:6$ ratprint:
        true$ k:12$
(%i5) x:[904.3,910.2, 916.6,928.8, 935, 941.2, 947.4, 953.6,
        959.8, 966, 972.2, 978.4];
(%i6) m:[3, 1, 2, 7, 8, 10, 4, 2, 4, 1, 1, 1];
(%i7) n:sum(m[i],i,1,k);
(%o7) 44
(%i8) Mx:sum(m[i]*x[i], i, 1, k)/n;
(%o8) 938.693
(%i9) S2:sum(m[i]*(x[i]-Mx)^2, i, 1, k)/(n-1);
(%o9) 282.988
```

/* *Из таблицы Приложение 3 при* $k = 43$ *и* $a = 0{,}05$ *получаем значение* t*/

```
(%i10) t95:2.015;
(%i11) t95:2.015$  t99:2.692$
(%i13) xLeft95:Mx-eps95; xRight95:Mx+eps95;
(%o13) 933.583
(%o14) 943.803
(%i15) xLeft99:Mx-eps99; xRight99:Mx+eps99;
(%o15) 931.865
(%o13) 945.521
```

Мы видим, что чем выше надёжность, тем шире доверительный интервал для математического ожидания.

Ответ: a) (933,583; 943,803); b) (931,865; 945,521)

Самостоятельная работа

В таблице 97.1 даны 30 вариантов заданий. По данным в таблице результатам измерений найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a нормального распределения с заданной надежностью γ.

Указание. Выборочное среднее и исправленное выборочное СКО находить соответственно по формулам (96.1) и (96.9), доверительный интервал по формуле (96.15).

Таблица 97.1

Исходные данные для самостоятельной работы											
вар.\изм.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	надёжность γ
1	4,50	4,51	4,52	4,53	4,54	4,49	4,54	4,47	4,49	4,46	0,95
2	4,43	4,41	4,39	4,45	4,40	4,35	4,42	4,40	4,37	4,38	0,99
3	30,10	30,40	30,30	30,00	29,45	29,65	30,05	30,15	29,90	30,00	0,999
4	80,20	80,10	80,30	79,70	79,80	79,80	80,10	80,00	79,70	80,30	0,95
5	5,40	5,41	5,40	5,42	5,39	5,38	5,38	5,37	5,35	5,40	0,99
6	14,28	14,26	14,27	14,30	14,31	14,32	14,31	14,29	14,30	14,26	0,999
7	20,12	20,11	20,10	20,10	19,98	19,97	20,02	20,03	20,02	20,10	0,999
8	36,41	36,42	36,44	36,45	36,48	36,49	36,46	36,45	36,42	36,38	0,99
9	14,46	14,45	14,41	14,40	14,42	14,48	14,50	14,42	14,45	14,44	0,95
10	80,30	80,30	80,20	80,30	80,20	79,80	79,80	79,70	79,90	80,50	0,95
11	15,38	15,40	15,41	15,42	15,43	15,37	15,36	15,36	15,34	15,33	0,99
12	16,06	16,20	16,16	16,00	16,15	16,05	16,01	16,03	16,02	16,02	0,999
13	5,90	5,88	5,97	5,95	5,93	5,85	5,88	5,87	5,87	5,90	0,95
14	7,71	7,73	7,70	7,72	7,68	7,67	7,65	7,63	7,70	7,71	0,99
15	15,21	15,28	15,25	15,24	15,17	15,18	15,20	15,19	15,26	15,22	0,999

Таблица 97.2

вар.\изм.	Исходные данные для самостоятельной работы										надёжность γ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
16	2,58	2,50	2,57	2,49	2,49	2,51	2,55	2,53	2,53	2,55	0,95
17	4,38	4,40	4,37	4,42	4,35	4,40	4,39	4,45	4,43	4,41	0,99
18	14,41	14,45	14,46	14,40	14,48	14,42	14,50	14,45	14,42	14,44	0,999
19	10,25	10,23	10,24	10,18	10,17	10,18	10,19	10,20	10,19	10,17	0,999
20	5,97	5,88	5,90	5,93	5,95	5,88	5,85	5,87	5,90	5,87	0,99
21	16,02	16,03	16,02	16,05	16,01	16,15	16,00	16,16	16,20	16,06	0,95
22	42,80	42,72	42,75	42,90	42,98	42,85	42,07	42,93	42,77	42,83	0,95
23	3,44	3,47	3,38	3,39	3,46	3,49	3,39	3,47	3,46	3,45	0,99
24	36,40	36,70	36,90	36,80	36,30	36,70	36,90	36,90	36,40	36,00	0,999
25	8,35	8,40	8,38	8,44	8,45	8,44	8,37	8,39	8,36	8,42	0,95
26	15,28	15,25	15,21	15,24	15,18	15,17	15,20	15,19	15,26	15,22	0,99
27	27,90	27,30	26,90	27,30	27,40	27,50	27,00	27,60	27,70	27,40	0,999
28	7,71	7,72	7,70	7,73	7,67	7,68	7,65	7,63	7,71	7,70	0,95
29	5,41	5,40	5,42	5,40	5,39	5,38	5,37	5,38	5,35	5,40	0,99
30	28,70	28,30	28,80	28,80	28,00	28,10	27,90	28,70	28,10	28,20	0,999

Лекция 98. Проверка статистических гипотез

Основные понятия. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. Сравнение двух математических ожиданий. Сравнение математического ожидания с заданным значением. Сравнение вероятности с заданным значением

98.1. Основные понятия проверки статистических гипотез

Определение 98.1. *Статистической называется гипотеза о виде распределения или о значениях его параметров.*

Гипотезы будем обозначать $H_0,\ H_1,\ H_2,\ \ldots$.

Различают проверяемую или основную гипотезу H_0 и альтернативную или конкурирующую H_1, которая должна противоречить основной.

Пример 98.1. *Проверяемая гипотеза H_0 состоит в том, что математическое ожидание случайной величины ξ равно заданному значению a_0. $H_0:\ M(\xi) = a_0$. Альтернативная $H_1:\ M(\xi) > a_0$.*

Для проверки статистической гипотезы на основании выборки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ вычисляют значение критерия, зависящего от наблюдений:

$$T = T(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n).$$

Всё множество значений критерия делится на так называемую критическую область, при попадании в которую критерия проверяемая гипотеза отвергается, и область принятия гипотезы.

При принятии решения о справедливости гипотезы H_0 возможны следующие ошибки:

- гипотеза H_0 отвергается, хотя на самом деле она верна (ошибка первого рода) ;
- гипотеза H_0 принимается, хотя на самом деле она не верна, а справедлива гипотеза H_1 (ошибка второго рода) .

Наряду с этим возможны следующие правильные решения:

- гипотеза H_0 принимается и она действительно верна;
- гипотеза H_0 отвергается и на самом деле справедлива гипотеза H_1.

Определение 98.2. *Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости критерия и обычно обозначается α.*

Вероятность правильно отвергнуть проверяемую гипотезу называется мощностью критерия и обычно обозначается β, тогда вероятность ошибки второго рода равна $1-\beta$.

Одновременно уменьшить вероятности ошибок первого и второго рода можно только увеличив объём выборки n. При фиксированном n обычно задают допустимый уровень ошибки первого рода α и стараются минимизировать вероятность ошибки второго рода $1-\beta$, т.е. максимизировать мощность критерия β.

На практике при проверке статистической гипотезы на основании наблюдений вычисляют наблюдаемое значение критерия $T_{\text{набл}}$ и по заданному уровню значимости α определяют границы критической области — критические точки.

Если критическая область правосторонняя, т.е. $(t_{\text{кр}2};\ +\infty)$, при выполнении условия $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}2}$ делают вывод: проверяемая гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α в пользу гипотезы H_1; если это условие не выполняется, т.е. $T_{\text{набл}} \leqslant t_{\text{кр}2}$, делают более осторожный вывод: нет оснований для того, чтобы отвергнуть гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1 с уровнем значимости α.

Если критическая область левосторонняя, т.е. $(-\infty;\ t_{\text{кр}1})$, гипотеза H_0 отвергается при выполнении условия $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}1}$. В случае двусторонней критической области вида $(-\infty;\ t_{\text{кр}1})\cup(t_{\text{кр}2};\ +\infty)$ гипотеза H_0 отвергается при выполнении условия $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}1}$ или $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}2}$.

98.2. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть на основании данных корреляционной таблицы по выборке объёма n независимых наблюдений над нормально распределёнными случайными величинами найден выборочный коэффициент корреляции r^*_{xy}, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, возникает вопрос о том, будет ли отличен от нуля теоретический коэффициент корреляции $r_{\xi\zeta}$, к которому сходится выборочный коэффициент при $n \to \infty$.

Необходимо при заданном уровне значимости α проверить гипотезу $H_0:\ r_{\xi\zeta} = 0$ при альтернативной гипотезе $H_1:\ r_{\xi\zeta} \neq 0$.

Если H_0 отвергается, это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а случайные величины ξ и ζ

коррелированы, т.е. в той или иной степени связаны линейной зависимостью. Если H_0 принимается, это означает, что выборочный коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля, а случайные величины ξ и ζ некоррелированы, т.е. не связаны линейной зависимостью.

В качестве критерия для проверки H_0 выбирается случайная величина

$$T = r^*_{xy}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-{r^*_{xy}}^2}}\ , \tag{98.1}$$

где r^*_{xy} вычисляется по формуле (97.5). При справедливости гипотезы H_0 величина T имеет так называемое распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Критическая область для рассматриваемой гипотезы H_1 будет двусторонней, $t_{\text{кр}1} = -t_{\text{кр}2}$. Критическая точка $t_{\text{кр}2}$ определяется по заданным уровню значимости α и числу степеней $n-2$ по специальным таблицам (приложение 3) или с помощью обратной к функции распределения Стьюдента, имеющейся, например, среди статистических функций Excel для $\alpha/2$ и $n-2$ степеней свободы. По формуле (98.1) для данных наблюдений определяем значение критерия $T_{\text{набл}}$.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}2}$, гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α, если $|T_{\text{набл}}| \leqslant t_{\text{кр}2}$ — нет оснований отвергнуть H_0.

Пример 98.2. *С уровнем значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции, вычисленного в примере 97.2.*

Р е ш е н и е: Для $n = 60$ и $\alpha = 0{,}1$ по таблице приложения 3 для двусторонней критической области находим $t_{\text{кр}2} = 1{,}67$. Вычисляем наблюдаемое значение критерия по формуле (98.1) для $r^*_{xy} = -0{,}55$:

$$T_{\text{набл}} = -0{,}55 \cdot \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{1-0{,}55^2}} \approx -5{,}015.$$

Поскольку $|T_{\text{набл}}| > 1{,}67$, делаем вывод: гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости $\alpha = 0{,}1$. Другими словами, можно довольно уверенно заявить, что коэффициент корреляции отличен от нуля.

98.3. Сравнение двух математических ожиданий

Пусть имеются две независимые выборки объёмов n и m из нормальных совокупностей с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Требуется по найденным выборочным средним $\bar{x}$ и $\bar{y}$ с уровнем значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве теоретических математических ожиданий:

$$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta).$$

Заметим, что в силу несмещённости оценок $\bar{x}$ и $\bar{y}$ следует, что нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \quad M(\bar{\xi}) = M(\bar{\zeta}).$$

Другими словами, требуется проверить значимо или нет отличаются между собой выборочные средние. В качестве критерия проверки гипотезы примем величину:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}. \tag{98.2}$$

Для изучения её свойств рассмотрим соответствующую случайную величину:

$$Z = \frac{\bar{\xi} - \bar{\zeta}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}, \quad \text{где} \quad \bar{\xi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n}, \ \bar{\zeta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \zeta_i}{m}\ .$$

Если верна гипотеза H_0, т.е. $\xi_i \sim N(a;\sigma_1)$, $\zeta_i \sim N(a;\sigma_2)$, то $Z \sim N(0;1)$.

Действительно, Z является линейной комбинацией нормально распределённых случайных величин и поэтому сама распределена нормально. Её математическое ожидание и дисперсия равны:

$$M(Z) = \big(M(\bar{\xi}) - M(\bar{\zeta})\big) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)/n - \sum_{i=1}^{m} M(\zeta_i)/m \right) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} =$$

$$= \left(\frac{na}{n} - \frac{ma}{m} \right) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} = 0,$$

$$D(Z) = \big(D(\bar{\xi}) + D(\bar{\zeta})\big) \Big/ \left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)/n^2 + \sum_{i=1}^{m} D(\zeta_i)/m^2\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) =$$
$$= \left(\frac{n\sigma_1^2}{n^2} + \frac{m\sigma_2^2}{m^2}\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) = 1.$$

Поэтому, в зависимости от конкурирующей гипотезы, решающее правило выглядит следующим образом:

- $$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta), \qquad H_1: \quad M(\xi) \neq M(\zeta).$$

  Критическая область двусторонняя с вероятностью $\alpha/2$ попадания в каждую половину в случае справедливости H_0. Из уравнения $F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha/2$, где $F_{\text{ст}}(Z)$ — функция распределения стандартного нормального закона, находим значение $Z_{\text{кр}}$, вычисляем по данным наблюдениям значение критерия $Z_{\text{набл}}$ и если $|Z_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$, то отвергаем гипотезу H_0 с уровнем значимости α. Если $|Z_{\text{набл}}| \leqslant Z_{\text{кр}}$, у нас нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 в пользу данной гипотезы H_1.

  На практике уравнение $F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha/2$ решают или с помощью ЭВМ (например, Excel), или по таблице приложения 2 и уравнения (98.3) т.к.

$$F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = \Phi(Z_{\text{кр}}) + 0{,}5 \implies F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff$$
$$\iff \Phi(Z_{\text{кр}}) + 0{,}5 = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff$$

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}; \tag{98.3}$$

- $$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta), \qquad H_2: \quad M(\xi) > M(\zeta).$$

  Критическая область правосторонняя с вероятностью α попадания в неё в случае справедливости H_0. Из уравнения $F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha$ находим значение $Z_{\text{кр}}$, вычисляем по формуле (98.2) $Z_{\text{набл}}$ и если $Z_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, то отвергаем гипотезу H_0 с уровнем значимости α. Если $Z_{\text{набл}} \leqslant Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0. На практике $Z_{\text{кр}}$ находят или с помощью ЭВМ или по таблице приложения 2, из уравнения

(98.4) т.к.

$$F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha \iff \Phi(Z_{\text{кр}}) + 0{,}5 = 1 - \alpha \iff$$

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha; \tag{98.4}$$

- $$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta), \qquad H_3: \quad M(\xi) < M(\zeta).$$

  Критическая область левосторонняя с вероятностью α попадания в неё в случае справедливости H_0. Из уравнения $F_{\text{ст}}(Z'_{\text{кр}}) = \alpha$ находим значение $Z'_{\text{кр}}$.

  В силу симметрии нормального распределения относительно нуля на практике находят значение $Z_{\text{кр}}$ из уравнения (98.4) и берут $Z'_{\text{кр}} = -Z_{\text{кр}}$. Если $Z_{\text{набл}} < -Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергают с уровнем значимости α, если $Z_{\text{набл}} \geqslant -Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

Замечание 98.1. *Если независимые выборки достаточно большие, указанный критерий можно применять для случая неизвестных дисперсий и не обязательно нормального распределения совокупностей. В этом случае вместо формулы (98.2) используют формулу (98.5) для вычисления критерия Крамера-Уэлча:*

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^{*2}}{n} + \dfrac{S_2^{*2}}{m}}}. \tag{98.5}$$

98.4. Сравнение математического ожидания с заданным значением

Пусть имеется выборка объёма n нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2. Требуется по найденной выборочной средней с уровнем значимости α проверить гипотезу H_0 о равенстве неизвестного математического ожидания $M(\xi)$ заданному значению a_0:

$$H_0: \quad M(\xi) = a_0.$$

В силу несмещённости оценки $\bar{x}$ заключаем, что нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \quad M(\bar{\xi}) = a_0.$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или нет отличается выборочное среднее от заданного значения. В качестве критерия выберем величину

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}. \tag{98.6}$$

Аналогичному тому, как это сделано в п. 98.3, можно доказать (сделайте это самостоятельно), что соответствующая случайная величина $U = \dfrac{(\bar{\xi} - a_0)}{\sqrt{n}/\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому в зависимости от конкурирующей гипотезы, решающее правило будет следующим:

- $$H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_1: \quad M(\xi) \neq a_0.$$

  Из уравнения (98.3) по таблице приложения 2 (или с помощью ЭВМ) определяем $Z_{\text{кр}}$, по формуле (98.6) находим $U_{\text{набл}}$ для имеющихся наблюдений.

  Если $|U_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α, если $|U_{\text{набл}}| \leqslant Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 в пользу данной гипотезы H_1.

- $$H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_2: \quad M(\xi) > a_0.$$

  Из уравнения (98.4) определяем $Z_{\text{кр}}$, по формуле (98.6) находим $U_{\text{набл}}$. Если $U_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α, если $U_{\text{набл}} \leqslant Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

- $$H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_3: \quad M(\xi) < a_0.$$

  Из уравнения (98.4) определяем $Z_{\text{кр}}$, по формуле (98.6) находим $U_{\text{набл}}$. Если $U_{\text{набл}} < -Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α, если $U_{\text{набл}} \geqslant -Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

Если в условиях п. 98.4 дисперсия неизвестна, в качестве критерия следует выбрать величину

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{S^*/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - a_0}{S^*} \cdot \sqrt{n}. \tag{98.7}$$

Можно доказать (мы не будем этого делать), что соответствующая случайная величина $T = (\bar{\xi} - a_0) \cdot \sqrt{n}/S^*$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Решающее правило в зависимости от конкурирующей гипотезы будет следующим:

- $$H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_1: \quad M(\xi) \neq a_0.$$

  Критическая область в данном случае будет двусторонней; критическая точка t_2 определяется по заданным α и $n-1$ по специальным таблицам (приложение 3) или с помощью функции, обратной к функции распределения Стьюдента, имеющейся, например, среди статистических функций Excel. По формуле (98.7) определяем $T_{\text{набл}}$.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_2$, гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α, если $|T_{\text{набл}}| \leqslant t_2$, то нет оснований отвергнуть H_0 в пользу данной гипотезы H_1.

При конкурирующих гипотезах $H_2: \ M(\xi) > a_0$ и $H_3: \ M(\xi) < a_0$ строят соответственно правостороннюю и левостороннюю критические области (см. [5]).

98.5. Сравнение вероятности с заданными значением

Пусть проведено n независимых испытаний Бернулли с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом. По результатам испытаний найдена относительная частота m/n, где m — число появлений события A в n испытаниях. Требуется по величине m/n с уровнем значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что неизвестная вероятность p равна заданному значению p_0:

$$H_0: \quad p = p_0.$$

Заметим, что в силу несмещённости оценки m/n для p нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \quad M\left(\frac{m}{n}\right) = p_0.$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или нет отличается частота от значений p_0. В качестве критерия проверки гипотезы примем величину

$$U = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}} \cdot \sqrt{n}, \qquad \text{где } q_0 = 1 - p_0. \tag{98.8}$$

Соответствующая случайная величина при справедливости гипотезы H_0 имеет стандартное нормальное распределение. При этом рассуждения аналогичны приведённым в п. 98.3 для случая известной дисперсии, с учётом того, что $M\left(\frac{m}{n}\right) = p_0$, $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{p_0 q_0}{n}$.

В зависимости от конкурирующей гипотезы решающее правило будет таким же, как в п. 98.4 для случая известной дисперсии, но значение $U_{\text{набл}}$, конечно, следует вычислять по формуле (98.8).

Практическое занятие 98. Метод наименьших квадратов

Пример 98.1. *Для данных, представленных в таблице 98.1, методом наименьших квадратов найти коэффициенты квадратичной зависимости* $y = ax^2 + bx + c$.

Таблица 98.1

Исходные данные примера 98.1					
i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
x_i	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y_i	*1,286*	*0,424*	*0,296*	*-0,698*	*-0,986*

Р е ш е н и е: Для получения системы (97.4) найдём коэффициенты $\overline{y}$, $\overline{x}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x^2y} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 y_i}{n}$, $\overline{x^3} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{n}$, $\overline{x^4} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{n}$. Результаты вычислений приведены в таблице 98.2, в последней строке которой указаны средние значения по столбцам.

Таблица 98.2

Решение примера 98.1							
i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	$x_i^2y_i$	x_i^3	x_i^4
1	-1,00000	1,28600	-1,28600	1,00000	1,28600	-1,00000	1,00000
2	0,00000	0,42400	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	1,00000	-0,29600	-0,29600	1,00000	-0,29600	1,00000	1,00000
4	2,00000	-0,69800	-1,39600	4,00000	-2,79200	8,00000	16,0000
5	3,00000	-0,98600	-2,95800	9,00000	-8,87400	27,00000	81,0000
	1,00000	-0,05400	-1,18720	3,00000	-2,13520	7,00000	19,8000

Таким образом, система (97.4) для данного примера принимает вид:

$$\begin{cases} 19,8a + 7b + 3c = -2,1352, \\ 7a + 3b + c = -1,1872, \\ 3a + b + 5c = -0{,}0540. \end{cases}$$

Решая эту систему (методом Крамера, Гаусса с помощью калькулятора или ЭВМ), находим: $a = 0{,}1739$; $b = -0{,}8175$; $c = 0{,}0484$. Таким образом, искомая зависимость имеет вид:

$$y = 0{,}1739x^2 - 0{,}8175x + 0{,}0484.$$

Посчитаем значение $f(x_i)$ и найдём значения суммы квадратов отклонения, чтобы оценить величину расхождения между данными значениями и полученными с помощью подобранной квадратичной функции. Результаты вычислений сведены в таблицу 98.3.

Таблица 98.3

Решение примера 98.1				
i	x_i	y_i	$f(x_i)$	Δ_i^2
1	-1,0000	1,2860	1,03975	0,06064
2	0,0000	0,4240	0,04839	0,14108
3	1,0000	-0,2960	-0,59527	0,08956
4	2,0000	-0,6980	-0,89123	0,03734
5	3,0000	-0,9860	-0,83949	0,02147
				0,35008

В последнем столбце таблицы указаны значения квадратов отклонений $\Delta_i^2 = (f(x_i) - y_i)^2$, а в последней строке этого столбца — их сумма, т.е. минимальное значение функции $\Phi: \Phi_{min} \approx 0{,}35$. Полученное значение даёт представление о накопленной ошибке при замене значений y_i на $f(x_i)$.

Ответ: $y = 0{,}1739x^2 - 0{,}8175x + 0{,}0484$.

Самостоятельная работа

Пример 98.2. *По приведённым в таблице 98.4 исходным данным найти методом наименьших квадратов линейную зависимость $y = ax + b$ (см. пример 97.1 лекции 97).*

Пример 98.3. *По приведённым в таблице 98.5 исходным данным найти методом наименьших квадратов квадратичную зависимость $y = ax^2 + bx + c$.*

Таблица 98.4

Исходные данные примера 98.2									
i		1	2	3	4	5	6	7	8
N\\x_i		-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	1	-6,68	-4,15	-1,83	0,72	3,02	5,63	7,90	10,47
	2	-7,30	-3,35	0,40	4,39	8,12	12,30	15,88	19,86
	3	-8,68	-6,30	-3,45	-1,32	1,46	3,69	6,43	8,82
	4	-3,235	-2,198	-1,814	-1,200	-0,759	-0,759	-0,217	0,265
	5	1,87	-1,30	-4,31	-7,69	-10,42	-13,93	-16,68	-19,97
	6	4,92	3,21	1,92	0,15	-1,16	-3,02	-4,31	-6,00
	7	-5,41	-4,20	-2,62	-1,51	0	1,11	2,39	3,87
	8	-7,96	-5,31	-3,25	-0,41	1,63	4,36	6,52	9,12
	9	-4,27	-3,53	-2,31	-1,82	-0,69	0,01	1,00	1,75
	10	0,80	-0,88	-2,28	-4,18	-5,41	-7,31	-8,61	-10,40
	11	-14,30	-10,31	-5,42	-1,51	3,02	7,04	11,75	15,80
	12	-11,47	-7,59	-4,32	-0,41	3,01	6,91	10,12	14,08
	13	1,42	-1,30	-3,59	-6,48	-8,71	-11,79	-13,98	-16,78
	14	2,80	3,81	4,43	5,63	6,17	7,49	8,03	9,10
	15	-4,32	-2,72	-0,80	0,71	2,62	4,05	6,01	7,58
	16	-11,10	-8,02	-4,17	-1,30	2,41	5,36	9,02	12,21
	17	-10,24	-6,91	-4,03	-0,48	2,31	5,82	8,61	12,02
	18	-5,74	-4,41	-3,72	-2,16	-1,42	0	0,78	2,10
	19	-6,05	-4,01	-2,32	0,02	1,62	3,92	5,53	7,67
	20	-1,00	1,22	3,03	5,49	7,55	7,72	11,53	13,70
	21	-3,61	-2,62	-2,01	0,89	-0,03	0,82	1,41	2,41
	22	5,40	3,81	1,88	0,38	-1,52	-2,98	-4,97	-6,50
	23	-8,40	-6,01	-3,29	-1,03	1,81	4,05	6,68	9,10
	24	1,76	2,71	3,32	4,44	5,07	6,12	6,74	7,71
	25	-6,04	-4,65	-3,02	-1,80	0,08	1,18	2,82	4,18
	26	-9,28	-6,81	-3,98	-1,60	1,21	3,52	6,41	8,92
	27	0,30	-0,63	-1,38	-2,61	-3,18	-4,27	-4,98	-6,02
	28	4,50	3,51	2,18	1,32	-0,10	-0,88	-2,20	-3,20
	29	7,12	5,52	3,48	1,95	0	-1,61	-3,60	-5,20
	30	-11,96	-9,87	-7,18	-5,25	-2,51	-0,62	2,02	4,14

Таблица 98.5

Исходные данные примера 98.3						
i		1	2	3	4	5
	N\\x_i	-1	0	1	2	3
y_i	1	6,20	2,92	1,29	2,13	4,60
	2	8,34	3,19	0,66	1,54	5,06
	3	6,43	2,56	1,97	3,72	8,23
	4	-1,06	-6,47	-8,32	-7,71	-3,46
	5	8,55	3,20	1,09	3,01	-8,15
	6	0,22	6,02	8,08	5,61	-0,50
	7	2,30	-2,62	-3,87	-2,38	2,90
	8	-4,11	1,42	3,17	1,85	-3,31
	9	1,17	-3,28	-3,02	0,84	9,29
	10	2,40	-3,32	-5,72	-5,55	-2,01
	11	5,71	0,28	-2,22	-1,09	2,91
	12	-0,20	3,69	4,38	2,98	-1,80
	13	1,05	5,36	6,02	4,01	-1,55
	14	-9,85	-3,17	0,71	0,66	-2,25
	15	-6,18	0,38	2,81	1,99	-3,06
	16	-3,71	3,21	5,52	4,26	-1,69
	17	9,58	4,98	0,81	-1,71	-3,78
	18	-2,25	2,99	5,01	4,79	1,35
	19	6,43	2,12	-1,48	-3,49	-4,93
	20	-2,28	3,81	7,29	9,03	8,20
	21	5,20	0	-3,68	-6,66	-8,02
	22	2,34	-3,71	-6,66	-7,67	-5,49
	23	7,84	0,89	-3,85	-5,55	-5,05
	24	2,62	-2,89	-4,16	-2,37	3,54
	25	-3,15	2,44	5,26	6,27	4,41
	26	8,26	2,58	-2,03	-4,90	-6,76
	27	-1,97	5,81	7,02	2,56	-8,52
	28	-5,42	-0,94	0,89	-0,73	-5,02
	29	-4,61	-0,71	0,52	-1,77	-6,59
	30	7,15	0,37	-4,44	-6,29	-6,13

Лекция 99. Критерии согласия

Геометрический метод определения вида распределения. Критерий Пирсона. Критерий χ^2

Определение 99.1. *Критериями согласия называют критерии для проверки гипотез о виде закона распределения случайной величины.*

99.1. Геометрический метод определения вида распределения

Рассмотрим сначала наглядный, но не строгий метод определения вида распределения. Предположим, что теоретическая функция распределения $F(x)$ зависит от двух неизвестных параметров α и β; чтобы подчеркнуть это, обозначим её $F(x,\alpha,\beta)$: $F(x) = F(x,\alpha,\beta)$. Общий вид функции $y = F(x,\alpha,\beta)$ считается известным, необходимо оценить значения неизвестных параметров α и β. Основная идея графического метода состоит в выборе такой замены координат $u = u(x), v = v(x)$, чтобы график функции распределения $y = F(x,\alpha,\beta)$ в новых координатах $(u; v)$ стал прямой линией $V = k \cdot u + b$ с коэффициентами k и b, зависящими от неизвестных параметров α и β: $k = \varphi(\alpha,\beta)$, $b = \psi(\alpha,\beta)$. Другими словами, уравнение функции распределения $y = F(x,\alpha,\beta)$ в координатах $(u; v)$ должно принять вид:

$$v = k \cdot v + b \quad \text{или} \quad v = \varphi(\alpha,\beta) \cdot u + \psi(\alpha,\beta). \tag{99.1}$$

Поскольку эмпирическая функция распределения $y = F_Э(x)$ при достаточно большом объёме статистики лежит вблизи от теоретической функции распределения $y = F(x,\alpha,\beta)$, то после замены переменных график эмпирической функции распределения в координатах $(u; v)$ должен лежать вблизи прямой (99.1). Новая система координат $(u; v)$ с нанесёнными соответствующими значениями $(x; y)$ называются *вероятностной бумагой* . Построив в координатах $(u; v)$ график эмпирической функции распределения, проводят прямую так, чтобы по обе стороны от неё находилось примерно одинаковое количество «ступенек» графика функции $y = F_Э(x)$; затем определяют k-величину тангенса угла, образованного этой прямой с осью Ou, и b-координату пересечения с осью Ov. Приравняв полученные величины к их теоретическим значениям $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\psi(\alpha,\beta)$, находят оценки неизвестных параметров α и β из системы уравнений:

$$\begin{cases} k = \varphi(\alpha, \beta), \\ b = \psi(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Если неизвестный параметр один, для нахождения оценки достаточно одного уравнения.

Для нормального закона распределения

$$F(x, m, \sigma) = \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big) + 0{,}5,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ — функция Лапласа, используем следующую замену координат:

$$u = x, \quad v = \Phi^{-1}(y - 0{,}5), \tag{99.2}$$

где $x = \Phi^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции Лапласа. В новых координатах $(u; v)$ уравнение функции распределения $y = \Phi(\frac{x-m}{\sigma}) + 0{,}5$ примет следующий вид:

$$v = \Phi^{-1}(y - 0{,}5) = \Phi^{-1}\bigg(\Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big) + 0{,}5 - 0{,}5\bigg) =$$
$$= \Phi^{-1}\bigg(\Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)\bigg) = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{u-m}{\sigma}.$$

Получившееся уравнение:

$$v = \frac{u-m}{\sigma} \tag{99.3}$$

есть уравнение прямой линии вида (99.1), где

$$\varphi(m; \sigma) = \frac{1}{\sigma}, \quad \psi(m; \sigma) = -\frac{m}{\sigma}.$$

Оценив по графику эмпирической функции распределения (99.3) величины k (угловой коэффициент) и b (пересечение с осью Ov), значения m и b получим из системы:

$$\begin{cases} k &= \dfrac{1}{\sigma}, \\ b &= -\dfrac{m}{\sigma}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \sigma &= \dfrac{1}{k}, \\ m &= -\dfrac{b}{k}. \end{cases} \tag{99.4}$$

Для удобства построения графика эмпирической функции распределения (99.3) можно воспользоваться обычной миллиметровой бумагой или специальной «нормальной вероятностной бумагой» с нелинейным масштабом по вертикальной оси, где около значений $v = \Phi^{-1}(y - 0{,}5)$ отмечаются соответствующие значения y.

Пример 99.1. *На рис. 29 для приведённых в табл. 99.1 — 99.3 данных в координатах (u, v) (формулы (99.2)) изображены графики эмпирических функций распределения (ступенчатые функции I — III) и аппроксимирующие их графики теоретических распределений (непрерывные линии). Для наглядности значения $F_Э(x)$ в табл. 99.2 приведены в виде простых дробей, в табл. 99.1, 99.3 эти же значения приведены в виде десятичных дробей. Параметры m и σ оцениваются с помощью соотношения (99.4) исходя из величин k и b, которые определяются по графикам в координатах (u, v) с учётом масштаба по осям Ou и Ov.*

Для распределения (I): $k = 1,0; \quad b = -1,8 \Longleftrightarrow m = 1,8;$ $\sigma = 1,0;$

для распределения (II): $k = 1,4; \quad b = -5,7 \Longleftrightarrow m = 4,1;$ $\sigma = 0{,}71;$

график распределения (III) имеет заметную искривлённость, что говорит о том, что теоретическая функция распределения (III) не является нормальной.

Для экспоненциального распределения:

$$y = F(x, \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geqslant 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

используют следующую замену координат:

$$u = x, \qquad v = -\ln(1 - y) \tag{99.5}$$

В новых координатах уравнение теоретической функции распределения $y = F(x, \lambda)$ примет следующий вид:

$$v = -\ln(1 - y) = -\ln\Big(1 - F(x, \lambda)\Big) = -\ln\Big(1 - (1 - e^{-\lambda x})\Big) =$$
$$= -\ln(e^{-\lambda x}) = \lambda x = \lambda u.$$

Получившееся уравнение $v = \lambda \cdot u$ и есть уравнение прямой линии вида (99.1), где $k = \lambda, \quad b = 0$; неизвестный параметр λ равен тангенсу угла наклона аппроксимирующей прямой.

Вариационные ряды наблюдений

	Таблица 99.1 (I)		Таблица 99.2 (II)		Таблица 99.3 (III)	
i	x_i	$y = F_э(x)$	x_i	$y = F_э(x)$	x_i	$y = F_э(x)$
1	0,48	0,07	2,98	1/15	1,68	0,07
2	0,55	0,13	3,03	2/15	1,83	0,13
3	0,76	0,20	3,17	3/15	2,29	0,20
4	0,83	0,27	3,22	4/15	2,46	0,27
5	1,34	0,33	3,57	5/15	4,02	0,33
6	1,39	0,40	3,59	6/15	4,19	0,40
7	1,39	0,47	3,95	7/15	6,54	0,47
8	1,94	0,53	3,96	8/15	6,64	0,53
9	2,05	0,60	4,03	9/15	7,17	0,60
10	2,24	0,67	4,16	10/15	8,30	0,67
11	2,52	0,73	4,35	11/15	10,08	0,73
12	2,71	0,80	4,47	12/15	11,46	0,80
13	2,81	0,87	4,54	13/15	12,21	0,87
14	3,44	0,93	4,96	14/15	17,78	0,93
15	4,52	1,00	5,01	1	18,60	1,00

Пример 99.2. *На рис. 30 для приведённых в табл. 99.3 данных изображены графики эмпирической функции распределения и аппроксимирующей прямой в координатах* $(u; v)$ *(формулы (99.5)). Из графика видно:* $k = 0{,}12 \iff \lambda = 0{,}12$. *Для удобства построения графиков на вертикальной оси* Ov *нанесены соответствующие* v *значения* y *по формуле:* $v = -\ln(1 - y)$.

99.2. Критерий Пирсона проверки гипотезы о виде закона распределения

Пусть имеется случайная выборка, состоящая из n элементов. Требуется найти закон распределения изучаемой случайной величины ξ (или, как условились говорить, генеральной совокупности), определить его параметры и оценить согласие выборки с принятым законом распределения.

На основании статистического материала проверяется гипотеза H_0, состоящая в том, что случайная величина ξ подчиняется некоторому

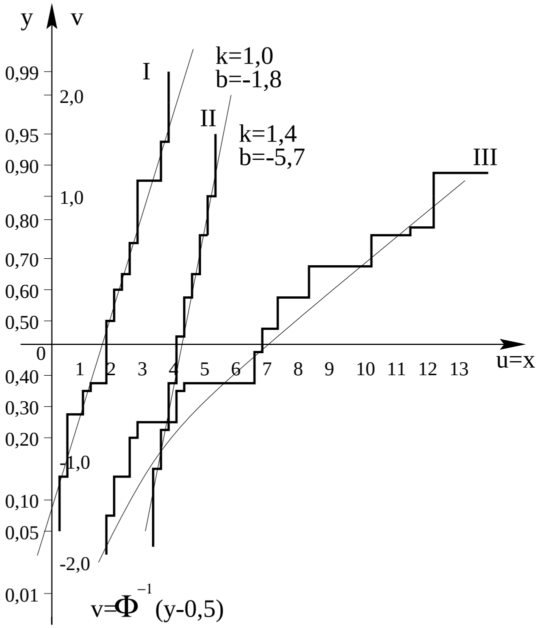


Рис. 29. *Вероятностная бумага для нормального распределения*

закону распределения. Для того чтобы принять или отвергнуть гипотезу H_0, рассматривается величина U — степень расхождения теоретического и статистического распределения. За U принимают сумму квадратов (с некоторыми коэффициентами) отклонений теоретических вероятностей P_i от соответствующих частот P_i^* (критерий χ^2).

Схема расчётов с помощью критерия Пирсона (критерия χ^2) следующая.

(1) На основании выборки выбираем в качестве предполагаемого какой–то закон распределения изучаемой величины (например, с помощью вероятностной бумаги) и оцениваем его параметры, как описано в лекциях 96 и 97.

(2) Всё множество наблюдений разбиваем на s интервалов вида $(a_{j-1}; a_j]$ и подсчитываем эмпирические частоты — количество

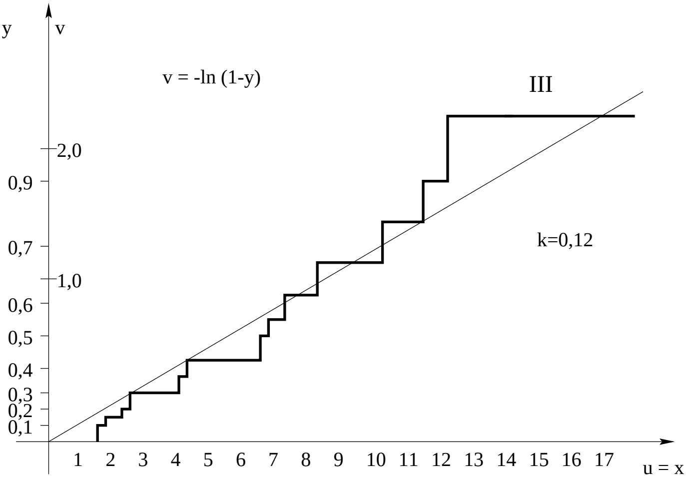


Рис. 30. *Вероятностная бумага для экспоненциального распределения*

наблюдений m_j, попавших в j-ый интервал (см. п. 96.3). Относительная частота наблюдений, попавших в j-ый интервал, равна $P_j^* = \dfrac{m_j}{n}$, $(m_1 + \ldots + m_s = n)$, сумма всех частот, очевидно, равна единице.

(3) Определяем теоретические частоты m'_j для j-го интервала $(a_{j-1}; a_j]$:

$$m'_j = \Big(F(a_j) - F(a_{j-1})\Big) \cdot n,$$

где $F(x)$ – теоретическая функция распределения, найденная на этапе 1.

(4) Вычисляем критерий $\chi^2_{\text{набл}}$ (критерий Пирсона):

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{S} \frac{(m_j - m'_j)^2}{m'_j}. \tag{99.6}$$

Из этого выражения видно, что $\chi^2_{\text{набл}}$ равно нулю лишь при совпадении всех соответствующих эмпирических и теоретических частот: $m_i = m'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. В противном случае $\chi^2_{\text{набл}}$ отлично от нуля и тем больше, чем больше расхождение между частотами. Величина χ^2, определяемая равенством (99.6), является случайной, и (при больших n) имеет χ^2 — распределение с k степенями свободы (принимается без доказательства).

(5) Определяем число степеней свободы k случайной величины χ^2:

$$k = s - 1 - r, \tag{99.7}$$

где r — число параметров закона распределения (для нормального закона распределения $r = 2$), s — число интервалов.

(6) По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k по таблице критических точек распределения χ^2 (таблица приложения 4) находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о принятом (нормальном) законе распределения. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ — гипотезу отвергают с уровнем значимости α.

Пример 99.3. *С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении выборки, представленной в таблице 99.2 примера 99.1.*

Решение: Разобьём всё множество значений выборки табл. 99.2 на 6 интервалов, границы которых занесены во второй столбец табл. 99.4.

Таблица 99.4

Решение примера 99.2				
j	a_j	m_j	$F(a_j)$	m'_j
0	2,5	1	0,0155	0,969
1	3,0	3	0,0800	2,659
2	3,5	4	0,2573	4,246
3	4,0	4	0,5404	3,948
4	4,5	2	0,8036	2,137
5	5,0	1	0,9460	0,673
6	5,5		0,9909	

В третий столбец табл. 99.4 заносим количество наблюдений m_j, попавших в j-ый интервал. По формулам (96.2), (96.10), (96.5) определяем параметры нормального распределения $\bar{x}$ и S^* для выборки из табл. 99.2:

$$\bar{x} = 3,933; \quad S^* = 0,664$$

и находим значения теоретической функции распределения $F(a_j)$. В данном примере $F(a_j) = \Phi\left(\dfrac{a_j - \bar{x}}{S^*}\right) + 0{,}5$. В пятый столбец заносим теоретические частоты m'_j, вычисляемые, как указано выше.

По формуле (99.6) находим значение $\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}228$. По таблице приложения 4 для $\alpha = 0{,}05$ и $k = 6 - 1 - 2 = 3$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 3) = 7{,}8$. Поскольку $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 3)$, нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении выборки из таблицы 99.2. Заметим, что этот результат хорошо согласуется с данными вероятностной бумаги (график I на рис. 29).

Покажем использование критерия Пирсона с применением программ в рамках пакетов Mathcad и Maxima.

Пример 99.4. *Для исследования вида некоторой зависимости произведено 100 испытаний. Результаты полученных испытаний разбили на 9 диапазонов, границы которых записаны в массив a:*

MathCad-программа:

$a := (\ 69.2\ \ 69.8\ \ 70.4\ \ 71.0\ \ 71.6\ \ 72.2\ \ 72.8\ \ 73.4\ \ 74.0\ \ 74.6\ )^T$

В массиве m представлено количество наблюдений, попавших в соответствующий диапазон.

$m := (\ 1\ \ 4\ \ 11\ \ 21\ \ 27\ \ 22\ \ 10\ \ 3\ \ 1\ )^T$

С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении выборки с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Р е ш е н и е:

$ORIGIN := 1 \quad s := 9 \quad j := 1 \ldots s \quad n := \sum\limits_j m_j \quad n = 100$

/* *Найдем координаты середин интервалов (массив U)*:*/

$$U_j := \frac{a_j + a_{j+1}}{2}$$

/* *Найдем выборочную среднюю Mx, исправленную выборочную дисперсию S2*: */

$$Mx := \frac{1}{n}\cdot\sum_j m_j\cdot U_j \;\; Mx = 71.876 \;\; S2 = \frac{n}{n-1}\cdot\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_j m_j\cdot(U_j)^2 - Mx^2\right]$$

/* *и исправленное среднее квадратическое отклонение S*: */

$S2 = 0.8067 \qquad S := \sqrt{S2} \qquad S = 0.8982.$

/* *Функцию Лапласа**/

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

/ Получаем, используя встроенную функцию нормального распределения $pnorm(x, Mx, \sigma)$, при значении математического ожидания $Mx = 0$ и среднеквадратическом отклонении $\sigma = 1$ */*

$\Phi := pnorm(x, 0, 1) - 0.5$

/ Получаем теоретические частоты $m1_j$ для каждого интервала. При этом в первый интервал включаем промежуток от $-\infty$ до X_2, а в последний интервал — от X_s до $+\infty$ */*

$$P_j := \Phi\left(\frac{a_{j+1} - Mx}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a_j - Mx}{S}\right)$$

$$P_1 := \Phi\left(\frac{a_2 - Mx}{S}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - Mx}{S}\right)$$

$$P_s := \Phi\left(\frac{\infty - Mx}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a_s - Mx}{S}\right) \quad m1_j := n \cdot P_j \quad \sum_j m1_j = 100$$

$P^T = (0.0104\ 0.0398\ 0.1145\ 0.2146\ 0.2615\ 0.2074\ 0.10693\ 0.0359\ 0.0090)$
$m1^T = (1.041\ 3.9748\ 11.454\ 21.461\ 26.154\ 20.7354\ 10.6927\ 3.5848\ 0.9019)$

/ Определяем число степеней свободы k для данной зависимости*/*

$k := s - 1 - 2 \qquad \alpha := 0.05$

/ Найдем теперь значение χ^2 наблюдаемое ($\chi^2_{\text{набл}}$).*/*

$$\chi2\text{набл} := \sum_j \frac{(m_j - m1_j)^2}{m1_j} \qquad \chi2\text{набл} = 0.2851$$

/ Используя встроенную функцию $qchisq$ для χ^2 распределения, получаем критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}$: */*

$$\chi2\text{кр} := qchisq(1 - \alpha, k) \qquad \chi2\text{кр} = 12.5916$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет основания отвергать поставленную гипотезу H_0 с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

На практике чаще всего выборка большого объёма записывается в текстовый файл. Затем данные считываются программой обработки, и полученная выборка анализируется. Поэтому мы также разобьем задачу на две подзадачи. В первой сгенерируем выборку, а во второй её обработаем. Для генерации выборки используем команду random_normal(M, σ, n), возвращающую список из n псевдослучайных чисел, близких к нормальному закону распределения с математическим ожиданием M и среднеквадратическим отклонением σ. Полученный список $x1$ запишем в файл pirson.txt, находящийся на диске D в папке mymaxima.

/* Первая программа, генерирующая выборку объёма n=100 и записывающая её в текстовый файл "D:/mymaxima/pirson.txt").*/

```
(%i1) n:100$   fpprintprec:3$
(%i3) load(distrib)$
(%i4) x1:random_normal(120, 25, n)$
(%i5) write_data(x1, "D:/mymaxima/pirson.txt")$
```

ПРИМЕР 99.5. *Для исследования вида некоторой зависимости произведено 100 испытаний, результаты которых записаны в текстовый файл "D:/mymaxima/pirson.txt"). С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении полученной выборки.*

Maxima-программа:

```
(%i1) fpprintprec:3$ n:100$ numer:true$
(%i4) load(distrib)$
```

/* *Считываем выборку в список x1.*/

```
(%i5) x1:read_list("D:/mymaxima/pirson.txt");
```

/**Сортируем список x1 в порядке возрастания значений.*/

```
(%i6)  x2:sort(x1);
```

/* *Разбиваем выборку на s интервалов постоянной длины delta.*/

```
(%i7) s:9; delta:(x2[n] -x2[1])/s;
```

/**Координаты границ элементов.*/

```
(%i9) a:makelist(x2[1]+(i-1)*delta, i, 1, s+1);
(%o9) [66.9, 79.6, 92.3, 105., 118., 130., 143., 156.,
        168., 181.]
```

/* *Координаты середин элементов.*/

```
(%i10)  U:makelist((a[j]+a[j+1])/2, j, 1, s);
(%o10) [73.2, 85.9, 98.6, 111., 124., 137., 149., 162., 175.]
```

/* *Определение частоты наблюдений по интервалам.* */

```
(%i11) m:makelist(0, i, 1, s); for j:1 while j<=n do(
   k:fix((x2[j] -x2[1])/delta)+1,if k>s then k:s,m[k]:m[k]+1);
```

/* *Вывод значений эмпирической частоты наблюдений по интервалам.* */

```
(i13) m;
(%o13) [3, 9, 23, 11, 19, 16, 11, 5, 3]
```

/* *Контроль объёма выборки.* */

```
(%i14) sum(m[i], i, 1, s);
(%o14) 100
```

/* *Строим график.* */

```
(%i15) wxplot2d([['discrete,makelist([U[j], m[j]], j,1, s)]],
      [style,[lines, 3, 5]], [gnuplot_preamble,"set grid"],
      [ylabel,""])$
(%i16) Mx:sum(m[j]*U[j], j, 1, s)/n;
(%o16) 117.
(%i17) S2:n/(n-1)*(sum(m[j]*U[j]^2, j, 1, s)/n-Mx^2);
(%o17) 648.
(%i18) S:sqrt(S2);
(%o18) 25.5
(%i19) F(x):=cdf_normal (x, 0, 1) -0.5;
(%o19) F(x):=cdf_normal(x, 0, 1) -0.5
```

/* *Теоретические вероятности.* */

```
(%i20) P:makelist(F((a[j+1] -Mx)/S) -F((a[j] -Mx)/S),j,1,s);
         P[1]:F((a[2] -Mx)/S)+0.5;
        P[s]:0.5-F((a[s] -Mx)/S);
(%o20) [0.006, 0.03, 0.09, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.06, 0.02]
(%o21) 0.007
(%o22) 0.02
```

/* *Теоретические частоты.* */

```
(%i23) m1:makelist(n*P[j], j, 1, s);
(%o23) [0.7, 2.81, 8.55, 17.6, 24.4, 22.9, 14.6, 6.25, 2.22]
```

/* *Контроль объёма выборки для теоретических частот.* */

```
(%i24) sum(m1[j], j, 1, s);
(%o24) 100
```

/* *Вычисление* $\chi^2_{\text{набл}}$. */

```
(%i25) x2nabl:sum((m[j] -m1[j])^2/m1[j], j, 1, s);
(%o25) 5.69
```

Так как $\chi^2_{\text{набл}}$ =5,69 наблюдаемое меньше критического равного, $\chi^2_{\text{кр}}$=12,6, то, нет основания отвергать выдвинутую гипотезу о нормальном распределении исследуемой выборки объёма $n = 100$.

Ответ: На базе полученной выборки делаем вывод, что исследуемая непрерывная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения.

Самостоятельная работа

1. Для указанного преподавателем номера варианта n_v сгенерировать выборку объёма $n = 100$ псевдослучайных значений непрерывной случайной величины xi с параметрами $M(\xi) = 2n_v + 120$ и $\sigma(\xi) = 15 + n_v$. Полученную выборку записать в текстовый файл.

2. Считать выборку, полученную в первом задании. Разбить совокупность элементов выборки на s интервалов и доказать или опровергнуть гипотезу о нормальном распределении непрерывной случайной величины с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$. В качестве значения для параметра s выбрать целую часть числа $8 + n_v/5$.

Практическое занятие 99. Обработка простой статистической совокупности

Пусть в результате опытов получены n значений двумерной случайной величины (ξ, ζ), не подвергнутые из-за небольшого объёма выборки предварительной группировке:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).$$

Для характеристики такой простой статистической совокупности чаще всего используют оценки математических ожиданий и дисперсии компонент ξ и ζ, выборочного коэффициента корреляции и уравнения регрессии. Средние выборочные определяются как

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n, \qquad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n.$$

Выборочные дисперсии

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/n, \quad S_y^2 = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \bar{y})^2/n.$$

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_{xy}^* = \frac{(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})}{S_x S_y}.$$

Выборочное уравнение прямой регрессии ζ на ξ имеет вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy}^* \frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}),$$

где $\bar{y}_x$ – среднее арифметическое значений ζ при фиксированном значении $\xi = x$.

Аналогично определяется регрессия ξ на ζ:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy}^* \frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y}).$$

Найдем все эти характеристики с помощью программы на Mathcad и Maxima. Во избежание путаницы с переменными в уравнениях регрессии обозначим наблюдения большими буквами X и Y. Результат представлен на рис. 31.

MathCad-программа:

$ORIGIN := 1$

Объём выборки: $n := 10$

/**Наблюдаемые значения случайных величин:**/

$X := (\ 1.42\ \ 1.83\ \ 1.59\ \ 1.90\ \ 1.64\ \ 1.36\ \ 1.24\ \ 1.60\ \ 1.82\ \ 1.57\ )^T$

$Y := (\ 3.12\ \ 3.42\ \ 2.94\ \ 3.63\ \ 3.18\ \ 2.90\ \ 3.71\ \ 3.15\ \ 3.42\ \ 3.33\ )^T$

/**Найдем выборочные средние:** */

$i := 1 \ldots n$

$$Mx := \frac{1}{n} \cdot \sum_i X_i \qquad Mx = 1.597 \qquad My := \frac{1}{n} \cdot \sum_i Y_i \qquad My = 3.28$$

/**Найдем выборочные средние квадратические отклонения:** */

$$Sx2 := \frac{1}{n} \sum_i (X_i - Mx)^2 \ Sy2 := \frac{1}{n} \sum_i (Y_i - My)^2 \ Sx2 = 0.041 \ Sy2 = 0.066$$

$$Sx := \sqrt{Sx2} \qquad Sy := \sqrt{Sy2} \qquad Sx = 0.203 \qquad Sy = 0.257$$

/* *Найдем выборочный коэффициент корреляции*: */

$$xy := \frac{1}{n} \cdot \sum_i X_i \cdot Y_i \qquad R := \frac{xy - MxMy}{Sx \cdot Sy} \qquad R = 0.251$$

/* *Найдем выборочные уравнения прямых регрессии и построим их графики*: */

$$Yx(x) := \frac{R \cdot Sy}{Sx} \cdot (x - Mx) + My \qquad Xy(y) := \frac{R \cdot Sx}{Sy} \cdot (y - My) + Mx$$

Maxima-программа:

```
(%i1) load (descriptive)$ fpprintprec:5$ numer:true$ n:10$
(%i5) X:[1.42,1.83,1.59,1.9,1.64,1.36,1.24,1.6,1.82,1.57];
(%i6) Y:[3.12,3.42,2.94,3.63,3.18,2.9,3.71,3.15,3.42,3.33];
```

/**Вычислить средние выборочные значения случайных величин.**/

```
(%i7) Mx:mean(X); My:mean(Y);
(%o7) 1.597 ; (%o8) 3.28
```

/* *Вычислить выборочные средние квадратические значения случайных величин.**/

```
(%i9) Sx:std(X); Sy:std(Y);
(%o9) 0.203; (%o10) 0.257
(%i11) xy:sum(X[i]*Y[i], i, 1, n)/n;
(%o11) 5.2513
```

/**Вычислить выборочный коэффициент корреляции случайных величин.**/

```
(%i12) R:(xy-Mx*My)/(Sx*Sy);
(%o12) 0.251
```

/* *Задать уравнения выборочных уравнений прямой регрессии случайных величин.**/

```
(%i13) Yx(x):=R*Sy/Sx*(x-Mx)+My;
(%i14) Xy(x):=R*Sx/Sy*(x-My)+Mx;
```

/* *Нарисовать графики выборочных прямых регрессии случайных величин.**/

```
(%i15) wxplot2d([Yx, Xy], [x, -20, 20], [y, -5, 5], [style,
 [lines,3,5], [lines,2,5]],[gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

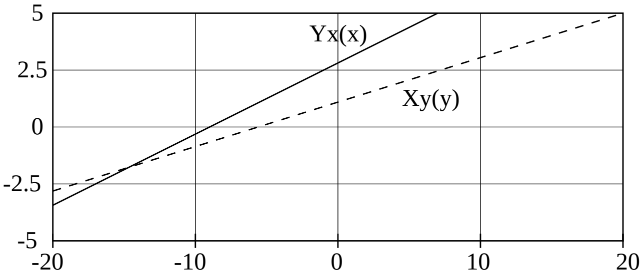


Рис. 31. *Прямые регрессии к практическому заданию*

Самостоятельная работа

В таблице 99.1 приведены исходные данные для тридцати вариантов. Требуется найти оценки основных числовых характеристик: математических ожиданий, дисперсий, коэффициента корреляции и эмпирические линии регрессии ζ на ξ и ξ на ζ.

Таблица 99.1

N	x_i y_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_i	1,42	1,83	1,59	1,90	1,64	1,36	1,24	1,60	1,82	1,57
	y_i	3,12	3,42	2,94	3,63	3,18	2,90	3,71	3,15	3,42	3,33
2	x_i	6,21	5,18	4,13	3,52	3,02	2,64	2,03	1,28	1,93	0,44
	y_i	6,42	7,77	6,18	5,43	5,67	4,64	3,91	2,13	1,43	0,35
3	x_i	6,13	5,22	4,45	3,43	3,18	2,73	2,08	1,36	0,92	0,37
	y_i	0,12	3,42	5,12	6,16	8,33	7,34	9,93	10,24	12,30	13,46
4	x_i	1,80	1,64	1,90	1,84	1,80	1,82	1,68	1,85	1,82	1,62
	y_i	72	74	83	79	90	83	74	85	79	63
5	x_i	1,00	1,08	1,22	1,34	1,39	1,48	1,62	1,73	1,82	1,90
	y_i	2,01	2,53	2,91	3,67	3,96	4,44	4,87	5,61	6,08	6,71
6	x_i	-2,00	-1,70	-1,57	-1,32	-1,08	-0,92	-0,63	-0,31	-0,10	0,12
	y_i	12,41	10,17	9,01	6,14	3,77	1,81	-0,18	-1,88	-3,02	-4,11
7	x_i	5,16	6,38	7,77	8,34	9,03	10,83	12,44	15,20	18,32	25,12
	y_i	31,72	25,43	26,48	28,13	20,74	18,49	12,30	8,83	10,55	7,18
8	x_i	1,02	1,27	1,41	1,58	1,83	1,99	2,22	2,44	2,59	2,83
	y_i	5,04	5,47	4,48	4,82	4,36	3,74	2,41	2,64	1,93	1,36
9	x_i	3,18	3,42	3,81	4,18	6,10	6,53	10,12	12,30	18,53	20,00
	y_i	2,39	4,03	4,16	5,63	4,83	5,78	8,34	9,41	12,18	14,36
10	x_i	0,25	0,32	0,40	0,48	0,74	0,92	1,12	1,44	1,62	2,10
	y_i	3,12	2,42	2,22	1,08	2,57	2,98	3,32	2,64	1,42	3,78
11	x_i	1,34	1,79	1,63	1,88	1,66	1,38	1,36	1,63	1,84	1,60
	y_i	2,99	3,33	2,90	3,60	3,21	2,50	3,83	3,16	3,52	3,41
12	x_i	5,43	5,32	4,00	3,96	3,18	2,73	2,13	1,36	0,82	0,40
	y_i	6,18	7,24	6,22	5,42	6,03	4,54	4,44	2,10	1,40	0,30
13	x_i	6,43	5,18	4,23	3,45	3,12	2,84	2,11	1,48	0,93	0,27
	y_i	0,83	2,13	5,48	6,18	10,32	8,36	9,90	11,43	12,75	15,28
14	x_i	0,83	0,94	0,93	0,90	0,60	0,73	0,82	0,88	1,00	0,87
	y_i	4,21	4,48	2,12	4,30	4,83	3,53	4,13	4,00	5,00	3,12
15	x_i	21,2	26,0	28,3	31,0	35,2	36,3	38,2	40,8	42,3	44,5
	y_i	63,0	68,3	70,1	69,3	70,14	72,0	75,4	80,3	85,1	90,3
16	x_i	2,13	4,18	7,33	10,48	11,18	14,73	15,32	17,32	19,60	22,40
	y_i	3,06	7,23	10,45	7,68	17,88	20,30	25,08	27,12	25,93	31,35

Таблица 99.1

N	x_i y_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	x_i	0,24	0,38	0,45	0,56	0,60	0,63	0,68	0,72	0,74	0,75
	y_i	2,63	2,41	2,10	1,90	1,77	1,78	1,60	1,49	1,52	1,40
18	x_i	1,02	2,10	2,92	4,08	4,98	6,00	7,14	8,22	9,09	9,90
	y_i	2,12	3,37	4,23	4,25	6,18	7,16	8,20	8,02	10,13	11,43
19	x_i	1,43	3,01	3,30	3,41	4,20	5,02	5,89	6,14	7,22	1,90
	y_i	2,57	1,79	2,64	3,85	2,36	3,60	3,58	4,55	4,63	4,57
20	x_i	1,50	1,62	2,78	3,10	4,05	4,15	4,63	5,35	5,90	6,88
	y_i	4,74	3,51	2,87	2,95	2,90	2,60	0,96	2,88	0,63	0,75
21	x_i	0,97	1,83	2,23	3,10	2,63	4,80	5,20	5,89	6,02	7,00
	y_i	2,03	2,00	3,17	2,75	4,55	3,41	4,96	2,94	4,80	6,50
22	x_i	0,90	1,32	2,09	2,42	3,20	3,86	4,17	5,50	0,75	8,08
	y_i	6,13	4,30	5,21	3,00	4,34	3,16	2,10	2,92	1,85	1,82
23	x_i	11,00	11,22	23,64	24,73	32,75	38,10	44,03	48,11	53,46	56,19
	y_i	1,12	2,43	1,48	3,81	3,92	5,93	4,50	6,20	7,56	6,23
24	x_i	9,21	11,80	21,13	22,48	24,50	34,49	33,18	44,12	53,17	57,18
	y_i	8,53	2,64	7,50	6,08	4,42	4,10	6,25	3,06	4,36	2,54
25	x_i	44,50	53,71	57,16	61,00	62,37	77,30	78,18	82,11	91,73	98,10
	y_i	3,26	4,18	2,41	7,18	4,36	7,15	4,67	8,36	6,15	6,08
26	x_i	13,43	20,08	27,19	29,36	37,10	39,12	40,08	44,38	50,76	60,00
	y_i	7,54	5,46	7,05	5,63	7,64	5,46	3,75	4,52	4,83	3,92
27	x_i	1,23	2,17	3,03	4,23	4,55	5,60	7,23	5,98	9,13	6,81
	y_i	3,58	2,11	4,67	6,18	4,03	7,83	4,96	8,54	8,77	6,65
28	x_i	0,103	0,235	0,243	0,330	0,405	0,483	0,475	0,550	0,610	0,863
	y_i	1,67	1,08	2,85	4,87	2,77	4,06	5,83	3,48	5,43	6,96
29	x_i	1,02	1,25	3,27	3,68	5,02	5,12	6,18	6,53	7,73	7,95
	y_i	6,16	4,30	5,42	3,85	2,66	4,53	3,17	0,82	1,85	3,83
30	x_i	0,10	1,26	2,44	2,95	4,62	5,36	6,08	0,50	7,00	8,63
	y_i	1,05	3,08	1,73	3,86	3,95	6,12	5,55	6,88	5,25	6,94

Лекция 100. Дисперсионный анализ

Общая постановка задачи. Сравнение двух дисперсий. Однофакторный дисперсионный анализ

100.1. Общая постановка задачи

Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \ \ldots, \xi_k$ имеют нормальное распределение с одинаковой дисперсией. Математические ожидания и дисперсия случайных величин неизвестны. Имеются наблюдения над каждой из этих случайных величин. Требуется при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0 : \ M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots = M(\xi_k)$ о равенстве всех математических ожиданий при альтернативной гипотезе H_1 о том, что не все эти математические ожидания равны.

Другими словами, требуется установить, значимо ли отличаются выборочные средние. Следует сразу отвергнуть как неэффективную идею попарного сравнения математических ожиданий с помощью критерия, изложенного в лекции 98 (п. 98.3), т.к. с возрастанием числа k сравниваемых средних возрастает и наибольшее различие между ними (накапливается ошибка). Поэтому для проверки нулевой гипотезы используют метод, основанный на сравнении дисперсий, что и объясняет его название.

На практике дисперсионный анализ применяют при проверке нескольких выборок на однородность: если все выборки имеют одинаковое нормальное распределение с одинаковой дисперсией и будет установлено равенство их математических ожиданий, все их можно считать наблюдениями над одной случайной величиной и объединить.

Другая область применения дисперсионного анализа — проверка значимости влияния некоторого фактора на наблюдаемую случайную величину ξ. Пусть некоторый фактор F (например — название изучаемого студентами предмета) имеет k уровней $F_1, F_2, \ \ldots, F_k$ (студенты изучают k предметов). Случайная величина ξ (успеваемость студентов) наблюдается при каждом значении фактора F (имеются данные успеваемости студентов по каждому предмету). На основании этих данных требуется установить, значимо ли влияет фактор F на среднее значение случайной величины ξ или разница наблюдений обусловлена случайными колебаниями (одинакова ли успеваемость по различным предметам). Если установлено, что влияние фактора существенно, дальнейшее исследование может проводиться в направлении выявления наиболее влияющего уровня фактора F путём попарного сравнения выборок, как описано в п. 98.3 (выявление предмета с самой низкой успеваемостью).

В изложенной постановке задача называется однофакторным дисперсионным анализом.

Иногда приходится исследовать влияние нескольких факторов на случайную величину — многофакторный дисперсионный анализ. Например — влияние предмета, преподавателя и года набора студентов на успеваемость.

Прежде чем перейти к изложению однофакторного дисперсионного анализа, рассмотрим ещё один критерий проверки статистической гипотезы — критерий Фишера.

100.2. Сравнение двух дисперсий (критерий Фишера)

Пусть по независимым выборкам объёмов n_1 и n_2 из нормальных совокупностей найдены исправленные выборочные дисперсии ${S_1^*}^2$ и ${S_2^*}^2$, где ${S_1^*}^2$ – большая из них. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве теоретических дисперсий:

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

Заметим, что в силу несмещённости оценок ${S_1^*}^2$ и ${S_2^*}^2$ нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \ M({S_1^*}^2) = M({S_2^*}^2).$$

В качестве критерия проверки гипотезы примем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F = \frac{{S_1^*}^2}{{S_2^*}^2}.$$

Известно, что при условии справедливости нулевой гипотезы, величина F имеет распределение Фишера–Снедекора (см. п. 93.4) со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1, \ k_2 = n_2 - 1$. Решающее правило зависит от конкурирующей гипотезы.

- $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \ \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$

  В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из того, что при справедливости H_0 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) вероятность больших значений F мала: $P\{F > t_2(\alpha; k_1; k_2)\} = \alpha$. Критическую точку $t_2(\alpha; k_1; k_2)$ находят по таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора (приложение 5) или, например, с помощью обратной функции F–распределения среди статистических функций Excel. Если $F_{\text{набл}} > t_2(\alpha; k_1; k_2)$, гипотезу H_0 отвергают с уровнем значимости α.

- $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_2: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

  В этом случае строят двустороннюю критическую область так, чтобы вероятности попадания в левую и правую половину были бы равны $\alpha/2$:

  $$P\big\{F < t_1\big(\alpha/2; k_1; k_2\big)\big\} = P\big\{F > t_2\big(\alpha/2; k_1; k_2\big)\big\} = \frac{\alpha}{2}.$$

  Критическую точку $t_2(\alpha/2; k_1; k_2)$ находят по таблице приложения 5 или с помощью ЭВМ. Если $F_{\text{набл}} > t_2(\alpha/2; k_1; k_2)$, гипотезу H_0 отвергают с уровнем значимости α.

- $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_3: \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2.$

  Поскольку $S_1^{*^2} > S_2^{*^2}$, без дополнительного исследования ясно, что при конкурирующей гипотезе H_3 гипотеза H_0 предпочтительнее. Этот случай очевиден.

Пример 100.1. *По двум независимым выборкам из нормальных генеральных совокупностей, объёмы которых равны $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_1^{*^2} = 10$, $S_2^{*^2} = 5{,}5$. С уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при конкурирующей гипотезе $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.*

Решение: В данном примере $k_1 = 12 - 1 = 11$, $k_2 = 15 - 1 = 14$, $F_{\text{набл}} = \dfrac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}} = 1{,}82$. Выбираем среди статистических функций Excel обратное F–распределение и находим $t_2(0{,}05; 11; 14) = 2{,}56$. Так как $F_{\text{набл}} < t_2(\alpha; k_1; k_2)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве дисперсий.

Вернёмся теперь к задаче дисперсионного анализа.

100.3. Однофакторный дисперсионный анализ

Пусть имеется n наблюдений x_{ij} $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$ над каждой из k нормальных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$, с одинаковой дисперсией, соответствующих k уровням $F_1, \ldots, F_k$ фактора F (см. табл. 100.1). Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве всех математических ожиданий: $H_0 : M(\xi_1) = \ldots = M(\xi_k)$ при альтернативной гипотезе H_1 о том, что не все из них равны.

Таблица 100.1

Данные однофакторного дисперсионного анализа				
номер наблюдения	F_1	F_2		F_k
1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\ldots$	x_{nk}
групповые средние	$\overline{x}_{\text{гр}_1}$	$\overline{x}_{\text{гр}_2}$	$\ldots$	$\overline{x}_{\text{гр}_k}$

Определим выборочные средние $\overline{x}_{\text{гр}_j}$ для каждого столбца наблюдений $(j = 1, \ldots, k)$ и $\overline{x}$ — выборочную среднюю всех наблюдений:

$$\overline{x}_{\text{гр}_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}; \qquad \overline{x} = \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}. \tag{100.1}$$

Найдём суммы квадратов отклонений. Общая сумма квадратов отклонений наблюдений x_{ij} от общей средней определяется формулой:

$$\sum\nolimits_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x})^2. \tag{100.2}$$

Факторная сумма квадратов двух отклонений групповых средних $\overline{x}_{\text{гр}_j}$ от общей средней $\overline{x}$ определяется формулой:

$$\sum\nolimits_{\text{факт}} = n\sum_{j=1}^{k}(x_{\text{гр}_j} - \overline{x})^2. \tag{100.3}$$

Остаточная сумма квадратов отклонений наблюдений x_{ij} от групповых средних $\overline{x}_{\text{гр}_j}$ определяется формулой:

$$\sum\nolimits_{\text{ост}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{\text{гр}_j})^2. \tag{100.4}$$

Можно доказать, что:

$$\sum\nolimits_{\text{общ}} = \sum\nolimits_{\text{факт}} + \sum\nolimits_{\text{ост}}. \tag{100.5}$$

Примем это без доказательства.

Убедимся, что $\sum_{\text{факт}}$ характеризует влияние фактора F. Действительно, если фактор существенно влияет на $\xi_1, \ \ldots, \xi_k$, то групповые средние $\overline{x}_{\text{гр}_j}$ значительно отличаются друг от друга и они тем сильнее разбросаны вокруг общей средней $\overline{x}$, чем существеннее влияние фактора F.

Заметим, что $\sum_{\text{общ}}$ характеризует разброс всех наблюдений вокруг общей средней, определяемый как воздействием фактора F, так и случайными причинами.

В силу равенства (100.5) можно сделать вывод, что $\sum_{\text{ост}}$ характеризует влияние случайных причин на величины $\xi_1, \ \ldots, \xi_k$. Действительно, так как $\sum_{\text{факт}}$ зависит от влияния фактора, а $\sum_{\text{общ}}$ определяется и влиянием фактора и случайными причинами, на долю $\sum_{\text{ост}}$ остаётся разброс, вызванный случайными причинами.

Разделив суммы квадратов отклонений (100.2)— (100.4) на соответствующее число степеней свободы, получим соответствующие выборочные дисперсии:

$$S^{*2}_{\text{общ}} = \frac{\sum_{\text{общ}}}{nk-1}; \qquad S^{*2}_{\text{факт}} = \frac{\sum_{\text{факт}}}{k-1}; \qquad S^{*2}_{\text{ост}} = \frac{\sum_{\text{ост}}}{k(n-1)}. \tag{100.6}$$

Если нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий $H_0 : M(\xi_1) = \ldots = M(\xi_k)$ справедлива, то все эти дисперсии являются несмещёнными оценками теоретической дисперсии и отличаются незначительно. Сравнив по критерию Фишера (см. п. 100.2) факторную и остаточную дисперсии, мы проверим тем самым гипотезу H_0. Если критерий покажет равенство факторной и остаточной теоретических дисперсий при конкурирующей гипотезе о том, что факторная теоретическая дисперсия больше, то гипотезу H_0 следует принять, в противном случае — отвергнуть.

Итак, получаем следующее правило для решения задачи однофакторного анализа с одинаковым числом наблюдений на каждом уровне фактора.

- Если $S^{*^2}_{\text{факт}} < S^{*^2}_{\text{ост}}$, нет оснований отвергнуть гипотезу H_0, т.к. в этом случае очевидно, что гипотеза о равенстве теоретических дисперсий предпочтительнее, чем гипотеза о том, что факторная теоретическая дисперсия больше остаточной.
- Если $S^{*^2}_{\text{факт}} > S^{*^2}_{\text{ост}}$, то вычисляем

$$F_{\text{набл}} = S^{*^2}_{\text{факт}}/S^{*^2}_{\text{ост}}, \tag{100.7}$$

по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора (приложение 5) или с помощью ЭВМ находим $t_2(\alpha; k_1; k_2)$, где $k_1 = k-1$; $k_2 = k(n-1)$ и если $F_{\text{набл}} > t_2(\alpha; k_1; k_2)$, то гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α. Если $F_{\text{набл}} \leqslant t_2(\alpha; k_1; k_2)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 (см. п. 100.2).

Пример 100.2. *Для приведённых в табл. 100.2 данных рейтинга студентов по различным предметам проверить гипотезу об одинаковой успеваемости по этим предметам. В таблице 100.2 приведены данные успеваемости (рейтинг) студентов по четырём предметам. Следует с уровнем значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о значимом отличии среднего значения рейтинга по этим предметам.*

Общая $S^{*^2}_{\text{общ}}$, факторная $S^{*^2}_{\text{факт}}$ и остаточная $S^{*^2}_{\text{ост}}$ дисперсии находятся по формулам (100.6). Здесь $n = 20$, $k = 4$, $\bar{x} = -13{,}655$.

Получаем следующие значения:

$$\sum\nolimits_{\text{общ}} = 61138{,}0802, \qquad S^{*^2}_{\text{общ}} = 733{,}8998, \qquad \sum\nolimits_{\text{факт}} = 27789{,}1219,$$
$$S^{*^2}_{\text{факт}} = 9263{,}0406, \qquad \sum\nolimits_{\text{ост}} = 33348{,}9583, \qquad S^{*^2}_{\text{ост}} = 438{,}8021.$$

Проверка:

$$\sum\nolimits_{\text{общ}} = \sum\nolimits_{\text{факт}} + \sum\nolimits_{\text{ост}} = 27789{,}1219 + 33348{,}9583 = 61138{,}0802.$$

Проверим по критерию Фишера нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной теоретических дисперсий, для чего найдем наблюдаемое значение критерия:

$$F_{\text{набл}} = \frac{S^{*^2}_{\text{факт}}}{S^{*^2}_{\text{ост}}} = 21{,}110.$$

Таблица 100.2

Исходные данные примера 100.2				
Рейтинг успеваемости по предметам				
N	Математический анализ	Английский язык	Линейная алгебра	Дискретная математематика
1	0,05	$-2,16$	0	$-1,84$
2	$-1,22$	$-8,31$	0	0
3	$-1,74$	$-7,16$	-1	$-1,58$
4	$-1,97$	$-6,58$	-1	3,11
5	$-1,92$	$-7,16$	-1	$-1,69$
6	$-2,76$	$-6,42$	$-0{,}58$	0,42
7	$-1,17$	$-8,16$	-1	$-1,69$
8	$-0{,}01$	$-8,42$	0	0,84
9	$-81,9$	$-10{,}3$	-1	$-1,11$
10	$-81,2$	$-8,89$	-1	0,58
11	$-81,8$	$-7,16$	-2	0,58
12	$-82,2$	$-2,42$	0	$-1,16$
13	$-82,1$	$-1,74$	$-0{,}58$	$-2,42$
14	$-82,0$	$-4,26$	0	$-1,16$
15	$-82,4$	$-7,74$	-1	$-1,58$
16	$-83,5$	$-4,84$	-3	$-3,26$
17	$-84,9$	$-8,89$	$-2,16$	$-1,26$
18	$-83,6$	$-8,89$	$-1,58$	$-2,53$
19	4,50	$-11,0$	0	$-3,69$
20	$-81,6$	$-6,84$	$-1,58$	$-3,69$
$\overline{x}_{\text{гр}_j}$	$-45,672$	$-6,867$	$-0{,}924$	$-1,1565$

Учитывая, что число степеней свободы факторной выборочной дисперсии равно $k_1 = k - 1 = 3$, число степеней свободы остаточной выборочной дисперсии $k_2 = k(n-1) = 76$, по уровню значимости $\alpha = 0{,}1$ и числам степеней свободы находим с помощью обратного F— распределения (статистические функции Excel) критическую точку

$F_{\text{кр}}$ распределения Фишера–Снедекора:

$$F_{\text{кр}}(0{,}1;\ 3;\ 76) = 2{,}105.$$

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий рейтинга по данным предметам отвергаем с уровнем значимости $\alpha = 0{,}1$. То есть групповые средние (успеваемость) в целом различаются значимо.

Практическое занятие 100. Проверка статистических гипотез

Пример 100.1. *По выборке объёма $n = 20$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности (ξ, ζ), найден выборочный коэффициент корреляции $r^*_{xy} = 0{,}15$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $r_{\xi\zeta=0}$ о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_{\xi\zeta} \neq 0$.*

Р е ш е н и е: Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле (98.1):

$$T_{\text{набл}} = 0{,}15 \cdot \frac{\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-0{,}15^2}} \approx 0{,}429.$$

Так как конкурирующая гипотеза $H_1 : r^*_{xy} \neq 0$, то поэтому критическая область двусторонняя. По таблице критических точек распределения Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 20 - 2 = 18$ находим $t_{\text{кр}}(0{,}05; 18) = 2{,}10$.

Так как $T_{\text{набл}} < T_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции. Это означает, что выборочный коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля, т.е. ξ и ζ некоррелированы.

Пример 100.2. *По двум независимым выборкам, объёмы которых $n = 60$ и $m = 50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 25$ и $\bar{y} = 23$. Соответствующие генеральные дисперсии $\sigma_1^2 = 5$, $\sigma_2^2 = 4$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(\xi) = M(\zeta)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(\xi) \neq M(\zeta)$.*

Р е ш е н и е: Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле (98.2):

$$Z_{\text{набл}} = \frac{25-23}{\sqrt{5/60+4/50}} \approx 54{,}436.$$

Так как конкурирующая гипотеза $M(\xi) \neq M(\zeta)$, то критическая область двусторонняя. Согласно (98.3), правую критическую точку найдем из равенства:

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}01)/2 = 0{,}495.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) находим $Z_{\text{кр}} = 2{,}58$. Так как $|Z_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Это означает, что выборочные средние отличаются значимо.

Пример 100.3. *Из нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией* $\sigma^2 = 16$ *извлечена выборка объёма* $n = 80$, *и по ней найдена выборочная средняя* $\bar{x} = 13{,}12$. *Требуется при уровне значимости* $0{,}05$ *проверить нулевую гипотезу* $H_0 : a = a_0 = 12$ *при конкурирующей гипотезе* $H_1 : a \neq 12$.

Р е ш е н и е: Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле (98.6):

$$U_{\text{набл}} = \frac{13{,}12-12}{4} \cdot \sqrt{80} \approx 2{,}504.$$

Так как конкурирующая гипотеза $a \neq a_0$, то критическая область двусторонняя. Критическую точку найдем из равенства:

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = (1-\alpha)/2 = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) находим $Z_{\text{кр}} = 1{,}96$. Так как $U_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральные средние различаются значимо.

Пример 100.4. *Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает* $0{,}03$. *Среди случайно отобранных* 500 *изделий оказалось* 20 *бракованных. Будет ли эта партия принята?*

Р е ш е н и е: Нулевая гипотеза $H_0 : p = p_0 = 0{,}03$, а относительная частота брака $m/n = 20/500 = 0{,}04$. Примем в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : p > 0{,}03$ и уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. С учётом того, что $q_0 = 1 - p_0 = 0{,}97$, по формуле (98.8) найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = \frac{(0{,}04 - 0{,}03) \cdot \sqrt{500}}{\sqrt{0{,}03 \cdot 0{,}97}} \approx 1{,}311.$$

Так как конкурирующая гипотеза состоит в том, что $p > p_0$, то критическая область правосторонняя. Критическую точку найдем из равенства:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - 2\alpha)/2 = (1 - 2 \cdot 0{,}05)/2 = 0{,}45.$$

По таблице функции Лапласа (Приложение 2) находим $u_{\text{кр}} = 1{,}645$. Так как $U_{\text{набл}} < u_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что вероятность брака в партии не превышает 0,03. Следовательно, партия может быть принята.

Пример 100.5. *Произведено $n = 100$ измерений некоторой случайной величины. Вся совокупность элементов выборки разбита на интервалы. В итоге имеется следующий статистический ряд.*

N интервала	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
интервалы	*69,2*	*69,8*	*70,4*	*71,0*	*71,6*	*72,2*	*72,8*	*73,4*	*74,0*
	69,8	*70,4*	*71,0*	*71,6*	*72,2*	*72,8*	*73,4*	*74,0*	*74,6*
частоты m_j	*1*	*4*	*11*	*21*	*27*	*22*	*10*	*3*	*1*

Найти закон распределения данной случайной величины ξ.

Решение: Как видим из таблицы, длина интервала $\Delta a_j = 0{,}6$. Для выдвижения гипотезы о виде распределения на рис. 32 построим гистограмму данного вариационного ряда.

Поскольку распределение симметрично и имеет максимум в середине, то можно выдвинуть нулевую гипотезу H_0 о том, что изучаемая величина подчиняется нормальному закону. Вследствие этого нужно сделать оценки для каждого из неизвестных параметров нормального распределения.

Для расчётов возьмём середины интервалов $u_i = (x_{j-1}+x_j)/2$, $j = 1, 2, \ldots, s$, где s – число интервалов. Тогда выборочное среднее и дисперсия определятся по формулам:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{s} m_i u_i / n, \qquad S^2 = \sum_{i=1}^{s} m_i u_i^2 / n - \bar{x}^2.$$

Исправленная дисперсия $S^{*2} = nS^2/(n-1)$. В результате вычислений получим: $\bar{x} = 71,876$, $S^* = 0{,}8982$.

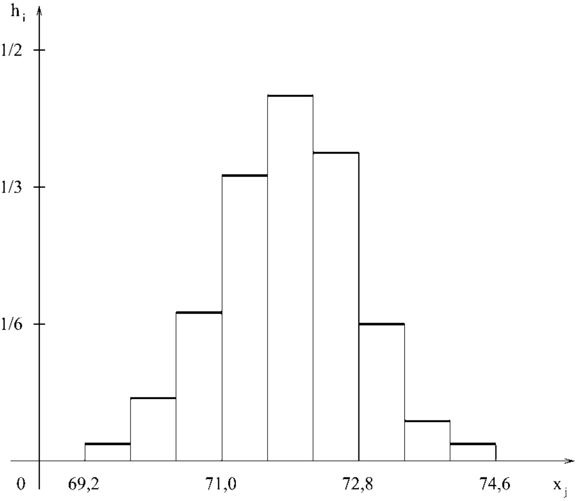


Рис. 32. *Гистограмма относительных частот для примера 100.5*

Вероятность попадания случайной величины ξ в определённый интервал (x_{j-1}, x_j) можно найти с помощью функции распределения, как это указано в лекции, или для нормальной случайной величины по формуле

$$P_j = P(x_{j-1} < \xi < x_j) = \Phi\left(\frac{x_j - \bar{x}}{S^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_{j-1} - \bar{x}}{S^*}\right).$$

Здесь значения функции Лапласа можно найти по таблицам. Тогда теоретические частоты определятся как $m_j = P_j \cdot n$. В итоге вместо эмпирических частот получим следующие приближённые значения теоретических частот m'_i:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m'_j	0,8961	3,9749	11,4545	21,4611	26,1543	20,7354	10,6927	3,5848	0,7808

После этого последовательно находим $m_i - m'_i$, $(m_i - m'_i)^2$, и $(m_i - m_i)^2/m'_i$, а затем сумму последних значений. Согласно (99.6), критерий $\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}349$.

Учитывая, что здесь количество интервалов $s = 9$, определяем число степеней свободы k по формуле (99.7): $k = 9 - 1 - 2 = 6$. Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда с числом степеней свободы 6 по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 4) находим значение критерия

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 6) = 12{,}6.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимо. Следовательно, опытные данные согласуются с гипотезой о нормальном распределении изучаемой случайной величины ξ.

Самостоятельная работа

Пример 100.6. *По выборке объёма* $n = 30$ *найден выборочный коэффициент корреляции* $r^*_{xy} = 0{,}35$. *При уровне значимости 0,1 проверить гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе* $r_{\xi\zeta} \neq 0$.

Пример 100.7. *По выборке объёма* $n = 100$, *извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности, составлена корреляционная таблица:*

Исходные данные примера 100.7					
$\xi\backslash\zeta$	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*
5	*4*	*2*	-	-	-
10	-	*6*	*7*	-	
15	-	-	*40*	*5*	-
20	-	*2*	*12*	*14*	*8*

Найти выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости 0,1 *проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе* $r_{\xi\zeta} \neq 0$.

Таблица 100.3

N варианта	n_1	n_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	σ_1^2	σ_2^2	α
1	13	17	51.4	55.0	4.38	1.29	0.01
2	12	16	81.66	85.00	29.96	12.97	0.05
3	11	15	35.40	30.30	9.84	3.90	0.01
4	10	14	25.65	23.55	2.08	0.98	0.05
5	9	13	4.40	4.00	0.0295	0.008	0.01
6	8	12	80.53	82.40	21.34	7.34	0.05
7	7	11	14.31	12.21	17.82	3.70	0.01
8	6	10	16.62	13.34	13.32	4.47	0.05
9	5	9	32.12	30.10	18.92	3.45	0.01
10	10	8	7.20	5.15	10.52	3.18	0.05
11	13	17	8.81	5.85	11.68	4.62	0.01
12	12	16	5.03	6.21	5.22	2.90	0.05
13	11	15	4.64	4.02	6.73	2.39	0.01
14	10	14	13.33	16.22	8.94	4.52	0.05
15	9	13	16.08	13.11	7.35	2.02	0.01
16	13	10	28.43	30.50	11.22	2.38	0.01
17	12	11	80.34	78.10	24.35	11.71	0.05
18	11	12	45.78	40.32	18.43	7.84	0.05
19	10	13	25.31	22.84	8.51	3.04	0.01
20	9	14	23.46	25.81	12.38	5.87	0.05
21	8	15	16.38	18.21	11.64	3.66	0.01
22	7	16	17.64	15.32	10.52	4.52	0.05
23	6	17	5.32	7.55	4.32	1.38	0.01
24	5	8	4.38	4.01	2.35	0.75	0.05
25	10	9	19.23	17.34	7.48	1.82	0.01
26	13	13	8.32	6.29	4.35	8.25	0.01
27	12	14	12.48	10.31	19.38	8.25	0.01
28	11	15	23.45	20.81	17.25	8.50	0.05
29	10	16	20.44	23.00	13.11	4.54	0.01
30	9	17	13.25	11.49	10.12	6.98	0.05

Пример 100.8. *По выборке объёма* $n = 100$ *найден средний вес деталей* $\bar{x} = 210$ *г, изготовленных на первом станке; по выборке объёма* $m = 90$ *найден средний вес* $\bar{y} = 208$ *г деталей, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны:* $\sigma_1^2 = 80,\ \sigma_2^2 = 70$. *Предполагается, что случайные величины* ξ *и* ζ *распределены нормально и выборки независимы. При уровне значимости* 0,05 *проверить гипотезу* $H_0 : M(\xi) = M(\zeta)$ *при конкурирующей гипотезе* $M(\xi) \neq M(\zeta)$.

Пример 100.9. *В таблице 100.3 даны варианты заданий. Для каждого варианта приведены две независимые выборки объёмами* n_1 *и* n_2*, найдены выборочные средние* $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2$ *и известны дисперсии* $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$. *Нужно проверить при заданном уровне значимости* α *равенство математических ожиданий при конкурирующей гипотезе об их неравенстве.*

Пример 100.10. *Задана выборка объёма* $n = 120$ *из нормальной совокупности с известным средним квадратическим отклонением* $\sigma = 5$ *и выборочной средней* $\bar{x} = 23{,}54$. *Необходимо при уровне значимости* 0,01 *проверить нулевую гипотезу* $H_0 : a = a_0 = 23$ *при конкурирующей гипотезе* $H_1 : a \neq 23$.

Пример 100.11. *Фирма рассылает рекламные каталоги торговым организациям. Вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна* 0,12. *Фирма разослала* 400 *новых улучшенных каталогов и получила* 60 *заказов. Можно ли считать, что новые каталоги значимо лучше старых?*

Указание. Принять нулевую гипотезу $H_0 : p = p_0 = 0{,}12$*; конкурирующую –* $H_1 : p > 0{,}12$*; уровень значимости* $\alpha = 0{,}05$.

Пример 100.12. *Проведено* n *измерений некоторой непрерывной случайной величины. Диапазон полученных измерений разбит на интервалы постоянной длины и количество наблюдений, попавших в соответствующий интервал, записано в таблицу 100.5. В таблице 100.4 приведены левая и правая границы наблюдений и число интервалов. По результатам измерений вычислить выборочное среднее и исправленную дисперсию. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости* $\alpha = 0{,}05$ *проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности* ξ *с заданным эмпирическим распределением.*

Таблица 100.4

Варианты	Наименьшее значение	Наибольшее значение	Число интервалов
1–5	9,18	9,76	10
6–10	34,5	62,0	10
11–15	–20	16	10
15–20	66,5	102,5	12
21–25	0,21	0,45	12
25–30	4,504	4,548	12

Лекция 101. Случайные процессы

Основные понятия. Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционная функция. Взаимная корреляционная функция. Комплексные случайные процессы

101.1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 101.1. *Случайной функцией $\xi(t)$ называют случайную величину, зависящую от неслучайного параметра t. Если параметр t интерпретируется как время, случайная функция называется случайным процессом.*

Мы в основном будем иметь дело со случайными процессами, однако всё изложенное справедливо для любых случайных функций.

ПРИМЕР 101.1. *Случайный процесс $\xi(t) = \zeta \cdot \sin t$, где $t \geqslant 0$, $\zeta \sim N(2;1)$ случайная величина, имеющая нормальное распределение.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 101.2. *Сечением случайного процесса называют случайную величину, получающуюся при фиксированном значении параметра t. Реализацией (траекторией) случайного процесса называют неслучайную функцию аргумента t, получающуюся в результате наблюдения (испытания) над случайным процессом в течение длительного времени.*

Если на практике наблюдают случайный процесс (например, записывают его график с помощью самописца), то в действительности получают одну из возможных его реализаций. При повторении опыта будет наблюдаться другая реализация. Реализацию процесса $\xi(t)$ будем обозначать строчными латинскими буквами: $x(t)$.

Если в примере 101.1 фиксировать момент времени $t = 1$, получим сечение $\xi(1) = \zeta \cdot \sin 1$. Если в примере 101.1 случайная величина ζ в первом испытании приняла значение 2, а во втором -3, то получим две реализации: $x_1(t) = 2\sin t$; $x_2(t) = 3\sin t$.

Таблица 100.5

N Варианта	Частоты										
1	5	9	18	40	49	43	26	8	2	0		
2	2	3	8	34	40	38	19	3	2	1		
3	2	5	9	20	24	22	13	4	1	0		
4	4	6	16	68	80	76	38	6	4	2		
5	1	3	10	21	25	23	12	4	1	0		
6	4	8	20	43	49	40	24	10	1	1		
7	1	2	3	18	38	40	34	9	3	2		
8	4	6	37	75	80	69	17	6	4	2		
9	1	3	10	21	26	22	11	4	1	1		
10	2	5	9	19	24	21	13	4	2	1		
11	2	8	16	33	53	60	64	30	11	3		
12	4	8	16	30	50	65	60	24	10	3		
13	5	10	20	30	50	75	40	15	10	5		
14	5	10	16	22	80	70	37	14	5	1		
15	4	6	18	66	82	87	32	12	5	1		
16	3	6	8	17	39	48	42	19	10	5	2	1
17	2	8	19	31	49	64	60	53	37	17	7	3
18	4	12	39	58	74	63	50	42	16	12	8	2
19	3	4	6	10	16	20	18	13	8	6	5	1
20	1	4	6	9	18	28	15	10	5	3	1	0
21	3	8	19	37	53	60	64	49	31	17	7	2
22	6	12	20	39	58	74	63	50	42	16	12	8
23	1	5	6	8	17	20	18	15	10	9	7	4
24	2	6	10	12	30	40	32	10	4	2	1	1
25	1	4	10	15	35	45	30	18	7	2	4	1
26	1	2	5	10	19	42	48	39	17	8	6	3
27	1	4	6	10	15	18	28	9	5	3	1	0
28	3	8	21	35	43	50	44	39	20	9	5	3
29	0	1	12	30	40	32	12	10	6	2	1	1
30	1	2	3	10	44	76	78	64	10	6	4	2

Заметим, что сечение является случайной величиной, реализация – неслучайной функцией.

101.2. Математическое ожидание и дисперсия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 101.3. *Математическим ожиданием случайного процесса называют неслучайную функцию $m(t)$, которая при каждом t равна математическому ожиданию соответствующего сечения:*

$$m_\xi(t) = M\big(\xi(t)\big).$$

Геометрически $m(t)$ является кривой, занимающей «среднее положение» среди всех реализаций случайного процесса. Если $\xi(t)$ – случайный процесс, а $f(t)$ — неслучайная функция, то $m(t)$ обладает следующими очевидными свойствами (докажите их самостоятельно на основании свойств математического ожидания):

(1) $M\big(f(t)\big) = f(t)$,
(2) $M\big(f(t)\cdot\xi(t)\big) = f(t)\cdot M\big(\xi(t)\big)$,
(3) $M\big(\xi_1(t)\pm\xi_2(t)\big) = M\big(\xi_1(t)\big)\pm M\big(\xi_2(t)\big)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 101.4. *Дисперсией случайного процесса называют неслучайную функцию $\sigma^2(t)$, которая при каждом t равна дисперсии соответствующего сечения:*

$$\sigma^2_\xi(t) = D\big(\xi(t)\big).$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния реализаций случайного процесса около его математического ожидания.

Наряду с дисперсией рассматривается также среднее квадратическое отклонение случайного процесса: $\sigma_\xi(t) = \sqrt{D\big(\xi(t)\big)}$.

Очевидны свойства дисперсии $\sigma^2_\xi(t)$:

(1) $\sigma^2_\xi(t) \geqslant 0$,
(2) $D\big(f(t)\big) = 0$,
(3) $D\big(f(t)\cdot\xi(t)\big) = f^2(t)\cdot D\big(\xi(t)\big)$,
(4) $D\big(\xi(t)\pm f(t)\big) = D\big(\xi(t)\big)$.

101.3. Корреляционная функция

Для определения связи между различными сечениями случайного процесса используется корреляционная функция.

Определение 101.5. *Корреляционной функцией случайного процесса называют неслучайную функцию двух аргументов* $K_\xi(t_1;t_2)$, *равную корреляционному моменту сечений* $\xi(t_1)$ *и* $\xi(t_2)$*:*

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\Big(\big(\xi(t_1) - m(t_1)\big)\cdot\big(\xi(t_2) - m(t_2)\big)\Big).$$

Если ввести понятие центрированного случайного процесса

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t), \tag{101.1}$$

то определение 101.5 запишется короче:

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\big(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\big).$$

Пример 101.2. *Для случайного процесса из примера 101.1 найти* $m_\xi(t)$, $\sigma^2_\xi(t)$, $K_\xi(t_1;t_2)$.

Р е ш е н и е: Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, поскольку $\zeta \sim N(2;1)$, получаем:

$$m_\xi(t) = M\big(\xi(t)\big) = M(\zeta\cdot\sin t) = M(\zeta)\cdot\sin t = 2\ \sin t,$$

$$\sigma^2_\xi(t) = D\big(\xi(t)\big) = D(\zeta\cdot\sin t) = D(\zeta)\cdot\sin^2 t = \sin^2 t,$$

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\big((\zeta\cdot\sin t_1 - 2\ \sin t_2)\cdot(\zeta\cdot\sin t_2 - 2\ \sin t_2)\big) =$$

$$= M\big((\zeta-2)^2\sin t_1\sin t_2\big) = D(\zeta)\sin t_1\sin t_2 = \sin t_1\sin t_2.$$

Ответ: $m_\xi(t) = 2\ \sin t$; $\sigma^2_\xi(t) = \sin^2 t$; $K_\xi(t_1;t_2) = \sin t_1\cdot\sin t_2$.

Перечислим свойства корреляционной функции случайного процесса.

(1) $K_\xi(t_1;t_2) = K_\xi(t_2;t_1)$ (см. определение 101.5),
(2) $K_\xi(t;t) = \sigma^2_\xi(t)$ (см. определение 101.5),
(3) $|K_\xi(t_1;t_2)| \leqslant \sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2)$ (см. теорему 95.3).

Ещё два свойства корреляционной функции будут приведены в п. 101.4.

Наряду с корреляционной функцией случайного процесса рассматривается нормированная корреляционная функция:

$$\rho_\xi(t_1;t_2) = \frac{K_\xi(t_1;t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2)}. \tag{101.2}$$

Свойства нормированной корреляционной функции аналогичны свойствам коэффициента корреляции (см. п. 95.1):

(1) $\rho_\xi(t_1;t_2) = \rho_\xi(t_2;t_1)$,

(2) $\rho_\xi(t;t) = 1$,

(3) $|\rho_\xi(t_1;t_2)| \leqslant 1$.

101.4. Взаимная корреляционная функция

Определение 101.6. *Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2)$, равная корреляционному моменту сечений $\xi(t_1)$ и $\zeta(t_2)$:*

$$R_{\xi\zeta}(t_1;t_2) = M\big(\mathring{\xi}(t_1)\cdot\mathring{\zeta}(t_2)\big).$$

Два случайных процесса $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ называют некоррелированными, если $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2) \equiv 0$ для $\forall\ t_1, t_2$.

Свойства $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2)$ непосредственно вытекают из определения 101.6 и свойств корреляционного момента (см. лекцию 95):

(1) $R_{\xi\zeta}(t_1;t_2) = R_{\zeta\xi}(t_2;t_1)$,

(2) $|R_{\xi\zeta}(t_1;t_2)| \leqslant \sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\zeta(t_2)$,

(3) $R_{\xi\xi}(t_1;t_2) = K_\xi(t_1;t_2)$.

Добавим к перечисленным в п. 101.3 свойствам корреляционной функции $K_\xi(t_1;t_2)$ ещё два:

(4) Если $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, то

$$K_\xi(t_1;t_2) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2).$$

Действительно:

$$K_\xi(t_1;t_2) = M\big(\mathring{\xi}(t_1)\cdot\mathring{\xi}(t_2)\big) = M\Big(\big(\mathring{\xi}_1(t_1)+\mathring{\xi}_2(t_1)\big)\cdot\big(\mathring{\xi}_1(t_2)+\mathring{\xi}_2(t_2)\big)\Big) =$$
$$= M\big(\mathring{\xi}_1(t_1)\cdot\mathring{\xi}_1(t_2)\big) + M\big(\mathring{\xi}_2(t_1)\cdot\mathring{\xi}_2(t_2)\big) + M\big(\mathring{\xi}_1(t_1)\cdot\mathring{\xi}_2(t_2)\big) +$$
$$+ M\big(\mathring{\xi}_2(t_1)\cdot\mathring{\xi}_1(t_2)\big) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2) + R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2).$$

(5) Корреляционная функция суммы двух некоррелированных случайных процессов равна сумме их корреляционных функций:

$$K_\xi(t_1;t_2) = K_{\xi_1}(t_1;t_2) + K_{\xi_2}(t_1;t_2).$$

Это свойство является непосредственным следствием предыдущего, т.к. для некоррелированных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ $R_{\xi_1\xi_2}(t_1;t_2) \equiv 0$, $R_{\xi_2\xi_1}(t_1;t_2) = R_{\xi_1\xi_2}(t_2;t_1) \equiv 0$ при $\forall\ t_1;t_2$.

101.5. Комплексные случайные процессы

Определение 101.7. *Комплексной случайной величиной называют $\zeta = \xi_1 + \xi_2 i$, где ξ_1 и ξ_2 — действительные случайные величины, i — мнимая единица. Комплексным случайным процессом называют комплексную случайную величину $\zeta(t)$ такую, что:*

$$\zeta(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)i, \tag{101.3}$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — действительные случайные процессы, i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

Определим числовые характеристики комплексного случайного процесса так, чтобы сохранялись их основные свойства, которые мы изучали для действительных случайных процессов.

Определение 101.8. *Математическим ожиданием комплексного случайного процесса $\zeta(t) = \xi_1 + \xi_2(t)i$ называется неслучайная комплексная функция:*

$$m_\zeta(t) = M\big(\xi_1(t)\big) + M\big(\xi_2(t)\big)i.$$

Заметим, что при $\xi_2(t) \equiv 0$ получаем математическое ожидание действительного случайного процесса $\xi_1(t)$, введённое в п. 101.2. Самостоятельно докажите, что все свойства математического ожидания, перечисленные в п. 101.2, остаются справедливыми для комплексного случайного процесса.

Определение 101.9. *Дисперсией комплексного случайного процесса (101.3) называют математическое ожидание квадрата модуля центрированного процесса $\overset{\circ}{\zeta}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$:*

$$\sigma^2_\zeta(t) = M\big(|\overset{\circ}{\zeta}(t)|^2\big).$$

Заметим, что при $\zeta_2(t) \equiv 0$ получается дисперсия действительного случайного процесса, введённая в п. 101.2. Все четыре перечисленные там свойства дисперсии остаются справедливыми (докажите это самостоятельно). Кроме того, добавляется пятое:

5. $\sigma^2_\xi(t) = \sigma^2_{\xi_1}(t) + \sigma^2_{\xi_2}(t)$.

Действительно, пользуясь определением модуля комплексного числа $\Big(|\overset{\circ}{\zeta}(t)| = \sqrt{\overset{\circ}{\xi}{}^2_1(t) + \overset{\circ}{\xi}{}^2_2(t)}\Big)$, получаем:

$$\sigma^2_\zeta = M\big(|\overset{\circ}{\zeta}(t)|^2\big) = M\big(\overset{\circ}{\xi}{}^2_1(t)+\overset{\circ}{\xi}{}^2_2(t)\big)=M\big(\overset{\circ}{\xi}{}^2_1(t)\big)+M\big(\overset{\circ}{\xi}{}^2_2(t)\big)= \sigma^2_{\xi_1}(t)+\sigma^2_{\xi_2}(t).$$

Другими словами, дисперсия комплексного случайного процесса равна сумме дисперсий его действительной и мнимой частей.

Определение 101.10. *Корреляционной функцией комплексного случайного процесса (101.3) называют корреляционный момент его сечений* $\overset{\circ}{\zeta}(t_1) = \xi_1(t_1) + \xi_2(t_1)i$ *и* $\overline{\overset{\circ}{\zeta}(t_2)} = \xi_1(t_2) - \xi_2(t_2)i$

$$K_\zeta(t_1; t_2) = M\left(\overset{\circ}{\zeta}(t_1) \cdot \overline{\overset{\circ}{\zeta}(t_2)}\right).$$

Самостоятельно убедитесь в справедливости трёх свойств корреляционной функции, перечисленных в п. 101.3.

В частности: $K_\zeta(t; t) = M\left(\overset{\circ}{\zeta}(t) \cdot \overline{\overset{\circ}{\zeta}(t)}\right) = M\left(|\overset{\circ}{\zeta}(t)|^2\right) = \sigma_\zeta^2(t)$.

Пользуясь свойствами 4 и 5 корреляционной функции, приведёнными в п. 101.4, получаем для комплексного случайного процесса $\zeta(t)$:

$$K_\zeta(t_1; t_2) = K_{\xi_1}(t_1; t_2) + K_{\xi_2}(t_1; t_2) + \left(R_{\xi_2\xi_1}(t_1; t_2) - R_{\xi_1\xi_2}(t_1; t_2)\right)i.$$

Если составляющие $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ некоррелированны, то корреляционная функция комплексного случайного процесса равна сумме корреляционных функций составляющих:

$$K_\zeta(t_1; t_2) = K_{\xi_1}(t_1; t_2) + K_{\xi_2}(t_1; t_2).$$

101.6. Стационарный случайный процесс

Определение 101.11. *Случайный процесс* $\xi(t)$ *называется стационарным (стационарным в широком смысле), если его математическое ожидание* $m_\xi(t)$ *постоянно (не зависит от* t*), а корреляционная функция* $K_\xi(t_1; t_2)$ *зависит только от разности аргументов:*

$$m_\xi(t) = m, \quad K_\xi(t_1; t_2) = k_\xi(t_2 - t_1).$$

Замечание 101.1. *В данном курсе будут рассматриваться только стационарные в широком смысле случайные процессы. В теории вероятностей, однако, рассматриваются стационарные в узком смысле случайные процессы, все характеристики которых, включая многомерные плотности распределения сечений, зависят не от значений аргументов, а только от их взаимного расположения. Очевидно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.*

Из определения 101.11 следует, что корреляционная функция стационарного процесса есть функция одного аргумента:

$$K_\xi(t_1; t_2) = k_\xi(t_2 - t_1) = k_\xi(\tau), \quad \text{где } \tau = t_2 - t_1. \tag{101.4}$$

Перечислим свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса (ССП):

(1) Корреляционная функция ССП чётная:

$$k_\xi(-\tau) = k_\xi(\tau).$$

Действительно, на основании свойства 1 $K_\xi(t_1;t_2)$ (см. п. 101.3):

$$k_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2;t_1) \implies k_\xi(-\tau) = k_\xi(t_1 - t_2) = K_\xi(t_2;t_1) = \\ = K_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2 - t_1) = k_\xi(\tau).$$

(2) Дисперсия ССП постоянна и равна значению корреляционной функции в нуле:

$$\sigma_\xi^2(t) = k_\xi(0) = \sigma_\xi^2.$$

Действительно, на основании свойства 2 $K_\xi(t_1;t_2)$:

$$\sigma_\xi^2(t) = K_\xi(t;t) = k_\xi(t-t) = k_\xi(0) = \mathrm{const}.$$

(3) Модуль корреляционной функции не превышает её значения в нуле:

$$|k_\xi(\tau)| \leqslant k_\xi(0).$$

Действительно, на основании свойства 3 $K_\xi(t_1;t_2)$:

$$|K_\xi(t_1;t_2)| \leqslant \sqrt{K_\xi(t_1;t_1)\cdot K_\xi(t_2;t_2)} \implies |k_\xi(\tau)| \leqslant \sqrt{k_\xi(0)\cdot k_\xi(0)} \implies \\ \implies |k_\xi(\tau)| \leqslant k_\xi(0) \iff |k_\xi(\tau)| \leqslant \sigma_\xi^2.$$

Нормированная корреляционная функция ССП $\rho_\xi(\tau)$ получится равной (см. определение 101.3).

$$\rho_\xi(\tau) = \frac{k_\xi(\tau)}{k_\xi(0)} = \frac{k_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}.$$

Заметим, что $|\rho_\xi(\tau)| \leqslant 1$, $\rho_\xi(0) = 1$.

101.7. Спектральная плотность

Рассмотрим случайный процесс

$$\zeta(t) = \xi_1 \cdot \cos wt + \xi_2 \sin wt, \tag{101.5}$$

где: ξ_1 и ξ_2 — случайные величины, w — константа, $M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0$, $D(\xi_1) = D(\xi_2) = \sigma^2$, $M(\mathring{\xi}_1 \cdot \mathring{\xi}_2) = 0$.

Найдём корреляционную функцию этого случайного процесса, заметив, что $M\big(\zeta(t)\big) = M(\xi_1)\cdot\cos wt + M(\xi_2)\cdot\sin wt = 0 \Longrightarrow \zeta(t) = \overset{\circ}{\zeta}(t)$:

$$K_\zeta(t_1;t_2) = M\big(\overset{\circ}{\zeta}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\zeta}(t_2)\big) = M\big(\zeta(t_1)\cdot\zeta(t_2)\big) =$$
$$= M\big((\xi_1\cos wt_1 + \xi_2\sin wt_1)(\xi_1\cos wt_2 + \xi_2\sin wt_2)\big) =$$
$$= M(\xi_1^2)\cos wt_1\cos wt_2 + M(\xi_2^2)\sin wt_1\sin wt_2 = \sigma^2\cdot\cos w(t_2 - t_1).$$

Мы доказали, что процесс (101.5) стационарный:

$$M\big(\zeta(t)\big) = 0; \quad K_\xi(t_1;t_2) = k_\xi(t_2 - t_1).$$

Рассмотрим теперь случайный процесс

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{n}(\xi_{1j}\cos w_j t + \xi_{2j}\sin w_j t),$$

где: $M(\xi_{1j}) = M(\xi_{2j}) = 0$, w_j — константы,
$D(\xi_{1j}) = D(\xi_{2j}) = \sigma_j^2$, $M(\overset{\circ}{\xi}_{1j}\cdot\xi_{2k}) = 0$, при $\forall\ j,k$,
$M(\overset{\circ}{\xi}_{1j}\cdot\overset{\circ}{\xi}_{1k}) = M(\overset{\circ}{\xi}_{2j}\cdot\overset{\circ}{\xi}_{2k}) = 0$ при $j \neq k$.

Заметив, что $M\big(\zeta(t)\big) = 0$,откуда $\zeta(t) = \overset{\circ}{\zeta}(t)$, слагаемые такого случайного процесса некоррелированны, на основании формулы для корреляционной функции процесса (101.5) и свойства 5 (п. 101.4) получаем:

$$K_\zeta(t_1;t_2) = \sum_{j=0}^{n}\sigma_j^2\cos w_j(t_2 - t_1).$$

Таким образом, получили, что этот процесс также стационарный.

Естественным образом для случайного процесса вида

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(\xi_{1j}\cos w_j t + \xi_{2j}\sin w_j t) \tag{101.6}$$

с аналогичными свойствами заключаем, что он стационарный:

$$M\big(\zeta(t)\big) = 0; \quad K_\zeta(t_1;t_2) = \sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j^2\cos w_j(t_2 - t_1).$$

Замечание 101.2. *Случайный процесс (101.5) можно представить в виде гармонического колебания со случайной амплитудой*

$A = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, *случайной фазой* $\varphi = arctg\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)$ *и частотой* w:

$$\zeta(t) = \xi_1 \cos wt + \xi_2 \sin wt = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\Big(\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \cos wt +$$
$$+ \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \sin wt\Big) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}(\sin\varphi \cos wt + \cos\varphi \sin wt) =$$
$$= A \sin(wt + \varphi).$$

Отсюда заключаем, что случайный процесс (101.6) можно представить в виде суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами $A_j = \sqrt{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2}$, случайными фазами $\varphi_j = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_{1j}}{\xi_{2j}}\right)$ и частотами w_j:

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \sin(w_j t + \varphi_j). \tag{101.7}$$

Мы доказали, что если случайный процесс представим в таком виде, то он стационарный.

Определение 101.12. *Спектральным разложением стационарного случайного процесса называется его представление в виде (101.6), (101.7).*

Найдём дисперсию одного слагаемого (одной гармоники) разложения (101.7):

$$D\big(A_j \sin(w_j t + \varphi_j)\big) = D(\xi_{1j} \cos w_j t + \xi_{2j} \sin w_j t) =$$
$$= D(\xi_{1j} \cos^2 w_j t) + D(\xi_{2j}) \sin^2 w_j t = \sigma_j^2(\cos^2 w_j t + \sin^2 w_j t) = \sigma_j^2.$$

Дисперсия случайного процесса $\zeta(t)$ будет равна их сумме в силу некоррелированности слагаемых:

$$D\big(\zeta(t)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2.$$

Определение 101.13. *Дискретным спектром стационарного случайного процесса (101.6) называют совокупность дисперсий σ_j^2 составляющих его гармоник. Такой дискретный спектр называется линейчатым спектром, а ординаты σ_j^2 — спектральными линиями, соответствующими частотам w_j.*

Спектр можно изобразить графически (см. рис. 33).

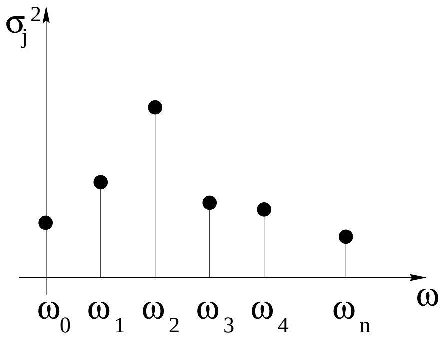


Рис. 33. *Линейчатый спектр*

Рассмотрим теперь спектральное разложение, в котором равноотстоящие частоты и число слагаемых бесконечно:

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(\xi_{1j}\cos w_j t + \xi_{2j}\sin w_j t), \tag{101.8}$$

где $w_j = j\dfrac{\pi}{T}$, $\quad j = 0{,}2, \ldots,\quad T$ — положительное число.

Обозначив $t_2 - t_1 = \tau$, получим:

$$k_\zeta(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j^2 \cos w_j\tau, \quad \text{где} \quad w_j = j\frac{\pi}{T},\ j = 0{,}2, \ldots \tag{101.9}$$

Рассматривая (101.9) как разложение чётной периодической с периодом $2T$ функции $k_\zeta(\tau)$ в ряд Фурье, получим формулы для коэффициентов Фурье:

$$\sigma_j^2 = \frac{2}{T}\int_0^T k_\zeta(\tau)\cos w_j\tau \; d\tau. \tag{101.10}$$

Спектр случайного процесса (101.8) линейчатый с бесконечным числом равноотстоящих спектральных линий . Расстояние между соседними линиями по частоте равно $\Delta w = \dfrac{\pi}{T}$.

Перейдём теперь к пределу при $T \to \infty$ $(\Delta w \to 0)$ в выражениях (101.9), (101.10). Предварительно вместо σ_j^2 введём среднюю плотность дисперсии:

$$S_\zeta^*(w_j; \Delta\omega) = \frac{\sigma_j^2}{\Delta w}, \quad j = 0,1,\ldots \tag{101.11}$$

Выразив из (101.11) $\sigma_j^2 = S_\zeta^*(w_j; \Delta\omega) \cdot \Delta w = S_\zeta^*(w_j; \Delta\omega) \cdot \frac{\pi}{T}$, подставим её в (101.9) и (101.10).

Получим:

$$k_\zeta(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} S_\zeta^*(w_j; \Delta\omega) \cos w_j \tau \Delta w, \tag{101.12}$$

$$S_\zeta^*(w_j; \Delta\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^T k_\zeta(\tau) \cos w_j \tau \; d\tau. \tag{101.13}$$

Определение 101.14. *Односторонней спектральной плотностью $S_\zeta^*(w_j)$ стационарного случайного процесса $\zeta(t)$, соответствующей частоте w_j, называется предел средней плотности дисперсии (101.11), когда $\Delta w \to 0$:*

$$S_\zeta^*(w_j) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\sigma_j^2}{\Delta w}, \quad j = 0,1,\ldots$$

Перейдя к пределу при $T \to \infty$ $(\Delta w \to 0)$, из (101.12), (101.13) получим выражения, связывающие корреляционную функцию $k_\zeta(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_\zeta^*(w)$:

$$k_\zeta(\tau) = \int_0^\infty S_\zeta^*(w) \cos w\tau \; dw,$$

$$S_\zeta^*(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k_\zeta(\tau) \cos w\tau \; d\tau.$$

Вместо дискретного спектра мы получили непрерывный, в котором каждой частоте $w \geqslant 0$ соответствует неотрицательная ордината $S_\zeta^*(w)$.

Хотя отрицательные частоты w физического смысла не имеют, для упрощения математических выкладок иногда целесообразно считать, что частоты изменяются в интервале $(-\infty; +\infty)$, и рассматривать спектральное разложение случайного процесса в комплексной форме. Соответствующие формулы для спектральной плотности и корреляционной функции получаются аналогично. Для этого в спектральном разложении (101.8) тригонометрические функции выражают через экспоненциальную функцию комплексного аргумента по формулам Эйлера:

$$\cos w_j\tau = \frac{e^{iw_j\tau} + e^{-iw_j\tau}}{2}; \quad \sin w_j\tau = \frac{e^{iw_j\tau} - e^{-iw_j\tau}}{2i}.$$

Далее, переходя к пределу при $T \to \infty$ $(\Delta w \to 0)$, получают выражения, связывающие корреляционную функцию $k_\zeta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\zeta(w)$, определяемую для любого $w \in (-\infty; +\infty)$ формулой:

$S_\zeta(w) = S^*_\zeta(|w|)/2.$

$$k_\zeta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\zeta(w)\, e^{iw\tau} dw, \tag{101.14}$$

$$S_\zeta(w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_\zeta(\tau)\, e^{-iw\tau} d\tau. \tag{101.15}$$

Формулы (101.14), (101.15) (формулы Винера — Хинчина) представляют собой взаимно обратные преобразования Фурье. Их действительная форма (101.16), (101.17) — взаимно обратные косинус— преобразования Фурье:

$$k_\zeta(\tau) = 2\int\limits_0^{\infty} S_\zeta(w) \cos w\tau \; dw, \tag{101.16}$$

$$S_\zeta(w) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} k_\zeta(\tau) \cos w\tau \; d\tau. \tag{101.17}$$

Перечислим свойства спектральной плотности $S_\zeta(w)$.

(1) $S_\zeta(w) \geqslant 0$,
(2) $S_\zeta(-w) = S_\zeta(w)$,
(3) $D\big(\zeta(t)\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\zeta(w)\; dw = 2\int\limits_0^{\infty} S_\zeta(w)\; dw.$

Свойства 1, 2 вытекают из определения 101.14 и того факта, что $S_\zeta(w) = S^*_\zeta(|w|)/2$ (докажите самостоятельно). Свойство 3 следует из формулы (101.16), поскольку $D\big(\zeta(t)\big) = k_\zeta(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\zeta(w)\,dw$.

Замечание 101.3. *Комплексная форма записи (101.14), (101.15) применяется и в тех случаях, когда случайный процесс $\zeta(t)$ (а следовательно, его корреляционная функция $k_\zeta(\tau)$ и спектральная плотность $S_\zeta(w)$) действительный.*

Пример 101.3. *Найти корреляционную функцию и дисперсию действительного случайного процесса со спектральной плотностью $S_\zeta(w)$:*

$$S_\zeta(w) = \begin{cases} S_0 & \textit{при} \quad |w| \leqslant w_0; \\ 0 & \textit{при} \quad |w| > w_0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: По формуле (101.16) получаем:

$$k_\zeta(\tau) = 2S_0 \int\limits_0^{w_0} \cos w\tau \; dw = \frac{2S_0 \sin w_0\tau}{\tau}.$$

Искомая дисперсия находится из свойства 3:

$$D\big(\zeta(t)\big) = 2S_0 \int\limits_0^{w_0} dw = 2S_0 w_0.$$

Пример 101.4. *Найти спектральную плотность действительного случайного процесса с корреляционной функцией $k_\zeta(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$.*

Р е ш е н и е: По формуле (101.15) получаем:

$$S_\zeta(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cdot e^{-iw\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - iw)\tau} d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+iw)\tau} d\tau \Bigg) =$$

$$= \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + w^2)}.$$

Пример 101.5. *Найти спектральную плотность действительного стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого линейно убывает по мере удаления от начала координат:*

$$k_\zeta(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\tau_0}|\tau| & \textit{при} \quad |\tau| \leqslant \tau_0 \\ 0 & \textit{при} \quad |\tau| > \tau_0, \quad \tau_0 > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: По формуле (101.17):

$$S_\zeta(w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\tau_0}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\cos w\tau \; d\tau = \begin{bmatrix} u = 1 - \dfrac{\tau}{\tau_0} & du = -\dfrac{d\tau}{\tau_0} \\ dv = \cos w\tau \; d\tau & v = \dfrac{\sin w\tau}{w} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi\tau_0 w^2}\,\big(1 - \cos w\tau_0\big).$$

101.8. Стационарный белый шум

Определение 101.15. *Распределением* $\delta(t)$ *называется предел последовательности функций* $\delta_\varepsilon(t)$*:*

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t), \quad \textit{где:} \quad \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \textit{при} \quad |t| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \textit{при} \quad |t| > \varepsilon. \end{cases}$$

График функции $\delta_\varepsilon(t)$ изображен на рис. 34. Можно доказать, что $\delta(t)$ обладает следующими свойствами:

(1) $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad t = 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq 0, \end{cases}$,

(2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - t_0)f(t)\;dt = f(t_0)$ для $\forall\; t_0 \in D(f)$,

(3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\;dt = 1$,

(4) $\displaystyle\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iwt}dw.$

Определение 101.16. *Белым шумом называют стационарный случайный процесс* $\zeta(t)$, *спектральная плотность которого постоянна:* $S_\zeta(w) = S_0$ *для* $w \in (-\infty; +\infty)$.

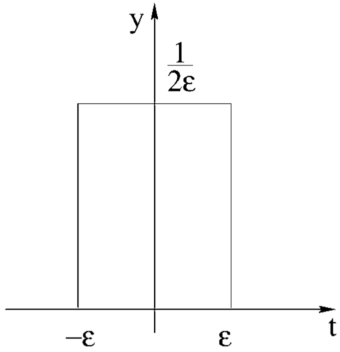


Рис. 34. *График функции* $\delta_\varepsilon(t)$

Найдём корреляционную функцию белого шума по формуле (101.14):

$$k_\zeta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{iw\tau} dw = 2\pi S_0 \delta(\tau). \tag{101.18}$$

Здесь мы воспользовались свойством 4 распределения $\delta(t)$.

Определение 101.17. *Коэффициент* $2\pi S_0$ *называется интенсивностью белого шума.*

Формула (101.18) означает в соответствии со свойством 1 дельта-функции некоррелированность любых двух его сечений $\zeta(t_1)$ и $\zeta(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Белый шум — математическая абстракция, неосуществимая на практике, т.к. невозможно реализовать случайный процесс, в котором одинаково были бы представлены все гармоники, а любые два как угодно близких сечения были бы некоррелированны. На практике довольствуются случайными процессами со спектральной плотностью, близкой к рассмотренной в примере 101.3 при больших w_0.

101.9. Статистические оценки характеристик случайного процесса

Пусть над случайным процессом $\zeta(t)$ произведено n наблюдений для k сечений (k моментов времени) и в результате получено $n \cdot k$ значений $x_i(t_j)$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. По этим наблюдениям находятся

- оценки математического ожидания $\widetilde{m_\zeta}(t_j)$ в k точках:

$$\widetilde{m_\zeta}(t_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t_j)}{n}, \quad j = 1, \ldots, k; \tag{101.19}$$

- дисперсии $\widetilde{S^2_\zeta}(t_j)$ в k точках:

$$\widetilde{S^2_\zeta}(t_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t_j)}{n} - \left(\widetilde{m_\zeta}(t_j)\right)^2, \quad j = 1, \ldots, k$$

- корреляционной функции $\overline{k_\zeta}(t_{1j}; t_{2l})$ в k^2 точках:

$$\widetilde{k_\zeta}(t_{1j}; t_{2l}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t_{1j}) \cdot x_i(t_{2l})}{n} - \widetilde{m_\zeta}(t_{1j}) \cdot \widetilde{m_\zeta}(t_{2l}), \tag{101.20}$$

$$j = 1, \ldots, k, \quad l = 1, \ldots, k.$$

После этого строятся зависимости $\widetilde{m_\zeta}(t)$, $\widetilde{S^2_\zeta}(t)$, $\widetilde{K_\zeta}(t_1; t_2)$. Если нужно, эти функции аппроксимируются аналитически.

Однако существует класс стационарных случайных процессов, для оценки характеристик которых достаточно усреднения по времени только одной реализации.

Определение 101.18. *Стационарный случайный процесс $\zeta(t)$ называется эргодическим, если его характеристики (математическое ожидание и корреляционная функция), найденные усреднением множества реализаций (101.18), (101.19), совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации $x(t)$, которая наблюдалась на достаточно большом интервале $(0; T)$.*

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса относительно математического ожидания является стремление к нулю его корреляционной функции $k_\zeta(\tau)$ при $\tau \to \infty$: $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_\zeta(\tau) = 0$.

Для эргодического стационарного процесса в качестве оценок его характеристик принимают усредненное по времени значение:

$$\widetilde{m_\zeta} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt, \qquad \widetilde{k_\zeta}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t+\tau)\,dt,$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - \widetilde{m_\zeta}$.

На практике интегралы вычисляют приближённо, например по формуле прямоугольников. Для этого $[0;T]$ делят на N одинаковых промежутков длиной $\Delta t = T/N$ каждый и выбирают в каждом из них точку t_i, например — середину. В этом случае оценки характеристик такого процесса примут вид:

$$\widetilde{m_\zeta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(t_i); \tag{101.21}$$

$$\widetilde{k_\zeta}(j\Delta t) = \frac{1}{N-j}\sum_{i=1}^{N-j} x(t_i)\cdot x(t_{i+j}) - (\widetilde{m_\zeta})^2, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{101.22}$$

Оценка (101.21) является несмещённой, оценка (101.22) — асимптотически несмещённой. Оценка для дисперсии получится из (101.22) при $j = 0$. Заметим, что при значениях j, близких к N (τ близко к T), точность оценки $\widetilde{k_\zeta}(j\Delta t)$ снижается (дисперсия растет, т.к. уменьшается $N-j$).

Практическое занятие 101. Дисперсионный анализ

Пример 101.1. *По двум независимым выборкам* $n_1 = 10$ *и* $n_2 = 15$ *из нормальных совокупностей получены* $s_1^2 = 0{,}98$ *и* $s_2^2 = 0{,}56$. *Определить, являются ли различия вычисленных параметров существенными или случайными при уровне значимости* 0,05.

Р е ш е н и е: Найдем

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} = \frac{0{,}98}{0{,}56} = 1{,}75.$$

с числами степеней свободы $k_1 = n_1 = 10-1 = 9$, $k_2 = n_2-1 = 15-1 = 14$. По таблице критических точек распределения F Фишера—Снедекора (приложение 5) по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $F_{\text{кр}} = 2{,}65$.

Так как $F_{\text{кр}} < F_{\text{набл}}$, дисперсии практически не отличаются друг от друга.

Пример 101.2. *Произведено по пять испытаний на каждом из четырёх уровней фактора F (см. таблицу 101.1). Методом дисперсионного анализа при уровне значимости* 0,05 *проверить нулевую гипотезу о равенстве теоретических математических ожиданий. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями. Результаты испытаний приведены в таблице.*

Таблица 101.1

Уровни фактора				
N	F_1	F_2	F_3	F_4
1	21	17	20	16
2	23	19	24	18
3	25	20	25	23
4	26	22	27	25
5	28	24	28	26
$\overline{x}_{\text{гр}_j}$	24,6	20,4	24,8	21,6

Р е ш е н и е:

Здесь $n = 5$, $k = 4$. Групповые средние в табл. 101.1 были определены по первой формуле (100.2). По второй формуле найдем

$$\bar{x} = 457/(4 \cdot 5) = 22{,}85.$$

Согласно формуле (100.2), общая сумма квадратов отклонений $\sum_{\text{общ}} = 246{,}55$. По формуле (100.3) найдем факторную сумму квадратов отклонений $\sum_{\text{факт}} = 72{,}15$, а по (100.4) остаточную сумму $\sum_{\text{ост}} = 174{,}4$. Как видим, сложение факторной и остаточной сумм приводит к общей сумме. Выражения (100.4) дают возможность определить факторную и остаточную дисперсии:

$$S^{*2}_{\text{факт}} = \frac{72{,}15}{4-1} = 24{,}05, \qquad S^{*2}_{\text{ост}} = \frac{174{,}4}{4\cdot(5-1)} = 10{,}9.$$

Наблюдаемое значение критерия $F_{\text{набл}} = 24{,}05/10{,}9 \approx 2,206$. Числа степеней свободы $k_1 = k-1 = 4-1 = 3$, $k_2 = k(n-1) = 4(5-1) = 16$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим критическую точку распределения Фишера-Снедекора (приложение 5)

$$F_{\text{кр}}(0{,}05; 3, 16) = 3{,}24.$$

Поскольку $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий не отвергаем. Это означает, что различие групповых средних незначимое.

Самостоятельная работа

Пример 101.3. *Проведена текущая аттестация студентов по пяти предметам. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости* 0,05 *проверить нулевую гипотезу о равенстве средней успеваемости по отдельным предметам. Исходные данные приведены в табл. 101.2.*

Таблица 101.2

Исходные данные примера 101.3					
N	Философия	Иностранный язык	Математика	Химия	Черчение
1	20	17	20	18	20
2	19	14	12	14	12
3	20	17	20	19	14
4	20	14	12	12	14
5	17	14	16	14	20
6	20	14	15	14	14
7	16	14	16	14	20
8	20	14	16	17	20
9	20	14	16	14	20
10	20	14	15	17	20
$\overline{x}_{\text{гр}}$	19,2	14,6	15,8	15,3	17,4

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	7802	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение таблицы приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0217	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0045
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

	Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$											
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Продолжение таблицы приложения 5

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

k1 - число степеней свободы большей дисперсии,
k2 - число степеней свободы меньшей дисперсии

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Вероятностное пространство

Логически завершенная современная теория вероятностей основывается на аксиоматике, предложенной выдающимся советским математиком А.Н.Колмогоровым в 1936г. и включает в себя как частный случай «классическое определение вероятности». Здесь данный материал изложен в соответствии с [11], [14], [17], [21].

Совокупность различных исходов (результатов) испытаний описывается множеством Ω, элементы которого называются элементарными событиями. Поскольку изучаемые в теории вероятностей события составляются из этих элементарных событий, они будут являться подмножествами Ω. Таким образом, наряду с Ω, рассматривается множество $\Im$ подмножеств Ω. Множество $\Im$ называется σ-алгеброй, если выполнены следующие требования:

1) $\Omega \in \Im, \quad \varnothing \in \Im$;

2) $A \in \Im \Rightarrow \overline{A} \in \Im$;

3) $A \in \Im, \quad B \in \Im \Rightarrow A \bigcup B \in \Im, \quad A \bigcap B \in \Im$;

4) $A_n \in \Im$ для $n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \Im, \quad \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \Im$.

Элементы $\Im$ в этом случае называются случайными событиями. В теории вероятностей в отличие от теории множеств принята специфическая терминология:

Ω — достоверное событие, $\omega \in \Omega$ — элементарное событие, $A \bigcup B = A + B, A \bigcup B = A \cdot B$, $\overline{A}$ — событие, противоположное к A, $\varnothing$ — невозможное событие, $A \bigcap B = \varnothing \Rightarrow$ несовместные события, $A \subset B \Rightarrow$ событие A благоприятствует наступлению события B.

Аксиомы вероятности.

1. Каждому случайному событию $A \in \Im$ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n$ попарно несовместны, то для конечной суммы $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

4. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ попарно несовместны, то для бесконечной суммы $P\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.

5. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ такие, что

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$, то: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$.

Из этих аксиом выводятся остальные теоремы теории вероятностей.

Множество элементарных событий Ω с заданной на нём σ-алгеброй $\Im$ и определённой на неотрицательной мерой $P(A)$, называется вероятностным пространством и обозначается $(\Omega, \Im, P)$.

Случайная величина $\xi = f(\omega)$ определяется как измеримая относительно такой меры P функция на Ω. Это означает, что для всех измеримых по Борелю множеств значений ξ (обозначим их A_ξ) их прообразы, т.е. множества A_ω, для которых $f(\omega) \in A_\xi$, должны принадлежать $\Im$ и для них, следовательно, должна быть определена вероятность $P\{\xi \in A_\xi\} = P\{A_\omega\}$.

В частности, для $A_\xi\{\xi : \xi < x\}$, где $\xi \in \Re$, эта вероятность называется функцией распределения случайной величины ξ:
$P\{\xi < x\} = P\{A_\omega\} = F(x)$.

Исходя из этого определения доказываются свойства функции распределения, изучаются различные виды распределений.

В заключение следует отметить, что изложенная схема аксиоматического построения в большей степени представляет интерес для специалистов в области теории вероятностей, занимающихся ее дальнейшим развитием и совершенствованием, а также для специалистов в области прикладной математики, занимающихся разработкой математических моделей с использованием аппарата теории вероятностей.

ОТВЕТЫ

85.12 $C = AB\ \bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$. **85.13** AC — выбранный шатен является отличником, $\bar{A}\bar{B}$ — выбрано два блондина, ABC — выбранные блондин и брюнет являются отличниками. **85.17** $P^* = 0{,}7$.
85.20 $P^*(A) = 0{,}7$

86.10 1/3. **86.11** 0,2. **86.12** а) 1/360; б) 1/720. **86.13** а) 0,057; б) 0., 237. **86.14** а) 0,012; б) 0,411; в) $0.265 \cdot 10^{-5}$. **86.15** 0,096. **86.16** 0,410. **86.17** 0,331. **86.18** 0,256. **86.19** 0,198. **86.20** 0,027.
86.21 0,25. **86.22** 0,218. **86.23** 0,067. **86.24** 0,019. **86.25** 0,007.
87.10 0,692. **87.11** 0,0475. **87.12** а) 0,1215; б) 0,996; в) 0,004. **87.13** 0,1136. **87.14** $0{,}483 \cdot 10^{-3}$. **87.15** $0{,}286 \cdot 10^{-3}$. **87.16** 0,681. **87.17** а) 0,077; б) $n \leqslant 152$. **87.18** 0,242. **87.19** 0,006. **87.20** а) 0,3; б) 0,6. **87.21** а) $\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$; б) $\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}$. **87.22** 0,191. **87.23** 0,333.
87.24 0,706; 0,970. **87.25** 0,651.

88.8 0,938. **88.9** 0,958 **88.10** 0,041. **88.11** 0,947. **88.12** а) 0,052; б) 0,898. **88.13** 0,583. **88.14** 0,519. **88.15** а) 0,960; б) 0,040.

89.14 0,313. **89.15** 0,016. **89.16** 470. **89.17** 0,070. **89.18** 0,950.
89.19 а) 0,677; б) 0,821; в) 0,179. **89.20** а) 0,084; б) 0,960. **89.21** 0,323.

89.22 $7 \leqslant m \leqslant 18$. **89.23** $0{,}132 \cdot 10^{-3}$. **89.24** 14.

90.15 $M(\xi) = 7,8$; $D(\xi) = 12,36$; $\sigma(\xi) = 3,5157$.

90.16

ξ	6	7	8	9
p	1/4	1/4	1/4	1/4

90.17

ξ	0	1	2	3
p	33/91	44/91	66/455	4/455

90.18

ξ	0	1	2	3
p	0,4	0,24	0,144	0,216

. **90.19**

ξ	3	4
p	0,1	0,9

.

90.20 $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}4$. **91.21** $M(\xi) = 45,5$.

91.11 $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 3, \\ 0{,}3 \text{ при } 3 < x \leqslant 5, \\ 0{,}7 \text{ при } 5 < x \leqslant 6, \\ 0{,}9 \text{ при } 6 < x \leqslant 9 \\ 1 \text{ при } x > 9. \end{cases}$ **91.12** 0,333.

91.13 $P(0 < \xi < 1) = 2^{-4}$; $M(\xi) = 1,6$.

91.14 $\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ \frac{3}{2}\sin(3x) \text{ при } 0 < x \leqslant \pi/3, \\ 0 \text{ при } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$. **91.15** $a = 1/64$, $\varphi(x) =$
$= \begin{cases} \frac{3}{64}x^2 \text{ при } x \in (0;4), \\ 0 \text{ при } x \notin (0;4); \end{cases}$

$P(2 < \xi < 3) = 19/64$. **91.16** $M(\xi) = \pi/2$, $D(\xi) = \frac{\pi^2}{4} - 2$.
91.17 $\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}$.

92.11

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

92.12

ξ	0	1	2	3	4
p	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

$M(\xi) = 1,2$, $D(\xi) = 0{,}84$. **92.13**

ξ	0	1	2	3	4	...
p	0,0498	0,1494	0,2241	0,2241	0,1681	...

92.14 $M(\xi) = 6$, $D(\xi) = 5,76$. **92.15** $M(\xi) = 2$, $D(\xi) = 2$. **92.16** 0,667.
92.17 а) 0,383; б)0,135;
93.11 а) 0,477; б) 0,341; в) 0,159. **93.12** а) 0,006; б) 0,947. **93.13** а) 0,012; б) 0,028. **93.14** $\pm 0{,}49$ см. **93.15** 0,383 см. **93.16** $-0{,}75 < \xi < 1,35$. **93.17** (99,7; 100,3).

94.8 0,993. **94.9** 0,027. **94.10** 0,941. **94.11** 0,031.
94.12 $M(\xi) = 0{,}295$; $D(\xi) \approx 0{,}024$. **94.13** $k = 0{,}5$; $M(\xi) \approx 1,33$; $D(\xi) \approx 0{,}22$; $\sigma(\xi) \approx 0{,}47$. **94.14** 0,497.

95.11 $M(\xi) = 2,98$; $M(\zeta) = 11,74$. **95.12** $P = \frac{16}{5^5} = 0{,}00512$.
95.13 $k = 1$, $\varphi(x, y) = 4xy\exp(-x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,
$P = 1 - (1 + R^2)\exp(-R^2)$. **95.14** $a = \frac{1}{\pi^2}$, $\varphi_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$,
$\varphi_\zeta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. **95.15** $a = 2$, $(3/4, 5/12)$.
95.16 $F(x, y) = \frac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x + y)]$, $M(\xi) = M(\zeta) = \frac{\pi}{4}$.
95.17 $\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \text{ при } |x| + |y| \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}; \\ 0 \text{ при } |x| + |y| > \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$.

96.8 $M(\zeta) = 0{,}515$, $M(\xi) = 0{,}132$, $r_{\xi\zeta} = -0{,}112$. **96.9** $r_{\xi\zeta} = 0{,}669$.
96.10 $D(\xi) = D(\zeta) = \pi^2 - 4 \approx 5,870$, $r_{\xi\zeta} = 0$.
96.11 $\sigma_\xi = \sigma_\zeta = \sqrt{\pi^2 + 8\pi - 32}/4 \approx 0{,}433$, $r_{\xi\zeta} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -0{,}245$.
96.12 $a = \frac{1}{2\pi\sqrt{14}} \approx 0{,}043$. **96.13** 0,279. **96.14** 0,6.
96.15 $e^{-2} - e^{-4{,}5} \approx 0{,}124$.

100.6 $t_{\text{кр}} = 1,70$, $T_{\text{набл}} = 2,54$. Нулевую гипотезу отвергаем.
100.7 $r^*_{xy} = 0{,}714$, $t_{\text{кр}} = 1,66$, $T_{\text{набл}} = 10{,}1$. Нулевую гипотезу отвергаем. **100.8** $z_{\text{набл}} = 1,59$, $Z_{\text{кр}} = 1,96$. Нулевая гипотеза не отвергается. Средний вес деталей различается незначимо.
100.10 $z_{\text{кр}} = 2,58$, $U_{\text{набл}} = 1,18$. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. **100.11** $U_{\text{набл}} = 1,85$, $u_{\text{кр}} = 1,645$. Нулевая гипотеза отвергается. Новая форма рекламы значимо эффективнее прежней.

Предметный указатель

F — Распределение Фишера—Снедекора, 191
F –распределение, 257

Асимметрия, 135
Бином Ньютона, 102
Бумага вероятностная, 238
Вариант, 178
Величина случайная, 62
Величина случайная двумерная, 142
Величина случайная дискретная, 63
Величина случайная непрерывная, 85
Величина случайная стандартная нормальная, 123
Величины случайные независимые, 68
Вероятность условная, 37
Выборка, 176
Выборка репрезентативная, 176
Выборочное среднее, 181
Гамма—функция, 190
Гипотеза статистическая, 226
Гистограмма, 179
Дисперсия, 69
Дисперсия выборочная, 182
Дисперсия остаточная, 163
Закон больших чисел Бернулли, 132
Закон больших чисел Чебышева, 131
Интенсивность белого шума, 284
Интервал доверительный, 191
Испытание, 10
Исход элементарный, 21
Коэффициент корреляции, 157
Коэффициент корреляции выборочный, 211
Коэффициент регрессии, 164
Критерий χ^2, 242
Критерий Пирсона, 241
Критерий Фишера, 256
Критерий согласия, 238
Метод наименьших квадратов, 202
Момент центральный, 134
Неравенство Чебышева, 129
Область критическая, 226
Объём выборки, 177
Отклонение выборочное среднее квадратическое, 182
Отклонение среднее квадратическое, 71
Оценка несмещённая, 188
Оценка состоятельная, 187
Оценка точечная, 187
Оценка эффективная, 188
Ошибка второго рода, 226
Ошибка первого рода, 226
Перестановка, 24
Плотность распределения, 87
Плотность распределения двумерной случайной величины, 148
Плотность спектральная, 280
Полигон относительных частот, 180
Правило решающее, 230
Процесс случайный, 269
Процесс случайный стационарный, 275

Процесс случайный стационарный эргодический, 285
Разложение спектральное, 278
Размещение, 25
Распределение χ^2, 244
Распределение χ^2 (хи-квадрат), 189
Распределение δ, 283
Распределение Пуассона, 103
Распределение Стьюдента, 190
Распределение Фишера–Снедекора, 256
Распределение биномиальное, 101
Распределение геометрическое, 104
Распределение гипергеометрическое, 28, 104
Распределение нормальное, 118
Распределение нормальное двумерное, 164
Распределение равномерное, 105
Распределение экспоненциальное, 108
Распределения Стьюдента, 193
Реализация случайного процесса, 269
Регрессия среднеквадратическая, 162
Регрессия среднеквадратическая линейная, 162
Ряд вариационный, 178
Сечение случайного процесса, 269
Событие достоверное, 11
Событие противоположное, 11
События независимые, 38
События несовместные, 11
События попарно несовместные, 11
События противоположное, 11
Совокупность генеральная, 176
Сочетание, 26
Спектр дискретный, 278
Сходимость по вероятности, 133
Теорема Лапласа интегральная, 51
Теорема Лапласа локальная, 51
Теорема сложения вероятностей, 23
Теорема центральная предельная, 133
Точка критическая, 227
Уравнение прямой регрессии выборочное, 213
Условное среднее, 212
Факториал, 24
Формула Бейеса, 40
Формула Бернулли, 48
Формула Пуассона, 55
Формула полной вероятности, 40
Функция Лапласа, 53
Функция корреляционная взаимная, 273
Функция распределения, 83
Функция случайная, 269
Функция случайного процесса корреляционная, 272
Центр распределения, 143
Частота относительная, 13
Частота условная, 14
Шум белый, 283
Эксцесс, 135

Список литературы

1. Берков Н.А. Применение пакета MathCad: *практикум.* – М.: МГИУ, 2006.

2. Берков Н.А.Применение пакета Maxima:*практикум.*–М.:МГИУ, 2009.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.

7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Учебник. Едиториал УРСС, 2005.

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. – М.: Высшая школа, 1986.

9. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet. – М.: Нолидж, 1999. – 512 с.

10. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н. Под ред. А.И. Кибзуна. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002.

11. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: Физматлит, 2007.

12. Курс математики для технических высших учебных заведений: учебное пособие: Часть III /Под ред. В.Б.Миносцева и Е.А.Пушкаря. – М.: МГИУ, 2001.

13. Курс математики для технических высших учебных заведений под ред. В.Б Миносцева и Е.А. Пушкаря: Учебное пособие: части I и II М.: МГИУ, 2011.

14. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.:, Наука, 1964.

15. Орлов А.И. Прикладная статистика. Учебник. М., Экзамен, М.:, 2004.

16. Плис А.И., Сливина Н.А. Matcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999.

17. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Наука, 1979.

18. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. Под ред. А.В.Ефимова – М.: Наука, 1984.

19. Сборник типовых расчётов по курсу математики для технических высших учебных заведений. /Под ред. В.Б.Миносцева и Е.А.Пушкаря. Учебное пособие: Часть II. – М.: МГИУ, 2011.

20. Сборник тестов по «Курсу математики для технических высших учебных заведений». Под ред. В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря. Часть II. М.: МГИУ, 2011.

21. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. – М.: Мир, 1967.

22. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

ЛР № 065466 от 21.10.97. Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10 от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com. 192029, Санкт-Петербург,
Общественный пер., 5. Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ
ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967; www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:
Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com
«Сова»: http://www.symplex.ru; «Ozon.ru»: http://www.ozon.ru
«Библион»: http://www.biblion.ru

Подписано в печать 09.08.13. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная.
Формат 84×108 $^{1}/_{32}$. Печать офсетная. Усл. п. л. 15,96. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера». 163002, г. Архангельск,
пр. Новгородский, д. 32. Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru