НЕВЕРОЯТНЫЕ ЧИСЛА ПРОФЕССОРА СТЮАРТА

PROFESSOR STEWART'S INCREDIBLE NUMBERS

IAN STEWART

PROFILE BOOKS

НЕВЕРОЯТНЫЕ ЧИСЛА ПРОФЕССОРА СТЮАРТА

ИЭН СТЮАРТ

Перевод с английского

анф

Москва
2016

УДК 511.1
ББК 22.1
С88

Переводчик Наталья Лисова
Научный редактор Андрей Родин, канд. филос. наук
Редактор Антон Никольский

Стюарт И.

С88 Невероятные числа профессора Стюарта / Иэн Стюарт ; Пер. с англ. — М.: Альпина нон-фикшн, 2016. — 422 с.

ISBN 978-5-91671-530-9

По сути, математика — это цифры, наш основной инструмент для понимания мира. В своей книге самый известный британский популяризатор математики, профессор Иэн Стюарт предлагает восхитительное знакомство с числами, которые нас окружают, начиная с привычных для нас комбинаций символов и заканчивая более экзотическими — факториалами, фракталами или постоянной Апери. На этом пути Стюарт рассказывает нам о простых числах, о кубических уравнениях, о понятии нуля, возможных вариантах кубика Рубика, о роли чисел в истории человечества и актуальности их изучения в наше время. С присущими ему остроумием и эрудицией Стюарт раскрывает перед читателем завораживающий мир математики.

УДК 511.1
ББК 22.1

ISBN 978-5-91671-530-9 (рус.)
ISBN 978-1-78283-1587 (англ.)

Содержание

Предисловие

Числа всегда завораживали меня. Мама научила меня читать и писать задолго до школы, но в первый школьный день, вернувшись домой, я пожаловался, что «мы ничего *не выучили!*». Подозреваю, что родители готовили меня к этому трудному дню, рассказывая, что в школе мы будем изучать множество интересных вещей, и я слишком близко к сердцу принял эту «откровенную пропаганду». Но очень скоро я начал изучать планеты и динозавров, а также учиться делать зверюшек из пластилина. И узнал много нового о числах.

Я до сих пор очарован числами и узнаю о них все новые и новые факты. Имейте в виду, я всегда готов подтвердить, что математика имеет множество разных сторон — к примеру, она занимается геометрическими фигурами, закономерностями, вероятностями, — но числа составляют фундамент всего здания. А каждое число обладает своей индивидуальностью. Некоторые особые числа возвышаются над остальными и, кажется, играют центральную роль во многих областях математики. Самое известное из таких чисел — число π, которое мы впервые встречаем в связи с окружностями, но которое имеет замечательное обыкновение выскакивать будто из ниоткуда в задачах, в которых вроде бы об окружностях и речи нет.

Большинство чисел, конечно, не может претендовать на такую заоблачную значимость, но, как правило, даже у самого скромного числа найдется какое-нибудь необычное свойство. У Дугласа Адамса в «Автостопом по Галактике»* число 42 было «Ответом на Основной Вопрос Жизни, Вселенной и Всего Остального». Адамс пояснил, почему он выбрал именно

* Дуглас А. Автостопом по Галактике — М.: АСТ, Астрель, 2012.

это число: короткий опрос среди друзей показал, что оно невыносимо скучное и не интересно абсолютно ничем. Но на самом деле это не так, что будет продемонстрировано в заключительной главе.

Эта книга организована с помощью чисел, хотя и не всегда в порядке возрастания. Наряду с главами 1, 2, 3 и так далее в ней есть также глава 0, глава 42, глава –1, глава $\frac{22}{7}$, глава π, глава 43 252 003 274 489 856 000 и глава $\sqrt{2}$. Очевидно, что множество других не менее возможных глав так и не смогли выбраться из числового ряда. Каждая глава начинается с краткого изложения основных тем, которые в ней содержатся. Не тревожьтесь, если такое введение покажется вам непонятным и загадочным, а также если в нем будут содержаться ничем не доказанные утверждения. Дальше все разъяснится.

Структура книги очень проста: в каждой главе речь идет об одном каком-нибудь интересном числе и объясняется, *почему* оно интересно. К примеру, число 2 интересно тем, что разница между четными и нечетными числами проявляется всюду в физике и математике; число 43 252 003 274 489 856 000 интересно потому, что это число состояний кубика Рубика.

Поскольку число 42 включено в книгу, в нем тоже должно быть что-то интересное. Ну, да, *кое-что* о нем можно рассказать.

Здесь я должен упомянуть песню Арло Гатри «Ресторан Алисы» — бесконечную музыкальную балладу, где подробно и с повторами рассказывается о множестве событий, включая вынос мусора. После десяти минут пения Гатри останавливается и говорит: «Но я пришел сюда поговорить с вами не об этом». Постепенно, однако, выясняется, что на самом деле он пришел говорить именно об этом, но мусор — лишь часть картины. А теперь пора и мне последовать примеру Арло Гатри: на самом деле это книга не о числах.

Числа — это врата, воспользовавшись которыми мы можем погрузиться в мир связанной с ними поразительной математики. *Каждое число — особое.* Если вы начинаете воспринимать их как нечто индивидуальное, они становятся похожи на старых друзей. Каждое может рассказать собственную историю. Часто эта история ведет к множеству других чисел, но по-настоящему важно, что связывает их математика. Числа — как действующие лица в драме, где главное — сюжет и собственно драма. Но драма невозможна без действующих лиц.

Чтобы избежать чрезмерной дезорганизации, я поделил книгу на части в соответствии с характером чисел: небольшие натуральные числа, дроби, действительные числа, комплексные числа, бесконечность… За несколькими неизбежными исключениями материал излагается в логической последовательности, так что более ранние главы закладывают фундамент для более поздних даже там, где тема полностью меняется. Такой подход сказывается на организации чисел и требует некоторых компромиссов. Самый существенный из них касается комплексных чисел. Они появляются очень рано, потому что без них я не смогу говорить о некоторых особенностях более привычных чисел. Точно так же иногда какая-то сложная тема появляется вдруг в неожиданном месте, потому что это место — единственное, где ее есть смысл упомянуть. Если вы встретите один из таких пассажей и обнаружите, что воспринимаете его с трудом, пропустите и двигайтесь дальше. Вы сможете вернуться к нему позже.

Эта книга — своего рода текстовый справочник к моему приложению для iPad под тем же названием «Невероятные числа профессора Стюарта» (Professor Stewart's Incredible Numbers). Чтобы читать книгу, вам не нужно искать это приложение, и наоборот: чтобы пользоваться приложением, книга не нужна. Более того, пересечений между ними относительно немного. Они просто дополняют друг друга, потому что каждый из двух носителей может делать что-то, чего не может другой.

Числа и правда невероятны — не в том смысле, что нельзя верить ничему, что вы о них слышите, но в положительном смысле: в них всегда есть что-то, по поводу чего можно воскликнуть «Вау!». И, чтобы почувствовать это, не обязательно их складывать. Можно посмотреть, как развивалась история чисел, оценить красоту закономерностей, узнать, как они используются, поудивляться сюрпризам: «Никогда не думал, что число 56 так очаровательно!» Да, удивительно, но это действительно так.

Другие числа тоже невероятно интересны. Включая и число 42.

Числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … Что может быть проще? Тем не менее именно числа — возможно, больше, чем что-либо — позволили человечеству вытащить себя из грязи и устремиться к звездам.

Отдельные числа имеют собственные характерные черты и ведут в самые разные области математики. Однако, прежде чем рассматривать числа по отдельности, нам стоит бросить беглый взгляд на три серьезных вопроса: как возникли числа? Откуда взялась концепция числа? И *что такое,* собственно, числа?

Происхождение чисел

Около 35 000 лет назад, в верхнем палеолите, неизвестный человек вырезал 29 зарубок на малой берцовой кости павиана. Кость эта была найдена в пещере в горах Лебомбо, что в Свазиленде, а потому так и называется — «кость из Лебомбо». Считается, что это счетная бирка — штука, на которой записывают числа в виде серии зарубок: |, ||, ||| и так далее. В лунном месяце 29,5 суток, так что это может быть примитивный лунный календарь — или запись женского менструального цикла. Или, вообще говоря, случайный набор надрезов. Этакие каракули на кости.

Еще одну счетную бирку с 55 отметками, на этот раз на волчьей кости, нашел в Чехословакии в 1937 г. Карел Абсолон. Ее возраст около 30 000 лет.

В 1960 г. бельгийский геолог Жан Эйнзелен де Брокур обнаружил еще одну малую берцовую кость павиана с насечками среди остатков крохотной рыболовной деревушки, попавшей под извержение вулкана и погребенной под слоем пепла. Стоянка рыболовов располагалась в современном Ишанго, районе на границе Уганды и Конго. Возраст кости — примерно 20 000 лет.

Простейшая интерпретация кости из Ишанго — это опять же счетная бирка. Одни антропологи идут еще дальше и находят в ней элементы арифметической структуры, такие как умножение, деление и простые числа; другие считают, что это шестимесячный лунный календарь; третьи же убеждены, что насечки на кости сделаны для того, чтобы костяной инструмент было удобнее держать в руке, и что в нем нет никакого математического смысла.

Рис. 1. Кость из Ишанго спереди и сзади. Музей естественных наук, Брюссель

Находка, безусловно, интригующая. На кости имеется три серии насечек. В центральной серии присутствуют числа 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7. Дважды три — 6, дважды четыре — 8, а дважды пять — 10; однако последняя пара чисел располагается в обратном порядке, а 7 вообще никак не укладывается в схему. В левой серии располагаются группы по 11, 13, 17, 19 насечек; это простые числа в интервале от 10 до 20. Правая серия дает нам нечетные числа 11, 21, 19, 9. Сумма чисел как в правой, так и в левой части равна 60.

Проблема с интерпретацией подобных образцов состоит в том, что *в любой* серии не слишком больших чисел трудно не найти никаких закономерностей. К примеру, в табл. 1 приведены площади десяти островов Багамского архипелага, занимающих места с 11-го по 20-е по площади среди всех островов. Чтобы внести дополнительный элемент случайности, я расположил их в алфавитном порядке. Поверьте, это было первое, что пришло мне в голову. Признаюсь, что я заменил бы их чем-нибудь другим, если бы эти числа не оправдали моих надежд, но они оправдали — и мне не пришлось ничего менять.

Итак, какие «закономерности» можно заметить в этом наборе чисел? Там множество коротких последовательностей чисел, обладающих общими чертами.

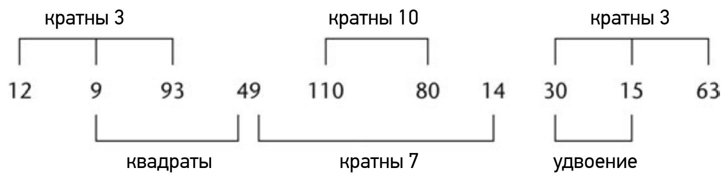


Рис. 2. Кажущиеся закономерности в площадях Багамских островов

Для начала: весь список получился чудесно симметричным. С каждой стороны стоит по три числа, делящихся на три. В середине имеется пара чисел, кратных 10, по бокам от которых стоят два числа, кратные 7. Более того, имеют место два квадрата: $9 = 3^2$ и $49 = 7^2$; то и другое — квадрат *простого числа*. Еще одна соседняя пара — 15 и 30; одно из чисел вдвое больше другого. В последовательности 9–93–49 в каждом из чисел присутствует цифра 9. Каждое последующее число то больше, то меньше предыдущего, за исключением цепочки 110–80–14. Да, и вы заметили, что среди этих десяти чисел нет ни одного простого?

Сказанного достаточно. Еще одна проблема с костью из Ишанго состоит в том, что найти какие бы то ни было дополнительные данные в пользу любой конкретной интерпретации насечек практически невозможно. Бесспорно, история весьма интригующая. Числовые головоломки всегда производят завораживающее впечатление. Так что приведем менее спорный пример.

Название	Площадь в квадратных милях
Берри	12
Бимини	9
Крукед-Айленд	93
Малый Инагуа	49
Маягуана	110
Нью-Провиденс	80
Рэггид-Айленд	14
Рам-Ки	30
Самана-Ки	15
Сан-Сальвадор	63

Таблица 1

Десять тысяч лет назад на Ближнем Востоке для записи чисел использовались специальные глиняные бирки; числа эти, скорее всего, были связаны с налогообложением или, может быть, удостоверяли право владения. Самые древние бирки найдены при раскопках тепе (холмов) Асьяб и Гандж-и-Дарех — двух археологических памятников в иранских горах Загрос. Бирки представляли собой небольшие комочки глины разной формы, некоторые из них отмечены определенными символами. Считается, что шарик со знаком + обозначал одну овцу; семь таких шариков, соответственно, обозначали семь овец. Чтобы не делать слишком много шариков, имелись бирки другой формы, обозначавшие сразу десять овец. Были специальные бирки для десяти коз и так далее. Археолог Дениза Шмандт-Бессера сделала вывод, что счетные бирки обозначали основные товары того времени: зерно, скот, кувшины масла.

К 40 в. до н. э. счетные бирки нанизывали на бечевку, как бусы. Однако такое число несложно изменить, добавив или убрав «бусины», поэтому были введены специальные меры предосторожности. Весь набор бирок оборачивали в глину, которую затем обжигали. Любой спор о числах можно было разрешить, разбив глиняную обертку. С 35 в. до н. э., чтобы не ломать каждый раз «документ», бюрократы древней Месопотамии начали делать надпись на «конверте», перечисляя содержащиеся внутри бирки.

Затем до какого-то умника дошло, что надпись снаружи делает бирки внутри лишними. Результатом стало появление системы письменных числовых символов, проложивших дорогу всем последующим системам числовой нотации и, возможно, письменности вообще.

Рис. 3. Глиняный конверт и бухгалтерские бирки, период Урук, г. Сузы (Шуш)

Книга, которую вы держите в руках, посвящена в первую очередь не истории, поэтому более поздние системы числовой записи я буду рассматривать по мере их появления в связи с конкретными числами. К примеру, о десятичной системе в древности и современности речь пойдет в главе 10. Однако, как заметил великий математик Карл Фридрих Гаусс, важна не система записи, а понятия. Дальнейшие темы станут более понятными, если рассматривать их в контексте меняющихся представлений человечества о числах. Поэтому мы начнем с краткого обзора основных числовых систем и кое-какой важной терминологии.

Постоянно расширяющаяся числовая система

Мы склонны думать о числах как о чем-то раз и навсегда зафиксированном и неизменном — как о свойстве природы. На самом деле числа — хотя и человеческое изобретение, но очень полезное, потому что числа помогают нам описать и представить различные стороны окружающего мира. К примеру, сколько в вашей отаре овец или каков возраст Вселенной. Природа раз за разом удивляет нас, ставя все новые вопросы, ответы на которые иногда требуют разработки новых математических концепций. Иногда внутренние потребности математики дают ученым подсказку для новых открытий. Время от времени эти потребности и внешние задачи приводят математиков к расширению числовой системы и изобретению новых разновидностей чисел.

Мы уже видели, что первые числа появились как метод счета всевозможных вещей. В Древней Греции поначалу список чисел выглядел, как 2, 3, 4 и так далее; единица была особым понятием и не считалась «настоящим» числом. Позже, когда такое представление о числах начало казаться очень уж глупым, единицу тоже стали считать числом.

Следующим серьезным шагом вперед в расширении числовой системы стало введение дробей. Это очень полезная штука, если вам нужно разделить некий товар на несколько человек. Если три человека получат равные доли от двух мешков зерна, каждый из них получит по $\frac{2}{3}$ мешка.

Древние египтяне представляли дроби тремя разными способами. У них имелись специальные иероглифы для $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Кроме того, они использовали отдельные части уаджета, или ока Ра, для обозначения единицы, деленной на первые шесть степеней двойки. Наконец, они придумали запись дроби в виде «единица над чем-то»: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и так далее. Все остальные дроби они выражали как сумму различных долей единицы. К примеру,

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.$$

Рис. 4. Слева: египетские иероглифы, обозначающие $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. В середине: око Ра (уаджет). Справа: полученные из него иероглифы дробей

Неясно, почему они не записывали $\frac{2}{3}$ как $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, но факт остается фактом: они это не делали.

Число нуль появилось намного позже, вероятно, потому, что особой нужды в нем не было. Если у тебя вообще нет овец, их не нужно считать или переписывать. Нуль сначала был введен как символ, обозначение и не считался числом как таковым. Но когда (см. главу –1) китайские и индийские математики ввели отрицательные числа, 0 тоже пришлось считать числом. К примеру, $1 + (-1) = 0$, а сумма двух чисел, очевидно, тоже должна считаться числом.

Математики называют ряд чисел

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

натуральными числами. Если добавить сюда же отрицательные числа, получатся *целые*

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Дроби, нуль и отрицательные дроби образуют *рациональные числа*.

Число является *положительным,* если оно больше нуля, и *отрицательным,* если оно меньше нуля. Таким образом, любое число (будь то целое или рациональное) обязательно попадает в одну из трех категорий: оно либо положительное, либо отрицательное, либо нуль. Числа, используемые при подсчете

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

это положительные целые. Такая договоренность привела к возникновению одного достаточно неуклюжего термина: натуральные числа, то есть целые числа

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

часто называют *неотрицательными* целыми числами. Извините, так получилось*.

Долгое время дроби были вершиной раздела математики, описывающего числа. Но древние греки доказали, что нет такой дроби, квадрат которой в точности равен 2. Позже это утверждение было сформулировано как «число $\sqrt{2}$ иррационально», то есть не является рациональным. Греки пользовались более неуклюжим выражением для обозначения того же самого, но они уже знали, что число $\sqrt{2}$ должно существовать: согласно теореме Пифагора, это длина диагонали квадрата со стороной 1. Так что потребовались дополнительные числа: рациональные уже не справлялись. Греки нашли сложный геометрический метод работы с иррациональными числами, но он не удовлетворял всех потребностей.

Следующий шаг к современной концепции числа стал возможен после изобретения десятичной запятой (или точки) и вообще десятичной записи числа. При этом появилась возможность представления иррациональных чисел с очень высокой точностью. К примеру,

$$\sqrt{2} \sim 1{,}4142135623$$

---

* В русской математической традиции натуральными называют лишь числа 1, 2, 3,…, не относя к ним нуль. — *Прим. пер.*

верно до десяти знаков после запятой (здесь и в других местах символ $\sim$ означает «приближенно равно»). Это выражение неточно; квадрат приведенного числа на самом деле равен

$$1{,}9999999979325598129.$$

Вот несколько лучшая аппроксимация, верная до двадцати знаков после запятой:

$$\sqrt{2} \sim 1{,}41421356237309504880.$$

Впрочем, она тоже неточна. Однако в некотором строго логическом смысле бесконечно длинный ряд десятичных знаков все же точен. Разумеется, записывать такие выражения полностью невозможно, но можно обозначить некоторые условия, при которых они имеют смысл.

Бесконечные десятичные дроби (включая, кстати говоря, и конечные, которые можно интерпретировать как дроби, заканчивающиеся бесконечным числом нулей) называются *действительными (или вещественными) числами,* отчасти потому, что они непосредственно соответствуют измерениям в реальном мире — длинам, весам и другим величинам. Чем точнее измерение, тем больше десятичных знаков потребуется для его записи; чтобы записать точную величину, их потребуется бесконечное количество. Как ни странно, именно вещественные числа представлены как бесконечные дроби, которые полностью записать попросту невозможно. Допускаются также и отрицательные вещественные числа.

До XVIII в. никакие другие математические концепции не считались настоящими числами. Однако уже в XV в. некоторые математики задавались вопросом о возможном существовании еще одного типа числа: квадратного корня из минус единицы, то есть числа, которое при умножении на самого себя дает –1. На первый взгляд, это безумная идея, поскольку квадрат любого действительного числа положителен или равен нулю. Однако оказывается, что имеет смысл проявить настойчивость и снабдить число –1 квадратным корнем, для обозначения которого Леонард Эйлер ввел символ i. Это первая буква слова «воображаемый» (*imaginary* в английском, латинском, французском и немецком языках); число получило такое называние, чтобы отличаться от старых добрых действительных чисел. К несчастью, это вызывало к жизни много ненужного мистицизма — Готфрид Лейбниц напустил тумана и скрыл ключевой факт, назвав i «чем-то средним между существующим и несуществующим». А именно: и действительные, и «воображаемые» числа имеют в точности одинаковый логический статус. То и другое — человеческие концепции, помогающие моделировать реальность, но сами они не реальны.

Существование числа i вынуждает нас ввести множество других новых чисел, без которых невозможно осуществлять арифметические действия; речь идет о числах вида $2 + 3i$. Они называются *комплексными числами,* без которых математика не в состоянии обходиться уже несколько столетий. Этот забавный, но истинный факт может оказаться новостью для большей части рода человеческого, потому что в школьной математике комплексные числа встречаются редко. Не потому, что они не важны, а потому, что связанные с ними идеи слишком сложны и применение их не просто.

Для обозначения основных числовых систем математики пользуются особыми значками. Я не буду дальше их использовать, но вам, вероятно, стоит один раз на них посмотреть:

$\mathbb{N}$ = множество всех натуральных чисел 0, 1, 2, 3, …;
$\mathbb{Z}$ = множество всех целых чисел …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …;
$\mathbb{Q}$ = множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$= множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$= множество всех комплексных чисел.

Эти системы вкладываются одна в другую, как матрешки:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, где символ $\subset$ из теории множеств означает или «содержится в». Обратите внимание: каждое целое число, к примеру, является также рациональным; так, целое число 3 есть также дробь $\frac{3}{1}$. Обычно мы так не пишем, но, в принципе, оба варианта записи обозначают одно и то же число. Аналогично, каждое рациональное число также является действительным, а каждое действительное — комплексным. Новые числовые системы включают в себя более старые, а не заменяют их.

Но даже комплексные числа — не предел расширения числовой системы, которым математики занимались на протяжении столетий. Существуют, например, кватернионы $\mathbb{H}$ и октонионы $\mathbb{O}$ (см. главу 4). Однако их уже удобнее рассматривать в рамках алгебры, а не арифметики. Поэтому я закончу упоминанием еще более парадоксального числа — бесконечности. С философской точки зрения бесконечность отличается от традиционных чисел и не принадлежит ни к одной из стандартных числовых систем, начиная от натуральных чисел и заканчивая комплексными. Тем не менее она долгое время болталась где-то с краю, похожая на число, но все же не число как таковое. Болталась до тех пор, пока Георг Кантор не вернулся к точке старта — к счету — и не показал, во-первых, что бесконечность — все же число в смысле возможности счета, а во-вторых, что существуют бесконечности *разных размеров*. Среди них можно назвать $\aleph_0$ — количество натуральных чисел и c — количество вещественных чисел, которое больше. *Насколько* больше, дело темное: это зависит от того, какую систему аксиом использовать для формализации математики.

Но оставим это до того момента, пока не наработаем достаточного чутья на привычных числах. Что приводит меня к третьему вопросу.

Что такое число?

Вопрос, кажется, несложный, и это на самом деле так. А вот ответ на него совсем не прост.

Мы все умеем пользоваться числами. Мы все знаем, как выглядят семь коров, или семь овец, или семь стульев. Мы все можем посчитать до семи. Но *что такое* семь?

Это не символ 7. Символ — дело произвольного выбора, и в разных культурах для обозначения одного и того же числа используются разные знаки. В арабской математической традиции 7 обозначается как ٧, в китайской — 七, или в более формальном варианте 柒.

Это и не слово «семь», которое по-английски было бы *seven,* по-французски — *sept,* по-немецки — *sieben*.

Примерно в середине XIX в. некоторые логически мыслящие математики вдруг поняли, что, хотя все на свете не одну тысячу лет с удовольствием пользуются числами, никто не знает, что это на самом деле такое. И они вслух задали вопрос, который задавать, по всей видимости, не следовало: *что такое* число?

Этот вопрос хитрее, чем кажется. Число — это не что-то, что можно показать кому-то в реальном физическом мире. Это абстракция, ментальная человеческая концепция — да, извлеченная из реальности, но *не реальная* сама по себе.

Возможно, это звучит странно и даже тревожно, но числа в этом отношении не одиноки. Еще один знакомый пример — «деньги». Все мы знаем, как заплатить за что-то и получить сдачу, и делаем это — по крайней мере нам так кажется, — обмениваясь деньгами. Таким образом, при мысли о деньгах на ум приходят монеты и купюры в карманах или кошельках. Однако все не так просто. Если мы пользуемся кредитной карточкой, то ни монеты, ни купюры при оплате покупки не переходят из рук в руки. Вместо этого по информационной системе компании, обслуживающей карточку, передаются сигналы, которые затем поступают в наш банк, и числа на нескольких банковских счетах — наших, магазина, обслуживающей компании — меняются. Когда-то на британской банкноте номиналом 5 фунтов стерлингов было написано: «Я обещаю заплатить носителю сего по первому требованию сумму в пять фунтов».

Значит, это вовсе не деньги, а всего лишь обязательство о выплате денег. При случае такую купюру можно было отнести в банк и обменять на золото, которое считалось *настоящими* деньгами. Сейчас банк готов лишь обменять вашу купюру на другую того же номинала. Но и золото на самом деле не было настоящими деньгами; это было всего лишь одно из материальных воплощений денег. В качестве доказательства можно вспомнить о том, что сегодня стоимость золота не фиксирована.

Так что же, деньги — это число? Да, но только в пределах особого юридического контекста. Написав на листочке бумаги $1 000 000, вы не превратитесь в одночасье в миллионера. *Деньгами* деньги становятся лишь в рамках человеческих договоренностей о том, как следует представлять денежные суммы и как обменивать их на вещи или другие суммы в другой валюте. Главное — не что такое деньги, а что вы с ними делаете. Деньги — это абстракция.

То же можно сказать и о числах. Но это, в общем-то, не ответ, потому что вся математика абстрактна. Мало кто задумывался о том, при помощи какого *рода* абстракции можно было бы определить понятие «число». В 1884 г. немецкий математик по имени Готтлоб Фреге написал книгу «Основы арифметики» (Die Grundlagen der Arithmetik) и изложил в ней основные принципы, на которых базируется концепция чисел. Десять лет спустя он пошел еще дальше и попытался вывести эти принципы из фундаментальных законов логики. Его «Основные законы арифметики» (Grundgesetze der Arithmetik) были изданы в двух томах, первый из которых вышел в 1893 г., а второй — в 1903 г.

Фреге начал с процесса счета и сосредоточился не на числах, которые мы при этом используем, а на предметах, которые считаем. Если я поставлю на стол семь чашек и посчитаю их «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7», то самым важным объектом здесь, на первый взгляд, будут числа. Фреге с этим не согласился: он думал о чашках. Система счета работает до тех пор, пока у нас есть набор чашек, которые, собственно, мы и хотим сосчитать. С другим набором у нас, строго говоря, может получиться другое число. Фреге назвал наборы объектов, которые мы считаем, *классами*. Сосчитав, сколько чашек содержит данный конкретный класс, мы устанавливаем соответствие между этим классом чашек и числовыми символами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

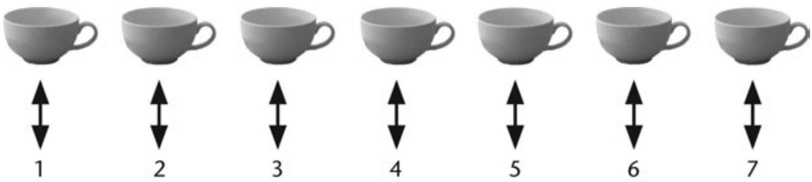


Рис. 5. Соответствие между чашками и числовыми символами

Точно так же можно установить соответствие между объектами и числами, если рассмотреть класс блюдец.

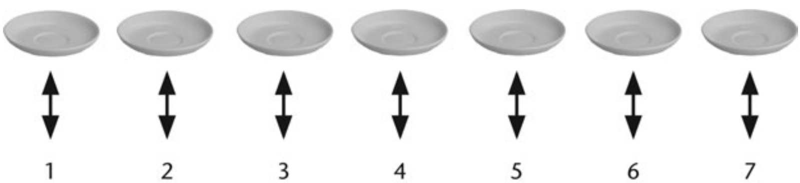


Рис. 6. Соответствие между блюдцами и числами

В данном случае можно сделать вывод, что класс блюдец содержит столько же (то же число) блюдец, что и класс чашек — чашек. Мы даже знаем, сколько именно: семь.

Все это может показаться очевидным до банальности, но Фреге понял, что эти утверждения сообщают нам нечто весьма глубокое. А именно, что мы можем доказать, что класс блюдец содержит столько же блюдец, сколько класс чашек содержит чашек, без использования символов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и даже не зная, сколько именно в них содержится чашек или блюдец. Для этого достаточно установить соответствие между классом чашек и классом блюдец.

Рис. 7. Чтобы установить соответствие между чашками и блюдцами, не нужны числовые символы

Формально такой вид соответствия называется взаимно однозначным: каждой чашке соответствует в точности одно блюдце, а каждому блюдцу — в точности одна чашка. Счет не работает, если вы пропускаете чашки или считаете одну и ту же чашку несколько раз. Мы будем называть это просто соответствием, не забывая при этом о формальном условии.

Кстати говоря, если вы когда-нибудь удивлялись тому, что детям в начальной школе приходится множество коров соотносить с множеством цыплят, соединяя тех и других карандашными линиями, и проделывать другие аналогичные «операции», то благодарить за все это мы должны Фреге. Некоторые педагоги надеялись (и, возможно, надеются до сих пор), что такой метод помогает развить у ребенка чутье на числа. Я склонен считать, что этот подход продвигает логику в ущерб психологии и только запутывает представления детей о «фундаментальном», но давайте не будем начинать здесь «математические войны».

Фреге пришел к выводу, что в основе того, что мы понимаем под «числом», лежит установление отношений между классами при помощи соответствия. Подсчет числа объектов, содержащихся в классе, сводится к установлению соответствия этого класса с неким стандартным классом, члены которого обозначены условными символами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и так далее или другими в зависимости от конкретной культуры. Но Фреге не считал, что концепция числа должна различаться в разных культурах, поэтому он предложил способ вообще избавиться от произвольных символов. Точнее говоря, он изобрел универсальный суперсимвол, одинаковый во всех культурах. Но это был не тот символ, который можно записать на бумаге: это был чисто концептуальный символ.

Он начал с того, что указал, что члены любого класса сами тоже могут являться классами. Это не обязательно, но и не запрещено. Обычный бытовой пример — коробка консервных банок с тушеной фасолью: в коробке содержатся банки, в банках — бобы. Так что классы вполне можно включать в другие классы в качестве членов.

Число «семь» связано через соответствие с любым классом, который можно соотнести с нашим классом чашек, или со связанным с ним классом блюдец, или с классом, содержащим символы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Можно, конечно, выбрать среди всех этих классов один и назвать его числом, но это произвольное решение, которому недостает элегантности и убедительности. Так почему бы нам не пойти до конца и не использовать все эти классы одновременно? Тогда «семь» можно определить как *класс всех классов,* которые соответствуют хотя бы одному (а значит, всем) из только что упомянутых классов. Сделав это, мы можем сказать, насчитывает ли некий данный класс семь членов, попросту проверив, входит ли он в этот класс классов. Для удобства мы можем повесить на этот класс классов табличку «семь», но сам он имеет смысл в любом случае, даже если мы этого не сделаем. Таким образом Фреге отделил число от его произвольного названия или столь же произвольного символа для его обозначения.

После этого он смог определить число вообще: это класс тех классов, которые находятся в соответствии с данным классом (а следовательно, и друг с другом). Именно класс подобного типа я имел в виду, когда говорил о суперсимволе. Это блестящая идея, если вам нравится подобный способ мышления. По существу, вместо того чтобы выбрать для числа название, мы концептуально объединяем *все возможные названия* в единый объект и используем этот объект вместо названия.

Сработал ли метод Фреге? Об этом вы можете узнать позже, в главе $\aleph_0$.

Первые десять

Самые известные среди всех чисел — натуральные числа от 1 до 10.

Каждое из них индивидуально и обладает необычными чертами, которые выделяют его среди остальных.

Знакомство с особыми свойствами этих чисел делает каждое из них понятным, дружественным и интересным объектом.

Скоро вы тоже станете математиком.

1

Неделимая единица

Самое маленькое положительное целое число — это 1. Это неделимая единица арифметики: единственное положительное число, которое невозможно получить путем сложения двух меньших положительных чисел.

Основа концепции числа

С числа 1 мы начинаем счет. Из любого заданного числа можно получить следующее, прибавив к нему единицу:

$$2 = 1 + 1,$$
$$3 = (1 + 1) + 1,$$
$$4 = ((1 + 1) + 1) + 1$$

и так далее. Скобки говорят о том, какие операции нам следует выполнять первыми. Как правило, скобки опускают, поскольку оказывается, что в данном случае порядок операций не имеет значения, однако лучше всего соблюдать осторожность с самого начала.

Исходя из этих определений и основных законов алгебры, которые при формальном логическом изложении следует сформулировать явным образом, мы можем доказать даже знаменитую теорему «$2 + 2 = 4$». Доказательство укладывается в одну строчку:

$$2 + 2 = (1 + 1) + (1 + 1) = ((1 + 1) + 1) + 1 = 4.$$

В XX в., когда некоторые математики пытались подвести под математику прочный логический фундамент, они использовали ту же идею, но по техническим причинам начинали с 0 (см. главу 0).

Число 1 выражает важную математическую идею: идею *единственности*. Математический объект, обладающий каким-то конкретным свойством, является единственным, если этим свойством обладает только он один. К примеру, 2 — это единственное четное простое число. Единственность — важное свойство, поскольку оно позволяет доказать, что какой-то загадочный математический объект на самом деле является тем, о чем мы уже знаем. К примеру, если мы можем доказать, что некое неизвестное положительное число n одновременно четное и простое, то получается, что n должно быть равно 2. Или более сложный пример: додекаэдр — единственный правильный многогранник с пятиугольными гранями (см. главу 5). Поэтому если в каких-то математических выкладках мы встречаем правильный многогранник с пятиугольными гранями, мы сразу, без дальнейших разбирательств, понимаем, что это должен быть додекаэдр. А все остальные свойства додекаэдра мы получаем в придачу в качестве бесплатного приложения.

Таблица умножения на единицу

Никто и никогда не жалуется на то, что ему приходится зубрить таблицу умножения на 1: «Одиножды один — один, одиножды два — два, одиножды три — три…» Любое число при умножении на 1 или при делении на 1 остается неизменным:

$$n \times 1 = n \qquad n : 1 = n.$$

Это единственное число, которое ведет себя подобным образом.

Вследствие этого единица равна собственному квадрату, кубу и всем остальным степеням:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1,$$
$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1,$$
$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

и так далее. Единственное другое число, обладающее таким же свойством, это 0.

По этой причине число 1, как правило, опускается в алгебре, если появляется в какой-то формуле в качестве коэффициента. К примеру, вместо $1x^2 + 3x + 4$ мы пишем просто $x^2 + 3x + 4$. Единственное другое число, с которым поступают сходным образом, — это 0; с ним происходит нечто еще более радикальное: вместо $0x^2 + 3x + 4$ мы пишем $3x + 4$, просто отбрасывая слагаемое $0x^2$.

Простое или нет?

Раньше число 1 считалось простым, но сегодня оно таковым не является. Число, разумеется, не изменилось, изменилось определение «простого» числа.

Некоторые числа можно получить путем перемножения двух других чисел: так, $6 = 2 \times 3$, а $25 = 5 \times 5$. Такие числа называются *составными*. Но есть числа, которые невозможно получить таким способом: они называются *простыми*.

Согласно этому определению, 1 — простое число, и еще 150 лет назад оно таковым и считалось. Но затем оказалось, что удобнее рассматривать 1 как исключительный случай. Сегодня 1 не считается ни простым, ни составным числом, а рассматривается как *единица*. Я скоро объясню почему, но сначала нам потребуется еще несколько идей.

Последовательность простых чисел начинается как

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47

и выглядит совершенно нерегулярной, если исключить несколько простых закономерностей. Все простые числа, за исключением 2, нечетные, поскольку любое четное число делится на 2. Только 5 может заканчиваться на 5, и никакое простое число не может заканчиваться на 0, поскольку все такие числа делятся на 5.

Любое натуральное число больше 1 можно выразить в виде произведения простых чисел. Это действие называется *факторизацией,* или *разложением на простые множители,* а задействованные простые числа называются *простыми множителями* числа. Более того, разложить число на простые множители можно единственным способом, если не учитывать порядок перемножения простых чисел. К примеру,

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 5 \times 3 \times 2 \times 2$$

и так далее, но по существу единственный способ получить 60 состоит в том, чтобы взять первый список простых множителей и расставить их в произвольном порядке. В то же время не существует разложения на простые множители, которое выглядело бы как $60 = 7 \times$ на что-нибудь.

Это свойство называется «единственность разложения на простые множители». Вероятно, оно представляется очевидным, но, если у вас нет ученой степени по математике, я сомневаюсь, чтобы кто-нибудь показывал вам, как оно доказывается. Евклид, который поместил это доказательство в свои «Начала», должно быть, понимал, что оно не является ни очевидным, ни простым, поскольку не спешил и доказывал все достаточно тщательно. Кстати говоря, для некоторых более общих числоподобных систем оно попросту неверно. Но для обычной арифметики это утверждение верно, и это очень эффективное оружие в математическом арсенале.

Числа от 2 до 31 раскладываются на простые множители следующим образом:

2 (простое)	3 (простое)	$4 = 2^2$	5 (простое)	$6 = 2 \times 3$
7 (простое)	$8 = 2^3$	$9 = 3^2$	$10 = 2 \times 5$	11 (простое)
$12 = 2^2 \times 3$	13 (простое)	$14 = 2 \times 7$	$15 = 3 \times 5$	$16 = 2^4$

17 (простое)	$18 = 2 \times 3^2$	19 (простое)	$20 = 2^2 \times 5$	$21 = 3 \times 7$
$22 = 2 \times 11$	23 (простое)	$24 = 2^3 \times 3$	$25 = 5^2$	$26 = 2 \times 13$
$27 = 3^3$	$28 = 2^2 \times 7$	29 (простое)	$30 = 2 \times 3 \times 5$	31 (простое).

Исключительным случаем 1 рассматривается в основном потому, что если считать ее простым числом, то разложение на простые множители перестает быть единственным. К примеру, $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3$ и так далее. Одно из очевидно неудобных следствий такой договоренности состоит в том, что у 1 нет простых множителей. Однако это число все же является произведением «пустого множества» простых чисел. Иными словами, если перемножить *нисколько простых чисел,* получится 1. Звучит достаточно безумно, но на самом деле для такого соглашения есть разумные причины. Аналогично, если «перемножить» *одно* простое число, получится это самое простое число.

2

Нечетное и четное

Четные числа делятся на 2; нечетные — нет. Таким образом, 2 — единственное четное простое число. Это сумма двух квадратов: $2 = 1^2 + 1^2$. Другие простые числа, обладающие этим свойством, все без исключения при делении на 4 дают в остатке 1. Числа, представляющие собой сумму двух квадратов, могут быть описаны при помощи их простых множителей.

Двоичная, или бинарная, арифметика, применяемая в компьютерах, основана на степенях двойки, а не десятки, как привычная десятичная система. Квадратные уравнения, в которых фигурирует вторая степень неизвестного числа, могут быть решены при помощи квадратных корней.

Различие между четным и нечетным распространяется и на перестановки — способы реорганизации множеств. Перестановки также бывают четными и нечетными. Я покажу вам изящное приложение этого принципа: простое доказательство того, что разгадать знаменитую головоломку невозможно.

Контроль четности (четное/нечетное)

Различие между четными и нечетными числами — одно из наиболее важных различий во всей математике.

Начнем с целых чисел 0, 1, 2, 3, … Среди них четными являются

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 …,

а нечетными —

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 …

Вообще, любое целое число, кратное 2, четное, а любое целое число, не кратное 2, — нечетное. Что бы ни говорили некоторые учителя, 0 — это четное число, поскольку это число кратно 2 и равняется 0×2.

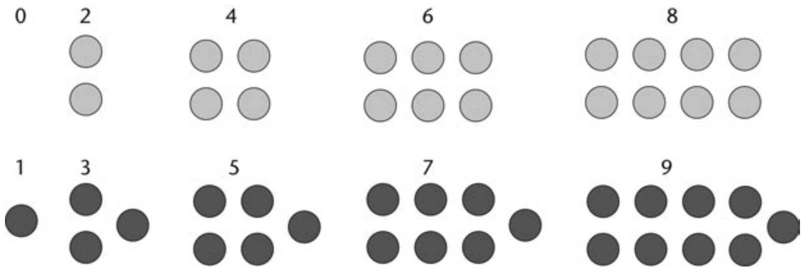


Рис. 8. Четные и нечетные числа

Нечетные числа при делении на 2 дают остаток 1. (Остаток должен быть ненулевым и меньше 2, так что остается единственный возможный вариант — 1.) Таким образом, алгебраически четные числа имеют форму $2n$, где n — натуральное число, а нечетные — форму $2n + 1$. (Опять же, если взять $n = 0$, можно убедиться, что 0 — четное число.) Чтобы расширить концепцию «четного» и «нечетного» на область отрицательных чисел, мы разрешаем n принимать отрицательные значения. Так что –2, –4, –6 и так далее — четные числа, а –1, –3, –5 и далее — нечетные.

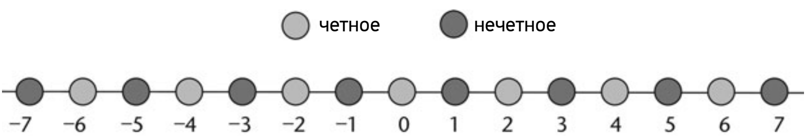


Рис. 9. Четные и нечетные числа чередуются на числовой оси

Четные и нечетные числа чередуются друг с другом на числовой оси.

У четных и нечетных чисел есть одна приятная особенность: они подчиняются простым арифметическим правилам.

четное + четное = четное	четное × четное = четное
нечетное + нечетное = четное	нечетное × нечетное = нечетное
четное + нечетное = нечетное	четное × нечетное = четное
нечетное + четное = нечетное	нечетное × четное = четное,

каковы бы ни были в этих выражениях конкретные числа. Так что, если кто-то утверждает, что $13 \times 17 = 222$, можно сказать, не считая, что это неверно.

Нечетное × нечетное = нечетное, а 222 — четное число.

Самое маленькое и единственное четное простое число

Список простых чисел начинается с 2, так что 2 — самое маленькое простое число. Это также единственное четное простое число, поскольку по определению все четные числа делятся на 2. Если четное число больше или равно 4, это автоматически делает его произведением двух меньших чисел, поэтому можно точно сказать, что это число составное. Эти свойства, какими бы простыми и очевидными они ни казались, обеспечивают числу 2 уникальное положение среди всех чисел.

Теорема о двух квадратах

В день Рождества 1640 г. блестящий математик-любитель Пьер де Ферма в письме монаху Марену Мерсенну задал интригующий вопрос. Какие числа можно записать как сумму двух полных квадратов?

Квадрат числа — это то, что получается, если умножить данное число само на себя. Таким образом, квадрат 1 равен $1 \times 1 = 1$, квадрат 2 равен $2 \times 2 = 4$, квадрат 3 равен $3 \times 3 = 9$ и так далее. Квадрат числа n обозначается как n^2. Таким образом, $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ и так далее.

Квадраты чисел от 0 до 10 равны

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100.

Таким образом, 4 — первый полный квадрат после менее интересных 0 и 1.

Эта величина называется «квадратом» потому, что эти числа возникают, в частности, если выстроить точки в форме квадрата:

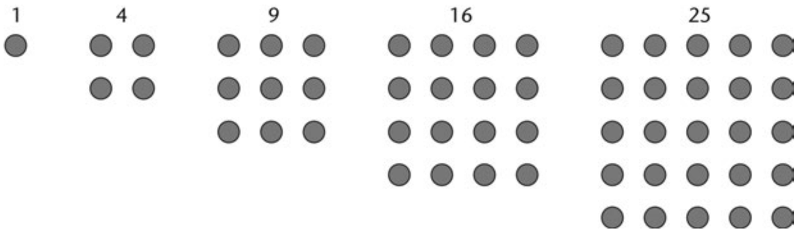


Рис. 10. Квадраты

Складывая квадраты попарно, можно, очевидно, получить числа, которые тоже являются квадратами: чтобы убедиться в этом, достаточно добавить 0 к любому квадрату. Но можно получить и новые числа, такие как

$1 + 1 = 2$ $4 + 1 = 5$ $4 + 4 = 8$

$9 + 1 = 10$ $9 + 4 = 13$ $16 + 1 = 17$,

которые не являются квадратами. Однако многие числа невозможно получить таким способом: примеры — 3, 6, 7, 11.

Ниже приведена таблица, в которой показаны все числа от 0 до 100, являющиеся суммой двух полных квадратов. (Чтобы получить число в любой клетке, не выделенной полужирным шрифтом, сложите полужирное число вверху колонки и полужирное число в левом столбце. К примеру, 25 + 4 = 29. Суммы больше 100 здесь опущены.)

	0	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	
4	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85	
9	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90	
16	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97	
25	25	26	29	34	41	50	61	74	89		
36	36	37	40	45	52	61	72	83	100		
49	49	50	53	58	65	74	83	98			
64	64	65	68	73	80	89	100				
81	81	82	85	90	97						
100	**100**										

Таблица 2

На первый взгляд сложно различить здесь какие-то закономерности, но одна закономерность по крайней мере имеется, и Ферма ее заметил. Фокус в том, чтобы записать *простые множители* чисел в таблице. Оставив в стороне 0 и 1 — вечные исключения, — получаем:

$\underline{2 = 2}$	$4 = 2^2$	$\underline{5 = 5}$	$8 = 2^3$
$9 = 3^2$	$10 = 2 \times 5$	$\underline{13 = 13}$	$16 = 2^4$
$\underline{17 = 17}$	$18 = 2 \times 3^2$	$20 = 2^2 \times 5$	$25 = 5^2$
$26 = 2 \times 13$	$\underline{29 = 29}$	$34 = 2 \times 17$	$36 = 2^2 \times 3^2$
$\underline{37 = 37}$	$40 = 2^3 \times 5$	$\underline{41 = 41}$	$45 = 3^2 \times 5$
$49 = 7^2$	$50 = 2 \times 5^2$	$\underline{53 = 53}$	$58 = 2 \times 29$
$\underline{61 = 61}$	$64 = 2^6$	$65 = 5 \times 13$	$68 = 2^2 \times 17$
$72 = 2^3 \times 3^2$	$\underline{73 = 73}$	$74 = 2 \times 37$	$80 = 2^4 \times 5$
$81 = 3^4$	$82 = 2 \times 41$	$85 = 5 \times 17$	$\underline{89 = 89}$
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$	$\underline{97 = 97}$	$100 = 2^2 \times 5^2$	

Здесь я подчеркнул простые числа, поскольку именно они являются ключом к задаче.

Некоторые простые числа здесь отсутствуют, а именно: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79 и 83. Сможете ли вы пойти по стопам Ферма и распознать объединяющую их черту?

Каждое из этих простых чисел на 1 меньше, чем какое-то число, кратное 4. К примеру, $23 = 24 - 1$, а $24 = 6 \times 4$. Простое число 2 в этом списке также присутствует; опять же, в некоторых отношениях это исключение. *Все* нечетные простые числа в моей таблице на 1 больше, чем какое-то число, кратное четырем. К примеру, $29 = 28 + 1$, а $28 = 7 \times 4$. Более того, первые несколько простых чисел такой формы присутствуют в моем списке все без исключения, и если вы продолжите список, то все они, кажется, в него попадут.

Любое нечетное число либо на 1 меньше, чем число, кратное 4, либо на 1 больше, чем такое число; это означает, что оно имеет форму $4k - 1$ или $4k + 1$, где k — любое натуральное число. Единственное четное простое число — это 2. Таким образом, любое простое число должно относиться к одной из следующих категорий:

- равняется 2;
- имеет форму $4k + 1$;
- имеет форму $4k - 1$.

Простые числа, отсутствующие в моем списке сумм двух квадратов, все без исключения относятся к третьему случаю и имеют форму $4k - 1$.

Эти простые числа могут выступать в роли *простых множителей* чисел в списке. Например, 3 является простым множителем чисел 9, 18, 36, 45, 72, 81 и 90. Отметим, однако, что на самом деле все эти числа кратны 9, то есть 3^2.

Если посмотреть с этой точки зрения на более длинный список, выявится простая закономерность. Ферма писал Мерсенну, что ему удалось доказать, что *во всех* ненулевых числах, представляющих собой сумму двух квадратов, каждый простой множитель формы $4k - 1$ присутствует в четной степени.

Самым сложным было доказать, что любое простое число формы $4k + 1$ представляет собой сумму двух квадратов. Альбер Жирар высказал такую догадку в 1632 г., но не привел никаких доказательств.

В таблице имеются кое-какие примеры, но давайте проверим утверждение Ферма на чем-нибудь более амбициозном. Число 4001 очевидно имеет форму $4k + 1$; k здесь равно 1000. Кроме того, оно простое. Согласно теореме Ферма, оно должно быть суммой двух квадратов. Каких?

За неимением более умного способа мы можем вычитать из 4001 последовательно 1^2, 2^2, 3^2 и так далее и смотреть, не получится ли другой полный квадрат. Наши расчеты начинаются так:

$4001 - 1^2 = 4000$: не квадрат
$4001 - 2^2 = 3997$: не квадрат
$4001 - 3^2 = 3992$: не квадрат
…

и наконец, удача

$4001 - 40^2 = 2401$ — это квадрат числа 49.

Таким образом:

$4001 = 40^2 + 49^2$,

и теорема Ферма на этом примере срабатывает.

Это единственное решение задачи, если не считать вариант $49^2 + 40^2$. На первый взгляд, получение полного квадрата при вычитании другого полного квадрата из 4001 кажется редким событием и практически чистой удачей. Ферма объяснил, почему это не так. Он знал также, что если число вида $4k + 1$ простое, то существует лишь один способ разбить его на два квадрата.

Не существует легкого и практичного способа найти нужные числа в общем случае. Гаусс предложил формулу на этот случай, но она тоже не особенно практична. Поэтому доказательство должно лишь продемонстрировать, что нужные квадраты *существуют,* но не обязано предлагать быстрый способ их нахождения. Это, конечно, технические подробности, и я не стану пытаться изложить здесь доказательство, тем более что оно требует немалой предварительной подготовки. Одна из прелестей математики состоит в том, что простые истинные утверждения не всегда просто доказываются.

Двоичная система

Наша традиционная система счисления называется десятичной, потому что использует 10 в качестве числовой базы. В ней имеется всего десять цифр 0–9, причем вес каждой цифры увеличивается в 10 раз при каждом шаге справа налево. Именно поэтому 10 означает десять, 100 — сто, 1000 — тысячу и так далее (см. главу 10).

Аналогичная система счисления может быть организована на базе любого числа. Самая важная из альтернативных систем счисления называется двоичной, или бинарной, и использует в качестве базы 2. В ней всего две цифры, 0 и 1, и вес цифры удваивается на каждом шаге справа налево. В двоичной системе 10 означает 2 (в привычной нам десятичной записи), 100 означает 4, 1000 означает 8, 10 000 — 16 и так далее.

Чтобы получить числа, которые не являются степенями 2, мы складываем степени 2 для получения нужной суммы. К примеру, 23 в десятичной записи равно

$$16 + 4 + 2 + 1,$$

то есть в нем используется **одно** число 16, **ни одного** 8, **одно** 4, **одно** 2 и **одно** 1. А значит, в двоичной записи это число выглядит как 10111.

Приведем первые несколько двоичных чисел вместе с десятичными эквивалентами:

Десятичное	Двоичное	Десятичное	Двоичное
0	0	11	1011
1	1	12	1100
2	10	13	1101
3	11	14	1110
4	100	15	1111
5	101	16	10000
6	110	17	10001
7	111	18	10010
8	1000	19	10011
9	1001	20	10100
10	1010	21	10101

Таблица 3

Чтобы «расшифровать» символы, например обозначающие число 20, мы записываем соответствующие им степени двойки:

1	0	1	0	0
16	8	**4**	2	1.

Степени 2, для которых в соответствующем разряде возникает 1, это 16 и 4. Складываем: результат равен 20.

История

В какой-то момент между 500 и 100 гг. до н. э. индийский ученый Пингала написал книгу под названием «Чандас-шастра» — трактат о стихосложении, где привел список различных комбинаций длинных и коротких слогов. Он классифицировал такие комбинации при помощи таблицы, где в современном варианте знаком 0 обозначается короткий слог, а знаком 1 — длинный. К примеру:

00 = короткий — короткий,
01 = короткий — длинный,
10 = длинный — короткий,
11 = длинный — длинный.

Записи здесь напоминают числа в двоичной системе счисления, но Пингала не производил со своими символами арифметических вычислений.

В древнекитайской гадательной книге «И-Цзин» использовалось в качестве прорицаний 64 набора по шесть горизонтальных линий, целых (ян) или прерывистых (инь). Эти наборы получили название *гексаграмм*. Каждая гексаграмма состоит из двух *триграмм,* расположенных одна над другой. Первоначально гексаграммы использовались для предсказания будущего: веточки тысячелистника бросали на землю, а затем по особым правилам определяли, на какую гексаграмму следует смотреть. Позже вместо веточек стали использовать три монеты.

Если мы обозначим сплошную линию (ян) как 1, а прерванную линию (инь) как 0, то каждая гексаграмма будет соответствовать шестизначному двоичному числу. Например, гексаграмма на рис. 11 соответствует числу 010011. По правилам гаданий, это гексаграмма 60 (節 = цзе), указывающая на «разъяснение», «ограничение» или «умеренность». Типичная интерпретация такого гадания (не просите меня объяснить почему, я понятия не имею) начинается так:

Ограничение — Вверху: *кань* — бездонный, вода. Внизу: *дуй* — радостный, озеро.

Суждение — Ограничение, успех. На неприятном ограничении не следует настаивать.

Образ — Вода над озером: образ ограничения. Так незаурядный человек создает число и меру, исследует природу добродетели и исправляет поведение.

Опять же, хотя двоичная система в «И-Цзин» присутствует, арифметики там нет. В более явном виде математическая

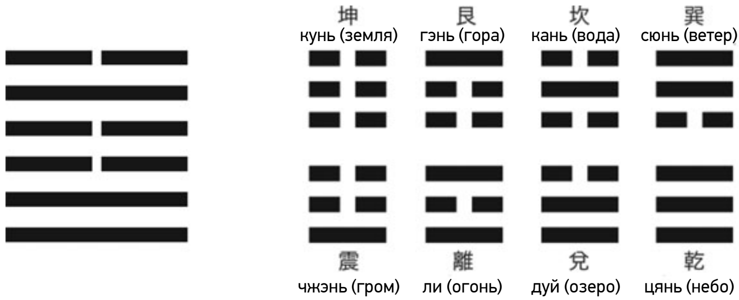


Рис. 11. Слева: гексаграмма. Справа: восемь триграмм

структура двоичных символов проявляется в трудах Томаса Хэрриота (1560–1621), после которого остались тысячи страниц неопубликованных рукописей. В одной из них содержится лист, начинающийся так:

1	1
2	2
3	2 + 1
4	4
5	4 + 1
6	4 + 2
7	4 + 2 + 1

и продолжается аналогичным образом до

$$30 = 16 + 8 + 4 + 2$$
$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

Ясно, что Хэрриот понимал основной принцип двоичной записи. Однако контекстом для этой записи служит длинная серия таблиц, в которой разбирается, как разные объекты могут по-разному, не арифметическими способами, сочетаться между собой.

В 1605 г. Фрэнсис Бэкон объяснил, как можно зашифровать буквы алфавита при помощи последовательностей двоичных цифр; при этом он подошел вплотную к использованию этих последовательностей в качестве чисел. В конечном итоге двоичная арифметическая запись появилась в 1697 г., когда Лейбниц в письме к герцогу Рудольфу в Брунсвик предложил идею «памятной монеты или медальона».

Рис. 12. Двоичный медальон Лейбница

Дизайн медальона включает в себя двоичное представление чисел от 0 до 15 и надпись *Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unит* (Чтобы вывести все из ничего, достаточно единицы). Лейбниц языком математики говорит, что если к символу «0» (ничто) добавить «1» (единицу), то можно получить любое число (все). Но одновременно в этом высказывании зашифрована и религиозная идея: единый Бог может сотворить все из ничего.

Медаль так и не была изготовлена, но даже проект ее был серьезным шагом вперед. К 1703 г. Лейбниц уже занимался разработкой двоичной математики. В Докладах Королевской академии наук (французской) он опубликовал работу «Объяснение двоичной арифметики», в которой писал: «Вместо этой прогрессии десяток [десятичной системы счисления] я уже много лет использую простейшую из всех с шагом два». Он указывает, что правила арифметики в двоичной системе настолько просты, что никто и никогда не сумел бы их забыть, но говорит также, что поскольку двоичная запись числа примерно вчетверо длиннее, чем десятичная, такой метод совершенно непрактичен. Он также провидчески говорит: «Счет двойками более фундаментален для науки и дает новые открытия» и «такие выражения для чисел весьма способствуют всевозможным операциям».

Вот что он имел в виду. Чтобы производить арифметические действия с числами в двоичном представлении, вам нужно знать всего лишь, что:

$0 + 0 = 0$	$0 \times 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \times 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \times 0 = 0$
$1 + 1 = 0$ перенос 1	$1 \times 1 = 1$

Зная эти простые факты, вы можете умножить или сложить два любых двоичных числа; методы здесь используются примерно те же, что в обычной арифметике. Вы можете также производить вычитание и деление.

Цифровые вычисления

Сегодня мы знаем, что Лейбниц попал в точку, предположив, что двоичная форма должна быть «фундаментальна для науки». Первоначально двоичная система была математической диковинкой, но изобретение цифровых компьютеров все изменило. Цифровая электроника основана на простой разнице между присутствием или отсутствием электрического сигнала. Если обозначить эти два состояния как 1 и 0, то повод для работы в двоичной форме станет очевидным. В принципе, можно построить компьютеры на основе десятичной системы; для этого, к примеру, можно назначить соответствие цифр 0–9 сигналам напряжением 0 В, 1 В, 2 В и так далее. Однако в сложных вычислениях будут возникать неточности, и будет неясно, к примеру, означает ли сигнал 6,5 В шестерку с немного повышенным напряжением или семерку с пониженным. Использование только двух, причем далеких друг от друга уровней позволяет избежать двусмысленностей такого рода; ошибка в такой системе всегда *намного* меньше разницы между двумя уровнями.

С сегодняшними методами производства вполне можно было бы строить надежные компьютеры на троичной (тернарной)* или большей базе вместо двоичной. Но выпущено уже громадное количество техники на двоичной базе, к тому же из двоичной системы несложно переводить в десятичную, что часто требуется при вычислениях; получается, что другие базы не дают достаточно серьезных преимуществ по сравнению со стандартной двоичной системой.

Четность перестановки

Разница между четными и нечетными числами особенно важна в теории перестановок, то есть способов изменить в данном списке порядок чисел, букв или других математических объектов. Если список содержит n объектов, то полное число их возможных перестановок представляет собой следующий факториал:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1,$$

поскольку первое число мы можем выбрать из всего набора n способами, второе $n-1$ способом, третье $n-2$ способами и так далее (см. главу 26!).

Перестановки бывают двух типов: *четные* и *нечетные*. Четные перестановки меняют местами четное количество пар объектов; нечетные делают то же самое с нечетным числом пар.

* Компьютеры на троичной арифметике существовали в реальности; первым из них была «Сетунь» разработки Н. П. Брусенцова 1959 г. (Вычислительный центр МГУ). — *Прим. пер.*

Скоро я расскажу обо всем этом подробнее. Параметр, определяющий, четная перестановка или нечетная, называется *четностью* данной перестановки.

Из $n!$ возможных перестановок ровно половина является четными, а вторая половина — нечетными. (Исключение составляет случай $n = 1$, когда существует ровно одна четная перестановка, а нечетных нет вообще.) Поэтому при $n \geq 2$ существует $\frac{n!}{2}$ четных и $\frac{n!}{2}$ нечетных перестановок.

Разницу между четными и нечетными перестановками можно понять при помощи диаграмм. Представьте себе, к примеру, перестановку (назовем ее A), которая начинается со списка

1, 2, 3, 4, 5

и переводит его в список с другим порядком

2, 3, 4, 5, 1

Числа в списке перемещаются, как показано на рис. 13.

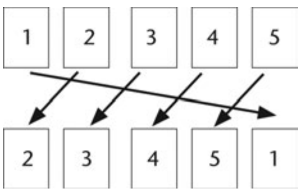


Рис. 13. Диаграмма для перестановки *A*

Аналогично, если начать со списка

2, 3, 4, 5, 1

и переставить его в другом порядке

4, 2, 3, 1, 5,

то символы в списке перемещаются, как показано на рис. 14.

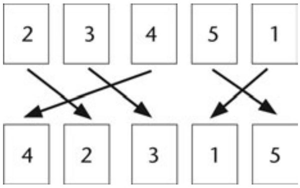


Рис. 14. Диаграмма для перестановки *B*

Назовем эту перестановку *B*. Обратите внимание: список, с которого мы начинаем, не обязан быть выстроен в порядке возрастания чисел. Здесь важен не порядок как таковой, а то, *как он изменился*.

Умножение перестановок

Мы можем *умножить* две перестановки (или выполнить их композицию), получив при этом новую перестановку. Для этого мы переставляем объекты списка в соответствии с первой перестановкой, а затем переставляем получившийся список в соответствии со второй перестановкой. Этот процесс проще всего понять, совместив обе диаграммы:

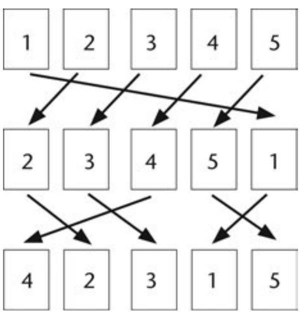


Рис. 15. Диаграмма для последовательности перестановок *A* и *B*

Сами по себе перестановки *A* и *B* показаны верхним и нижним рядами стрелочек. Чтобы умножить их (и получить перестановку, которую я буду называть *AB*), мы отслеживаем соответствующие пары стрелочек, а средний ряд чисел удаляем. Получается вот что:

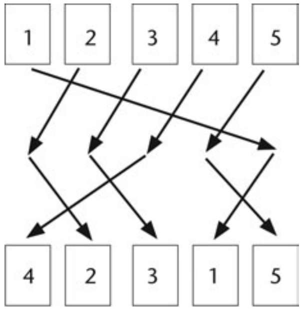


Рис. 16. Диаграмма для перестановки *AB* до спрямления стрелок

Наконец мы спрямляем все стрелки и получаем:

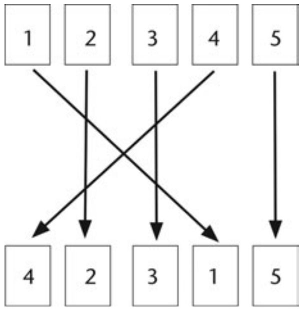


Рис. 17. Диаграмма для перестановки *AB* после спрямления стрелок

Эта новая перестановка переводит список

1, 2, 3, 4, 5

в список

4, 2, 3, 1, 5.

Число пересечений и четность

В перестановке A длинная стрелка пересекает четыре остальные стрелки. Мы говорим, что для этой перестановки *число пересечений* равно 4 и записываем это: $c(A) = 4$. Число пересечений для перестановки B равно 3, поэтому $c(B) = 3$. У произведения этих перестановок число пересечений равно 5, поэтому $c(AB) = 5$.

Перед тем как мы спрямили стрелки, число пересечений перестановки AB равнялось 7. Это сумма соответствующих чисел для перестановок A и B: $4 + 3 = 7$. При спрямлении стрелок два пересечения исчезли — те два, что были справа. Там две стрелки пересекались, а затем пересекались еще раз, в обратном направлении, вследствие чего второе пересечение как бы «отменило» первое.

Это в целом верное наблюдение. Если умножить любые две перестановки A и B, чтобы получить перестановку AB, то до спрямления стрелок число пересечений для AB будет равно сумме числа пересечений для A и числа пересечений для B. При спрямлении стрелок число пересечений либо остается прежним, либо уменьшается на четное число пересечений. Так что хотя $c\ (AB)$ не обязательно равно $c(A) + c(B)$, их разность всегда *четная*. И это означает, что *четность* $c(AB)$ есть всегда сумма четностей $c(A)$ и $c(B)$.

Мы говорим, что перестановка A является четной, если $c(A)$ четное, и нечетной, если $c(A)$ нечетное. *Четность* перестановки A определяется соответственно.

Четная перестановка меняет местами четное число пар символов.

Нечетная перестановка меняет местами нечетное число пар символов.

Из этого следует, что при умножении перестановок

четное и четное дают четное,
нечетное и нечетное дают четное,
четное и нечетное дают нечетное,
нечетное и четное дают нечетное,

точно как при сложении четных и нечетных чисел. Эти приятные свойства очень широко используются во всех областях математики.

«Пятнашки»

Четность перестановок может показаться достаточно формальной характеристикой, но на самом деле приложений у нее множество. Одно из самых забавных — использование этого понятия при разборе головоломки «Пятнашки», изобретенной в свое время американцем по имени Ной Чепман. Головоломка завоевала безумную популярность, мгновенно распространившись по США, Канаде и Европе. Бизнесмен Матиас Райс производил и продавал ее как «жемчужину головоломок», а дантист по имени Чарльз Певи предложил приз первому, кто сумеет ее решить. Эта головоломка была известна под множеством названий, включая «Волшебный квадрат» и «Игра в 15».

Головоломка содержит 15 скользящих фишек-квадратиков, пронумерованных от 1 до 15. В начале игры фишки расставлены в порядке возрастания чисел, но фишки «14» и «15» стоят в обратном порядке. Правый нижний квадратик остается пустым (рис. 18, слева). Цель головоломки — используя пустое место, последовательно сдвигать фишки (пустое место при этом тоже «сдвигается»), чтобы в конце концов расставить числа в правильном порядке (рис. 18, справа).

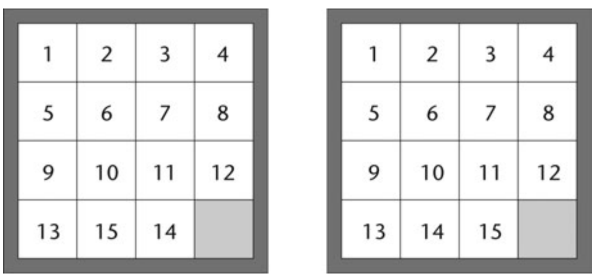


Рис. 18. Начинаем с этого… …и заканчиваем на этом

Изобретение этой головоломки часто приписывают знаменитому американскому составителю головоломок Сэму Лойду, который в 1886 г. оживил интерес к ней, предложив приз в $1000. Однако Лойд мог быть уверен, что его деньги в безопасности, поскольку в 1879 г. Уильям Джонсон и Уильям Стори доказали, что «Пятнашки» решения не имеют.

Отправной точкой для их рассуждений послужило то, что любая позиция в этой головоломке может рассматриваться как перестановка начальной позиции; при этом пустой квадратик считается шестнадцатой «виртуальной фишкой». Начальная позиция, в которой только две фишки (14 и 15) стоят в обратном порядке, представляет собой нечетную перестановку требуемой конечной позиции. Однако требование того, что пустой квадратик в конечной позиции должен находиться там же, где находился в начале, подразумевает, что любые разрешенные комбинации перемещений представляют собой исключительно четные перестановки.

Таким образом, законные перемещения, начинающиеся с любого заданного начального состояния, могут дать ровно *половину* из 16! возможных расстановок, то есть 10 461 394 944 000 расстановок. Методом проб и ошибок можно исследовать лишь небольшую часть всех возможных расстановок, и это легко убеждает людей в том, что достаточно проявить упорство и постараться, чтобы, хотя бы случайно, наткнуться на решение головоломки.

Квадратные уравнения

Математики классифицируют алгебраические уравнения по степеням, причем степень уравнения определяется высшей степенью присутствующего там неизвестного. Уравнение

$$5x - 10 = 0$$

имеет первую степень, потому что x в нем встречается только в первой степени. Уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

имеет вторую степень, потому что в нем встречается вторая степень (квадрат) x, но нет более высоких степеней. Уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

имеет третью степень и так далее.

Для уравнений малых степеней существуют особые названия:

1-й степени — линейное,
2-й степени — квадратное,
3-й степени — кубическое.

Основная задача математика при встрече с уравнением — решить его. Это значит найти ту величину (или набор величин) неизвестного x, при котором выражение истинно. Решением линейного уравнения $5x - 10 = 0$ является $x = 2$, поскольку $5 \times 2 - 10 = 0$. Квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ имеет решение $x = 1$, поскольку $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$; однако его решением также является $x = 2$, поскольку выражение $2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$ тоже верно. Кубическое уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ имеет три решения, $x = 1$, 2 *или* 3. Число (действительных) решений уравнения всегда меньше или равно его степени.

Линейные уравнения решать легко, и общие методы решения известны уже не одну тысячу лет; они появились значительно раньше, чем была придумана символическая алгебра. Мы не знаем наверняка, насколько рано это произошло, поскольку достоверных записей об этом событии не существует.

Квадратные уравнения — уравнения второй степени — решать сложнее. Однако способ их решения был известен древним вавилонянам 4000 лет назад, и ниже мы его рассмотрим. Кубические уравнения, а также уравнения четвертой и пятой степеней будут рассмотрены в главах 3, 4 и 5.

Вавилонское решение

Рис. 19. Две вавилонские математические таблички

В 1930 г. историк математики Отто Нейгебауэр установил, что на глиняных табличках из Древнего Вавилона объясняется, как решать квадратные уравнения.

Для начала нам нужно кое-что знать о вавилонской системе записи чисел. В качестве основания они использовали не 10, как мы сегодня, а 60. Поэтому число 2015 в вавилонской нотации (вместо цифр они использовали бы клинописные знаки на глине) означало бы следующее:

$$2 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 1 \times 60^1 + 5 \times 60^0,$$

что составляет

$$2 \times 216\,000 + 0 \times 3600 + 1 \times 60 + 5 \times 1 = 432\,065$$

в десятичной записи. У них также была своя версия нашей десятичной запятой, позволявшая добавлять кратные $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$ и так далее. Историки предлагают записывать вавилонские числа примерно так:

2,0,1,5

и используют точку с запятой вместо десятичной запятой. К примеру,

$$14{,}30;15 = 14 \times 60 + 30 + \frac{15}{60} = 870\frac{1}{4}.$$

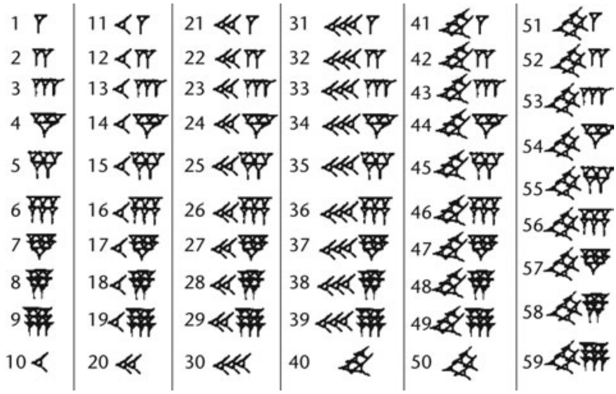


Рис. 20. Вавилонские клинописные символы для цифр от 1 до 59

А теперь перейдем к квадратным уравнениям. В одной вавилонской табличке, написанной примерно 4000 лет назад, содержится такая задача: «Найди сторону квадрата, если его площадь минус его же сторона равна 14,30». В этой задаче фигурирует квадрат неизвестной величины (площадь квадрата), а также сама эта величина (сторона квадрата), поэтому задача сводится к квадратному уравнению. Табличка объясняет, как следует искать ответ.

Самый сложный шаг — четвертый, где нужно найти число (в данном случае $29\frac{1}{2}$), квадрат которого равен $870\frac{1}{4}$. Квадратные корни — основной инструмент решения квадратных уравнений.

Такая инструкция типична для вавилонской математики. В описании фигурируют конкретные числа, но сам метод носит более общий характер. Если методично заменять числа и следовать той же процедуре, можно решать и другие квадратные уравнения. Если использовать современную алгебраическую

Вавилонская инструкция	В нашей записи
Возьми половину от единицы, что составляет 0;30	$\frac{1}{2}$
Умножь 0;30 на 0;30, что составит 0;15	$\frac{1}{4}$
Прибавь результат к 14,30, получишь 14,30;15	$(14\times 60+30)+\frac{1}{4}=870\frac{1}{4}$
Это квадрат 29;30	$870\frac{1}{4}=\left(29\frac{1}{2}\right)\times\left(29\frac{1}{2}\right)$
Теперь прибавь 0;30 к 29;30	$29\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
Результат составляет 30, это сторона квадрата.	30

Таблица 4

нотацию, заменив конкретные числа символами, и начать с общей записи квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то вавилонский метод даст ответ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Вы наверняка узнали: это та самая формула, которую все мы учили в школе.

3

Кубическое уравнение

Три — самое маленькое нечетное простое число. Кубическое уравнение, содержащее третью степень (куб) неизвестного, может быть решено с использованием кубических и квадратных корней. Пространство, в котором мы живем, имеет три измерения. Трисекция угла при помощи линейки и циркуля невозможна. Плоскость можно замостить ровно тремя видами правильных многоугольников. Семь восьмых всех чисел можно представить как сумму трех квадратов.

Самое маленькое нечетное простое число

Самое маленькое простое число — два, это четное число. Следующее простое число — три, и именно оно является самым маленьким нечетным простым. Все остальные простые числа имеют вид $3k + 1$ или $3k + 2$, где k — натуральное число, потому что $3k$ делится на 3. Однако о тройке можно сказать много других интересных вещей, поэтому рассказ о простых числах я оставлю до главы 7.

Кубическое уравнение

Одним из величайших триумфов математиков итальянского Возрождения стало открытие того факта, что кубическое уравнение может быть решено с использованием алгебраической формулы, в которой задействованы кубические и квадратные корни.

Возрождение было периодом интеллектуального подъема и всевозможных новшеств. Математики того времени не были исключением; они решительно нацелились на преодоление ограничений классической математики. Первым крупным прорывом стал метод решения кубических уравнений. Разные варианты этого метода были найдены независимо несколькими математиками, которые хранили свои открытия в секрете. В конце концов Джироламо Кардано, известный также как Жером Кардан, опубликовал их в одной из величайших алгебраических книг мира «Великое искусство» (Ars Magna). После этого другой первооткрыватель обвинил его в краже секрета. Строго говоря, это обвинение не было столь уж невероятным. В то время, около 1520 г., Джироламо был разорен. Он обратился к азартным играм как к источнику дохода и попытался использовать свои математические способности для повышения шансов на выигрыш. Гениальность не мешала Джироламо быть негодяем. Однако, как мы увидим, у него было веское оправдание.

Вот что произошло. В 1535 г. Антонио Фиор и Никколо Фонтана (известный под прозвищем Тарталья, то есть Заика) устроили открытое состязание. Они решали заданные соперником кубические уравнения, и Тарталья одержал убедительную победу над Фиором. В то время кубические уравнения делились на три типа, поскольку отрицательных чисел наука еще не признавала. Первоначально Тарталья умел решать лишь один тип уравнений, но незадолго до состязания он нашел способы решения и остальных уравнений. Он задавал Фиору лишь те уравнения, которые тот, как ему было известно, решать не умел, поэтому соперник был буквально разгромлен.

Кардано, работая над своей алгебраической книгой, прослышал про это состязание и понял, что Фиор и Тарталья знали, как нужно решать кубические уравнения. Это беспрецедентное открытие значительно улучшило бы его работу, поэтому он обратился к Тарталье с просьбой раскрыть найденные им методы решения. Тарталья поделился с ним своим секретом, но позже заявил, что Кардано обещал никогда не публиковать его открытие. Тем не менее метод решения появился в «Великом искусстве», и Тарталья обвинил Кардано в плагиате.

Однако у Кардано было оправдание; была у него и серьезная причина найти способ обойти собственное обещание, если оно на самом деле было дано. Его ученик Лодовико Феррари открыл способ решения уравнений четвертой степени (см. главу 4), и Кардано хотел опубликовать их в своей книге. Однако метод Феррари опирался на решение соответствующих кубических уравнений, поэтому Кардано не мог опубликовать работу Феррари без метода Тартальи. Представляю себе, как он бесился.

Затем он узнал, что Фиор был учеником Сципиона дель Ферро, про которого говорили, что он решил все три типа кубических уравнений, передав секрет решения одного из них своему ученику. Неопубликованные труды дель Ферро хранились у Аннибале дель Наве, поэтому Кардано и Феррари в 1543 г. поехали в Болонью, чтобы проконсультироваться с дель Наве, и отыскали в бумагах решения для всех трех типов кубических уравнений — слухи оказались верными. Это позволило Кардано заявить — вполне правдиво, — что он опубликовал в книге метод дель Ферро, а не Тартальи.

Тарталья, чувствуя себя обманутым, напечатал длинную и горькую обличительную речь против Кардано. Феррари вызвал его на публичные дебаты и без труда выиграл состязание. После этого Тарталье так и не удалось полностью восстановить свою репутацию.

Мы можем записать в современных обозначениях решение Кардано для особого случая кубического уравнения, когда $x^3 + ax + b = 0$ для конкретных чисел a и b. (Если в уравнении присутствует x^2, то от него избавляются при помощи отдельного хитроумного трюка, так что на самом деле решение этого варианта позволяет разобраться с любым кубическим уравнением.) Ответ выглядит так:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

и в нем присутствуют кубические и квадратные корни. Я избавлю вас от зубодробительных подробностей. Они умны и элегантны, но вкус к алгебре такого рода прививается долгой практикой, да и найти их можно без труда в учебниках или Интернете.

Пространственные измерения

Евклидова геометрия рассматривает два разных пространства: это геометрия плоскости, где все, по существу, ограничено плоским листом бумаги, и строгая геометрия пространства. Плоскость двумерна: положение точки на ней может быть определено двумя координатами (x, y). Пространство, в котором мы живем, трехмерно: в нем положение точки определяется тремя координатами (x, y, z).

То же самое можно сказать и по-другому: на плоскости (теперь расположенной вертикально, как страница книги или экран компьютера) существует два независимых направления — слева направо и сверху вниз. В пространстве три независимых направления: север — юг, восток — запад и верх — низ.

Более 2000 лет математики (и все остальные) считали, что для пространства три — это максимум. Они были уверены, что четырехмерное пространство невозможно (см. главу 4), потому что четвертое независимое направление попросту неоткуда взять. Если вам кажется, что для него тоже найдется местечко, добро пожаловать в четвертое измерение. Однако это убеждение зиждилось на ошибочном представлении о том, что математические абстракции ограничиваются параметрами реального физического пространства.

С позиции нормального человеческого восприятия пространство, судя по всему, ведет себя ровно так, как положено в трехмерной геометрии по Евклиду. Однако наше восприятие ограничено ближайшими окрестностями, а на более крупных масштабах евклидова картина, согласно Альберту Эйнштейну, не соответствует геометрии физического пространства. Но стоит нам выйти за пределы физического в абстрактный мир математических концепций, и выясняется, что можно без труда определить «пространства» с любым, какое нам заблагорассудится, числом измерений. Мы просто добавляем в список дополнительные координаты. В четырехмерном пространстве, к примеру, точки определяются набором из четырех координат (w, x, y, z). Здесь уже невозможно рисовать картины — по крайней мере обычным способом, — но в этом нас ограничивают физическое пространство и человеческое восприятие, а не математика.

Стоит заметить, что мы не в состоянии рисовать картины и в *трех*мерном пространстве, поскольку бумага и экран компьютера двумерны. Но наша зрительная система привыкла дорисовывать трехмерные объекты по двумерным проекциям, поскольку световые лучи воспринимаются сетчаткой глаза, которая, по существу, двумерна. Поэтому мы удовлетворяемся тем, что рисуем проекцию трехмерной формы на плоскости — примерно так же каждый наш глаз видит окружающий мир. Можно придумать аналогичные методы «рисования» четырехмерных форм на бумаге, но для их понимания потребуется много объяснений, а для привыкания к ним — долгая практика.

Со временем физики осознали, что для точной локализации события одновременно в пространстве и во времени нужны четыре координаты, а не три: три традиционные координаты определяют его пространственное положение, а четвертая говорит о том, когда оно произошло. Битва при Гастингсе произошла в точке, расположенной сегодня неподалеку от пересечения дорог A271 и A2100 к северо-западу от Гастингса на южном побережье Суссекса. Широта и долгота этой точки образуют две координаты события. Однако известно, что оно происходило на поверхности земли, то есть на определенной высоте над уровнем моря. Это третья пространственная координата, и теперь мы точно определили нужную нам точку относительно Земли. (Я не буду принимать во внимание движение Земли вокруг Солнца, вращение Солнца вместе с остальной Галактикой, движение Галактики по направлению к галактике M31 в созвездии Андромеды и то, как вся местная группа галактик всасывается Великим аттрактором.)

Однако если вы сегодня поедете в это место, то не увидите, как англичане под предводительством короля Гарольда II пытаются отбиться от вторгшейся армии герцога Нормандии Вильгельма II. Причина в том, что вы окажетесь в точке с неверной координатой времени. Чтобы найти сражение в пространстве и времени, вам нужна четвертая координата — 14 октября 1066 г.

Так что хотя физическое пространство обладает лишь тремя координатами, пространство-время обладает четырьмя.

Пространство, кстати, тоже вполне может обладать неожиданными свойствами там, где мы выходим за пределы человеческого восприятия. Эйнштейн показал, что на очень больших масштабах, применимых, скажем, при изучении Солнечной системы или галактик, пространство может быть искривлено из-за гравитации, на них геометрия *не совпадает* с евклидовой. На очень маленьких масштабах, применимых к элементарным частицам, пространство, как подозревают физики, может иметь шесть или семь дополнительных измерений, возможно, свернутых так плотно, что мы их попросту не видим (см. главу 11).

Невозможность трисекции угла и удвоения куба

Евклидовы «Начала» предлагали решения целого ряда геометрических задач, но оставляли некоторые вопросы без ответа. Так, в них имелся метод бисекции любого угла, то есть деления его на две равные части при помощи только традиционных инструментов — линейки без мерных делений и циркуля (см. главу $\frac{1}{2}$). Однако Евклид не предложил никакого метода трисекции угла, то есть деления его на три равные части при помощи тех же инструментов. Он знал, как взять куб и получить другой, в восемь раз большего объема, — для этого достаточно удвоить все стороны куба. Но он не предложил метод, при помощи которого можно взять куб и получить другой куб *вдвое* большего объема — задача, известная как удвоение куба. Возможно, самым крупным упущением была так называемая квадратура круга — метод построения квадрата той же площади, что и заданный круг (см. главу π). В современных терминах это эквивалентно геометрическому построению отрезка прямой длиной π на основе заданного отрезка единичной длины.

Эти проблемы известны как три «геометрические задачи античности». Древние решали их при помощи инструментов, не допускаемых традицией, но вопрос о необходимости радикально новых методов оставался открытым. Может быть, эти задачи все же могут быть решены при помощи только линейки и циркуля?

Со временем было доказано, что все три задачи не решаются при помощи традиционных инструментов. Особенно трудно ученым пришлось с квадратурой круга (см. главу π). Отсутствие решений у двух других задач объяснялось одним конкретным свойством числа 3. А именно: оно не является целой степенью двойки.

Основную идею проще рассмотреть в контексте задачи об удвоении куба. Объем куба со стороной x равен x^3. Получается, что мы пытаемся решить уравнение $x^3 = 2$. Решить его несложно; ответ — корень кубический из 2,

$$\sqrt[3]{}=1,259921049894873164767\ldots$$

Но можно ли получить эту величину, пользуясь только линейкой и циркулем?

Гаусс в классическом труде по теории чисел «Арифметические исследования» (Disquisitiones Arithmeticae) заметил, что длина любого отрезка, полученного из единичной длины посредством построения при помощи линейки и циркуля, может быть выражена алгебраически путем решения серии квадратных уравнений. Цепочка алгебраических преобразований показывает, что это утверждение эквивалентно тому, что длина отрезка должна быть решением некоего уравнения с целочисленными коэффициентами, степень которого представляет собой степень двойки. Грубо говоря, каждое лишнее квадратное уравнение в системе удваивает степень эквивалентного уравнения.

А теперь решающий удар. Уравнение для кубического корня из 2 выглядит как $x^3 = 2$, это уравнение третьей степени. Но 3 не является степенью двойки, поэтому отрезок такой длины невозможно получить при помощи линейки и циркуля. Пьер Ванцель разобрался во всех тонкостях доказательства, которые Гаусс счел слишком тривиальными, и в 1837 г. составил полное доказательство. Здесь есть один технический момент: кубическое уравнение должно быть «неупрощаемым», что в данном случае означает, что у него нет рациональных решений. Поскольку $\sqrt[3]{2}$ иррационален, этот момент не является препятствием.

Ванцель доказал также невозможность трисекции угла по тем же причинам. Если рассмотреть трисекцию угла 60°, то после некоторых тригонометрических и алгебраических преобразований получится кубическое уравнение

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Это уравнение опять же неупрощаемо, поэтому нужное нам построение при помощи линейки и циркуля невозможно.

Варианты укладки на плоскость правильных многоугольников

Только тремя типами правильных многоугольников можно замостить бесконечную плоскость: равносторонними треугольниками, квадратами и шестиугольниками (см. рис. 21).

Доказать это несложно. Внутренние углы n-стороннего правильного многоугольника равны

$$180 - \frac{360}{n},$$

и первые несколько значений составляют:

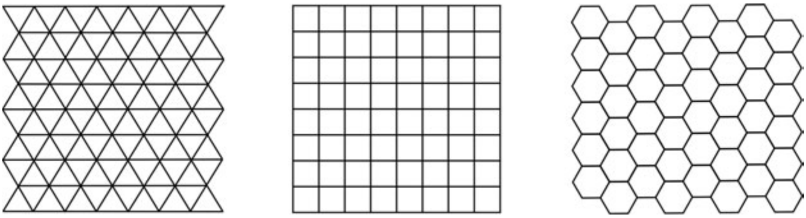


Рис. 21. Три способа замостить плоскость: равносторонними треугольниками, квадратами и шестиугольниками

n	$180-\frac{360}{n}$	**Многоугольник**
3	60	Равносторонний треугольник
4	90	Квадрат
5	108	Пятиугольник
6	120	Шестугольник
7	128,57	Семиугольник
8	135	Восьмиугольник

Таблица 5

А теперь рассмотрим как можно замостить плоскость одним из этих многоугольников. В любом углу встречаются несколько плиток, поэтому внутренние углы многоугольника должны быть 360°, деленные на натуральное число. Поэтому возможные углы:

n	$\frac{360}{n}$	**Многоугольник**
3	120	Шестиугольник
4	90	Квадрат
5	72	Не является углом правильного многоугольника
6	60	Равносторонний треугольник
7	51,43	Не является углом правильного многоугольника

Таблица 6

Обратите внимание: углы в первой таблице увеличиваются при увеличении числа сторон n, тогда как во второй — уменьшаются с ростом n. Начиная с 7 сторон и далее, угол во второй таблице получается меньше 60°, но в первой таблице угол всегда больше или равен 60°. Поэтому продолжение таблицы дальше не даст никаких новых вариантов укладки.

Можно сказать по-другому: три пятиугольника оставляют в месте стыка пустоту, а четыре — перекрывают друг друга; два семиугольника (или два многоугольника с числом сторон больше семи) оставляют пустоту, а три — перекрываются. Поэтому только равносторонним треугольником, квадратом или шестиугольником можно полностью, точно совмещая фигуры друг с другом, замостить плоскость.

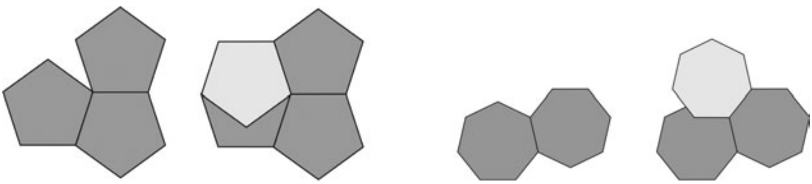


Рис. 22. Слева: три пятиугольника оставляют пустоту, четыре перекрываются. Справа: два семиугольника оставляют пустоту, три перекрываются. То же происходит с многоугольниками с числом сторон больше семи

Сумма трех квадратов

Если многие числа не являются суммой двух квадратов (см. главу 2), что можно сказать о *трех* квадратах? Большинство чисел, но не все, можно представить как сумму трех квадратов. Вот начало списка тех чисел, которые невозможно так представить:

7	15	23	28	31	39	47	55
60	63	71	79	87	92	95	103.

В этих числах тоже присутствует закономерность, которую также трудно заметить. Ее обнаружил в 1798 г. Адриен-Мари

Лежандр. Он объявил, что суммами трех квадратов являются те и только те числа, которые *нельзя* записать в виде $4^k(8n + 7)$. И наоборот, в список исключений, часть которого представлена выше, попадают все числа такого вида. Таким образом, при $n = 0$ и $k = 0$ получаем 7, при $n = 1$ и $k = 0$ получаем 28 и так далее. Его результат верен, но в доказательстве была прореха, которую заполнил Гаусс в 1801 г.

Не слишком трудно доказать, что числа вида $4^k(8n + 7)$ *не являются* суммой трех квадратов. Любой квадрат при делении на 8 дает в остатке 0, 1 или 4, поэтому сумма трех квадратов может дать в остатке любое число, образующееся при сложении этих трех чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6, но не 7. Из этого следует, что для получения чисел вида $8n + 7$ нужно больше трех квадратов. Часть утверждения, связанная с 4^k, доказывается лишь немного сложнее. Самое сложное — доказать, что все остальные числа на самом деле представляют собой суммы трех квадратов.

По мере того как n становится очень большим, доля чисел меньше n, представляющих собой сумму трех квадратов, стремится к $\frac{7}{8}$. Множитель 4^k недостаточно сильно влияет на это соотношение, чтобы изменить предел для больших n, а из восьми возможных остатков деления на 8 исключается лишь один.

4

Квадрат

Первый полный квадрат (после 0 и 1) равен 4. Любую карту на плоскости можно раскрасить четырьмя красками так, что любые две области, имеющие общую границу, будут разного цвета. Любое натуральное число есть сумма четырех квадратов. То же предполагается для кубов, включая и отрицательные целые числа. Уравнения четвертой степени, то есть уравнения, в которых фигурирует четвертая степень неизвестного, могут быть решены при помощи кубических и квадратных корней. (Корень четвертой степени — это квадратный корень из квадратного корня.) Числовая система кватернионов, основанная на наборах из 4 независимых величин, подчиняется почти всем стандартным законам алгебры. Может ли существовать четвертое измерение?

Полный квадрат

Число $4 = 2 \times 2$ является квадратом (см. главу 2). Квадраты играют центральную роль в самых разных областях математики. Согласно теореме Пифагора, квадрат самой длинной стороны прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон; исходя из этого, квадраты чисел имеют фундаментальное значение и в геометрии.

В квадратах множество скрытых закономерностей. Взгляните, к примеру, на *разницу* между последовательными квадратами:

$1 - 0 = 1$

$4 - 1 = 3$

9 – 4 = 5
16 – 9 = 7
25 – 16 = 9.

Что это за числа? Это *нечетные* числа

1 3 5 7 9.

Еще одна интересная закономерность содержится в прямой последовательности квадратов:

1 = 1
1 + 3 = 4
1 + 3 + 5 = 9
1 + 3 + 5 + 7 = 16
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.

Если сложить все нечетные числа вплоть до какого-то конкретного числа, результатом будет квадрат.

Существует способ наглядно убедиться в том, что два этих факта истинны, и понять, как они связаны между собой. Для этого рассмотрим некоторый набор точек (рис. 23, слева). Разумеется, эти утверждения можно доказать и средствами алгебры.

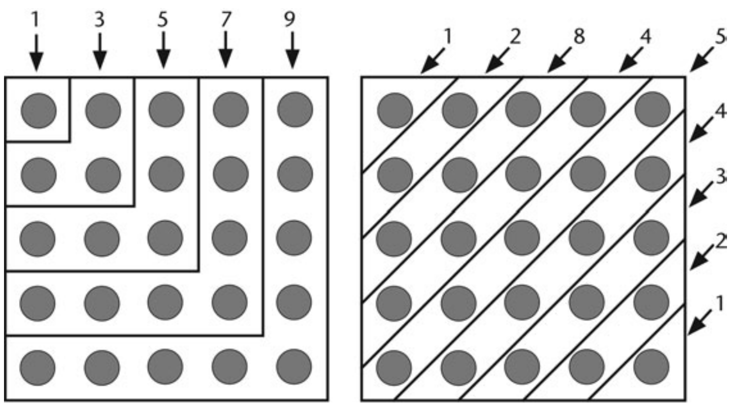


Рис. 23. Слева: 1 + 3 + 5 + 7 + 9. Справа: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 5 + 3 + 2 + 1

Вот еще одна красивая закономерность, связанная с квадратами:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 + 1 = 4$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25.$$

В этом тоже можно убедиться при помощи точек (рис. 23, справа).

Теорема о четырех красках

Около 150 лет назад несколько математиков начали думать о картах. Не о традиционных задачах построения точных карт окружающего мира и представления круглого земного шара на плоском листе бумаги; нет, они начали обдумывать достаточно расплывчатые вопросы о картах вообще. В частности о том, как раскрасить области на картах так, чтобы области с общей границей всегда были разных цветов.

Для некоторых карт не нужно много красок. Квадраты на шахматной доске образуют карту очень регулярного вида, и для ее раскраски достаточно всего двух цветов: обычно это белый и черный. Карты, состоящие из перекрывающихся кругов, тоже раскрашиваются двумя красками. Но, когда области становятся менее правильными по форме, двух красок уже недостаточно.

Например, вот карта США, где областями являются 50 штатов. Очевидно, 50 красок хватит с гарантией, но можно достичь и лучшего результата. Попробуйте раскрасить области в разные цвета и посмотреть, сколькими красками вам удастся обойтись. Проясним один технический момент: штаты, имеющие общую точку, как Колорадо и Аризона, можно, если захотите, красить в один цвет. У них нет общей границы.

Рис. 24. 50 американских штатов

Карта США иллюстрирует некоторые простые общие принципы. Аляска и Гавайи не играют в задаче никакой роли, поскольку они изолированы от остальных штатов: их можно красить в любой цвет по желанию. Еще важнее тот факт, что нам очевидно потребуется по крайней мере *три* краски. Так, Юта, Вайоминг и Колорадо должны быть разных цветов, поскольку любые два из этих трех штатов имеют общую границу.

Мы можем выбрать для этих штатов три краски. Неважно, какие, лишь бы они были разными. Поэтому давайте раскрасим Юту черным, Вайоминг темно-серым, а Колорадо просто серым, как на рис. 25.

Предположим, для определенности, что мы хотим и всю остальную карту раскрасить этими тремя красками. Тогда Небраску нужно будет сделать черной, поскольку у ней есть общие границы с темно-серым и серым штатами, а Северную Дакоту придется сделать серой. Можно некоторое время действовать по той же логике, когда для каждого нового штата возможен лишь один цвет; мы покрасим Монтану, Айдахо, Неваду, Орегон и Калифорнию. На этом этапе получится так (рис. 26).

Рис. 25. Почему нужны по крайней мере три краски

Рис. 26. Продолжая раскрашивать штаты тремя красками, мы заходим в тупик

Аризона теперь граничит со штатами, которые мы уже покрасили в серый, темно-серый и черный цвета. Поскольку все цвета до этого момента однозначно определяются окраской соседних областей, для всей карты трех красок не хватит. Для продолжения нам потребуется четвертая — скажем, светло-серая — краска.

Рис. 27. На помощь приходит четвертая краска

Однако остается еще 38 штатов, исключая Аляску и Гавайи, и кажется вполне возможным, что нам в какой-то момент понадобится пятая краска, а может, и шестая… Кто знает? С другой стороны, присутствие четвертой краски меняет всю картину. Так, один из прежде назначенных цветов можно было бы изменить (сделать Вайоминг светло-серым, к примеру). Выбор цвета перестает быть вынужденным и единственно возможным, а следовательно, и задача становится сложнее. Однако мы можем продолжить работу, исходя из разумных предположений и меняя цвета при необходимости. В одном из вариантов раскраски у нас получается всего три светло-серых штата: Аризона, Западная Вирджиния и Нью-Йорк. Несмотря на довольно большое число штатов (50), нам удается раскрасить карту всего лишь *четырьмя* красками (рис. 28).

(Еще одно техническое замечание: Мичиган разделен озером Мичиган на две отдельные части. Здесь обе его половинки окрашены в темно-серый цвет, но иногда разделенные области приводят к введению новых цветов. Это следует учитывать при создании строгой математической теории, но здесь это не имеет значения.)

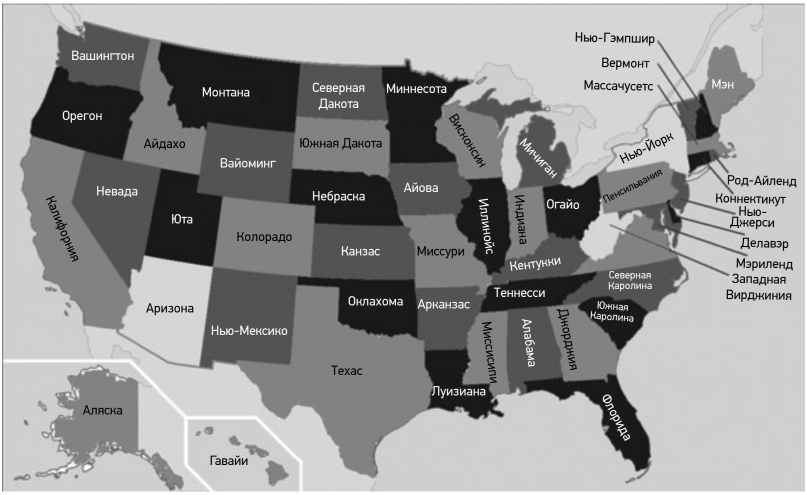


Рис. 28. В пятой краске нет необходимости

Карта США не особенно сложна, но мы можем представить себе карты с миллионами областей сложной изрезанной формы, с множеством выступов. Может быть, для их раскраски потребовалось бы намного больше красок. Тем не менее у математиков, работавших над этой задачей, сложилось твердое мнение о том, что больше четырех красок не потребуется ни при каких обстоятельствах, какой бы сложной ни была карта. Если она нарисована на плоскости или сфере, а все ее области связаны между собой, четырех красок достаточно.

Краткая история задачи четырех красок

Задача четырех красок возникла в 1852 г., когда Фрэнсис Гутри, молодой южноафриканский математик и ботаник, попытался раскрасить графства на карте Англии. Он сделал несколько вариантов, и всякий раз четырех красок оказывалось достаточно, поэтому он спросил у своего брата Фредерика: может быть, это общеизвестный факт? Фредерик задал этот вопрос видному, но эксцентричному математику Августу де Моргану; тот ничего об этом не знал, поэтому написал еще более видному математику сэру Уильяму Роуэну Гамильтону. Гамильтон тоже ничего об этом не знал и, сказать откровенно, не слишком, судя по всему, заинтересовался.

В 1879 г. адвокат Альфред Кемпе опубликовал то, что он считал доказательством достаточности четырех красок, но в 1889 г. Перси Хивуд обнаружил в его доказательстве ошибку. Хивуд указал, что метод Кемпе доказывает лишь, что для раскрашивания всегда достаточно пяти красок. На этом дело застопорилось более чем на столетие. Было ясно, что ответом является четыре или пять, но никто не знал точно, сколько именно. Другие математики вслед за Кемпе тоже пытались подобрать стратегию, но скоро стало ясно, что этот метод требует большого количества утомительных вычислений. Наконец, в 1976 г. Вольфганг Хакен и Кеннет Аппель решили эту задачу при помощи компьютера. Оказалось, что четырех красок всегда достаточно.

После той новаторской работы математики привыкли к компьютеру. Они по-прежнему *предпочитают* доказательства, опирающиеся только на человеческий разум, но в большинстве своем уже не считают это обязательным требованием. Однако даже в 1990-е гг. доказательство Аппеля–Хакена принималось с осторожностью, и в 1994 г. Нил Робертсон, Дэниел Сандерс, Пол Сеймур и Робин Томас решили полностью повторить весь ход его решения на основе той же базовой стратегии, но с упрощением структуры. Сегодняшние компьютеры настолько быстры, что все доказательство можно провести на обычном домашнем компьютере за несколько часов.

Теорема о четырех квадратах

В главе 2 мы видели, как отличить числа, которые можно записать в виде суммы двух квадратов, от остальных; в главе 3 мы таким же образом рассмотрели суммы трех квадратов. Но, когда речь заходит о суммах четырех квадратов, нам не нужно искать среди чисел подходящие. Годятся все.

Каждый лишний квадрат в сумме дает возможность получить больше чисел, так что сумма четырех квадратов, по идее, должна заполнить некоторые пробелы. Эксперименты показывают, что *любое* число от 0 до 100 можно представить в этом виде. К примеру, 7 не выражается в виде суммы трех квадратов, но четырех уже достаточно:

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1.$$

Такой успех в самом начале может, в принципе, объясняться тем, что речь идет о маленьких числах. Вероятно, для каких-то более крупных чисел потребуется пять квадратов, или шесть, или еще больше? Нет. Большие числа тоже выражаются как сумма четырех квадратов. Математики искали доказательство того, что это утверждение верно для всех положительных чисел, и в 1770 г. такое доказательство было найдено. Автором его был Жозеф Луи Лагранж.

Гипотеза о четырех кубах

Возникало также предположение, что аналогичная теорема верна для четырех кубов, но с дополнительной особенностью: разрешены как положительные, так и отрицательные кубы. Поэтому гипотеза звучит так: любое число является суммой четырех целых кубов. Вспомним, что целое число может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Первую попытку распространить теорему о четырех квадратах на кубы предпринял Эдуард Варинг в книге «Алгебраические размышления» (Meditationes Algebraicae) в 1770 г. Он заявил без всяких доказательств, что любое положительное целое число есть сумма четырех квадратов, девяти кубов, 19 четвертых степеней и так далее. Он считал, что все числа, о которых идет речь, положительны или равны нулю. Это утверждение получило известность как проблема Варинга.

Куб отрицательного целого числа отрицателен, и это открывает новые возможности. К примеру, для числа 23:

$$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$$

требуется девять положительных кубов, но это же число можно получить с использованием всего пяти кубов, если некоторые из них будут отрицательными:

$$23 = 27–1–1–1–1 = 3^3 + (–1)^3 + (–1)^3 + (–1)^3 + (–1)^3.$$

Более того, 23 можно выразить с использованием всего *четырех* кубов:

$$23 = 512 + 512 – 1 – 1000 = 8^3 + 8^3 + (–1)^3 + (–10)^3.$$

Если разрешить отрицательные числа, то большое отрицательное число почти всегда можно компенсировать большим положительным числом. Так что задействованные кубы могут, в принципе, быть намного больше, чем целевое число. К примеру, 30 можно записать как сумму трех кубов, если заметить, что

$$30 = 2\,220\,422\,932^3 + (–283\,059\,965)^3 + (–2\,218\,888\,517)^3.$$

В отличие от чисто положительного случая, здесь невозможно систематически перебрать ограниченное количество вариантов.

Эксперименты привели нескольких математиков к предположению о том, что *любое* целое число есть сумма четырех целых кубов. До сих пор никаких доказательств тому не предложено, но данных в пользу этой гипотезы немало, и некоторый прогресс тоже наблюдается. Было бы достаточно доказать это утверждение для всех положительных целых чисел (допуская при этом и положительные, и отрицательные кубы), поскольку $(–n)^3 = –n^3$. Любое представление положительного числа m как суммы кубов можно использовать и для $–m$, просто поменяв знаки всех кубов.

Компьютерные расчеты подтверждают, что все целые числа вплоть до 10 млн можно представить как сумму четырех кубов. А в 1966 г. В. Демьяненко доказал, что любое число, кроме чисел вида $9k \pm 4$, есть сумма четырех кубов.

Возможно даже, что, за конечным числом исключений, каждое положительное целое число есть сумма четырех *положительных или нулевых* кубов. В 2000 г. Жан-Марк Дезуйер, Франсуа Энненкар, Бернар Ландро и И. Густи Путу Пурнаба предположили, что наибольшее число, которое нельзя выразить таким образом, это 7 373 170 279 850.

Уравнение четвертой степени

В истории с Кардано и кубическим уравнением (см. главу 3) фигурирует также уравнение четвертой степени, где неизвестное возведено, соответственно, в четвертую степень:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Феррари, ученик Кардано, решил это уравнение. Полностью соответствующая формула приведена на страничке

http://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение_четвертой_степени,

и, посмотрев на него, вы поймете, почему я не привожу его здесь.

Метод Феррари соотносит решения уравнения четвертой степени с решениями связанного с ним кубического уравнения. В наше время это называется резольвентой Лагранжа, поскольку именно Лагранж первым из математиков объяснил, почему кубического уравнения достаточно.

Кватернионы

В Предисловии мы видели, что числовая система раз за разом переживала расширение через изобретение новых видов чисел. Кульминацией стали комплексные числа, основанные на идее о том, что у –1 имеется квадратный корень (см. главу i). Комплексные числа часто применяются в физике и глубоко связаны с ней, но у них есть одно серьезное ограничение. Все методы, связанные с комплексными числами, ограничены двумя измерениями плоскости. Однако пространство трехмерно. В XIX в. математики пытались, расширив комплексные числа, создать трехмерную числовую систему. В те времена эта идея казалась разумной и перспективной, но, как они ни старались, ничего полезного в результате не получилось.

Особенно интересовался созданием пригодной к использованию трехмерной числовой системы блестящий ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон, и в 1843 г. его осенило. Он сумел назвать два препятствия к созданию такой системы, которые никак невозможно обойти:

- трехмерная система работать не будет;
- одним из стандартных правил арифметики придется пожертвовать. А именно, коммутативным законом умножения, согласно которому $ab = ba$.

В тот период, когда произошло это озарение, Гамильтон шел по тропинке вдоль канала на заседание Королевской Ирландской академии. Он так и этак поворачивал в голове загадку трехмерной числовой системы, и внезапно его осенило. Он понял, что три измерения не будут работать ни при каких обстоятельствах, а вот *четыре* — будут. Однако от коммутативного закона умножения все равно придется отказаться, к этому нужно быть готовым.

Это было настоящее просветление. Пораженный внезапным озарением, Гамильтон остановился и нацарапал на камне моста формулу для таких чисел:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Он назвал новые числа кватернионами, потому что каждое содержит четыре компонента. Это i, j, k и действительное число 1. Типичный кватернион выглядит как

$$3 - 2\mathrm{i} + 5\mathrm{j} + 4\mathrm{k}$$

с четырьмя произвольными действительными числами (здесь это 3, –2, 5, 4) в качестве коэффициентов. Сложение таких чисел происходит очевидным образом, и перемножаются они тоже несложно, если воспользоваться уравнением, которое Гамильтон высек на камне моста. Все, что вам нужно, это несколько следствий из этих уравнений, а именно:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k \qquad jk = i \qquad ki = j$$
$$ji = -k \qquad kj = -i \qquad ik = -j$$

в сочетании с правилом, согласно которому умножение на 1 оставляет число неизменным.

Обратите внимание на то, что ij, к примеру, отличается от ji. Таким образом, коммутативный закон не работает.

Хотя поначалу это может показаться серьезным неудобством, на самом деле практически никаких сложностей не возникает. Просто нужно соблюдать осторожность в отношении того, в каком порядке вы записываете символы при алгебраических операциях. В то время зарождались и другие новые области математики, в которых не действовал коммутативный закон, так что сама идея не была беспрецедентной и уж точно не казалась дикой.

Гамильтону кватернионы показались замечательным изобретением, но большинство других математиков первое время смотрело на них как на своего рода диковинку. Тот факт, что их полезность при решении физических задач в трехмерном — или даже четырехмерном — пространстве оказалась весьма ограниченной, естественно, не способствовал признанию. Они не были полностью бесполезными, но им откровенно не хватало гибкости и универсальности комплексных чисел в двумерном пространстве. Гамильтону удалось добиться некоторых успехов, применив i, j и k при создании трехмерного пространства, но эту идею быстро вытеснила векторная алгебра, ставшая стандартом в прикладных математических науках.

Тем не менее кватернионы и сегодня остаются жизненно важными в чистой математике. Кроме того, они применяются в компьютерной графике, где обеспечивают простой метод поворота объектов в пространстве*. У них обнаружились также интересные связи с теоремой о четырех квадратах.

Гамильтон не стал называть кватернионы «числами», потому что в те времена изобреталось много самых разных числоподобных алгебраических систем. Кватернионы — пример того, что мы сегодня называем «алгеброй с делением»; это алгебраическая система, в которой можно складывать, вычитать, умножать и делить (кроме деления на нуль) и которая при этом подчиняется почти всем стандартным законам арифметики. Множество кватернионов обозначается $\mathbb{H}$ (в честь Гамильтона, поскольку $\mathbb{Q}$ уже использовано для обозначения рациональных чисел).

Число измерений у действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов составляет 1, 2 и 4 соответственно. Следующим числом в этой последовательности должно, по идее, быть 8. Существует ли восьмимерная алгебра с делением? Ответ: решительное «да». Такую систему обеспечивают *октонионы,* известные также как *числа Кэли.* Обозначаются они символом $\mathbb{O}$. Вводя их, однако, приходится избавиться еще от одного закона арифметики: сочетательного (ассоциативности), $a\,(bc) = (ab)\,c$. Более того, закономерность здесь заканчивается: 16-мерной алгебры с делением не существует.

Как кватернионы, так и октонионы не так давно были извлечены из безвестности, потому что, как оказалось, они глубоко связаны с квантовой механикой и физикой элементарных частиц. Ключ к этой области физики — симметрия физических законов, а две эти алгебраические системы обладают важными и необычными симметриями. К примеру, правила для кватернионов не меняются при замене порядка i, j и k

* А кроме того, в системах управления космических аппаратов, где ту же задачу приходится решать для вполне вещественных предметов в реальном пространстве. — *Прим. пер.*

на j, k и i. При более внимательном взгляде становится ясно, что на самом деле их можно заменить на любую подходящую *комбинацию* букв i, j и k. Получающиеся в результате этого симметрии очень тесно связаны с вращениями в трехмерном пространстве, и в компьютерных играх кватернионы часто используются в программах работы с графикой. Октонионы можно аналогичным образом интерпретировать с помощью вращений в семимерном пространстве.

Четвертое измерение

С незапамятных времен люди поняли, что физическое пространство трехмерно (см. главу 3), и долгое время возможность существования пространства с четырьмя или большим числом измерений представлялась абсурдной. Однако к XIX в. эта общеизвестная истина стала подвергаться все более серьезной критике, и многие заинтересовались возможностью четвертого измерения. Речь идет не только о математиках и даже не только о физиках: о четвертом измерении говорили философы, теологи, спиритуалисты, охотники за привидениями и даже аферисты. Четвертое измерение виделось подходящим обиталищем для Бога и духов умерших людей, то есть привидений. Не в нашей Вселенной, но совсем рядом, буквально за углом. Шарлатаны изобретали всевозможные фокусы и пытались «доказать», что они имеют доступ в это новое измерение.

Мысль о том, что «пространства» с большим, чем три, числом измерений могут иметь логический смысл — вне зависимости от того, соответствуют они или нет физическому пространству, — впервые возникла в математике благодаря новым открытиям, таким как кватернионы Гамильтона. К началу XIX в. было уже не очевидно, что следует остановиться на трех измерениях. Возьмем, например, координаты. На плоскости положение любой точки может быть однозначно описано двумя действительными числами x и y, объединенными в пару координат (x, y).

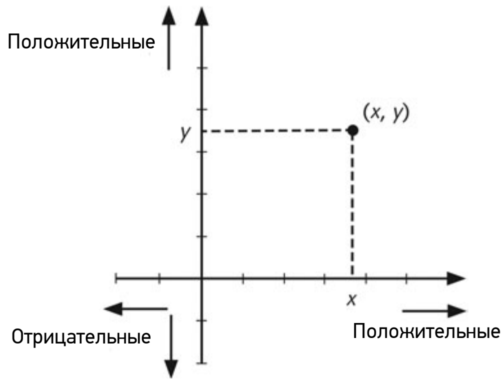


Рис. 29. Координаты на плоскости

Чтобы представить три измерения пространства, нам достаточно добавить к этой паре третью координату z, отвечающую за направление вперед — назад. Теперь у нас получается тройка координат (x, y, z).

Если говорить о геометрических чертежах, то на этом, похоже, нам придется остановиться. Но на самом деле несложно написать и четыре числа (w, x, y, z). Или пять. Или шесть. Или, располагая достаточным количеством времени и бумаги, миллион. Со временем математики поняли, что четверкой чисел можно *определить* абстрактное «пространство», в котором будет четыре измерения. С пятью координатами вы получите пятимерное пространство и так далее. Было даже разумное представление о геометрии в подобных пространствах, определенное по аналогии с теоремой Пифагора для двух и трех измерений. В двух измерениях эта теорема говорит нам, что расстояние между точками (x, y) и (X, Y) составляет

$$\sqrt{(x-X)^2+(y+Y)^2}.$$

В ее трехмерном аналоге расстояние между точками (x, y, z) и (X, Y, Z) соответственно равно

$$\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}.$$

Таким образом, представляется разумным определить расстояние между двумя четверками (w, x, y, z) и (W, X, Y, Z) как

$$\sqrt{(w-W)^2+(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}.$$

Оказывается, что полученная в результате геометрия непротиворечива и аналогична евклидовой геометрии.

В данном случае базовые концепции определяются алгебраически с использованием четверок чисел, что гарантирует, что они имеют логический смысл. Затем их *интерпретируют* по аналогии со схожими алгебраическими формулами для двух и трех измерений, что добавляет системе определенную «геометричность».

К примеру, координаты углов единичного квадрата на плоскости представляют собой

$$(0, 0) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 1),$$

то есть все возможные сочетания в паре из нулей и единиц. Координаты углов куба в пространстве

$$\begin{array}{llll} (0, 0, 0) & (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (1, 1, 0) \\ (0, 0, 1) & (1, 0, 1) & (0, 1, 1) & (1, 1, 1), \end{array}$$

то есть все возможные сочетания в тройке нулей и единиц. По аналогии можно определить *гиперкуб* в четырехмерном пространстве при помощи шестнадцати возможных четверок из нулей и единиц:

$$\begin{array}{llll} (0, 0, 0, 0) & (1, 0, 0, 0) & (0, 1, 0, 0) & (1, 1, 0, 0) \\ (0, 0, 1, 0) & (1, 0, 1, 0) & (0, 1, 1, 0) & (1, 1, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 1) & (1, 0, 0, 1) & (0, 1, 0, 1) & (1, 1, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 1) & (1, 0, 1, 1) & (0, 1, 1, 1) & (1, 1, 1, 1). \end{array}$$

Еще одно распространенное название для этой фигуры — тессеракт (см. главу 6).

Исходя из этого определения, мы можем исследовать получившийся объект. Он очень похож на куб, но еще более «кубичен». Так, куб можно изготовить, соединив между собой шесть квадратов; аналогично, гиперкуб можно изготовить из восьми кубов.

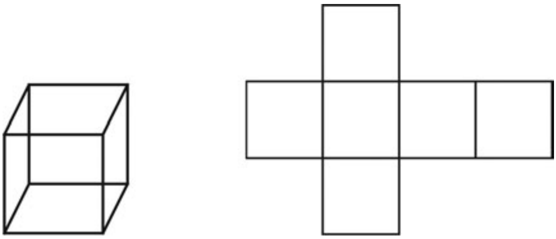


Рис. 30. Куб. Слева: проекция на двумерную плоскость. Справа: развертка, показывающая шесть его квадратных граней

К несчастью, поскольку физическое пространство трехмерно, мы не можем изготовить точную модель гиперкуба, точно так же, как не можем нарисовать настоящий куб на листе бумаги. Вместо этого мы рисуем на листе «проекцию», что-то вроде фотографии или рисунка художника на плоском холсте или листе бумаги. Или мы можем разрезать куб по некоторым ребрам и развернуть его до плоского состояния, при этом получится фигура из шести квадратов в форме креста.

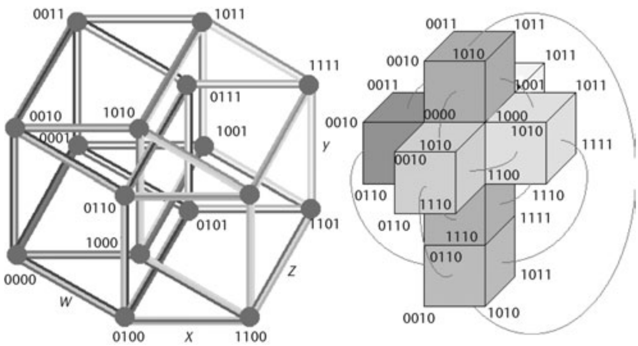


Рис. 31. Гиперкуб. Слева: проекция на два измерения. Справа: трехмерная развертка, показывающая восемь кубических «граней». Нули и единицы обозначают координаты точек

Можно сделать что-то аналогичное и для гиперкуба. Можно «нарисовать» проекции на трехмерное пространство, которые окажутся трехмерными моделями, или на плоскость, где получится изображение в виде линий. Или можно «развернуть» гиперкуб, чтобы показать восемь его кубических «граней». Признаюсь, мне трудно до конца понять, как эти кубики «складываются» в четырехмерном пространстве, но список координат гиперкуба говорит о том, что это им удается.

Художник-сюрреалист Сальвадор Дали использовал аналогичную этой развертку гиперкуба в нескольких своих работах, самой известной из которых является «Распятие» (Corpus Hypercubus) 1954 г.

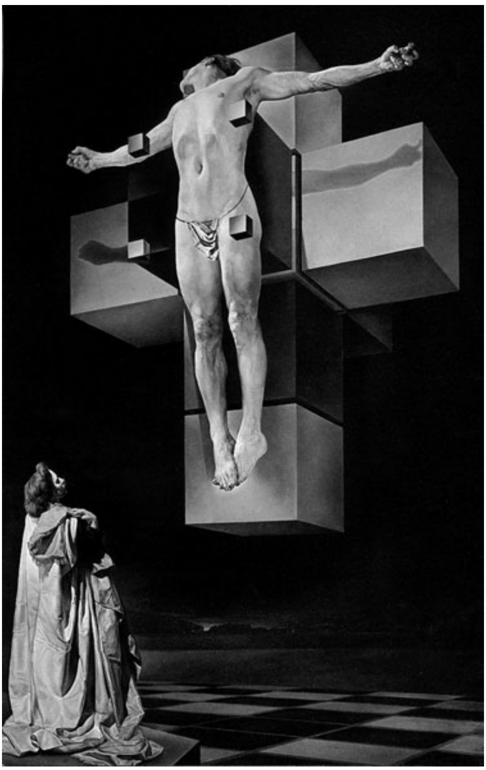


Рис. 32. С. Дали. Распятие

5

Пифагорова гипотенуза

Пифагоровы треугольники имеют прямой угол и целочисленные стороны. У простейшего из них самая длинная сторона имеет длину 5, остальные — 3 и 4. Всего существует 5 правильных многогранников. Уравнение пятой степени невозможно решить при помощи корней пятой степени — или любых других корней. Решетки на плоскости и в трехмерном пространстве не имеют пятилепестковой симметрии вращения, поэтому такие симметрии отсутствуют и в кристаллах. Однако они могут быть у решеток в четырехмерном пространстве и в занятных структурах, известных как квазикристаллы.

Гипотенуза самой маленькой пифагоровой тройки

Теорема Пифагора гласит, что самая длинная сторона прямоугольного треугольника (пресловутая гипотенуза) соотносится с двумя другими сторонами этого треугольника очень просто и красиво: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух других сторон*.

Традиционно мы называем эту теорему именем Пифагора, но на самом деле история ее достаточно туманна. Глиняные таблички позволяют предположить, что древние вавилоняне знали теорему Пифагора задолго до самого Пифагора; славу первооткрывателя принес ему математический культ пифагорейцев, сторонники которого верили, что Вселенная основана на числовых закономерностях. Древние авторы приписывали пифагорейцам — а значит, и Пифагору — самые разные математические теоремы, но на самом деле мы представления не имеем о том, какой математикой занимался сам Пифагор. Мы даже не знаем, могли ли пифагорейцы доказать теорему Пифагора или просто верили в то, что она верна. Или, что наиболее вероятно, у них были убедительные данные о ее истинности, которых тем не менее не хватило бы на то, что мы считаем доказательством сегодня.

Доказательства Пифагора

Первое известное доказательство теоремы Пифагора мы находим в «Началах» Евклида. Это достаточно сложное доказательство с использованием чертежа, в котором викторианские школьники сразу узнали бы «пифагоровы штаны»; чертеж и правда напоминает сохнущие на веревке подштанники. Известны буквально сотни других доказательств, большинство из которых делает доказываемое утверждение более очевидным.

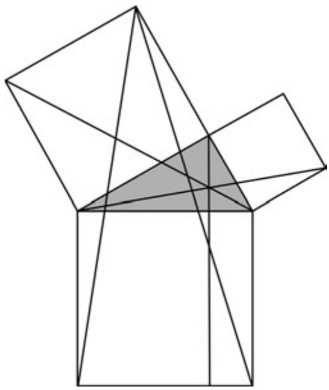


Рис. 33. Пифагоровы штаны

Одно из простейших доказательств — это своего рода математический пазл. Возьмите любой прямоугольный треугольник, сделайте четыре его копии и соберите их внутри квадрата. При одной укладке мы видим квадрат на гипотенузе; при другой — квадраты на двух других сторонах треугольника. При этом ясно, что площади в том и другом случае равны.

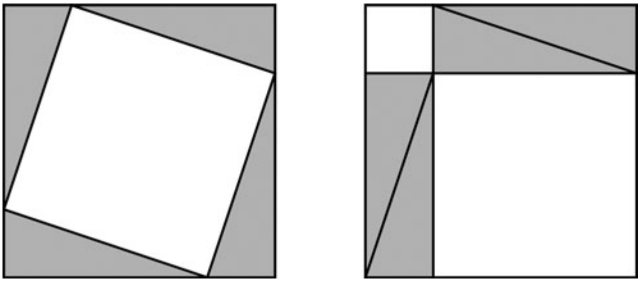


Рис. 34. Слева: квадрат на гипотенузе (плюс четыре треугольника). Справа: сумма квадратов на двух других сторонах (плюс те же четыре треугольника). А теперь исключите треугольники

Рассечение Перигаля — еще одно доказательство-пазл.

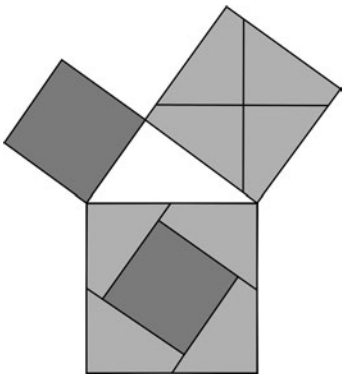


Рис. 35. Рассечение Перигаля

Существует также доказательство теоремы с использованием укладки квадратов на плоскости. Возможно, именно так пифагорейцы или их неизвестные предшественники открыли эту теорему. Если взглянуть на то, как косой квадрат перекрывает два других квадрата, то можно увидеть, как разрезать большой квадрат на куски, а затем сложить из них два меньших квадрата. Можно увидеть также прямоугольные треугольники, стороны которых дают размеры трех задействованных квадратов.

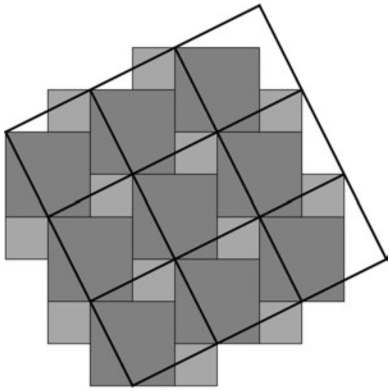


Рис. 36. Доказательство мощением

Есть интересные доказательства с использованием подобных треугольников в тригонометрии. Известно по крайней мере пятьдесят различных доказательств.

Пифагоровы тройки

В теории чисел теорема Пифагора стала источником плодотворной идеи: найти целочисленные решения алгебраических уравнений. *Пифагорова тройка* — это набор целых чисел a, b и c, таких что

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Геометрически такая тройка определяет прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.

Самая маленькая гипотенуза пифагоровой тройки равна 5. Другие две стороны этого треугольника равны 3 и 4. Здесь

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Следующая по величине гипотенуза равна 10, потому что

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2.$$

Однако это, по существу, тот же треугольник с удвоенными сторонами. Следующая по величине и по-настоящему другая гипотенуза равна 13, для нее

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2.$$

Евклид знал, что существует бесконечное число различных вариантов пифагоровых троек, и дал то, что можно назвать формулой для нахождения их всех. Позже Диофант Александрийский предложил простой рецепт, в основном совпадающий с евклидовым.

Возьмите любые два натуральных числа и вычислите:

- их удвоенное произведение;
- разность их квадратов;
- сумму их квадратов.

Три получившихся числа будут сторонами пифагорова треугольника.

Возьмем, к примеру, числа 2 и 1. Вычислим:

- удвоенное произведение: $2 \times 2 \times 1 = 4$;
- разность квадратов: $2^2 - 1^2 = 3$;
- сумма квадратов: $2^2 + 1^2 = 5$,

и мы получили знаменитый треугольник 3–4–5. Если взять вместо этого числа 3 и 2, получим:

- удвоенное произведение: $2 \times 3 \times 2 = 12$;
- разность квадратов: $3^2 - 2^2 = 5$;
- сумму квадратов: $3^2 + 2^2 = 13$,

и получаем следующий по известности треугольник 5 – 12 – 13. Попробуем взять числа 42 и 23 и получим:

- удвоенное произведение: $2 \times 42 \times 23 = 1932$;
- разность квадратов: $42^2 - 23^2 = 1235$;
- сумма квадратов: $42^2 + 23^2 = 2293$,

никто никогда не слышал о треугольнике 1235–1932–2293. Но эти числа тоже работают:

$$1235^2 + 1932^2 = 1\,525\,225 + 3\,732\,624 = 5\,257\,849 = 2293^2.$$

В диофантовом правиле есть еще одна особенность, на которую уже намекали: получив три числа, мы можем взять еще одно произвольное число и все их на него умножить. Таким образом треугольник 3–4–5 можно превратить в треугольник 6–8–10, умножив все стороны на 2, или в треугольник 15–20–25, умножив все на 5.

Если перейти на язык алгебры, правило приобретает следующий вид: пусть u, v и k — натуральные числа. Тогда прямоугольный треугольник со сторонами

$$2kuv \text{ и } k\,(u^2 - v^2)$$

имеет гипотенузу

$$k\,(u^2 + v^2).$$

Существуют и другие способы изложения основной идеи, но все они сводятся к описанному выше. Этот метод позволяет получить все пифагоровы тройки.

Правильные многогранники

Существует ровным счетом пять правильных многогранников.

Правильный многогранник (или полиэдр) — это объемная фигура с конечным числом плоских граней. Грани сходятся друг с другом на линиях, именуемых ребрами; ребра встречаются в точках, именуемых вершинами.

Кульминацией евклидовых «Начал» является доказательство того, что может быть только пять *правильных* многогранников, то есть многогранников, у которых каждая грань представляет собой правильный многоугольник (равные стороны, равные углы), все грани идентичны и все вершины окружены равным числом одинаково расположенных граней. Вот пять правильных многогранников:

- тетраэдр с четырьмя треугольными гранями, четырьмя вершинами и шестью ребрами;
- куб, или гексаэдр, с 6 квадратными гранями, 8 вершинами и 12 ребрами;
- октаэдр с 8 треугольными гранями, 6 вершинами и 12 ребрами;
- додекаэдр с 12 пятиугольными гранями, 20 вершинами и 30 ребрами;
- икосаэдр с 20 треугольными гранями, 12 вершинами и 30 ребрами.

Рис. 37. Пять правильных многогранников

Правильные многогранники можно найти и в природе. В 1904 г. Эрнст Геккель опубликовал рисунки крохотных организмов, известных как радиолярии; многие из них по форме напоминают те самые пять правильных многогранников. Возможно, правда, он немного подправил природу, и рисунки не отражают полностью форму конкретных живых существ. Первые три структуры наблюдаются также в кристаллах. Додекаэдра и икосаэдра в кристаллах вы не найдете, хотя *неправильные* додекаэдры и икосаэдры там иногда попадаются. Настоящие додекаэдры могут возникать в виде квазикристаллов, которые во всем похожи на кристаллы, за исключением того, что их атомы не образуют периодической решетки.

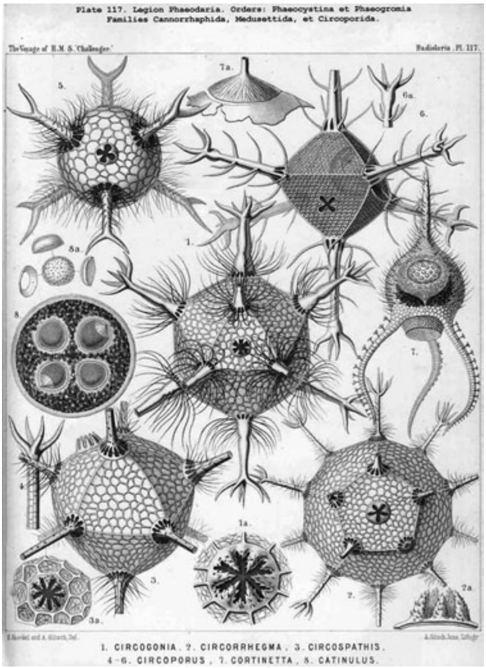


Рис. 38. Рисунки Геккеля: радиолярии в форме правильных многогранников

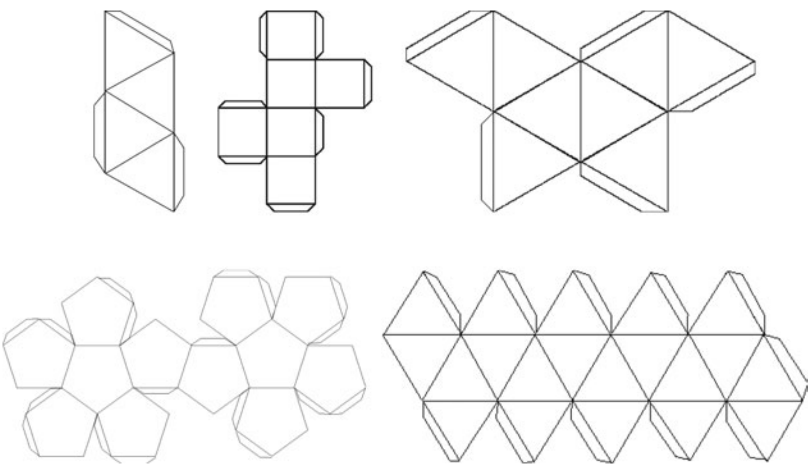


Рис. 39. Развертки правильных многогранников

Бывает интересно делать модели правильных многогранников из бумаги, вырезав предварительно набор соединенных между собой граней — это называется разверткой многогранника; развертку складывают по ребрам и склеивают соответствующие ребра между собой. Полезно добавить к одному из ребер каждой такой пары дополнительную площадку для клея, как показано на рис. 39. Если такой площадки нет, можно использовать липкую ленту.

Уравнение пятой степени

Не существует алгебраической формулы для решения уравнений 5-й степени.

В общем виде уравнение пятой степени выглядит так:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Проблема в том, чтобы найти формулу для решений такого уравнения (у него может быть до пяти решений). Опыт обращения с квадратными и кубическими уравнениями, а также с уравнениями четвертой степени позволяет предположить, что такая формула должна существовать и для уравнений пятой степени, причем в ней, по идее, должны фигурировать корни пятой, третьей и второй степени. Опять же, можно смело предположить, что такая формула, если она существует, окажется очень и очень сложной.

Это предположение в конечном итоге оказалось ошибочным. В самом деле, никакой такой формулы не существует; по крайней мере не существует формулы, состоящей из коэффициентов a, b, c, d, e и f, составленной с использованием сложения, вычитания, умножения и деления, а также извлечения корней. Таким образом, в числе 5 есть что-то совершенно особенное. Причины такого необычного поведения пятерки весьма глубоки, и потребовалось немало времени, чтобы в них разобраться.

Первым признаком проблемы стало то, что, как бы математики ни старались отыскать такую формулу, какими бы умными они ни были, они неизменно терпели неудачу. Некоторое время все считали, что причины кроются в неимоверной сложности формулы. Считалось, что никто просто не может как следует разобраться в этой алгебре. Однако со временем некоторые математики начали сомневаться в том, что такая формула вообще существует, а в 1823 г. Нильс Хендрик Абель сумел доказать обратное. Такой формулы не существует. Вскоре после этого Эварист Галуа нашел способ определить, решаемо ли уравнение той или иной степени — 5-й, 6-й, 7-й, вообще любой — с использованием такого рода формулы.

Вывод из всего этого прост: число 5 особенное. Можно решать алгебраические уравнения (при помощи корней n-й степени для различных значений n) для степеней 1, 2, 3 и 4, но не для 5-й степени. Здесь очевидная закономерность заканчивается.

Никого не удивляет, что уравнения степеней больше 5 ведут себя еще хуже; в частности, с ними связана такая же трудность: нет общих формул для их решения. Это не означает, что уравнения не имеют решений; это не означает также, что невозможно найти очень точные численные значения этих решений. Все дело в ограниченности традиционных инструментов алгебры. Это напоминает невозможность трисекции угла при помощи линейки и циркуля. Ответ *существует*, но перечисленные методы недостаточны и не позволяют определить, каков он.

Кристаллографическое ограничение

Кристаллы в двух и трех измерениях не имеют 5-лучевой симметрии вращения.

Атомы в кристалле образуют решетку, то есть структуру, которая периодически повторяется в нескольких независимых направлениях. К примеру, рисунок на обоях повторяется по длине рулона; кроме того, он обычно повторяется и в горизонтальном направлении, иногда со сдвигом от одного куска обоев к следующему. По существу, обои — это двумерный кристалл.

Существует 17 разновидностей обойных рисунков на плоскости (см. главу 17). Они различаются по типам симметрии, то есть по способам сдвинуть жестко рисунок таким образом, чтобы он точно лег сам на себя в первоначальном положении. К типам симметрии относятся, в частности, различные варианты симметрии вращения, где рисунок следует повернуть на определенный угол вокруг определенной точки — центра симметрии.

Порядок симметрии вращения — это то, сколько раз можно повернуть тело до полного круга так, чтобы все детали рисунка вернулись на первоначальные позиции. К примеру, поворот на 90° — это симметрия вращения 4-го порядка*. Список возможных типов симметрии вращения в кристаллической решетке вновь указывает на необычность числа 5: его там нет. Существуют варианты с симметрией вращения 2, 3, 4 и 6-го порядков, но ни один обойный рисунок не имеет симметрии вращения 5-го порядка. Симметрии вращения порядка больше 6 в кристаллах тоже не бывает, но первое нарушение последовательности происходит все же на числе 5.

То же происходит с кристаллографическими системами в трехмерном пространстве. Здесь решетка повторяет себя по трем независимым направлениям. Существует 219 различных типов симметрии, или 230, если считать зеркальное отражение рисунка отдельным его вариантом — притом, что в данном случае нет зеркальной симметрии. Опять же, наблюдаются симметрии вращения порядков 2, 3, 4 и 6, но не 5. Этот факт получил название кристаллографического ограничения.

В четырехмерном пространстве решетки с симметрией 5-го порядка существуют; вообще, для решеток достаточно высокой размерности возможен любой наперед заданный порядок симметрии вращения.

---

* Симметрия вращения 2-го порядка — повторение через 180° (случай отражательной симметрии), 3-го порядка — через 120°, 6-го — через 60°. — *Прим. ред.*

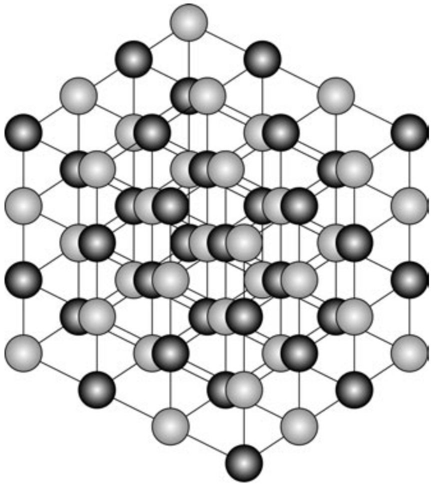


Рис. 40. Кристаллическая решетка поваренной соли. Темные шарики изображают атомы натрия, светлые — атомы хлора

Квазикристаллы

Хотя симметрия вращения 5-го порядка в двумерных и трехмерных решетках невозможна, она может существовать в чуть менее регулярных структурах, известных как квазикристаллы. Воспользовавшись набросками Кеплера, Роджер Пенроуз открыл плоские системы с более общим типом пятикратной симметрии. Они получили название *квазикристаллов*.

Квазикристаллы существуют в природе. В 1984 г. Даниэль Шехтман открыл, что сплав алюминия и марганца может образовывать квазикристаллы; первоначально кристаллографы встретили его сообщение с некоторым скепсисом, но позже открытие было подтверждено, и в 2011 г. Шехтман был удостоен Нобелевской премии по химии. В 2009 г. команда ученых под руководством Луки Бинди обнаружила квазикристаллы в минерале с российского Корякского нагорья — соединении алюминия, меди и железа. Сегодня этот минерал называется икосаэдрит. Измерив при помощи масс-спектрометра содержание в минерале разных изотопов кислорода, ученые показали, что этот минерал возник не на Земле. Он сформировался около 4,5 млрд лет назад, в то время, когда Солнечная система только зарождалась, и провел большую часть времени в поясе астероидов, обращаясь вокруг Солнца, пока какое-то возмущение не изменило его орбиту и не привело его в конце концов на Землю.

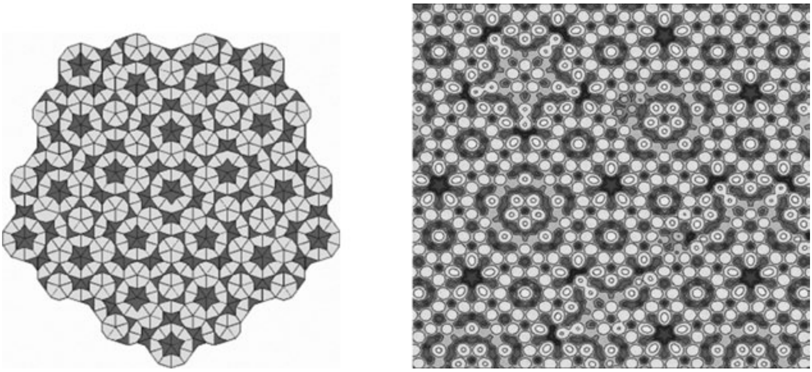


Рис. 41. Слева: одна из двух квазикристаллических решеток с точной пятикратной симметрией. Справа: атомная модель икосаэдрического алюминиево-палладиево-марганцевого квазикристалла

6

Контактное число

Наименьшее число, равное сумме его собственных делителей: $6 = 1 + 2 + 3$. Контактное число на плоскости равно 6. Пчелиные соты формируются из гексагонов — правильных шестисторонних многоугольников. Существует 6 правильных четырехмерных политопов — аналогов трехмерных правильных многогранников.

Наименьшее совершенное число

Древние греки различали три типа натуральных чисел, в зависимости от суммы их делителей:

- *избыточные* числа, для которых сумма «собственных» делителей (то есть делителей за исключением самого числа) больше самого числа;
- *недостаточные* числа, для которых сумма собственных делителей меньше самого числа;
- *совершенные* числа, для которых сумма собственных делителей равна самому числу.

Несколько первых чисел приведены в табл. 7.

Отсюда видно, что все три типа существуют, но видно также, что недостаточные числа более распространены, чем остальные два типа. В 1998 г. Марк Делеглиз доказал это утверждение в строгой форме: с ростом n доля недостаточных чисел между 1 и n стремится к некоей константе, лежащей между 0,7526 и 0,7520, в то время как доля избыточных чисел находится между 0,2474 и 0,2480. Ранее, в 1955 г., Ханс-Йоахим Канольд доказал, что доля совершенных чисел стремится к 0. Так что примерно три четверти всех чисел являются недостаточными, а одна четверть — избыточными. Совершенных чисел почти нет.

Число	Сумма собственных делителей	Тип
1	0 [нет собственных делителей]	Недостаточное
2	1	Недостаточное
3	1	Недостаточное
4	1 + 2 = 3	Недостаточное
5	1	Недостаточное
6	1 + 2 + 3 = 6	Совершенное
7	1	Недостаточное
8	1 + 2 + 4 = 7	Недостаточное
9	1 + 3 = 4	Недостаточное
10	1 + 2 + 5 = 8	Недостаточное
11	1	Недостаточное
12	1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16	Избыточное
13	1	Недостаточное
14	1 + 7 = 8	Недостаточное
15	1 + 3 + 5 = 9	Недостаточное

Таблица 7

Первые два совершенных числа — это

$6 = 1 + 2 + 3;$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$

Таким образом, наименьшим совершенным числом является 6, а наименьшим избыточным числом — 12.

Древние нашли следующие два совершенных числа — 28 и 496. К 100 г. н. э. Никомах нашел четвертое такое число — 8128. Около 1460 г. пятое число — 33 550 336 — появилось в одной анонимной рукописи. В 1588 г. Пьетро Катальди нашел шестое и седьмое совершенные числа: 8 589 869 056 и 137 438 691 328.

Задолго до этого Евклид предложил правило образования совершенных чисел. В современной записи оно гласит, что если число $2^n - 1$ простое, то число $2^{n-1}(2^n - 1)$ совершенное. Приведенные выше совершенные числа соответствуют $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$. Простые числа вида $2^n - 1$ называют *простыми Мерсенна* в честь монаха Марена Мерсенна (см. главу $2^{57\,885\,161}-1$).

Эйлер доказал, что все четные совершенные числа имеют именно такой вид. Однако вот уже 25 веков математики не могут отыскать ни одного нечетного совершенного числа или доказать, что таких чисел не существует в принципе. Если такое число существует, оно должно иметь по меньшей мере 1500 знаков и по меньшей мере 101 простой делитель, среди которых по крайней мере девять делителей различны. Его наибольший простой делитель должен иметь девять или более знаков.

Контактное число

Контактным числом на плоскости называют наибольшее число кругов заданного размера, которые могут одновременно коснуться круга того же размера. Это число равно 6.

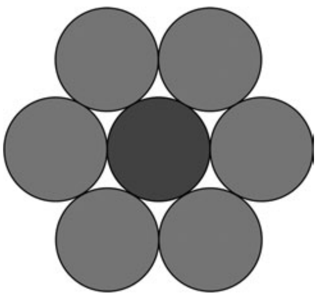


Рис. 42. Контактное число на плоскости равно 6

Для доказательства этого факта достаточно элементарной геометрии.

Контактное число в трехмерном пространстве — это наибольшее число шаров заданного размера, которые могут касаться шара того же размера. Это число равно 12 (см. главу 12). В этом случае доказательство намного сложнее, и долгое время математики сомневались, нельзя ли уместить вокруг шара тринадцать таких же шаров.

Соты

Пчелиные соты образованы шестиугольными «плитками», которые идеально прилегают друг к другу и покрывают всю плоскость (см. главу 3).

Согласно *гипотезе о сотах*, рисунок сот — это способ разделить плоскость на замкнутые области с минимальным суммарным периметром. Эта гипотеза выдвигалась еще в древние времена: например, ее предлагал римский ученый Марк Теренций Варрон в 36 г. н. э. Не исключено даже, что она восходит еще к греческому геометру Папу Александрийскому, который предложил ее примерно в 325 г. до н. э.

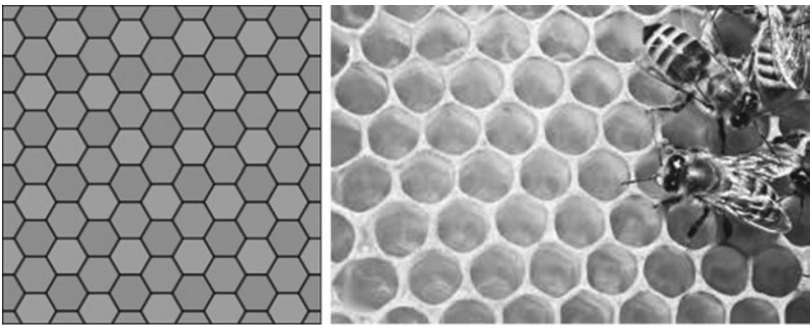


Рис. 43. Слева: плоскость, замощенная правильными шестиугольниками. Справа: пчелиные соты

Сегодня гипотеза о сотах является теоремой. Томас Хейлс доказал ее в 1999 г.

Число четырехмерных политопов

Греки доказали, что в трехмерном пространстве существует ровно пять правильных многогранников (см. главу 5).

А как насчет пространств с иным числом измерений? Вспомним из главы 4, что мы можем определить математическое пространство с любым числом измерений, воспользовавшись системой координат. В частности, четырехмерное пространство составляют все четверки действительных чисел (x, y, z, w). В таких пространствах существует естественное понятие расстояния, основанное на очевидной аналогии с теоремой Пифагора, поэтому можно разумно говорить о длинах, углах, аналогах сфер, цилиндров, конусов и так далее. Имеет смысл задаться вопросом о том, что представляют собой аналоги правильных многогранников в четырех и более измерениях. Ответ будет достаточно неожиданным.

В двумерном пространстве правильных многоугольников бесконечно много: по одному на каждое натуральное число сторон, начиная с трех. В пространстве пяти и более измерений существует только три правильных политопа, как их называют; они аналогичны тетраэдру, кубу и октаэдру. Но в четырехмерном пространстве существует *шесть* правильных политопов.

Название	**Ячейки**	**Грани**	**Ребра**	**Вершины**
5-гранник	5 тетраэдров	10	10	5
8-гранник	8 кубов	24	32	16
16-гранник	16 тетраэдров	32	24	8
24-гранник	24 октаэдра	96	96	24
120-гранник	120 додекаэдров	720	1200	600
600-гранник	600 тетраэдров	1200	720	120

Таблица 8

Первые три политопа в таблице аналогичны тетраэдру, кубу и октаэдру. Пятигранник называется также 4-мерным симплексом, а 8-гранник — 4-мерным гиперкубом, или тессерактом. Три последних политопа существуют только в четырехмерном пространстве.

Поскольку четырехмерной бумаги в моем распоряжении нет, я ограничусь тем, что покажу, как выглядят проекции этих объектов на плоскость.

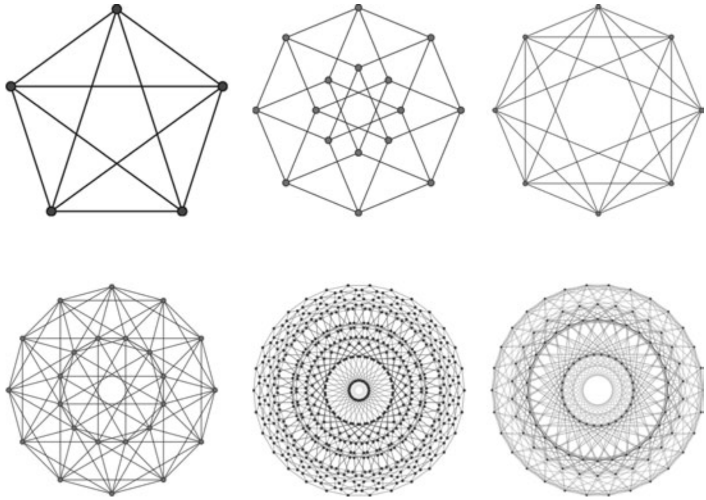


Рис. 44. Шесть правильных политопов в проекции на плоскость. Слева направо и сверху вниз: 5, 8, 16, 24, 120 и 600-гранник

Людвиг Шляфли проклассифицировал правильные политопы. Часть результатов он опубликовал в 1855 и 1858 гг., а остальное появилось лишь после его смерти в 1901 г. Однако в 1880–1900 гг. девять других математиков независимо от него и друг от друга получили сходные результаты. Среди этих ученых была и Алисия Буль Стотт, одна из дочерей математика и логика Джорджа Буля, который придумал слово «политоп». Алисия с детства демонстрировала хорошее понимание четырехмерной геометрии, вероятно, потому, что ее старшая сестра Мэри вышла замуж за Чарльза Говарда Хинтона, весьма колоритного джентльмена (он был осужден за двоеженство), страстно увлеченного четырехмерным пространством. Благодаря своему таланту Алисия Стотт сумела установить чисто евклидовыми методами, что представляют собой сечения политопов: это сложные симметричные многогранники.

7

Четвертое простое число

Число 7 — четвертое по счету простое число — и удобный повод поговорить о том, чем хороши простые числа и почему они представляют интерес. Простые числа обнаруживаются в большинстве задач, связанных с умножением натуральных чисел. Это «строительные кирпичики» для всех натуральных чисел. В главе 1 мы видели, что любое натуральное число больше 1 либо является простым, либо может быть получено путем перемножения двух или более простых чисел.

Кроме того, число 7 связано с давней, но до сих пор не решенной задачей о факториалах. А еще это наименьшее число красок, нужное для раскрашивания любых карт на поверхности тора таким образом, чтобы соседние области всегда оказывались разных цветов.

Поиск простых множителей

В 1801 г. Гаусс, ведущий специалист по теории чисел своего времени и один из величайших математиков в истории, написал замечательный учебник по теории чисел под названием «Арифметические исследования». Там среди очень сложных тем он указал на важность двух базовых вопросов: «Известно, что задача различения простых чисел от составных и разложения последних на простые множители — одна из важнейших и полезнейших задач арифметики».

Самый очевидный способ решить обе эти задачи состоит в том, чтобы перебрать все возможные делители и попробовать все по очереди. Чтобы определить, к примеру, является ли число 35 простым и, если это не так, найти его множители, мы начинаем проверку:

35: 2 = 17 с остатком 1,
35: 3 = 11 с остатком 2,
35: 4 = 8 с остатком 3,
35: 5 = 7 ровно.

Таким образом, $35 = 5 \times 7$, а 7, как нам известно, — число простое, поэтому факторизация завершена.

Эту процедуру можно немного ускорить. Если у нас уже имеется список первых нескольких простых чисел, то можно ограничиться подстановкой только простых делителей. Установив, например, что 35 не делится на 2 нацело, мы узнаем, что на 4 это число тоже не делится нацело. Причина в том, что 4 делится на 2, поэтому на 2 делится все, что делится на 4. (Так же можно рассуждать о числах 6 и 8, а также о любых других четных числах.)

Кроме того, мы можем прекратить поиски, как только достигнем корня квадратного из числа, о разложении которого идет речь. Почему? Типичный случай — число 4283, квадратный корень которого составляет приблизительно 65,44. Если перемножить два числа, которые больше этого значения, то результат непременно получится больше, чем $65{,}44 \times 65{,}44$, то есть больше 4283. Таким образом, как бы мы ни разбивали 4283 на два (или больше) множителя, по крайней мере один из них должен будет оказаться меньше или равен 65, то есть числа, которое мы получим, отбросив всю дробную часть корня.

Таким образом, мы можем найти все делители числа 4283, проверив простые числа от 2 до 65. Если бы 4283 делилось на какое-нибудь из них нацело, мы продолжили бы процесс факторизации, разделив предварительно 4283 на найденный делитель, то есть уже с меньшим числом. На самом деле 4283 не делится ни на одно простое число вплоть до 65, поэтому 4283 — простое число.

Если попробовать по той же логике разложить 4183 (квадратный корень ~ 64,67), то нам придется проверить все простые числа вплоть до 64. При этом выяснится, что на 47 число 4183 делится нацело:

$$4183 : 47 = 89.$$

Далее выясняется, что 89 — простое число. На самом деле мы это уже знаем, поскольку 4183 не делится на 2, 3, 5 и 7. Значит, и 89 не делится на 2, 3, 5 и 7, а это единственные простые числа, не превышающие квадратный корень из 89, равный 9,43. Значит, мы нашли разложение числа 4183 на простые множители: $4183 = 47 \times 89$.

Эта процедура кажется простой, но для больших чисел она не слишком подходит. К примеру, чтобы найти разложение числа

$$11\,111\,111\,111\,111\,111,$$

нам пришлось бы проверить все простые числа вплоть до его квадратного корня ~ 105 409 255,3. А в этом промежутке, откровенно говоря, довольно много простых чисел — 6 054 855 штук, если быть точным. Конечно, со временем мы обнаружим один простой множитель и получим разложение

$$11\,111\,111\,111\,111\,111 = 2\,071\,723 \times 5\,363\,222\,357,$$

но времени для осуществления этой операции вручную потребуется много.

Разумеется, компьютер может проделать это быстрее, но базовое правило подобных вычислений гласит, что если нечто становится очень трудно делать вручную при умеренно больших числах, то компьютеру это тоже будет очень трудно делать, хотя и при значительно бо́льших числах. Даже у компьютера могут возникнуть проблемы, если придется проводить подобный систематический поиск для 50-значного числа, а не для 17-значного.

Теорема Ферма

К счастью, есть методы и получше. Существуют эффективные способы проверить, является ли число простым, без поиска его простых делителей. В широком смысле эти методы имеют смысл для чисел, начиная примерно с сотни знаков, хотя уровень сложности при этом сильно варьирует в зависимости от конкретного числа, а количество знаков в нем позволяет сделать лишь грубую оценку. Напротив, математикам на сегодня неизвестны быстрые способы, с помощью которых можно гарантированно найти делители *любого* составного числа приблизительно такого размера. Строго говоря, было бы достаточно найти всего один делитель, потому что после этого на него можно разделить, а процесс повторить уже с меньшим числом, но в сложных случаях этот процесс занимает слишком много времени, чтобы его можно было применить на практике.

Признаки простоты позволяют доказать, что число является составным, без нахождения каких бы то ни было его делителей. Достаточно показать, что оно не удовлетворяет одному из признаков простоты. Простые числа обладают определенными свойствами, и мы можем проверить, обладает ли данное число этими свойствами. Если нет, оно не может быть простым. Это напоминает проверку велосипедной камеры на герметичность: мы накачиваем камеру воздухом и смотрим, не сдуется ли она. Если сдуется, то где-то есть дырка, но такой тест не позволяет точно сказать, где именно. Таким образом, доказать, что дырка есть, проще, чем найти ее. Так же и с делителями.

Простейший признак простоты — теорема Ферма. Прежде чем ее сформулировать, нам нужно немного поговорить о модулярной арифметике, которую иногда называют «арифметикой часов», потому что числа в ней повторяются по кругу, как на циферблате. Выберем произвольное число — для обычных часов со стрелками это 12 — и назовем его модулем.

Теперь в любых арифметических расчетах с целыми числами мы можем заменять любое число, кратное 12, нулем. К примеру, $5 \times 5 = 25$, но 24 это дважды 12, поэтому вычтем 24 и получим $5 \times 5 = 1$ по модулю 12.

Гаусс в своей книге ввел модулярную арифметику, которая сегодня широко используется не только в математике, но и в информатике, физике и инженерном деле. Модулярная арифметика очень красива, потому что почти все обычные правила арифметики в ней тоже работают. Основная разница состоит в том, что не всегда можно разделить одно число на другое, даже если это второе число — не нуль. Кроме того, она дает удобный и аккуратный способ разобраться с вопросами делимости: какие числа делятся на какие по выбранному модулю и какой получается остаток, если они нацело не делятся.

Согласно теореме Ферма, если выбрать любой простой модуль p и любое число a не кратное p, то $(p - 1)$ - я степень a в арифметике по модулю p всегда будет равна 1.

Положим, к примеру, что $p = 17$ и $a = 3$. Тогда, согласно приведенной теореме, при делении 3^{16} на 17 остаток будет равен 1. Проверим.

$$3^{16} = 43\,046\,721 = 2\,532\,160 \times 17 + 1.$$

Никому в здравом уме не придет в голову проделывать подобные расчеты вручную для по-настоящему больших чисел. К счастью, для этого существует хитрый и быстрый способ: последовательно раз за разом возводить число в квадрат и перемножать подходящие результаты.

Ключевой момент здесь — то, что *если остаток не равен 1, то модуль, с которым мы работаем, должен быть составным числом*. Таким образом, теорема Ферма образует основу для эффективного способа проверки на простоту и дает необходимое условие для того, чтобы данное число было простым. И все это делается без поиска делителей. Правда, именно поэтому, скорее всего, данный способ и эффективен.

Однако признак простоты Ферма не гарантирует результата: некоторые составные числа проходят предложенное испытание. Наименьшее из этих чисел 561. В 2003 г. Ред Алфорд, Эндрю Грэнвилл и Карл Померанс доказали, что подобных исключений существует бесконечно много, и такие числа получили название чисел Кармайкла. Самый эффективный на сегодняшний день строгий тест на простоту разработали Леонард Адлеман, Померанс и Роберт Румели. В нем используются более хитроумные, чем теорема Ферма, но аналогичные по духу идеи теории чисел.

В 2002 г. Маниндра Аграваль и его ученики Нирадж Кайял и Нитин Саксена открыли признак простоты, который, в принципе, может оказаться быстрее, чем признак Адлемана–Померанса–Румели, поскольку просчитывается за «полиномиальное время». Если в числе n десятичных знаков, то время просчета предложенного алгоритма пропорционально не более чем n^{12}. Сегодня мы знаем, что эту величина может быть уменьшена до $n^{7,5}$. Однако преимущества этого алгоритма не проявляются, пока число *десятичных знаков* в n не достигнет примерно 10^{1000}. Во всей Вселенной не найдется места, куда можно было бы втиснуть такое число.

Простые числа и шифры

Простые числа приобрели немалое значение в криптографии — науке о тайных шифрах. Шифры, очевидно, важны для военных (см. главу 26), но у коммерческих компаний и частных лиц тоже бывают секреты. Мы ведь не хотим, чтобы преступники, когда мы пользуемся Интернетом, получили доступ к нашим банковским счетам или номерам кредиток.

Обычный способ снизить подобные риски — шифрование: важную информацию всегда лучше зашифровать. Система RSA, знаменитый шифр, который придумали в 1978 г. Тед Ривест, Эди Шамир и Леонард Адлеман и который назван по первым латинским буквам их фамилий, использует для шифрования простые числа. Большие числа, знаков по сто в длину. Эта система имеет одну замечательную особенность: способ шифрования сообщений можно свободно публиковать. Не публикуется другое — как эти сообщения расшифровывать. Для организации такой системы нужна одна дополнительная единица информации, которую, собственно, и следует держать в секрете.

Любое сообщение можно без труда превратить в число: к примеру, поставив в соответствие каждой букве двузначный код и выписав все эти коды подряд. Предположим, мы решили использовать коды $A = 01$, $Б = 02$ и так далее, а числа за пределами алфавита пустить на знаки препинания и пробел. Тогда

$$\begin{aligned}\text{СООБЩЕНИЕ} &\rightarrow \text{С О О Б Щ Е Н И Е}\\ &\rightarrow 18\ 15\ 15\ 02\ 26\ 06\ 14\ 10\ 06\\ &\rightarrow 181515022606141006\end{aligned}$$

Шифр — это способ преобразовать данное сообщение в другое сообщение. Но поскольку любое сообщение — это число, то можно считать, что шифр — это способ преобразовать одно число в другое. Здесь-то и вступает в игру математика, а для создания шифров можно использовать идеи из теории чисел.

Система RSA начинается с того, что мы выбираем два простых числа p и q, каждое из (например) ста десятичных знаков. Простые числа таких размеров можно быстро найти при помощи компьютера и какого-нибудь признака простоты. Затем следует перемножить эти числа, чтобы получить число pq. Открытый способ шифрования состоит в том, чтобы перевести сообщение в числовой вид и провести некоторую вычислительную операцию, основанную на числе pq. Технические подробности можно посмотреть ниже. Но для обратного преобразования (расшифровки) необходимо знать p (тогда и q можно вычислить без труда).

Однако, если вы не объявите во всеуслышание, чему равно p, то никто посторонний не сможет расшифровать сообщение, если, конечно, не сможет *сам найти* величину p. Для этого необходимо разложить 200-значное число pq на простые множители, а это — если вы, конечно, не наделаете глупостей и не выберете совсем уж неудачные p и q — представляется невозможным даже с привлечением самых мощных суперкомпьютеров на свете. Если те, кто пользуется этим шифром, потеряют p и q, они окажутся ровно в том же положении, что и все остальные. А именно — в тупике.

Технические подробности

Возьмите два больших простых числа p и q. Вычислите $n = pq$ и $s = (p - 1)(q - 1)$. Выберите число e, лежащее между 1 и s и не имеющее с s общих делителей. (Существует весьма эффективный способ нахождения общих делителей двух чисел, известный как алгоритм Евклида. Он восходит еще к Древней Греции и содержится в «Началах» Евклида.) Обнародуйте n и e. Назовите *e открытым ключом*.

Модулярная арифметика говорит нам, что существует единственное число d, лежащее между 1 и s, такое, что остаток от деления de на s равен 1. Иными словами, $de \equiv 1 \pmod{s}$. Вычислите это число d. Держите p, q, s и d в секрете. Назовите *d закрытым ключом*.

Чтобы закодировать сообщение, представьте его в виде числа m по описанному выше алгоритму. Если необходимо, разбейте длинное сообщение на блоки и перешлите их последовательно. Затем вычислите $c \equiv m^e \pmod{n}$. Это и будет зашифрованное сообщение, его можно отправлять по назначению. Само правило шифрования можно раскрывать без всяких опасений. Существует быстрый способ расчета c на основе двоичного разложения e.

Получатель, которому известен секретный ключ d, сможет расшифровать сообщение, вычислив $c^d \pmod{n}$. Согласно одной из основных теорем теории чисел — несколько расширенному варианту теоремы Ферма, — результат совпадет с исходным сообщением m.

Шпиону же, который захочет расшифровать сообщение, придется самостоятельно, не зная s, искать d. Это сводится к поиску $p - 1$ и $q - 1$, или просто p и q, что одно и то же. Чтобы их найти, необходимо разложить n на простые множители. Но n настолько велико, что это практически невозможно.

Шифры такого типа называют *асимметричными*, потому что в одну сторону (шифрование) движение идет легко, а вот в другую (дешифровка) — трудно, если у вас нет специальных приспособлений (того самого секретного ключа). Математики не могут сказать наверняка, является ли такой шифр абсолютно безопасным. Не исключено, что какой-то способ быстрого разложения числа на простые множители все-таки есть, просто мы пока не сумели его найти. (Может также существовать какой-то другой способ нахождения d, а если известно d, то можно вычислить p и q, так что это даст эффективный метод поиска делителей.)

Но даже если сам шифр теоретически безопасен, шпион может получить доступ к p и q какими-то иными методами — путем кражи, подкупа или шантажа человека, которому известна тайна. Это вечная проблема всех шифров. На практике система RSA используется для ограниченного числа важных сообщений: к примеру, чтобы переслать нужному человеку секретный ключ к какому-то более простому методу шифрования.

Задача Брокара

Если взять все числа от 1 до n и перемножить их, получится так называемый «n факториал», который записывается как $n!$. Факториалы, по существу, отражают число способов упорядоченной расстановки n объектов (см. главу 26!).

Вот первые несколько факториалов:

$1! = 1$	$6! = 720$
$2! = 2$	$7! = 5040$
$3! = 6$	$8! = 40\,320$
$4! = 24$	$9! = 362\,880$
$5! = 120$	$10! = 3\,628\,800$.

Если добавить ко всем этим числам 1, получим:

$1! + 1 = 2$	$6! + 1 = 721$
$2! + 1 = 3$	$7! + 1 = 5041$
$3! + 1 = 7$	$8! + 1 = 40\,321$
$4! + 1 = 25$	$9! + 1 = 362\,881$
$5! + 1 = 121$	$10! + 1 = 3\,628\,801.$

Среди этих чисел мы видим три полных квадрата, а именно:

$$4! + 1 = 5^2 \qquad 5! + 1 = 11^2 \qquad 7! + 1 = 71^2.$$

Других таких чисел мы не знаем, но никто пока не доказал, что никакое большее n не может дать $n! + 1$, равное полному квадрату. Этот вопрос известен как задача Брокара, поскольку в 1876 г. Анри Брокар задал вопрос о том, является ли 7 наибольшим числом, обладающим таким свойством. Позже Пал Эрдёш предположил, что ответом на этот вопрос должно быть «нет». В 2000 г. Брюс Берндт и Уильям Галвей доказали, что вплоть до 1 млрд других решений n не существует. В 1993 г. Мариус Оверхольт доказал, что существует лишь конечное число решений, но только при условии, что верна *abc*-гипотеза, одна из основных нерешенных задач теории чисел.

Семицветная карта на поверхности тора

Хивуд разработал обобщение задачи четырех красок (см. главу 4) для карт на более сложных поверхностях.

Аналогичный вопрос на сфере дает тот же ответ, что и на плоскости. Представьте себе карту на сфере и поверните сферу таким образом, чтобы ее северный полюс оказался где-то внутри одной из областей. Теперь, если исключить точку полюса, то проткнутую сферу можно будет развернуть в пространство, топологически эквивалентное бесконечной плоскости. При этом область, содержащая полюс, становится бесконечно большой и окружает собой всю остальную карту.

Однако существуют другие, более интересные поверхности, такие как тор, форма которого напоминает бублик с отверстием, и подобные поверхности с несколькими отверстиями.

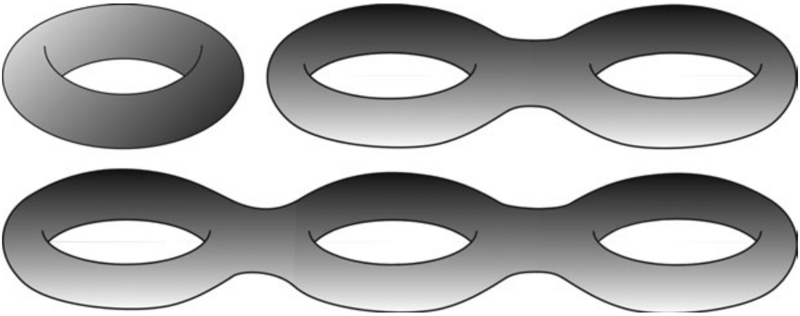


Рис. 45. Тор, тор с двумя отверстиями, тор с тремя отверстиями

Существует полезный способ, упрощающий жизнь, с помощью которого можно представить тор. Если разрезать тор вдоль двух замкнутых кривых, то получившуюся поверхность можно развернуть в квадрат.

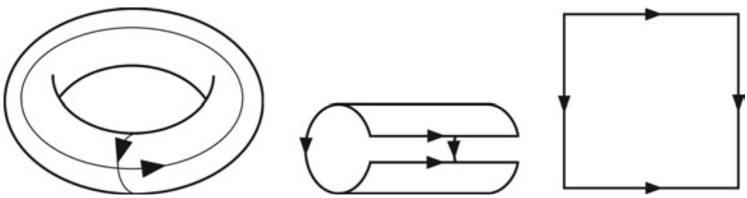


Рис. 46. Разворачиваем разрезанный тор в квадрат

Это преобразование изменяет топологию тора, но это можно обойти, если мы договоримся рассматривать соответствующие точки на противоположных краях (показаны стрелочками) как идентичные. А теперь главная хитрость. На самом деле нет необходимости скатывать квадрат в рулон и соединять противоположные стороны. Можно просто работать с плоским квадратом, достаточно не забывать о нашей договоренности и, соответственно, о правиле отождествления сторон. Всему, что мы делаем на торе, — к примеру, любым нарисованным нами кривым, — на квадрате имеется точное соответствие.

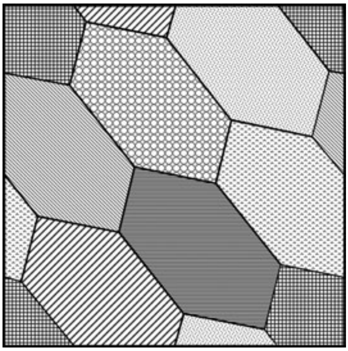


Рис. 47. Карта на торе, для раскраски которой необходимо семь цветов

Хивуд доказал, что семи красок необходимо и достаточно, чтобы раскрасить любую карту на торе. Приведенный рисунок показывает, что семь цветов необходимы: здесь квадрат представляет тор, как только что было описано. Обратите внимание, что одноцветные области на противоположных сторонах смыкаются, как и должно быть при таком представлении.

Мы видели, что существуют поверхности, подобные тору, но имеющие больше отверстий. Число отверстий называется родом поверхности и обозначается буквой g. Хивуд предложил формулу для числа красок, необходимых для раскрашивания карты на торе с g отверстиями, когда $g \geq 1$: это наименьшее натуральное число, меньшее или равное

$$\frac{7+\sqrt{48g+1}}{2}.$$

Для g в диапазоне от 1 до 10 эта формула дает значения

7 8 9 10 11 12 12 13 13 14.

Хивуд нашел эту формулу путем обобщения собственного доказательства теоремы о пяти красках на плоскости. Он сумел доказать, что числа красок, определяемого этой формулой, всегда достаточно для любой поверхности. При этом на протяжении многих лет оставалось неясным, можно ли еще уменьшить это число. Примеры для малых значений рода подсказывали, что оценка Хивуда — лучший из возможных вариантов. В 1968 г., после продолжительного исследования, Герхард Рингель и Джон У. Т. (Тед) Янгс заполнили последние пробелы в доказательстве того, что это так и есть, опираясь на собственную работу и работы некоторых других математиков. Их методы основаны на особых типах сетей и достаточно сложны, чтобы написать целую книгу.

8

Куб Фибоначчи

Первый нетривиальный куб и число Фибоначчи. Существуют ли другие кубы Фибоначчи? Размышления о кубах привели Ферма к формулировке его знаменитой последней (или Великой) теоремы. Софи Жермен, одна из великих математиков-женщин, внесла серьезный вклад в доказательство частного случая теоремы. В конце концов Великую теорему полностью доказал Эндрю Уайлз через 350 лет после того, как Ферма ее сформулировал.

Первый куб (после 1)

Куб числа получается при умножении числа на самого себя, а затем умножении результата еще раз на первоначальное число. Например, куб 2 равен $2 \times 2 \times 2 = 8$. Куб числа n записывается как n^3. Приведем первые несколько кубов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Великая теорема Ферма

Именно кубы положили начало цепочке размышлений, растянувшейся более чем на 300 лет.

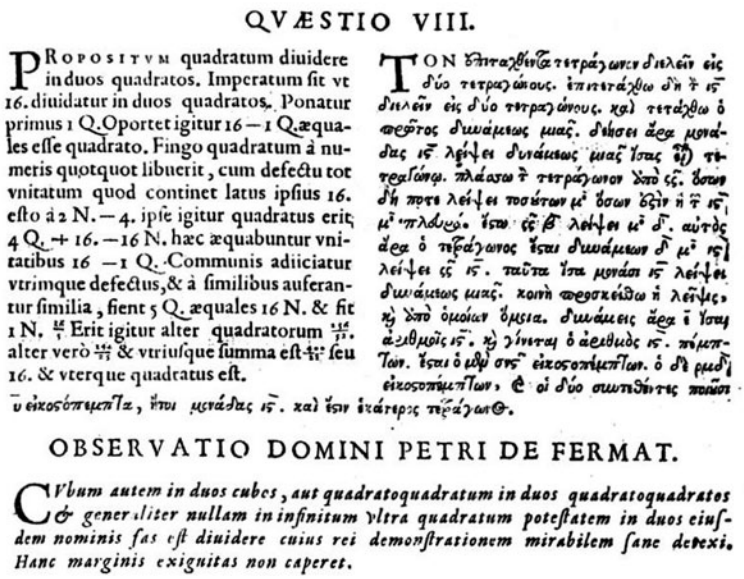
Примерно в 1630 г. Ферма заметил, что при сложении двух ненулевых кубов, кажется, никогда не получается куб. (Если разрешить нуль, то $0^3 + n^3 = n^3$ для любого n.) Он начал изучать изданный в 1621 г. знаменитый алгебраический текст древности — «Арифметику» Диофанта. На полях своего экземпляра Ферма записал: «Невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, ни вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

Говоря алгебраическим языком, Ферма, согласно его собственному утверждению, доказал, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет целочисленных решений, если n — целое число, большее или равное 3.

Это утверждение, известное сегодня как Великая теорема Ферма, было впервые опубликовано в 1670 г., когда сын Ферма Самюэль опубликовал то самое издание «Арифметики» вместе с маргиналиями отца.



QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Рис. 48. Заметка Ферма на полях «Арифметики» Диофанта, опубликованная его сыном в новом издании под заголовком «Наблюдение мастера Пьера Ферма»

Скорее всего, Ферма заинтересовался этим вопросом потому, что знал о пифагоровых тройках: это два квадрата (целочисленных), которые в сумме дают тоже квадрат. Знакомый всем пример $3^2 + 4^2 = 5^2$. Таких троек существует бесконечно много, и общая формула для них известна с древних времен (см. главу 5).

Если у Ферма действительно было доказательство этой теоремы, то найти его так и не удалось. Нам известно, что у Ферма и правда было доказательство для четвертых степеней. Он воспользовался тем фактом, что четвертая степень представляет собой особый род квадрата — а именно, квадрат квадрата (биквадрат), — чтобы связать этот случай задачи опять же с пифагоровыми тройками. Из этих же соображений ясно, что доказательство теоремы Ферма необходимо проводить лишь для степени n, равной либо 4, либо нечетному простому числу.

За два столетия после Ферма его Великую теорему удалось доказать ровно для трех нечетных простых чисел: 3, 5 и 7. С кубами разобрался Эйлер в 1770 г., Лежандр и Петер Густав Лежён Дирихле справились с пятыми степенями около 1825 г., и Габриэль Ламе доказал теорему для седьмых степеней в 1839 г.

Софи Жермен добилась значительного успеха в том, что получило известность как «первый случай» Великой теоремы Ферма; в нем n простое и не является делителем x, y или z. Работая над более амбициозной программой, которая так и не была завершена, она доказала теорему Софи Жермен: если $x^p + y^p = z^p$, где p простое и меньше 100, то xyz делится на p^2. На самом деле она доказала больше, чем это, но ее утверждение формулируется достаточно сложно. В доказательстве используются числа, известные сегодня как простые Софи Жермен: простые числа p такие, что $2p + 1$ тоже простое число. Вот первые несколько простых чисел Софи Жермен:

2 3 5 11 23 29 41 53 83 89 113 131 173 179 191,

а наибольшее известное такое число

$$18\,543\,637\,900\,515 \times 2^{666\,667}-1$$

найдено Филиппом Блидунгом в 2012 г. Предполагается, что их бесконечно много, но вопрос пока остается открытым. Простые Софи Жермен применяются в криптографии и проверке на простоту.

Великая теорема Ферма была, наконец, доказана в 1995 г., более чем через три с половиной века после того, как он ее сформулировал. Доказал ее Эндрю Уайлз. Методы, использованные им при доказательстве, выходят далеко за рамки всего, что было доступно математикам во времена Ферма или что тот сам мог придумать.

Гипотеза Каталана

В 1844 г. бельгийский математик Эжен Каталан задал интригующий вопрос о числах 8 и 9: «Умоляю вас, сэр, любезно огласить в вашем журнале следующую теорему, которая, я убежден, верна, хотя мне пока не удалось полностью доказать ее; возможно, другие добьются большего успеха. Два последовательных натуральных числа, если это не 8 и 9, не могут быть последовательными степенями; иначе говоря, уравнение $x^m - y^n = 1$, в котором неизвестные представляют собой положительные целые числа (больше 1), допускает лишь единственное решение».

Это утверждение получило известность как гипотеза Каталана. Доказал ее в 2002 г. Преда Михэйлеску с использованием современных методов из алгебраической теории чисел.

Шестое число Фибоначчи и единственный нетривиальный куб Фибоначчи

В 1202 г. Леонардо Пизанский написал арифметический труд «Книга абака» (Liber Abbaci), в котором представил европейскому читателю индийско-арабские цифры 0–9 и соответствующую систему счета. В нее вошла и забавная задача о кроликах. Начнем с одной пары маленьких крольчат. Считаем, что за сезон каждый крольчонок взрослеет, а каждая пара взрослых кроликов дает потомство — пару маленьких крольчат. Кролики бессмертны. Как будет расти население крольчатника от сезона к сезону?

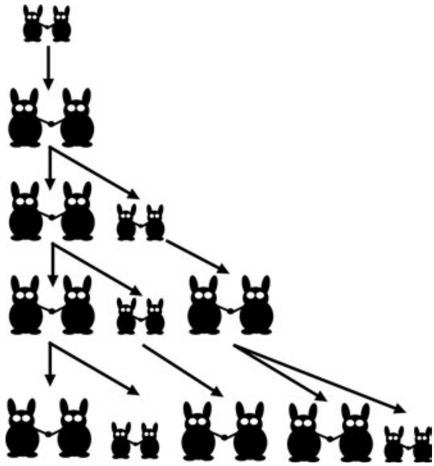


Рис. 49. Первые несколько поколений в кроличьей модели Фибоначчи

Леонардо показал, что число пар кроликов следует закономерности

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144,

где каждое следующее число после первых двух представляет собой сумму двух предыдущих чисел. К примеру, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$, $13 = 5 + 8$ и так далее. Позже Леонардо приобрел прозвище Фибоначчи (сын Боначчо), и с 1877 г., когда Лукас написал об этой последовательности, ее члены стали называть числами Фибоначчи. Часто впереди к этой последовательности приписывают 0, «нулевое» число Фибоначчи. Правило при этом продолжает действовать, поскольку $0 + 1 = 1$.

Конечно, эта модель нереалистична, да и не задумывалась как таковая. Это была просто забавная численная задача в учебнике. Однако современные ее обобщения, известные как модели Лесли, более реалистичны и даже применимы на практике к реальным популяциям.

Свойства чисел Фибоначчи

Математики давно попали под обаяние чисел Фибоначчи. На фундаментальном уровне оно связано с числом φ, выражающим золотое сечение. Пользуясь тем базовым свойством, что $\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$, можно доказать, что n-е число Фибоначчи F_n *в точности* равно

$$\frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Это ближайшее целое число к $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Таким образом, числа Фибоначчи приближенно пропорциональны φ^n; это указывает, что они возрастают экспоненциально — как степени фиксированного числа.

В числах Фибоначчи много закономерностей. Возьмем три последовательных числа — 5, 8, 13. Тогда $5 \times 13 = 65$, а $8^2 = 64$, что различается на 1. Или в более общем виде:

$$F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n.$$

Сумма последовательных чисел Фибоначчи удовлетворяет условию

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2}-1.$$

К примеру,

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = 21-1.$$

Не существует известной формулы для суммы величин, обратных ненулевым числам Фибоначчи:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\ldots$$

Численно эта «обратная постоянная Фибоначчи» приблизительно равна 3,359885662243. Ришар Андре-Жаннен доказал, что она иррациональна — не равна в точности никакой дроби.

Многие числа Фибоначчи — простые. Первые из них — 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28 657 и 514 229. Наибольшее известное простое число Фибоначчи имеет несколько тысяч знаков. Неизвестно, конечно, бесконечно ли количество простых среди чисел Фибоначчи.

Есть еще один очень сложный вопрос, который удалось решить лишь недавно: когда число Фибоначчи представляет собой полную степень? В 1951 г. В. Льюнгрен доказал, что двенадцатое число Фибоначчи $144 = 12^2$ — это единственное нетривиальное число Фибоначчи, представляющее собой полный квадрат. (0 и 1 являются n-ми степенями для любых n, но это не слишком интересно.) Харви Кон в 1864 г. предложил другое доказательство. Шестое число Фибоначчи $8 = 2^3$, и в 1969 г. Х. Лондон и Р. Финкельштейн доказали, что это единственное нетривиальное число Фибоначчи, являющееся кубом. В 2006 г. Я. Бюжо, М. Миньотт и С. Сиксек доказали, что *единственные* числа Фибоначчи, представляющие собой полные степени (выше первой), — это 0, 1, 8 и 144.

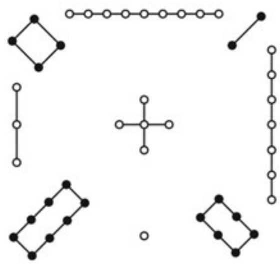
9

Магический квадрат

В самом маленьком нетривиальном магическом квадрате 9 клеток. Существует 9 способов замостить плоскость правильными многоугольниками, одинаково расположенными в каждой вершине. Прямоугольник подходящих измерений можно разбить на 9 квадратов разных размеров.

Самый маленький магический квадрат

Магические квадраты — это квадратные таблицы с числами — обычно с числами 1, 2, 3… до некоторого предела, — такие что сумма чисел в любом ряду, любой колонке и по обеим диагоналям дает одну и ту же величину. Магические квадраты не имеют в математике особого значения, но забавны и интересны. Самый маленький магический квадрат (помимо тривиального квадрата 1×1 с единственным числом 1 в нем) — это квадрат 3×3 с цифрами от 1 до 9.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 50. Слева: Ло Шу. Справа: современный вариант

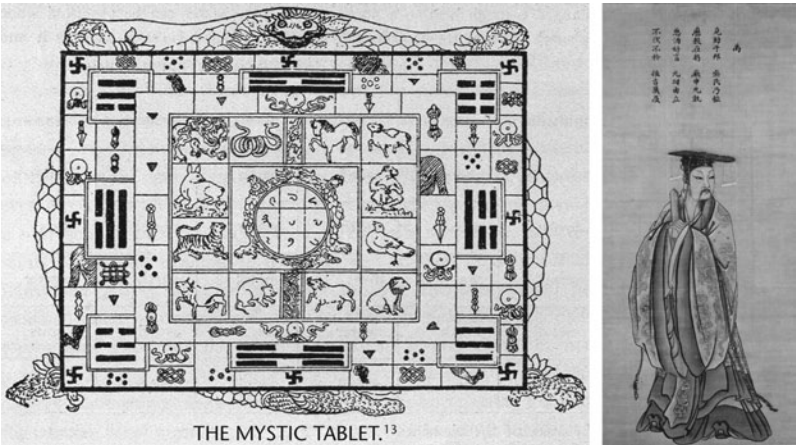


Рис. 51. Слева: тибетское изображение Ло Шу. Справа: император Юй

Древнейший известный магический квадрат фигурирует в старой китайской легенде о том, как император Юй во время сильнейшего наводнения принес жертву богу реки Ло. После этого из реки появилась волшебная черепаха с интересным математическим «орнаментом» на панцире. Это и был Ло Шу — магический квадрат, в котором числа на решетке 3×3 обозначены точками.

Если (это стандартное предположение, если нет особых причин считать иначе) цифры от 1 до 9 используются в магическом квадрате ровно по одному разу, то Ло Шу — единственно возможное магическое расположение, если исключить всевозможные повороты и зеркальные отражения. Его *магическая постоянная* — сумма чисел в любом ряду, колонке или диагонали — равна 15. В этом квадрате есть и другие закономерности. Четные числа располагаются по углам. Диаметрально противоположные числа в сумме всегда дают 10.

Размер магического квадрата называется его порядком. Порядок Ло Шу — три, а в магическом квадрате порядка n содержится n^2 клеток, содержащих обычно числа от 1 до n^2.

Другие древние культуры, такие как персидская и индийская, тоже интересовались магическими квадратами. В X в. в храме Хаджураху в Индии появился магический квадрат 4-го порядка. Его магическая постоянная, как и постоянная любого другого магического квадрата 4-го порядка с числами от 1 до 16, равна 34.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Рис. 52. Магический квадрат 4-го порядка из X в.

Магических квадратов 4-го порядка существует множество: 880, если быть точным, не считая вариантов, полученных вращением или зеркальным отражением. Число магических квадратов 5-го порядка намного больше: 275 305 224. Точное число магических квадратов 6-го порядка неизвестно, но считается, что оно лежит в окрестностях $1{,}7745 \times 10^{19}$.

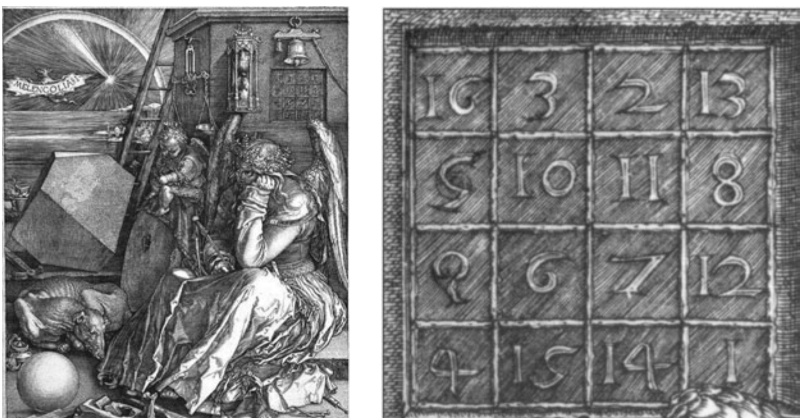


Рис. 53. Слева: Дюрер. Меланхолия I. Справа: деталь гравюры — магический квадрат. Обратите внимание на дату 1514 в центре нижнего ряда

Художник Альбрехт Дюрер включил магический квадрат 4-го порядка в свою гравюру «Меланхолия I», где можно обнаружить и несколько других математических объектов. Квадрат был выбран таким образом, чтобы дата создания гравюры, 1514 г., читалась по центру нижнего ряда.

Магические квадраты существуют любых порядков, больших или равных 3; кроме того, можно изобразить тривиальный квадрат 1-го порядка, а вот квадрата 2-го порядка не существует. Есть общие методы конструирования таких квадратов, алгоритмы которых зависят от того, является ли n нечетным числом, удвоенным нечетным числом или числом, кратным 4.

Магическая постоянная для магического квадрата n-го порядка равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Чтобы понять почему, обратите внимание: сумма чисел во всех клетках равна $1 + 2 + 3 + \ldots + n^2$, что равняется $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Поскольку квадрат можно разбить на n рядов, суммы чисел в которых равны по определению, то магическую постоянную можно получить из общей суммы путем деления ее на n.

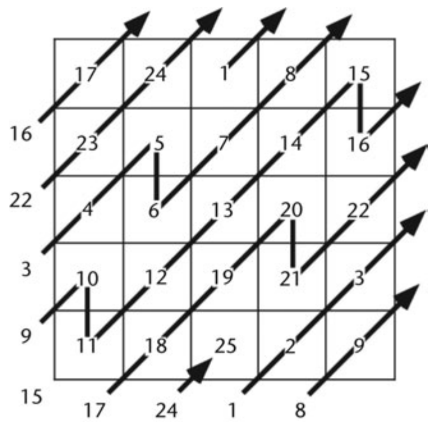


Рис. 54. Общий метод построения магического квадрата нечетного порядка. Поместим 1 в центр верхнего ряда, а затем расставим последовательные числа 2, 3, 4, …, следуя диагональным стрелочкам и при необходимости «сворачивая маршрут в кольцо» сверху вниз или слева направо. Там, где число придется писать поверх уже имеющегося, следует отступить на одну клетку вниз

Архимедовы паркеты

Существует девять схем замощения, в которых используется больше одного типа правильных многоугольников и в каждом углу эти многоугольники сходятся одинаково. Они известны как архимедовы, однородные и полуправильные (см. рис. 55).

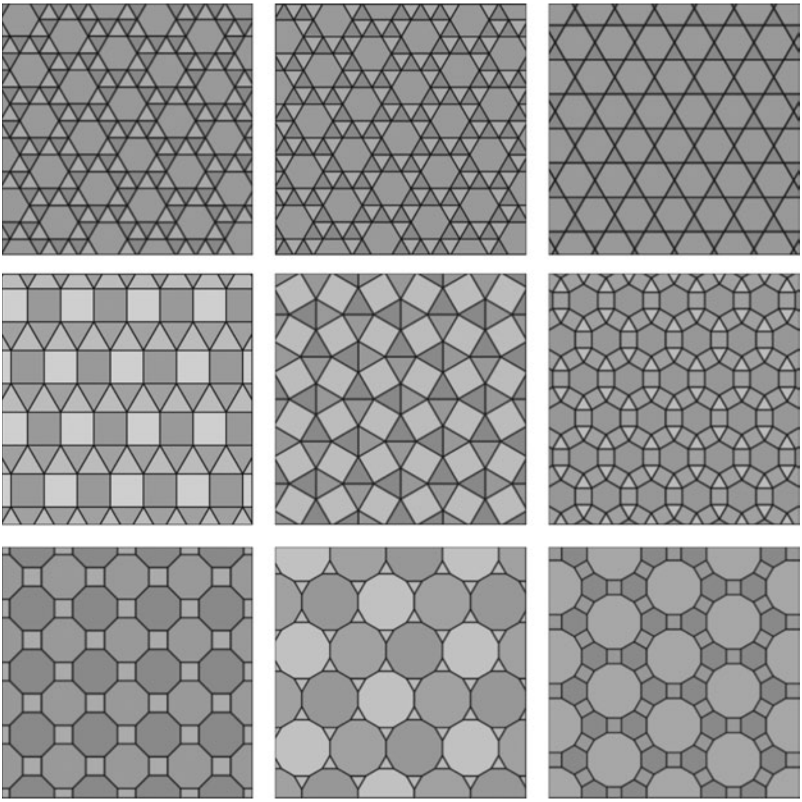


Рис. 55. Девять архимедовых схем мощения плоскости

Квадраты и прямоугольники

Квадрат легко можно разделить на девять меньших квадратов равного размера, разрезав его натрое вдоль каждой из сторон. Наименьшее число *неравных* квадратов, на которые можно поделить прямоугольник с целыми сторонами, тоже равно девяти, но способ такого деления найти гораздо труднее.

Мы все знаем, что прямоугольный пол можно замостить квадратными плитками равного размера, для этого достаточно, чтобы стороны прямоугольника были кратны размеру плитки. Но что произойдет, если мы используем плитки *разных* неповторяющихся размеров? Первый «прямоугольник из квадратов» опубликовал в 1925 г. Збигнев Морон; он использовал в построении десять квадратов со сторонами 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24, 25. Вскоре после этого он нашел еще один вариант — с девятью квадратами размеров 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18.

А можно ли составить *квадрат* из квадратных плиток разного размера? Долгое время это считалось невозможным, но в 1939 г. Роланд Спраг нашел вариант, в котором 55 различных квадратных плиток вместе образуют квадрат. В 1940 г. Леонард Брукс, Седрик Смит, Артур Стоун и Уильям Тутте, в то время студенты кембриджского Тринити-колледжа, опубликовали статью, в которой сопоставили задачу о замощении квадрата с электрическими сетями — собственно, параметры сети определяют, каких размеров следует взять квадраты и как расположить. Этот метод позволил найти новые решения.

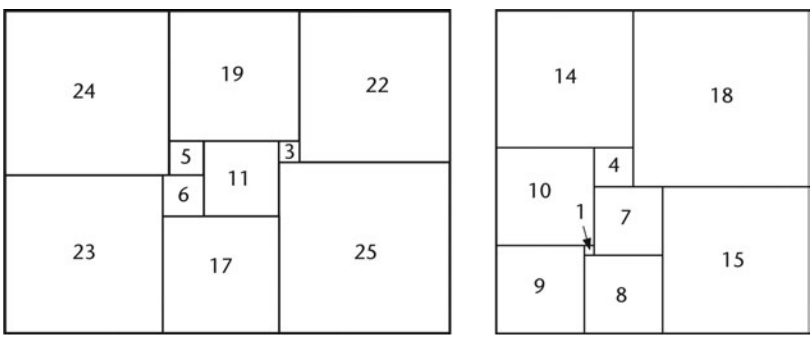
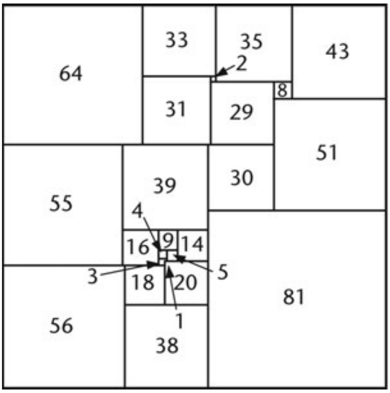


Рис. 56. Слева: первый вариант разложения прямоугольника на квадраты, предложенный Мороном. Справа: его же улучшение: вариант с девятью плитками



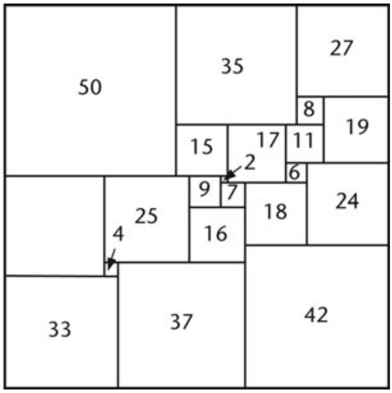


Рис. 57. Слева: квадрат из квадратов Уилкокса, 24 плитки. Справа: квадрат из 21 квадратной плитки Дюйвестейна

В 1948 г. Теофил Уилкокс подобрал 24 квадрата, которые вместе составляют тоже квадрат. До недавнего времени считалось, что из меньшего набора квадратов собрать квадрат невозможно, но в 1962 г. Адрианус Дюйвестейн при помощи компьютера показал, что для этого достаточно 21 плитки и что это минимальное возможное число. Размеры плиток: 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42 и 50.

В 1975 г. Соломон Голомб задал вопрос: можно ли замостить без прорех бесконечную плоскость, используя ровно по одной квадратной плитке каждого целого размера: 1, 2, 3, 4 и так далее? До недавнего времени задача оставалась нерешенной, но в 2008 г. Джеймс и Фредерик Хенле нашли остроумное доказательство того, что это возможно.

10

Десятичная система

Десятичная система, которой мы пользуемся для записи чисел, основана на числе 10, вероятно потому, что на руках у нас по десять пальцев — цифр. Другие основания тоже возможны, и некоторые из них — в первую очередь 20 и 60 — действительно использовались древними культурами. 10 — число одновременно треугольное и пирамидальное. Вопреки мнению Эйлера существует два ортогональных латинских квадрата 10×10.

Счет десятками

Современная система записи чисел называется «десятичной», потому что использует 10 как числовую базу. В этой системе одни и те же десять символов

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

используются для обозначения единиц, десятков, сотен, тысяч и так далее. Что именно должна обозначать данная цифра, показывает ее положение в числе. Например, в числе 2015 символы означают:

5 единиц
1 десяток
0 сотен
2 тысячи.

Центральную роль в системе играют последовательные степени 10:

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$.

Мы настолько привыкли к этой записи, что обычно воспринимаем ее как просто «числа» и считаем, что в числе 10 есть что-то математически особенное. Однако подобные системы могут использовать в качестве базы любое число. Так что, хотя 10 и правда число особенное (см. ниже), в этом отношении оно совершенно обыкновенное.

В компьютерах используются следующие числовые базы:

2 — двоичная система (см. главу 2), символы 0 и 1;
8 — восьмеричная система, символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
16 — шестнадцатеричная система, символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Двенадцатеричную систему (база 12) нередко предлагали как альтернативу и улучшение десятичной, поскольку 12 делится нацело на 2, 3, 4 и 6, тогда как 10 — только на 2 и 5. Майя использовали основание 20, а древние вавилоняне — основание 60 (то и другое см. в главе 0).

Мы можем «распаковать» десятичное число 2015 и записать его в следующем виде:

$$2 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \times 1$$

или, используя степени 10:

$$2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

Такая система записи называется позиционной, поскольку значение символа зависит от его положения в числе, то есть от позиции.

Те же символы в восьмеричной системе означали бы

$$2 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 5 \times 8^0.$$

В более привычной десятичной системе это

$$2 \times 512 + 0 \times 64 + 1 \times 8 + 5 \times 1 = 1037.$$

Таким образом, один и тот же набор символов в системах счисления с разными основаниями представляет разные числа.

Попробуем еще одну, менее привычную базу: 7. У всех инопланетных обитателей системы звезды Апеллобетниз III по семь хвостов, и считают они не на пальцах, а на хвостах. Поэтому в их системе счисления всего семь цифр от 0 до 6. Там, где мы написали бы 7, они пишут 10 и продолжают в том же духе до 66, что мы записали бы как 48. Число 49 у них выглядит как 100 и так далее.

Таким образом, число $abcd$ в апеллобетнизской системе счисления переводится в десятичную как

$$a \times 7^3 + b \times 7^2 + c \times 7^1 + d \times 7^0 = 343a + 49b + 7c + d.$$

Немного практики — и вы сможете складывать инопланетные числа в этой системе, не переводя их в десятичную и обратно. При сложении чисел вы будете бормотать себе под нос что-нибудь вроде «4 + 5… так… 2 пишем, один в уме» (поскольку десятичное 9 в семеричной системе записывается как 12), придется запомнить другую таблицу умножения, но, помимо этого, все остальное будет очень похоже.

История числовой записи

Древние цивилизации пользовались системами записи чисел, совсем не похожими на нашу. В Вавилоне была принята шестидесятеричная система счисления с особыми клинописными символами для всех шестидесяти цифр (см. главу 0). В Египте были особые символы для степеней 10, которые полагалось повторять для получения других чисел. В Древней Греции* для обозначения чисел от 1 до 9, от 10 до 90, от 100 до 900 использовались буквы алфавита.

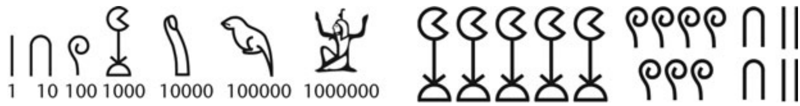


Рис. 58. Слева: древнеегипетские числовые символы. Справа: число 5724, записанное египетскими иероглифами

Сегодняшняя позиционная запись и современные символы для десяти цифр 0–9 появились в Индии около 500 г. н. э., но у них были и предшественники. История сложна: даты в ней противоречивы, а определять их трудно.

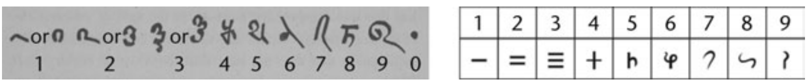


Рис. 59. Слева: символы из манускрипта Бахшали. Справа: числа брахми

Бахшалийская рукопись, найденная в 1881 г. возле селения Бахшали на территории современного Пакистана, написана на бересте и считается древнейшим известным документом индийской математики. Ученые датируют ее между II в. до н. э. и III в. н. э.; полагают, что это копия более раннего манускрипта. В этой рукописи для обозначения цифр 0–9 используются отдельные символы. Числа брахми восходят к 200–300 гг. н. э., но в них не используется позиционная запись. Вместо этого имеются дополнительные символы для обозначения десятков, а также для 100 и 1000, и правила сочетания этих символов для получения таких чисел, как 3000.

Позднейшие «индийские» числа выведены из чисел брахми. Их использовал в VI в. индийский математик Арьябхата и даже

* А потом и на Руси. — *Прим. пер.*

в нескольких разных формах. А 0 как отдельное число использовал в VII в. Брахмагупта, и он же нашел правила выполнения арифметических операций с нулем.

Современные европейские	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Индо-арабские	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Восточные индо-арабские (персидские и урду)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Деванагари (индийские)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Тамильские		௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

Рис. 60. Примеры арабских и индийских цифр

Индийское изобретение распространилось на Ближний Восток, в частности, через персидского математика Аль-Хорезми («Книга об индийском счете», 825 г.) и арабского математика Аль-Кинди («О применении индийских цифр», ок. 830 г.). Позже оно пришло и в Европу через латинские переводы книги Аль-Хорезми.

Первой книгой, написанной специально для продвижения десятичной системы в Европе, стала «Книга абака» Фибоначчи (1202 г.). Автор называл десятичную систему «Индийским методом» (*modus Indorum*), но ассоциации с Аль-Хорезми были настолько сильны, что в языке навсегда закрепился термин «арабские цифры», несмотря даже на заглавие книги Аль-Хорезми.

Такое название за цифрами закрепилось еще и потому, что многие европейцы сталкивались с ними через арабизированных берберов.

В окончательном своем виде цифровые символы устоялись не сразу. В средневековой Европе использовались десятки их вариантов. Даже сегодня в разных культурах используется немало различных вариантов этих символов.

Западные	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Восточно-арабские	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Персидские	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Китайские упрощенные	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九
Китайские сложные	零	壹	贰 貳	叁 叄	肆	伍	陆 陸	柒	捌	玖
Монгольские	᠐	᠑	᠒	᠓	᠔	᠕	᠖	᠗	᠘	᠙
Тибетские	༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩

Рис. 61. Некоторые современные символы для обозначения цифр. (* Японцы и корейцы пользуются упрощенными китайскими значками.)

Десятичная запятая

В «Книге счета» Фибоначчи содержалась форма записи, которой мы пользуемся и сегодня: горизонтальная черта в записи дроби, как, например, $\frac{3}{4}$ для обозначения «трех четвертей». Индийцы использовали аналогичную запись, но без черты; черту, судя по всему, ввели арабы. Фибоначчи активно ее использовал, но у него одна и та же черта могла быть частью нескольких разных дробей.

Сегодня мы редко используем простые дроби на практике — ими трудно пользоваться. Вместо них мы предпочитаем десятичные дроби и, соответственно, десятичную запятую. Скажем, число π мы записываем как 3,14159. Десятичные знаки в этом смысле восходят к 1585 г., когда Саймон Стевин стал личным наставником Мориса Нассауского, сына Вильгельма Молчаливого. Со временем Стевин стал министром финансов герцогства Нассау. Занимаясь поисками точных бухгалтерских методов, он рассматривал и индо-арабскую систему счисления, но решил, что простые дроби слишком неуклюжи и неудобны.

Вавилоняне, во всем отличавшиеся практичностью, записывали в своей шестидесятеричной системе дроби, представляя соответствующими цифрами степени $\frac{1}{60}$, что дало начало современным минутам и секундам в обозначении как времени, так и угловых величин. В осовремененной форме вавилонской системы счисления 6;15 означает $6+15\times\left(\frac{1}{60}\right)$, что мы записали бы как $6\frac{1}{4}$, или 6,25. Идея Стевину понравилась, не считая непривычного и неудобного основания 60, и он стал искать систему, которая совмещала бы достоинства обоих способов. Так возникла десятичная система.

Он опубликовал свою новую систему, подчеркнув ее практичность и полезность в делах: «все расчеты, какие только встречаются в делах, могут быть выполнены при помощи одних только целых чисел, без привлечения дробей».

Его система счисления не включала десятичной точки или запятой как таковой, но очень быстро привела к возникновению современной десятичной записи. Скажем, там, где мы сегодня написали бы 5,7731, Стевин писал 5⓪7①7②3③1④. Здесь символ ⓪ указывает на целое число, ① — на одну десятую, ② — на одну сотую и так далее. Однако от ① и ② быстро избавились, оставив только ⓪, да и этот знак непрерывно сжимался и упрощался, пока не превратился просто в десятичный разделитель (точку в англо-американской традиции или запятую в континентальной).

Действительные числа

При использовании десятичной записи возникает одна проблема: иногда такая запись неточна. Так, $\frac{1}{3}$ очень близка к 0,333 и еще ближе к 0,333333, но ни то ни другое не является точным значением этой простой дроби. Чтобы убедиться в этом, умножим оба числа на 3. По идее, должно получиться 1, но на самом деле мы получим 0,999 и 0,999999. Близко, но не точно. Математики давно поняли, что в определенном смысле «верная» десятичная запись $\frac{1}{3}$ должна быть бесконечно длинной:

$$\frac{1}{3}=0{,}3333333333333333\ldots$$

Продолжаться она должна *вечно*. И это привело к мысли о том, что такое число, как π, тоже продолжается вечно, только в нем не повторяются до бесконечности одни и те же цифры:

$$\pi = 3{,}14159265358979323 8\ldots$$

Здесь важно понять, что $\frac{1}{3}$ на самом деле *равно* 0,333333…, если цифры не заканчиваются. И вот доказательство. Пусть

$$x = 0{,}333333\ldots$$

Умножим на 10. При этом x превратится в $10x$, а в числе 0,333333… произойдет сдвиг на один знак влево, поэтому

$$10x = 3{,}333333\ldots$$

Отсюда

$$10x = 3 + x,$$
$$9x = 3,$$
$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Утверждение $10x = 3 + x$ опирается на тот факт, что цифры в записи продолжаются до бесконечности. Если бы они где-нибудь остановились, хотя бы и после триллионного повторения, это утверждение было бы ложным.

Аналогичные рассуждения позволяют установить, что 0,999999… в точности равно 1, если цифры продолжаются до бесконечности. Можно либо проделать тот же фокус и установить, что $10x = 9 + x$, а значит, $x = 1$, либо просто умножить $\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots$ на 3.

Многие уверены, что 0,999999…, где девятки продолжаются бесконечно, не равно 1. Им кажется, что это число должно быть меньше. Это верно, если последовательность девяток в какой-то момент остановится, но отметим, что чем дальше это произойдет, тем меньше будет отличие от единицы:

$$1 - 0{,}9 = 0{,}1,$$
$$1 - 0{,}99 = 0{,}01,$$
$$1 - 0{,}999 = 0{,}001,$$
$$1 - 0{,}9999 = 0{,}0001,$$
$$1 - 0{,}99999 = 0{,}00001,$$
$$1 - 0{,}999999 = 0{,}000001$$

и так далее. В пределе эта разница стремится к нулю: она становится меньше любого положительного числа, каким бы крохотным оно ни было.

Математики определяют величину бесконечной десятичной дроби как *предел* конечных десятичных дробей, получаемых при остановке на определенном этапе, по мере того как число десятичных знаков бесконечно увеличивается. Для бесконечной последовательности девяток после запятой предел равен в точности 1. Никакое число меньше 1 здесь не годится, потому что при достаточно большом числе девяток значение получится больше. Не существует такой вещи, как «единица после бесконечного числа нулей», но даже если бы такое число существовало, мы не смогли бы получить 1, сложив его с 0,999999…

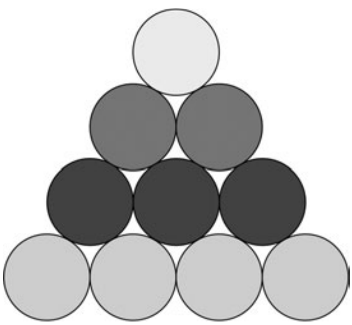


Рис. 62. Четвертое треугольное число

Такое определение делает бесконечные десятичные дроби разумной и полезной математической концепцией. Возникающие при этом числа называются действительными — не потому, что существуют в реальном мире, но чтобы отличать их от назойливых «воображаемых» чисел вроде i (см. главу i). Расплачиваться за использование понятия предела нам приходится тем, что некоторые такие числа можно записать в виде двух разных десятичных дробей, как, например, 0,999999… и 1,000000… Вы скоро к этому привыкнете.

Четвертое треугольное число

Четвертое треугольное число (см. главу 3) — это

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Рис. 63. Кегли на дорожке для боулинга

В древнем культе пифагорейцев такая совокупность точек называлась *тетрактисом* и считалась священной. Пифагорейцы были убеждены, что Вселенная основана на числах, и приписывали особые смыслы первым десяти числам. Об этих смыслах до сих пор спорят ученые; вот примеры из различных источников:

1 — единство, разум;
2 — мнение, женское начало;
3 — гармония, мужское начало;
4 — космос, справедливость.

Будучи суммой четырех первых, очень важных чисел, число 10 было особо важным. Помимо всего прочего, оно символизировало четыре «стихии» — землю, воздух, огонь и воду — и четыре компонента пространства — точку, линию, плоскость, объемную фигуру.

Кстати, кегли в лотке для боулинга (а их ровно десять) расположены именно таким образом.

Третье пирамидальное число

Точно так же, как треугольные числа 1, 3, 6, 10 и так далее представляют собой суммы последовательных натуральных чисел, пирамидальные числа есть суммы последовательных треугольных чисел:

$1 = 1,$
$4 = 1 + 3,$
$10 = 1 + 3 + 6,$
$20 = 1 + 3 + 6 + 10,$
n-е пирамидальное число равно $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

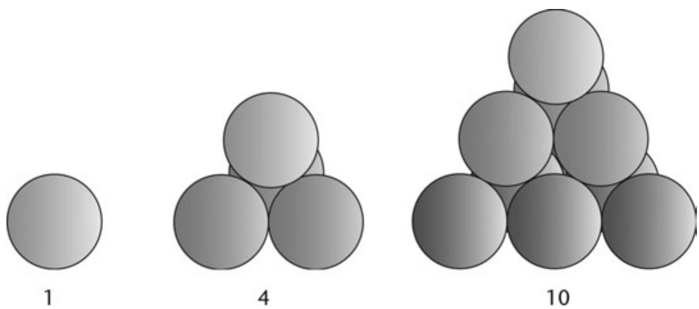


Рис. 64. Пирамидальные числа

Геометрически из пирамидального числа одинаковых шариков можно сложить пирамиду в форме тетраэдра — стопку уменьшающихся треугольников.

Десять — это наименьшее число (не считая 1), которое одновременно является и треугольным, и пирамидальным. Вообще, таких чисел *всего* пять: это 1, 10, 120, 1540 и 7140.

Ортогональные латинские квадраты 10-го порядка

В 1873 г. Эйлер размышлял об одной математической игре — магических квадратах, в которых числа распределяются по квадратной решетке таким образом, что все ряды и колонки в сумме дают одно и то же (см. главу 9). Но изобретательный разум увлек Эйлера в другом, новом направлении, и родившиеся при этом мысли он опубликовал в статье «Новый тип магического квадрата». Вот пример такого квадрата:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Суммы в рядах и колонках по-прежнему одинаковые (а именно 6), так что, если не брать во внимание одну из диагоналей, перед нами магический квадрат; правда, в нем нарушается еще одно условие — использование последовательных чисел, каждого по одному разу. Вместо этого в каждом ряду и в каждой колонке здесь присутствуют одни и те же числа — 1, 2 и 3 — в разном порядке. Такие квадраты получили название латинских, поскольку их не обязательно заполнять числами; в частности, это можно сделать с использованием латинских букв A, B, C.

Вот как Эйлер описал эту головоломку: «Весьма любопытная задача, занимающая уже некоторое время изобретательные умы множества людей, вовлекла и меня в следующие штудии, которые, кажется, открыли новое поле анализа, в частности, изучения сочетаний. Вопрос вращается вокруг расстановки

36 офицеров, которые должны быть шести разных званий и, кроме того, из шести разных полков, квадратом, причем так, чтобы на каждой линии (как горизонтальной, так и вертикальной) находилось 6 офицеров разных званий из разных полков».

Если обозначить звания буквами A, B, C, D, E, F, а полки — цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, то для решения головоломки потребуется два латинских квадрата 6 × 6, по квадрату на каждый тип символов. Кроме того, эти квадраты должны быть *ортогональными*; это означает, что при наложении их один на другой ни одно сочетание двух символов не повторяется дважды. Несложно найти отдельные варианты для званий и полков, но объединить их так, чтобы ни одно сочетание звания и полка не повторилось, намного сложнее. Мы можем попробовать, взяв таблицы:

A	B	C	D	E	F		1	2	3	4	5	6
B	C	D	E	F	A		2	1	4	3	6	5
C	D	E	F	A	B	и	4	3	5	6	1	2
D	E	F	A	B	C		6	4	1	5	2	3
E	F	A	B	C	D		5	6	2	1	3	4
F	A	B	C	D	E		3	5	6	2	4	1

Наложив эти квадраты один на другой, получим:

A1	B2	C3	D4	E5	F6
B2	C1	D4	E3	F6	A5
C4	D3	E5	F6	A1	B2
D6	E4	F1	A5	B2	C3
E5	F6	A2	B1	C3	D4
F3	A5	B6	C2	D4	E1

Повторения, как видим, есть. Например, A1 возникает дважды, а B2 — четырежды. Так что этот вариант не годится.

Если попытаться решить ту же задачу для 16 офицеров четырех разных званий A, B, C, D и из четырех полков 1, 2, 3, 4, найти решение окажется не слишком сложно:

A	B	C	D		1	2	3	4
B	A	D	C		3	4	1	2
C	D	A	B		4	3	2	1
D	C	B	A		2	1	4	3

Эти квадраты ортогональны. Замечательно, что существует еще и третий латинский квадрат, ортогональный им обоим:

p	q	r	s
s	r	q	p
q	p	s	r
r	s	p	q

Говоря языком математиков, мы обнаружили множество из *трех* взаимно ортогональных латинских квадратов 4-го порядка.

Эйлер приложил все силы, чтобы найти подходящую пару ортогональных латинских квадратов 6-го порядка, и потерпел неудачу. Это убедило его в том, что головоломка о 36 офицерах не имеет решения. Однако ему удалось построить пары ортогональных латинских квадратов $n \times n$ для всех нечетных n и для всех n, кратных 4. Несложно доказать также, что для квадратов 2-го порядка такой пары не существует. Таким образом, остаются размеры 6, 10, 14, 18 и так далее — удвоенные нечетные числа, — и Эйлер предположил, что для этих размеров ортогональных пар просто нет.

Существует 812 млн различных латинских квадратов 6 × 6; даже применив все возможные уловки, невозможно просто составить список всех возможных комбинаций. Тем не менее в 1901 г. Гастон Тарри доказал правоту Эйлера в отношении квадратов 6 × 6. Оказалось, однако, что в отношении всех остальных квадратов Эйлер ошибался. В 1959 г. Эрнест Тильден Паркер построил два ортогональных латинских квадрата 10 × 10. К 1960 г. Паркер, Радж Чандра Бозе и Шарадачандра Шанкар Шриханде доказали, что гипотеза Эйлера неверна в отношении квадратов всех размеров, кроме 6 × 6.

46	57	68	70	81	02	13	24	35	99
71	94	37	65	12	40	29	06	88	53
93	26	54	01	38	19	85	77	60	42
15	43	80	27	09	74	66	58	92	31
32	78	16	89	63	55	47	91	04	20
67	05	79	52	44	36	90	83	21	18
84	69	41	33	25	98	72	10	56	07
59	30	22	14	97	61	08	45	73	86
28	11	03	96	50	87	34	62	49	75
00	82	95	48	76	23	51	39	17	64

Рис. 65. Два ортогональных латинских квадрата 10 × 10 Паркера: один из них показан первой, а другой — второй цифрой в клеточке

Нуль и отрицательные числа

Разобравшись с числами от 1 до 10, мы сделаем шаг назад и рассмотрим 0.

Затем еще один шаг назад, чтобы получить –1.

Это открывает для нас целый мир отрицательных чисел. Кроме того, показывает новые применения для чисел.

Теперь они нужны не только для счета.

0

Ничто — это число или нет?

Нуль впервые возник в системах записи чисел и предназначен был именно для этого — для записи, то есть обозначения. Только позже нуль признали самостоятельным числом и позволили ему занять свое место — место одной из фундаментальных составляющих математической системы счисления. Однако нуль имеет немало необычных, иногда парадоксальных свойств. В частности, невозможно сколько-нибудь разумным образом разделить что-нибудь на 0. А где-то в глубине, в самом основании математики, все числа могут быть выведены из 0.

Устройство системы счисления

Во многих древних культурах символы, обозначавшие 1, 10 и 100, никак не были связаны между собой. Древние греки, к примеру, использовали буквы своего алфавита, чтобы обозначить числа от 1 до 9, от 10 до 90 и от 100 до 900. Такая система потенциально чревата путаницей, хотя, как правило, из контекста несложно определить, что именно обозначает буква: собственно букву или число. Но, кроме того, такая система сильно затрудняла арифметические действия.

Наш способ записи чисел, когда одна и та же цифра означает разные числа, в зависимости от места в числе, называется позиционной записью (см. главу 10). Эта система имеет очень серьезные преимущества для счета на бумаге «в столбик», а ведь именно так до недавнего времени осуществлялось большинство расчетов в мире. С позиционной записью основное, что необходимо знать, это базовые правила сложения и умножения десяти символов 0–9. Эти закономерности действуют и в том случае, когда те же цифры стоят на других позициях. К примеру,

$$23 + 5 = 28 \qquad 230 + 50 = 280 \qquad 2300 + 500 = 2800.$$

1	α	альфа	10	ι	йота	100	ρ	ро
2	β	бета	20	κ	каппа	200	σ	сигма
3	γ	гамма	30	λ	лямбда	300	τ	тау
4	δ	дельта	40	μ	мю	400	υ	ипсилон
5	ε	эпсилон	50	ν	ню	500	φ	фи
6	ς	вав*	60	ξ	кси	600	χ	хи
7	ζ	дзета	70	ο	омикрон	700	ψ	пси
8	η	эта	80	π	пи	800	ω	омега
9	θ	тета	90	ς	коппа*	900	∃	сампи*
* Вав, коппа и сампи — архаичные буквы, сохранившие только числовые значения								

Рис. 66

Однако в древнегреческой нотации первые два примера выглядят так:

$$\kappa\gamma + \varepsilon = \kappa\eta \qquad \sigma\lambda + \nu = \sigma\pi,$$

и в них нет очевидного сходства.

Однако у позиционной записи есть еще одна дополнительная черта, которая проявляется, в частности, в числе 2015: необходимость в нулевом символе. В данном случае он говорит о том, что в числе нет сотен. В греческой записи необходимости в нулевом символе нет. В числе σπ, скажем, σ означает 200, а π — 80. Мы можем быть уверены в том, что в числе нет единиц, просто потому, что в нем нет единичных символов α — θ. Вместо того, чтобы использовать нулевой символ, мы просто не пишем в числе никаких единичных символов.

Если мы в десятичной системе попытаемся поступить так же, 2015 превратится в 215, и мы не сможем сказать, что именно означает такое число: 215, 2150, 2105, 2015 или, может быть, 2 000 150. В ранних вариантах позиционной системы использовался пробел, 2 15, но пробел легко не заметить, а два пробела подряд — это всего лишь чуть более длинный пробел. Так что возникает путаница, и всегда легко ошибиться.

Краткая история нуля

Вавилон

Первыми среди мировых культур символ, обозначавший «здесь цифры нет», придумали вавилоняне. Вспомним (см. главу 10), что основанием вавилонской системы записи чисел было не 10 а 60. В ранней вавилонской арифметике отсутствие компонента 60^2 обозначалось пробелом, но к III в. до н. э. они изобрели для этого особый символ . Однако вавилоняне, кажется, не считали этот символ настоящим числом. Более того, на конце числа этот символ опускали, и о его значении приходилось догадываться из контекста.

Индия

Идея позиционной записи чисел в системе счисления с основанием 10 впервые появилась в книге «Локавибхага» — джайнистском космологическом тексте 458 г., в котором также используются *шунья* (что означает «пустота») там, где мы бы поставили 0. В 498 г. знаменитый индийский математик и астроном Арьябхата описал позиционную систему записи чисел как «место за местом, каждое в 10 раз больше по величине». Первое применение особого символа для десятичной цифры 0, о котором можно говорить с уверенностью, относится к 876 г. и содержится в надписи в храме Чатурбхуджа в Гвалиоре; этот символ представляет собой — догадайтесь что? Маленький кружок.

Майя

Центральноамериканская цивилизация майя, достигшая своего пика где-то между 250 и 900 г., пользовалась двадцатеричной системой счисления и имела особый значок для обозначения нуля. Вообще-то этот метод возник гораздо раньше и, как считается, был изобретен ольмеками (1500–400 гг. до н. э.). Кроме того, майя активно использовали числа в своей календарной системе, одно из правил которой получило наименование «долгий счет». Это означало отсчитывать дату в днях, идущих после мифической даты сотворения мира, которая, по современному западному календарю, пришлась бы на 11 августа 3114 г. до н. э. В этой системе символ для нуля совершенно необходим, поскольку без него невозможно избежать неоднозначности.

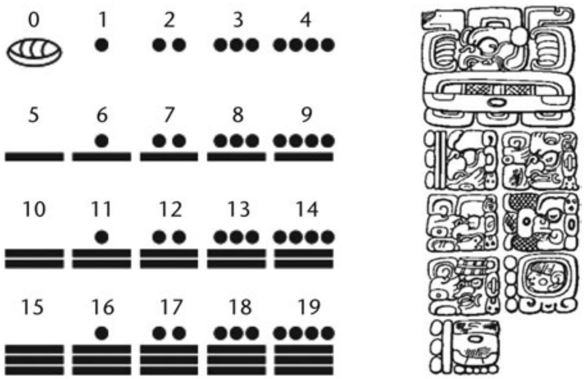


Рис. 67. Слева: цифры у майя. Справа: на каменной стеле в Квиригуа записана дата сотворения мира по календарю майя: 13 бактун, 0 катун, 0 тун, 0 уйнал, 0 кин, 4 ахау, 8 кумку. В нашем календаре это соответствует 11 августа 3114 г. до н. э.

Является ли нуль числом?

До IX в. нуль рассматривался как удобный *символ* для численных расчетов, но не считался *числом* сам по себе. Вероятно, потому, что не использовался при счете.

Если спросят, сколько у вас коров — а коровы у вас действительно есть, — вы укажете на каждую из них по очереди и посчитаете: «Одна, две, три…» Но если никаких коров у вас нет, вы не будете указывать на какую-то корову и говорить: «Нуль», — поскольку указывать вам не на что. Поскольку 0 никогда не получается при счете, он, очевидно, не является числом.

Если такая позиция кажется вам странной, то следует заметить, что еще раньше «единицу» тоже не считали числом. В некоторых языках слово «число» означает также «несколько» или даже «много»*. Практически во всех современных языках наблюдается различие между единственным и множественным числом. В древнегреческом присутствовало еще «двойственное» число, и в разговоре о двух предметах или лицах употреблялись особые формы слов. Так что в этом смысле «два» тоже не считалось таким же числом, как все прочие. То же наблюдается в нескольких других классических языках и даже в некоторых современных, таких как гэльский язык Шотландии или словенский язык**. Следы этих же форм видны и в английском, где «оба» (*both*) и «все» (*all*) — разные слова.

По мере того как нуль как символ получал все более широкое распространение, да и вообще числа начинали использоваться не только для счета, становилось ясно, что во многих отношениях нуль ведет себя, в точности как любое другое число. К IX в. индийские математики уже считали нуль настоящим числом, а не просто символом, которым удобно обозначать пробелы между другими символами для ясности. Нуль свободно использовался в повседневных расчетах.

На числовой прямой, где числа 1, 2, 3… записываются по порядку слева направо, ни у кого не возникает затруднений с тем, где поставить нуль: слева от 1. Причина достаточно очевидна: прибавление 1 к любому числу сдвигает его на один шаг вправо. Прибавление 1 к 0 сдвигает его на 1, так что 0 следует

---

* Например, number в современном английском. — *Прим. пер.*

** Двойственное число было характерно для всех славянских языков, включая древнерусский, но в большинстве из них утрачено. — *Прим. пер.*

поставить там, где один шаг вправо дает 1. А это и означает на один шаг влево от 1.

Признание отрицательных чисел окончательно закрепило за нулем место в ряду настоящих чисел. Никто не спорил с тем, что 3 — число. Если признать, что –3 это тоже число и что при сложении двух чисел всегда получается число, то результат действия 3 + (–3) должен быть числом. И число это 0.

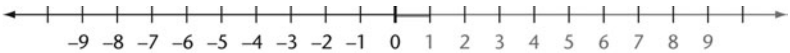


Рис. 68. Числовая прямая

Необычные свойства

Я сказал «во многих отношениях нуль ведет себя, в точности как любое другое число». Во многих, но не во всех. Нуль — особое число. Оно и должно быть особым, потому что это единственное число, аккуратно втиснутое между положительными и отрицательными числами.

Ясно, что прибавление 0 к любому числу не изменит это число. Если у меня есть три коровы и я прибавлю к ним еще ни одной, то у меня по-прежнему будет три коровы. Следует признать, что существуют и странные расчеты, подобные вот этому:

One cat has one tail.
No cat has eight tails.
Therefore, adding:
One cat has nine tails.*

* У одной кошки есть один хвост.
Нуль кошек имеют восемь хвостов. (Другое прочтение «Нет кошек с восемью хвостами».)
Поэтому получаем:
У одной кошки есть девять хвостов. — *Прим. ред.*

В этой маленькой шутке обыгрывается разное прочтение отрицания «No».

Из этого особого свойства нуля следует, что $0 + 0 = 0$, а значит, $-0 = 0$. Нуль является противоположным самому себе. Это единственное такое число, и происходит это именно потому, что на числовой прямой нуль зажат между положительными и отрицательными числами.

А что с умножением? Если рассматривать умножение как последовательное сложение, то

$$2 \times 0 = 0 + 0 = 0$$
$$3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$4 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

и поэтому

$$n \times 0 = 0$$

для любого числа n. Кстати говоря, это имеет смысл и в финансовых делах: если я положу три раза по нулю рублей на свой счет, то в итоге я ничего туда не положу. Опять же, нуль — единственное число, обладающее таким свойством.

В арифметике $m \times n$ равно $n \times m$ для всех чисел n и m. Такая договоренность подразумевает, что

$$0 \times n = 0$$

для любого n, несмотря на то что мы не можем сложить «нуль раз» по n.

Что у нас с делением? Деление нуля на ненулевое число происходит просто и понятно: получается нуль. Половина от ничего, третья или любая другая часть от ничего — это ничто. Но, когда дело доходит до деления какого-нибудь числа на нуль, на сцену выходит необычность нуля. Что такое, к примеру, $1 : 0$? Мы определяем $m : n$ как число q, для которого верно выражение $q \times n = m$. Таким образом, $1 : 0$ это такое q, для которого выполняется $q \times 0 = 1$. Однако *такого числа не существует*. Что бы мы ни взяли в качестве q, получим $q \times 0 = 0$. А единицы мы не получим никогда.

Очевидный способ решить эту проблему — принять ее за данность. Деление на нуль запрещено, потому что не имеет смысла. С другой стороны, до введения дробей считалось, что выражение 1 : 2 тоже не имеет смысла, так что, может быть, нам не стоило бы так быстро сдаваться. Мы могли бы попробовать придумать какое-нибудь новое число, которое позволило бы нам делить на нуль. Проблема в том, что такое число нарушает базовые правила арифметики. К примеру, мы знаем, что $1 \times 0 = 2 \times 0$, поскольку то и другое по отдельности равно нулю. Разделив обе части на 0, получим $1 = 2$, что откровенно нелепо. Так что представляется разумным просто не разрешать деление на нуль.

Числа из ничего

Математическую концепцию, наиболее, пожалуй, близкую к понятию «ничто», можно отыскать в теории множеств. *Множество* — это некий набор математических объектов: чисел, геометрических фигур, функций, графов… Множество определяется перечислением или описанием его элементов. «Множество чисел 2, 4, 6, 8» и «множество четных чисел больше 1 и меньше 9» определяют одно и то же множество, которое мы можем сформировать перечислением:

$$\{2, 4, 6, 8\},$$

где фигурные скобки $\{\}$ показывают, что внутри содержатся элементы множества.

Примерно в 1880 г. немецкий математик Кантор разработал подробную теорию множеств. Он пытался разобраться с некоторыми техническими аспектами математического анализа, связанными с точками разрыва функций — местами, где функция совершает неожиданные прыжки. В его ответе важную роль играла структура множества разрывов. При этом значение имели не отдельные разрывы, а вся их совокупность. По-настоящему Кантора в связи с анализом интересовали бесконечно большие множества. Он сделал серьезное открытие: выяснил, что бесконечности не одинаковы — одни из них больше, другие меньше (см. главу $\aleph_0$).

Как я упоминал в параграфе «Что такое число?», другой немецкий математик Фреге подхватил идеи Кантора, но его гораздо больше интересовали конечные множества. Он считал, что с их помощью можно решить глобальную философскую проблему, связанную с природой чисел. Он думал о том, как множества связаны друг с другом: например, как соотносится множество чашек с множеством блюдец. Семь дней в неделе, семь гномов и числа от 1 до 7 идеально совпадают друг с другом, так что все они определяют одно и то же число.

Какие из перечисленных множеств нам следует выбрать для представления числа семь? Фреге, отвечая на этот вопрос, не мелочился: *все сразу*. Он определил число как множество всех множеств, соответствующих данному множеству. В этом случае ни одно множество не является предпочтительным, а выбор делается однозначно, а не случайно и не произвольно. Наши символы и названия цифр — это всего лишь удобные ярлычки для этих гигантских множеств. Число «семь» — это множество *всех* множеств, равносильных гномам, и это то же самое, что множество всех множеств, равносильных дням недели или списку {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Вероятно, излишне указывать, что это весьма элегантное решение *концептуальной* проблемы не дает нам ничего конкретного в плане разумной системы представления чисел.

Когда Фреге представил свои идеи в двухтомном труде «Основные законы арифметики» (1893 и 1903 гг.), многим показалось, что ему удалось решить задачу. Теперь все знали, что такое число. Но перед самым выходом второго тома Бертран Расселл написал Фреге письмо, в котором говорилось (я перефразирую): «Дорогой Готтлоб, рассмотрите множество всех множеств, которые не содержат себя». Это как деревенский цирюльник, который бреет тех, кто не бреется сам; при таком определении возникает противоречие. Парадокс Расселла, как его теперь называют, показал, как опасно считать, что всеохватные множества существуют (см. главу $\aleph_0$).

Специалисты по математической логике попытались решить проблему. Ответ оказался строго противоположен «широкому мышлению» Фреге и его политике сваливания всех возможных множеств в одну кучу. Фокус состоял в том, чтобы выбрать ровно одно из всех возможных множеств. Чтобы определить число 2, следовало построить стандартное множество с двумя элементами. Чтобы определить 3, можно воспользоваться стандартным множеством с тремя элементами и так далее. Логика здесь не зацикливается, если эти множества сначала построить, не используя чисел в явном виде, а уже затем назначить им числовые символы и названия.

Основная проблема заключалась в выборе стандартных множеств для использования. Их необходимо было определить однозначным и единственным образом, а их структура должна была как-то соотноситься с процессом счета. Ответ пришел из очень специфического множества, известного как пустое множество.

Нуль — число, основа всей нашей системы счисления. Следовательно, с его помощью можно пересчитать элементы некоего множества. Какого множества? Ну, это должно быть множество без элементов. Такое множество несложно придумать: пусть это будет, к примеру, «множество всех мышей, весящих более 20 тонн каждая». На языке математики это означает, что существует множество, в котором нет ни одного элемента: пустое множество. В математике тоже несложно найти примеры: множество простых чисел, кратных 4, или множество всех треугольников с четырьмя вершинами. Эти множества выглядят по-разному — в одно входят числа, в другое треугольники, — но на самом деле это одно и то же множество, поскольку таких чисел и треугольников на самом деле не бывает и различить множества попросту невозможно. Во все пустые множества входят в точности одни и те же элементы: а именно никакие. Поэтому пустое множество единственно. Символ для него ввела группа ученых, работавшая под общим псевдонимом Бурбаки, в 1939 г., и выглядит он так: $\varnothing$. Теория множеств нуждается в пустом множестве точно так же, как арифметика в числе 0: если его включить, все становится значительно проще.

Более того, можно определить, что 0 — это и есть пустое множество.

А что с числом 1? Интуитивно понятно, что здесь нам нужно множество, состоящее из ровно одного элемента, причем уникального. Ну… пустое множество единственно и уникально. Таким образом, мы определяем 1 как множество, единственным элементом которого является пустое множество: на символьном языке $\{\varnothing\}$. Это не то же самое, что пустое множество, потому что в этом множестве есть один элемент, тогда как в пустом множестве их нет. Согласен, этот единственный элемент — пустое множество, так получилось, но все же этот элемент в множестве имеется. Представьте себе множество как бумажный пакет с элементами. Пустое множество — это пустой пакет. Множество, единственным элементом которого является пустое множество, это пакет, в котором лежит другой пакет, пустой. Сами видите, это не одно и то же — в одном пакете ничего нет, а в другом лежит пакет.

Рис. 69. Построение чисел на основе пустого множества. Каждый мешочек изображает множество; его содержимое — элементы этого множества. На этикетках подписаны названия множеств. Сам мешочек не входит в содержимое множества (самого себя), но может быть частью содержимого другого мешочка

Ключевой шаг — определение числа 2. Нам нужно единственным образом получить определенное множество с двумя элементами. Так почему бы не использовать единственные два множества, которые мы до сих пор упоминали: $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$? Поэтому мы определяем 2 как множество $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. А это, согласно нашим определениям, то же самое, что 0, 1.

Вот теперь начинает проявляться общая закономерность. Определим 3 = 0, 1, 2 — множество с тремя элементами, которые мы уже определили. Затем 4 = 0, 1, 2, 3; 5 = 0, 1, 2, 3, 4 и так далее. Все, если разобраться, восходит к пустому множеству. К примеру,

$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$
$$4 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}.$$

Вряд ли вам захочется видеть, как выглядит число гномов.

Строительными материалами здесь выступают абстракции: пустое множество и акт формирования множества путем перечисления его элементов. Но то, как эти множества соотносятся между собой, ведет к созданию строгого каркаса для числовой системы, в котором каждое число представляет собой особое множество, которое (что интуитивно понятно) имеет именно такое число элементов. И история на этом не заканчивается. Определив натуральные числа, мы можем при помощи аналогичных фокусов с теорией множеств определить отрицательные числа, дроби, действительные числа (бесконечные десятичные дроби), комплексные числа и так далее, до самой современной хитроумной математической концепции в квантовой теории.

Таким образом, теперь вам известна ужасная тайна математики: в ее основании лежит ничто.

−1

Меньше чем ничто

Может ли число быть меньше нуля? Считая коров, вы не получите ничего подобного, разве что представите себе «виртуальных коров», которых вы кому-то должны. В этом случае у вас возникнет естественное расширение числовой концепции, которое сильно облегчит жизнь алгебраистам и бухгалтерам. При этом вас ожидают сюрпризы: минус на минус дает плюс. С какой стати?

Отрицательные числа

Научившись складывать числа, мы начинаем осваивать обратную операцию: вычитание. Например, 4 – 3 в ответе дает то число, которое при сложении с 3 даст 4. Это, разумеется, 1. Вычитание полезно, поскольку без него нам, к примеру, трудно узнать, сколько у нас останется денег, если вначале у нас было 4 рубля, а потратили мы 3 рубля.

Вычитание меньшего числа из большего практически не вызывает проблем. Если мы потратили меньше денег, чем было у нас в кармане или в кошельке, то у нас еще что-то осталось. Но что произойдет, если мы вычтем большее число из меньшего? Что такое 3 – 4?

Если у вас в кармане лежат три монеты по 1 рублю, то вы не сможете вынуть из кармана четыре такие монеты и отдать их кассиру в супермаркете. Но сегодня, с кредитными картами, любой человек может легко тратить деньги, которых не имеет, причем не имеет не только в кармане, но и на счете в банке. Когда такое происходит, человек залезает в долги. В данном случае долг составил бы 1 рубль, не считая банковских процентов. Таким образом, в определенном смысле 3 – 4 равно 1, но *другой* 1: единице долга, а не денег. Если бы 1 имела свою противоположность, она была бы именно такой.

Чтобы отличать долг от наличных денег, принято ставить перед числом знак минус. В такой записи

$$3 - 4 = -1,$$

и можно считать, что мы изобрели новый тип числа: *отрицательное* число.

История отрицательных чисел

Исторически первым серьезным расширением системы счисления были дроби (см. главу $\frac{1}{2}$). Вторыми стали отрицательные числа. Однако я намерен разбираться с этими типами чисел в обратном порядке. Первое известное упоминание отрицательных чисел содержится в китайском документе династии Хань (202 г. до н. э. — 220 г. н. э.) под названием «Искусство счета в девяти разделах» («Цзю чжан суань шу»).

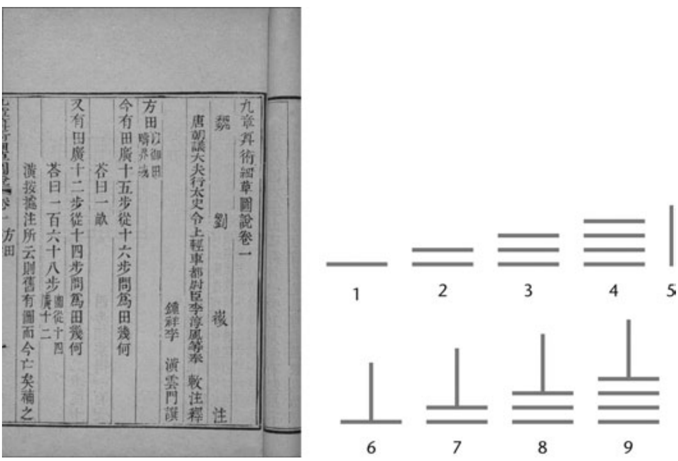


Рис. 70. Слева: страница из трактата «Искусство счета в девяти разделах». Справа: китайские счетные палочки

В этой книге для счета использовался физический «помощник»: счетные палочки. Это небольшие палочки из дерева, кости или другого материала. Для представления чисел палочки выкладывались определенными фигурами. В единичном разряде числа горизонтальная черточка обозначает «один», а вертикальная — «пять». Так же выглядят цифры в сотенном разряде. В разрядах десятков и тысяч направления палочек меняются местами: вертикальная обозначает «один», а горизонтальная — «пять». Там, где мы поставили бы 0, китайцы просто оставляли пробел; однако пробел легко не заметить, и в этом случае правило о смене направлений помогает избежать путаницы, если, к примеру, в разделе десяток ничего нет. Этот способ менее эффективен, если в числе стоит несколько нулей подряд, но это редкий случай.

Рис. 71. Как направление счетных палочек помогает отличить 405 от 45

В «Искусстве счета в девяти разделах» палочки использовались также для представления отрицательных чисел, причем очень просто: они были окрашены в черный цвет, а не в красный. Так что

4 красных палочки минус 3 красных равно 1 красная палочка,

но

3 красных палочки минус 4 красных равно 1 черная палочка.

Таким образом, фигура из черных палочек означает долг, а размер долга соответствует фигурам из красных палочек.

Индийские математики тоже признавали отрицательные числа; кроме того, они составили непротиворечивые правила выполнения арифметических действий с ними.

В манускрипте Бахшали, датируемом примерно III в., содержатся расчеты с отрицательными числами, которые можно отличить от прочих по знаку + в тех местах, где мы использовали бы –. (Математические символы со временем неоднократно менялись, иногда так, что нам немудрено в них и запутаться.) Идею подхватили арабские математики, а уже от них она постепенно распространилась по Европе. До XVII в. европейские математики обычно интерпретировали отрицательный ответ как доказательство того, что задача, о которой идет речь, не имеет решения, но уже Фибоначчи понимал, что в финансовых расчетах они могут представлять долги. К XIX в. отрицательные числа уже не пугали математиков и не ставили их в тупик.

Запись отрицательных чисел

Геометрически числа удобно представлять в виде точек на прямой, идущей слева направо и начинающейся в 0. Мы уже видели, что у этой *числовой прямой* есть естественное продолжение, включающее отрицательные числа и идущее в противоположном направлении.

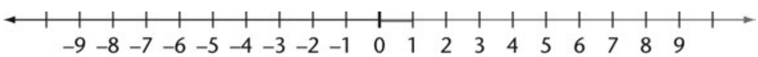


Рис. 72. Числовая прямая: положительные числа идут вправо, отрицательные — влево

Совершать сложение и вычитание на числовой прямой очень удобно и просто. К примеру, чтобы прибавить 3 к любому числу, следует сдвинуться на три шага вправо. Чтобы вычесть 3, нужно сдвинуться на 3 шага влево. Такое действие дает верный результат как для положительных, так и для отрицательных чисел; например, если мы начнем с –7 и прибавим 3, то мы сдвинемся на 3 шага вправо и получим –4. Правила выполнения арифметических действий для отрицательных чисел также показывают, что прибавление или вычитание отрицательного числа дает тот же результат, что вычитание или прибавление соответствующего положительного. Так что, чтобы добавить –3 к любому числу, нам нужно сдвинуться на 3 шага влево. Чтобы вычесть –3 из любого числа, нужно сдвинуться на 3 шага вправо.

Умножение с участием отрицательных чисел более интересно. При первом знакомстве с умножением мы воспринимаем его как повторяющееся сложение. К примеру:

$$6 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30.$$

Тот же подход подсказывает, что при умножении 6×-5 нам следует действовать аналогично:

$$6 \times -5 = -5 + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -30.$$

Далее, одно из правил арифметики гласит, что перемножение двух положительных чисел дает один и тот же результат независимо от того, в каком порядке мы берем числа. Так, 5×6 тоже должно равняться 30. Так и есть, потому что

$$5 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30.$$

Так что представляется разумным принять это же правило и для отрицательных чисел. Тогда -5×6 тоже равно –30.

А как насчет -6×-5? В этом вопросе ясности меньше. Мы не можем записать в ряд *минус шесть* раз по –5, а затем сложить их. Поэтому нам приходится последовательно решать этот вопрос. Посмотрим, что нам уже известно.

$$6 \times 5 = 30$$
$$6 \times -5 = -30$$
$$-6 \times 5 = -30$$
$$-6 \times -5 = ?$$

Представляется разумным считать, что недостающее число — это или 30, или –30. Вопрос: которое?

На первый взгляд многим кажется, что ответ должен быть –30. Психологически это, вероятно, оправдано: все действие пронизано духом «отрицательности», так что и ответ, наверное, должен быть отрицательным. Вероятно, такое же ощущение лежит за дежурной фразой: «Но я ведь ничего не сделал». Однако, если вы *ничего* не сделали, значит, вы должны были сделать «не ничего», то есть *что-то*. Является ли такое замечание справедливым, зависит от правил грамматики, которыми вы пользуетесь. Лишнее отрицание можно рассматривать и как усилительную конструкцию.

Точно так же и то, чему будет равно -6×-5, — вопрос человеческой договоренности. Когда мы придумываем новые числа, нет никакой гарантии, что к ним будут применимы старые концепции. Так что математики могли решить, что $-6 \times -5 = -30$. Строго говоря, они могли решить, что при умножении –6 на –5 получится фиолетовый бегемот.

Однако есть несколько серьезных причин, по которым –30 в данном случае — неудачный выбор, и все эти причины указывают в противоположном направлении — на число 30.

Одна из причин состоит в том, что если $-6 \times -5 = -30$, то это совпадает с -6×5. Разделив то и другое на –6, получим $-5 = 5$, что противоречит всему уже сказанному нами про отрицательные числа.

Вторая причина — в том, что мы уже знаем: $5 + (-5) = 0$. Взгляните на числовую прямую. Что находится в пяти шагах влево от числа 5? Нуль. Умножение любого положительного числа на 0 дает 0, и представляется разумным считать, что то же относится и к отрицательным числам. Так что имеет смысл считать, что $-6 \times 0 = 0$. Поэтому

$$0 = -6 \times 0 = -6 \times (5 + (-5)).$$

Согласно обычным правилам арифметики, это равно

$$-6 \times 5 + -6 \times -5.$$

Если считать, что $-6 \times -5 = -30$, получается $-30 + (-30) = -60$. Следовательно, $-60 = 0$, что не слишком разумно.

С другой стороны, если бы мы выбрали $-6 \times -5 = 30$, то получилось бы

$$0 = -6 \times 0 = -6 \times (5 + (-5)) = -6 \times 5 + (-6) \times -5 =$$
$$= -30 + 30 = 0,$$

и все встало бы на свои места.

Третья причина — это структура числовой прямой. Умножая положительное число на -1, мы превращаем его в соответствующее отрицательное число; то есть мы поворачиваем всю положительную половину числовой прямой на 180°, перенося ее справа налево. Куда при этом должна, по идее, перейти отрицательная половина? Если мы оставим ее на месте, мы получим ту же проблему, потому что -1×-1 будет -1, что равно -1×1, и мы можем заключить, что $-1 = 1$. Единственная сколько-нибудь разумная альтернатива — это точно так же повернуть отрицательную часть числовой прямой на 180°, перенеся ее слева направо. Это красиво, поскольку теперь умножение на -1 полностью переворачивает числовую прямую, меняя порядок чисел на обратный. Отсюда следует, как ночь следует за днем, что новое умножение на -1 повернет числовую прямую на 180° еще раз. Порядок чисел при этом опять поменяется на обратный, и все вернется к тому, с чего начиналось. Таким образом, -1×-1 — это то, куда попадает -1 при повороте числовой прямой, то есть 1. А если мы решаем, что $-1 \times -1 = 1$, то отсюда напрямую следует, что $-6 \times -5 = 30$.

Четвертая причина — интерпретация отрицательного количества денег как долга. В данном варианте умножение некоторого количества денег на отрицательное число дает тот же результат, что и умножение его на соответствующее положительное число, за исключением того, что реальные деньги превращаются в долг. С другой стороны, *вычитание,* «отнятие» долга, производит то же действие, как если бы банк убирал из своих записей часть вашего долга и, по существу, возвращал вам некоторое количество денег. Вычитание долга в 10 рублей из суммы вашего счета в точности соответствует внесению 10 рублей ваших денег на этот счет: при этом сумма счета *увеличивается* на 10 рублей. Суммарный эффект того и другого в данных обстоятельствах стремится вернуть ваш банковский баланс к нулю. Из этого следует, что –6 × –5 производит на ваш счет то же действие, как шестикратное вычитание (удаление) долга по 5 рублей, а значит, должно повысить ваш банковский баланс на 30 рублей.

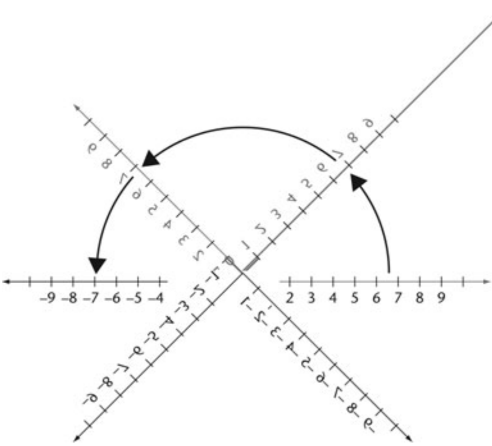


Рис. 73. Поворот числовой прямой на 180° умножает каждое число на –1

В результате всех этих рассуждений получается, что, хотя, в принципе, мы могли бы определить –6 × –5 произвольным образом, на самом деле существует лишь один вариант, который позволяет применять к отрицательным числам обычные правила арифметики. Более того, этот же вариант представляется вполне разумным в приложении к денежной интерпретации отрицательного числа как суммы долга. И этот вариант гласит, что минус на минус дает плюс.

Комплексные числа

Когда математики захотели разделить число на число там, где разделить нацело невозможно, они придумали дроби.

Когда они захотели вычесть большее число из меньшего, они придумали отрицательные числа.

Всякий раз, когда чего-то нельзя сделать, математики придумывают что-нибудь новое, чтобы все-таки сделать это.

Так что, когда невозможность извлечь квадратный корень из отрицательного числа начала серьезно раздражать, они… догадайтесь, что сделали?

i

Мнимое число

В одной из своих книг я писал, что мы, люди, склонны думать о числах как о чем-то застывшем и незыблемом, но на самом деле числа — человеческое изобретение. Число началось со счета, но за минувшие века концепция числа не единожды расширялась: нуль, отрицательные числа, рациональные числа (дроби), действительные числа (бесконечные десятичные дроби)…

Несмотря на технические различия, все эти системы производят сходное впечатление. В них можно производить арифметические действия и можно сравнить два любых числа и определить, которое из них больше, — а значит, в них существует представление о порядке чисел. Однако начиная с XV в. некоторые математики задумывались о том, не может ли существовать еще один, новый тип числа с менее типичными свойствами, для которого обычное представление о порядке и об отношении «больше — меньше» уже не имеют смысла.

Поскольку минус на минус дает плюс, квадрат любого действительного числа положителен. Поэтому в пределах системы действительных чисел у отрицательных чисел нет и не может быть квадратных корней. Это доставляет некоторые неудобства, особенно в алгебре. Однако кое-какие любопытные алгебраические результаты, дающие, в частности, формулы для решения уравнений, позволили предположить, что должен существовать способ сделать выражение вроде $\sqrt{-1}$ осмысленным. Поэтому математики после тщательных раздумий и долгого самокопания решили придумать новый тип числа —

такой, который обеспечит им эти недостающие квадратные корни.

Ключевой шаг в этом направлении состоял в том, чтобы ввести корень квадратный из –1. Эйлер в статье, написанной по-французски в 1777 г., предложил обозначить $\sqrt{-1}$ символом i. Эту величину назвали мнимым (*imaginary*) числом, поскольку вела она себя необычно — не так, как традиционное «действительное» число. Введя число i, вы вынуждены допустить и связанные с ним сложные числа, такие как $2 + 3i$, которые получили название комплексных. Таким образом, вы получаете не одно новое число: вы получаете новую расширенную числовую систему.

Если рассуждать логически, комплексные числа зависят от действительных чисел. Однако логика пасует перед тем, что Терри Пратчетт, Джек Коэн и я в книге «Наука Плоского мира»* называем «нарративиумом». Такова сила истории. Математические рассказы о числах — вот что по-настоящему важно, и в некоторых из этих рассказов нам не обойтись без комплексных чисел, даже если числа, о которых идет речь, более традиционны.

Комплексные числа

Арифметика и алгебра комплексных чисел вполне понятна. При сложении и умножении мы пользуемся обычными правилами с одним дополнением: везде, где следовало бы написать i^2, мы пишем –1. Например,

$$
\begin{aligned}
&(2 + 3i) + (4 - i) = (2 + 4) + (3i - i) = 6 + 2i,\\
&(2 + 3i) \times (1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i \times i =\\
&= 2 + 5i + 3 \times -1 = (2 - 3) + 5i = -1 + 5i.
\end{aligned}
$$

Проработав идею, пионеры этого направления получили, казалось, логически непротиворечивый тип числа, суще-

* Пратчетт Т., Стюарт Й., Коэн Д. Наука Плоского мира. — М.: Эксмо, 2015.

ственно расширяющий возможности системы действительных чисел.

Прецеденты были и раньше. Числовую систему и прежде неоднократно расширяли, и она уже мало напоминала первоначальную систему счета в натуральных числах. Однако на этот раз пришлось пожертвовать понятием «больше чем»: со всеми существовавшими на тот момент типами чисел эта концепция прекрасно работала, но, попытавшись применить ее к новому типу, можно было получить большие неприятности. Но числа, не имеющие *размера!* Жутко. Так жутко, что в данном случае математики заметили, что расширяют числовую систему, и озаботились вопросом о том, законно ли это. Прежде они этим вопросом не задавались, поскольку и у дробей, и у отрицательных чисел есть простые аналоги в реальном мире. Но i — это просто символ, который ведет себя совершенно невозможным, как считалось ранее, образом.

В конечном итоге победил прагматизм. Ключевой вопрос заключался не в том, существуют ли «по-настоящему» новые типы чисел, а в том, полезно ли будет предположить, что они существуют. Действительные числа уже доказали свою полезность в экспериментальной физике; ими оказалось очень удобно описывать точные измерения физических величин. Но оставалось неясным, имеет ли квадратный корень из отрицательного числа физический смысл. На линейке, сами понимаете, его не найдешь.

К удивлению математиков, физиков и инженеров всего мира комплексные числа оказались чрезвычайно полезными. Они заполнили собой давнюю и ставшую привычной лакуну в математике. К примеру, решения уравнений ведут себя намного лучше, если разрешить использование комплексных чисел. Именно это, главным образом, подтолкнуло ученых к изобретению нового типа чисел. Мало того. При помощи комплексных чисел появилась возможность решать многие задачи математической физики, связанные с магнетизмом, электричеством, теплом, звуком, гравитацией и потоком жидкости.

В подобных задачах важно не только то, насколько велика та или иная физическая величина, что можно выразить при помощи действительного числа, но и ее направление. Поскольку комплексные числа обитают на плоскости, каждое из них определяет направление: линию от 0 до самого этого числа. Поэтому любая задача, где фигурируют направления на плоскости, — потенциальное поле приложения комплексных чисел, а в физике полно таких вопросов. Мало того, другие, менее буквальные интерпретации комплексных чисел тоже оказались полезными. В частности, эти числа идеально подходят для описания волн.

Долгое время комплексные числа использовались для подобных целей, хотя никто не мог объяснить, что, собственно, эти числа собой представляют. Они были слишком полезными, чтобы отказаться от них, и всегда работали, так что постепенно все привыкли и почти перестали тревожиться по поводу их внутреннего смысла. Со временем математикам удалось разработать такую концепцию комплексных чисел, которая доказала их логическую состоятельность; в ней числа интерпретируются с использованием координат на плоскости.

Комплексная плоскость

Геометрически действительные числа можно представить как точки на прямой — той самой одномерной числовой прямой. Аналогично, комплексные числа можно представить как точки на двумерной плоскости. На этой плоскости существует два «независимых» фундаментальных числа, 1 и i, и каждое комплексное число является их комбинацией.

Плоскость появляется на картине потому, что умножение чисел на –1 поворачивает числовую прямую на 180° (см. главу –1). Таким образом, что бы ни означал сам по себе квадратный корень из –1, он, по всей видимости, делает что-то с числовой прямой, и это что-то, *если проделать это дважды*, должно повернуть ее на 180°. А что поворачивает на 180° в два приема?

Повороты на 90°.

Таким образом, мы подошли к догадке о том, что квадратный корень из –1 можно интерпретировать как поворот числовой прямой на 90°. Нарисовав картинку, мы поймем, что это действие не отображает числовую прямую на саму себя. Вместо этого оно создает вторую числовую прямую под прямым углом к первой, традиционной. Первая прямая называется прямой действительных чисел. Вторая — это место, где обитают мнимые числа, такие как корень квадратный из минус единицы. Объединив обе прямые на плоскости в качестве координатных осей, мы получим комплексные числа.

Обозначение чисел как «действительные» и «мнимые» возникло несколько столетий назад и отражает те давние взгляды на математику, которые мы давно не разделяем. Сегодня все математические концепции рассматриваются как мысленные модели реальности, а не как сама реальность. Так что действительные числа не более и не менее реальны, чем мнимые. Однако действительные числа напрямую связаны с практической и весьма жизненной идеей измерения расстояний на прямой, тогда как мнимые числа не имеют подобной *непосредственной* интерпретации. Поэтому названия уцелели и используются до сих пор.

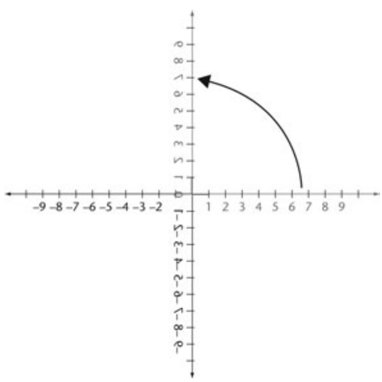


Рис. 74. Поворот числовой прямой на угол 90° ведет к появлению второй числовой прямой

Взяв обычные действительные числа и добавив к ним новое число i, мы получаем возможность представлять графически такие их комбинации, как $3 + 2i$. Это число соответствует точке на плоскости с координатами (3, 2). Чтобы его найти, нужно сдвинуться на 3 единицы по действительной оси, а затем на 2 единицы параллельно мнимой оси. Вообще число $z = x + iy$ соответствует точке с координатами (x, y).

Геометрическое представление комплексных чисел часто называют диаграммой Аргана в честь французского математика Жана-Робера Аргана, который описал его в 1806 г. Однако идея такого представления восходит еще к норвежско-датскому землемеру Каспару Весселю, опубликовавшему ее в 1797 г. в статье «Об аналитическом представлении направления» (Om Directionens analytiske Betegning). Дания тогда временно входила в состав единого с Норвегией государства. Его работа осталась практически незамеченной, потому что мало кто из ученых мог читать по-датски.

Гаусс заново развил ту же идею в своей диссертации в 1799 г. Он понял, что описание можно упростить при помощи координат, если рассматривать комплексное число как пару (x, y) действительных чисел. В 1830-е гг. Гамильтон *определил* комплексные числа как «упорядоченные пары действительных чисел». Именно так мы определяем их и сегодня. Точка на плоскости представляет собой упорядоченную пару (x, y), и обозначение $x + iy$ это всего лишь другое имя для этой точки или пары. Тогда загадочное выражение i — это всего лишь упорядоченная пара (0, 1). Ключевой момент здесь — определить сложение и умножение для таких пар:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),$$
$$(x, y)\,(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Откуда берутся эти уравнения? Чтобы их получить, достаточно сложить или перемножить $x + iy$ и $u + iv$, принять стандартные законы алгебры и заменить i^2 на -1.

Эти расчеты *объясняют* приведенные определения, но мы, определяя, какими должны быть эти определения, опираемся на законы алгебры. Логический круг размыкается, когда мы проверяем законы алгебры для этих пар, опираясь только на формальные определения. Нет ничего удивительного в том, что все работает, но это необходимо проверить. Делается это путем довольно длинных, но строгих рассуждений.

Корни из единицы

Взаимосвязь алгебры и геометрии в комплексных числах поразительна, и нигде она не очевидна так, как в корнях из единицы, то есть в решениях уравнения $z^n = 1$ для комплексного z и натурального n. К примеру, уравнению $z^5 = 1$ удовлетворяют пять корней из единицы.

Одно очевидное решение — это $z = 1$, единственное действительное решение. В комплексных числах, однако, существует еще четыре решения. Это числа ζ, ζ^2, ζ^3 и ζ^4, где

$$\zeta = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ.$$

Здесь $72^\circ = \dfrac{360^\circ}{5}$. Есть точные формулы:

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \sin 72^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

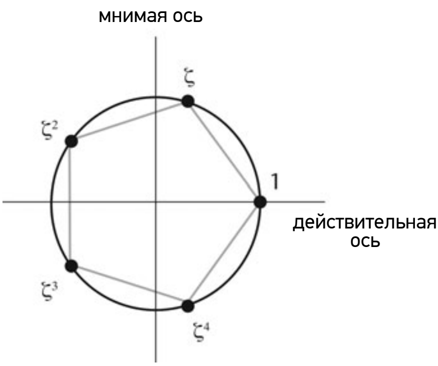


Рис. 75. Пять корней пятой степени из единицы на комплексной плоскости

Эти пять точек образуют углы правильного пятиугольника, и этот факт можно доказать при помощи тригонометрии. Основная идея заключается в том, что точно так же, как умножение на i поворачивает комплексную плоскость на 90°, так умножение на ζ поворачивает ее на 72°. Проделаем это пять раз, и получим 360°, то есть полный поворот — или умножение на 1. Таким образом, $\zeta^5 = 1$.

Если говорить в более общем плане, то уравнение $z^n = 1$ имеет n корней: $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \ldots, \zeta^{n-1}$, где

$$\zeta = \cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Эти идеи, кстати говоря, обеспечивают алгебраическую интерпретацию правильных многоугольников и используются при изучении построений при помощи линейки и циркуля в евклидовой геометрии (см. главу 17).

Рациональные числа

А теперь посмотрим на дроби, которые математики называют рациональными числами.

Исторически дроби появлялись тогда, когда что-то приходилось делить на несколько человек, чтобы отдать каждому его долю.

Началось все с $\frac{1}{2}$, которую удобно применять, когда что-то делится на двоих поровну.

В результате возникла числовая система, в которой деление возможно всегда, кроме деления на нуль.

$\frac{1}{2}$

Делим неделимое

Теперь мы переходим к дробям. Математики предпочитают более претенциозный термин, обозначающий то же самое: *рациональные числа*. Это такие числа, как $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ или $\frac{137}{42}$, образованные делением одного натурального числа на другое. Представьте себе те далекие дни, когда «число» могло быть только натуральным. В том мире деление имело смысл лишь в тех случаях, когда одно число в точности вписывалось в другое: например, $\frac{12}{3} = 4$. Но таким образом невозможно получить ничего нового. Дроби становятся интересными именно тогда, когда деление нацело не проходит, то есть когда результат не является целым числом. Именно в этом случае нам требуется *новый тип числа*.

Простейшая дробь, чаще всего встречающаяся в повседневной жизни, это половина: $\frac{1}{2}$. Оксфордский словарь английского языка определяет слово «половина» (half) как «любую из двух равных или соответствующих частей, на которые нечто поделено или может быть поделено». Половины попадаются нам на каждом шагу: пол-литра пива или молока, две половины футбольного матча, товары или билеты за полцены, полчаса времени. Наполовину полон или наполовину пуст? Хорошее начало — половина дела…

Но $\frac{1}{2}$ не только самая простая дробь; есть мнение, что она же — и самая важная. Евклид умел делить пополам отрезки и углы. Более продвинутое свойство возникает в аналитической теории чисел: предполагается, что нетривиальные нули римановой дзета-функции всегда имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$, — и это, вероятно, важнейшая нерешенная задача во всей математике.

Бисекция угла

Особая природа числа $\frac{1}{2}$ рано проявляет себя в геометрии Евклида. Предложение 9 Книги I его «Начал» дает построение «для бисекции заданного угла», то есть для построения угла половинной величины. Вот как это делается. Пусть задан угол BAC. При помощи циркуля строим точки D и E, равноудаленные от A, на лучах AB и AC. Затем проводим дугу с центром в точке D и радиусом DE и дугу с центром E радиусом ED. Они пересекаются в точке F, равноудаленной от D и E. Получившийся луч AF делит угол BAC пополам. На самом деле Евклид описывает последний шаг немного иначе: он предлагает построить равносторонний треугольник DEF. Это тактическое решение, основанное на том, что было доказано ранее, приводит к точно такому же результату, поскольку треугольник DEF равносторонний.

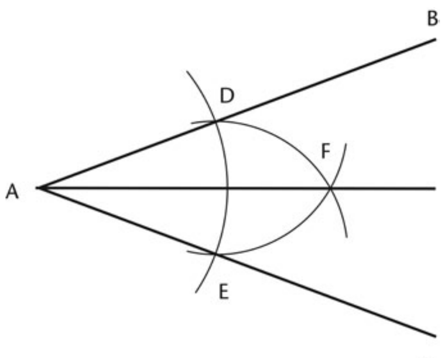


Рис. 76. Как разделить угол пополам

Базовая причина того, что построение работает, заключается в симметрии. Вся картина зеркально симметрична относительно прямой AF. Зеркальная симметрия — это симметрия второго порядка: проделайте операцию дважды, и получите ровно то, с чего начинали. Так что неудивительно, что мы разделили угол на *две* равные части.

Евклид не показывает нам способ трисекции произвольного угла, то есть деления его на три равные части, соответствующие дроби $\frac{1}{3}$. В главе 3 мы видели, что примерно две тысячи лет спустя математики доказали, что сделать это при помощи традиционных инструментов — линейки (неразмеченной) и циркуля — невозможно. Более того, единственные доли произвольного угла, которые можно построить подобным способом, это доли вида $\frac{p}{2^k}$: делим пополам k раз, затем строим p копий. По существу, единственное, что здесь можно сделать, это несколько раз повторить бисекцию. Так что $\frac{1}{2}$ в геометрии — число особое.

Гипотеза Римана

В серьезной математике $\frac{1}{2}$ фигурирует в том, что можно назвать, вероятно, важнейшей нерешенной задачей всей этой науки: в гипотезе Римана. Упомянутая гипотеза — это обманчиво невинное предположение, высказанное Георгом Бернхардом Риманом в 1859 г. Касается она одного глубокого свойства хитроумного приспособления: дзета-функции $\zeta(z)$. Здесь z — любое комплексное число, а ζ — греческая буква дзета. Дзета-функция самым тесным образом связана с простыми числами, поэтому мощные методы исследования, в которых задействованы комплексные числа, могут при помощи этой функции зондировать закономерности простых чисел.

Однако мы не можем использовать эти методы до тех пор, пока не разобрались в некоторых фундаментальных свойствах дзета-функции, а именно здесь-то и возникают сложности. Ключевыми особенностями дзета-функции являются ее *нули*: те комплексные числа z, для которых $\zeta(z) = 0$. Некоторые нули легко находятся: это все отрицательные четные целые числа: $z = -2, -4, -6, -8\ldots$ Однако Риман сумел доказать, что существует бесконечно много других нулей, и даже нашел шесть из них:

$$\frac{1}{2} \pm 14{,}135i \quad \frac{1}{2} \pm 21{,}022i \quad \frac{1}{2} \pm 25{,}011i$$

(Эти нули всегда существуют парами, с положительной и отрицательной мнимой частью.)

Не нужно обладать особым математическим чутьем, чтобы обратить внимание на одну интересную общую особенность этих шести чисел: все они имеют вид $\frac{1}{2} \pm iy$. Иными словами, у них у всех одинаковая действительная часть: $\frac{1}{2}$. Риман предположил, что это верно для *всех* нулей дзета-функции, за исключением отрицательных четных чисел. Предположение стало известно как гипотеза Римана. Если бы она оказалась верной — на что указывают все данные, — из этого следовало бы множество важных и далеко идущих выводов. То же можно сказать и о различных обобщениях, еще более важных, если это вообще возможно.

Несмотря на 150 лет напряженной работы, никаких доказательств до сих пор не получено. Гипотеза Римана остается одной из самых сбивающих с толку и раздражающих загадок во всей математике. Ее разрешение стало бы одним из самых драматичных событий в истории этой науки.

Путь к римановой гипотезе начался с открытия, что, хотя отдельные простые числа кажутся непостижимо нерегулярными, в совокупности они выстраиваются в четкие статистические структуры. В 1835 г. Адольф Кетле поразил современников тем, что нашел математические закономерности в социальных явлениях, которые определялись осознанным выбором людей или вмешательством судьбы: в рождениях, браках, смертях, самоубийствах. Закономерности были статистическими и относились не к отдельным людям, а к усредненному поведению большого количества людей. Примерно в то же время математики начали понимать, что тот же фокус можно проделать с простыми числами. Хотя каждое из них в отдельности — строгий индивидуалист, в их совокупности имеются скрытые закономерности.

Когда Гауссу было примерно пятнадцать лет, он записал в своей таблице логарифмов: если x велико, то число простых чисел, меньших или равных x, приблизительно равняется $\frac{x}{\log x}$. Это утверждение получило известность как теорема о числе простых чисел, однако вначале доказательства у нее не было, и следовало бы, вероятно, называть ее гипотезой о числе простых чисел. В 1848 и 1850 гг. русский математик Пафнутий Чебышёв пытался доказать теорему о числе простых чисел при помощи анализа. На первый взгляд, между этими двумя областями математики нет очевидной связи; можно на тех же основаниях пытаться доказывать ее при помощи гидродинамики или кубика Рубика. Но Эйлер к тому моменту уже отметил любопытную связь между двумя темами, выражаемую формулой

$$\frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \ldots \times \frac{1}{1-p^{-s}} \ldots = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots$$

где p проходит через все простые числа, а s — любое действительное число больше 1. Условие $s > 1$ нужно для того, чтобы ряд в правой части давал хоть какую-нибудь осмысленную величину. Основная идея этой формулы — аналитически выразить единственность разложения на простые множители. Дзета-функция $\zeta(s)$ — это ряд в правой части уравнения; ее величина зависит от s.

Чебышёв использовал формулу Эйлера, чтобы доказать, что когда x велико, то число простых чисел, меньших или равных x, близко к $\frac{x}{\log x}$. На самом деле отношение числа простых чисел к этому значению лежит между двумя константами, одна из которых чуть больше 1, другая чуть меньше. Это чуть менее точно, чем теорема о числе простых чисел, но даже это позволило доказать еще одну выдающуюся гипотезу — постулат Бертрана от 1845 г.: если взять любое положительное целое число и удвоить его, то между тем и другим найдется хотя бы одно простое число.

Риман задумался о том, нельзя ли усилить идею Эйлера, связав ее с новыми методами, и пришел к смелому расширению дзета-функции: он определил ее не только для действительной, но и для комплексной переменной. Ряд Эйлера — отличный вариант для начала. Это вполне осмысленный ряд *для комплексного s*, если только действительная часть s больше 1. (Это техническое требование, подразумевающее сходимость ряда: его сумма в бесконечности имеет смысл.) Первое серьезное озарение Римана заключалось в том, что можно достичь лучшего результата. Он воспользовался процедурой, известной как аналитическое продолжение, чтобы расширить определение $\zeta(s)$ на *все* комплексные числа, за исключением 1. Эта величина исключается потому, что при $s = 1$ дзета-функция становится бесконечной.

Именно из метода расширения следует, что все отрицательные четные числа являются нулями функции. Непосредственно из свойств ряда это не очевидно. Расширение намекает также на новые свойства дзета-функции, которые и исследовал Риман. В 1859 г. он изложил свои идеи в статье «О числе простых чисел, меньших заданной величины», в которой привел явную точную формулу для числа простых чисел, меньших произвольного заданного действительного числа x. Грубо говоря, она говорит о том, что сумма логарифмов этих простых чисел приблизительно равна

$$-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}+x-\frac{1}{2}\log\left(1-x^{-2}\right)-\log 2\pi.$$

Здесь знак $\sum$ обозначает сумму по всем номерам ρ, для которых $\zeta(\rho)$ равна нулю, исключая отрицательные четные числа.

Если мы достаточно знаем о нулях дзета-функции, мы можем сделать немало выводов и узнать много нового о простых числах из формулы Римана. В частности, информация о действительных частях нулей позволяет нам вывести статистические свойства простых чисел: сколько их укладывается в промежуток до некоей заданной величины, как они распределены среди остальных целых чисел и так далее. Именно здесь гипотеза Римана начинает приносить дивиденды… *если* вы сможете ее доказать.

Риману хватило прозорливости, чтобы углядеть эту возможность, но он так и не довел свои рассуждения до логического конца и достоверного вывода. Однако в 1896 г. Жак Адамар и Шарль Жан де ла Валле Пуссен независимо друг от друга воспользовались догадкой Римана, чтобы вывести теорему о числе простых чисел. Чтобы сделать это, они доказали более слабое свойство нетривиальных нулей дзета-функции: их действительная часть лежит между 0 и 1.

В 1903 г. Йорген Грам показал численно, что первые десять (имеются в виду ± пары) нулей лежат на критической линии. К 1935 г. Э. Ч. Титчмарш увеличил число нулей до 195. В 1936 г. Титчмарш и Лесли Комри доказали, что первая 1041 пара нулей располагаются на критической линии — это был последний раз, когда кто-либо проделывал подобные расчеты вручную. В 1953 г. Тьюринг открыл более эффективный метод и при помощи компьютера вывел, что первые 1104 пары нулей лежат на критической линии. Нынешний рекорд, достигнутый Янником Саутером и Патриком Демишелем в 2004 г., состоит в том, что первые 10 триллионов (10^{13}) нетривиальных нулей лежат на критической линии. Математики и компьютерщики проверили нули и в других диапазонах. На данный момент все без исключения нетривиальные нули, которые когда-либо были вычислены, лежат на критической линии.

К несчастью, в этой области теории чисел подобные экспериментальные доказательства котируются несколько ниже, чем можно было бы ожидать. Многие другие гипотезы, подтверждаемые, на первый взгляд, огромным количеством данных, позорно провалились. Достаточно всего лишь *одного* исключения, чтобы погубить все предприятие, и это исключение может быть таким, что все наши расчеты даже не приблизятся к решению. Вот почему математики всегда требуют доказательств — и именно это вот уже 150 с лишним лет сдерживает развитие в данной области.

$\frac{22}{7}$

Приближенное значение π

В школьном курсе математики нам часто говорят: «Примем π равным $\frac{22}{7}$». Но можем ли мы, принимая знак равенства всерьез и буквально, на самом деле так считать? И даже если мы не имеем ничего против небольшой ошибки, то откуда все же берется данная конкретная дробь?

Освобождение от иррациональности

Число π не может быть *точно* равно $\frac{22}{7}$, поскольку оно иррационально (см. главы $\sqrt{2}$ и π); это значит, что оно не может равняться дроби $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Этот факт, о котором математики давно подозревали, первым доказал Иоганн Ламберт в 1768 г. С тех пор появилось и несколько других доказательств. В частности, это подразумевает, что в десятичном выражении π продолжается до бесконечности, причем никакой блок цифр не повторяется снова и снова и π не является *периодической* десятичной дробью. Это не означает, что какой-то конкретный блок вроде 12345 не может повториться много раз; более того, он, скорее всего, будет повторяться бесконечно часто. Но невозможно получить π путем бесконечного повторения одного и того же фиксированного блока.

Школьная математика обходит эти трудности при помощи приближенного значения π, а именно $3\frac{1}{7}$, $\frac{22}{7}$ или 3,14. Не нужно доказывать иррациональность π, чтобы понять, что это не точное значение константы:

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$$

Более того, $\frac{22}{7}$, как любое рациональное число, представляет собой периодическую дробь, и блок 142857 в нем повторяется до бесконечности:

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857142857142857\ldots$$

Исторически в качестве приближенного значения π использовались различные рациональные числа.

Примерно в XIX в. до н. э. вавилонские математики проводили вычисления, которые, по существу, были эквивалентны использованию $\pi \sim \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.

Математический папирус Ринда написан писцом по имени Ахмес во время Второго переходного периода, примерно в 1650–1550 гг. до н. э., хотя сам писец утверждает, что скопировал его с более старого папируса времен Среднего царства (2055–1650 гг. до н. э.). В него входит приближенный расчет площади круга; в современных терминах он соответствует аппроксимации π как $\frac{256}{81}$. Однако неясно, признавали ли древние египтяне эту величину особой константой наподобие нашей π.

Около 900 г. до н. э. индийский астроном Яджнавалкья в книге «Шатапатха брахмана», по существу, округлил π до $\frac{339}{108}$.

Приблизительно в 250 г. до н. э. грек Архимед, один из величайших математиков в истории человечества и к тому же прекрасный инженер, доказал с полной логической строгостью, что π меньше $\frac{22}{7}$, но больше $\frac{223}{71}$.

Около 150 г. до н. э. Птолемей округлил π до $\frac{377}{120}$.

Около 250 г. н. э. китайский математик Лю Хуэй показал, что $\pi \sim \frac{3927}{1250}$.

Мы можем сравнить эти приближения, вычислив их до пяти десятичных знаков:

Число	5 знаков после запятой	Относительная ошибка
π	3,14159	
$\frac{22}{7}$	3,14285	На 4% больше
$\frac{25}{8}$	3,12500	На 5% меньше
$\frac{256}{81}$	3,16049	На 6% больше
$\frac{339}{108}$	3,13888	На 8% меньше
$\frac{223}{71}$	3,14084	На 2% меньше
$\frac{377}{120}$	3,14166	На 0,2% больше
$\frac{3927}{1250}$	3,14160	На 0,02% больше

Таблица 9

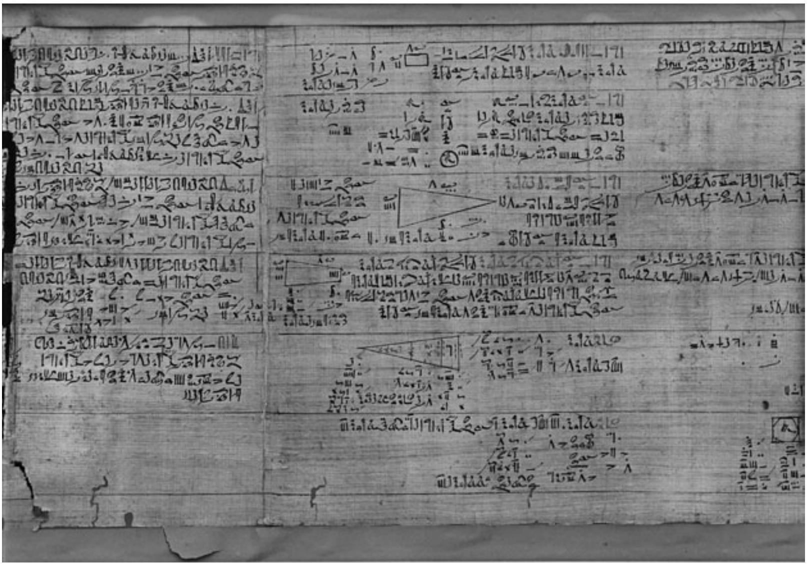


Рис. 77. Часть папируса Ринда

$\frac{466}{885}$

Ханойская башня

На первый взгляд, у нас нет оснований ожидать, что число $\frac{466}{885}$ окажется особым. Я точно не ожидал, даже после того, как провел кое-какие исследования и они привели меня именно к этому числу. Но оказалось, что оно тесно связано со знаменитой головоломкой, известной как Ханойская башня, и еще более знаменитой фигурой — так называемой салфеткой Серпинского.

Переставляем кольца

Ханойская башня — это старая головоломка, которую еще в 1883 г. выпустил на рынок Лукас. Она состоит из набора круглых дисков разных размеров, надеваемых на три штырька. Можно обозначить размеры дисков натуральными числами 1, 2, 3, …, n и назвать головоломку n-дисковой ханойской башней. В коммерческих вариантах головоломки n обычно равно 5 или 6.

Первоначально все диски находятся на одном из штырьков, причем размеры их убывают снизу вверх. Цель головоломки — переложить все диски на другой штырек. Каждый ход — это перенос верхнего диска из любой стопки на другой штырек. Однако диск можно переносить только в двух случаях:

- если диск, на который его ставят, больше,
- или если штырек пока не занят.

Первое правило подразумевает, что когда все диски перенесены, они снова окажутся упорядочены по размеру снизу вверх.

Прежде чем читать дальше, вам следовало бы попробовать решить эту головоломку. Начните с двух дисков и доведите их количество до пяти или шести, в зависимости от того, насколько вы амбициозны (или настойчивы).

Например, 2-дисковую ханойскую башню можно решить всего за три хода:

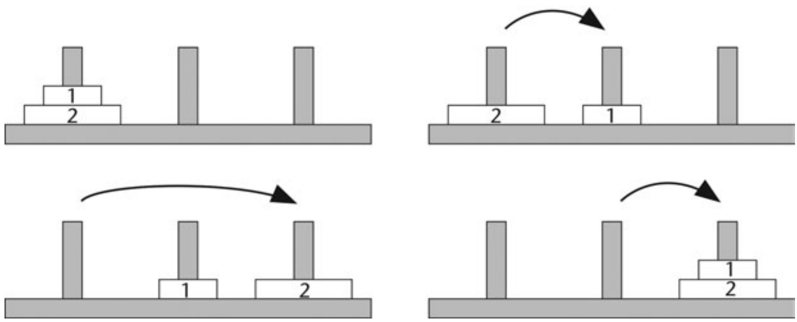


Рис. 78. Решение 2-дисковой ханойской башни. Переставляем диск 1 на средний штырек, затем диск 2 — на правый штырек, затем диск 1 — тоже на правый

Как насчет 3-дисковой башни? Начальная позиция выглядит так:

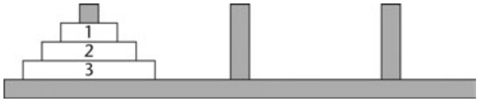


Рис. 79. Начальная позиция с тремя дисками

Первый ход, по существу, вынужденный: единственный диск, который нам разрешено двигать, это диск 1. Он может пойти на любой из двух остальных штырьков, и не важно, который из них мы выберем, поскольку эти два штырька можно свободно менять местами, на ходе решения головоломки это не скажется. Так что мы можем перенести диск 1 на центральный штырек.

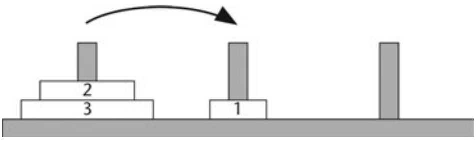


Рис. 80. Первый ход

На этой стадии мы могли бы снова переложить диск 1, но это, разумеется, ничего не даст: диск либо вернется туда, где он и был до этого, или переместится на другой пустой штырек, куда его можно было положить с самого начала. Поэтому нам нужно переложить какой-нибудь другой диск. Мы не можем тронуть диск 3, поскольку он находится под диском 2, так что перекладывать придется диск 2. И мы не можем положить диск 2 на диск 1. Так что наша единственная возможность — поместить диск 2 на правый штырек.

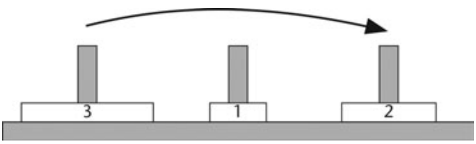


Рис. 81. Второй ход

Теперь мы не можем двигать диск 3, а двигать диск 2 обратно глупо. Поэтому мы двигаем диск 1. Если мы положим его сверху на диск 3, то окажемся в тупике и вынуждены будем на следующем шаге переложить его обратно. Так что у нас всего один вариант.

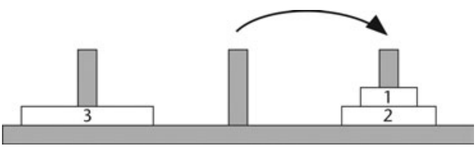


Рис. 82. Третий ход

Что теперь? Либо мы отменяем предыдущий ход, либо кладем диск 1 на диск 3, что не кажется особенно полезным, или мы перекладываем диск 3 на пустой штырек.

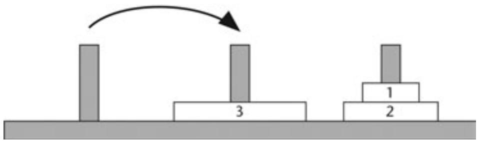


Рис. 83. Четвертый ход

На этом этапе можно сказать, что мы прошли значительную часть пути к решению задачи, поскольку нам удалось сдвинуть самый сложный диск — диск 3 — на новый штырек. Очевидно, все, что нам теперь нужно сделать, это положить на него диски 1 и 2. Более того, *мы уже знаем, как это сделать*. Мы уже передвинули стопку, состоящую из дисков 1 и 2, с одного штырька на другой. Так что мы просто копируем свои предыдущие шаги, внимательно следя за тем, чтобы выбирать правильные штырьки. Вот так.

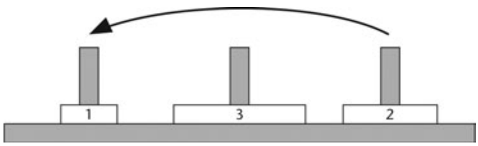


Рис. 84. Пятый ход

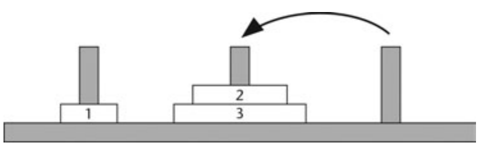


Рис. 85. Шестой ход

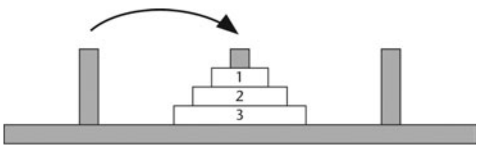


Рис. 86. Седьмой ход

Готово! Это решение заняло семь ходов, что составляет $2^3 - 1$. Можно показать, что более короткого пути не существует. Вообще, метод указывает на хитрое универсальное решение для любого числа дисков. Можно просуммировать его примерно так:

- сначала перекладываем два верхних диска на пустой штырек;
- затем перекладываем самый большой диск на единственный оставшийся пустым штырек;
- затем двигаем два верхних диска на штырек, где лежит самый большой диск.

Первый и последний этапы, по существу, представляют собой решения 2-дисковой ханойской головоломки. Средний этап совершенно понятен и очевиден.

На тех же принципах можно теперь решить 4-дисковую головоломку:

- сначала перекладываем три верхних диска на пустой штырек;
- затем перекладываем самый большой диск на единственный оставшийся пустым штырек;
- затем двигаем три верхних диска на штырек, где лежит самый большой диск.

Первый и последний этапы — это решения 3-дисковой ханойской головоломки, которые мы только что нашли. Средний этап опять же совершенно понятен и очевиден.

Ту же идею теперь можно распространить на 5-дисковую, 6-дисковую головоломку и так далее. Мы можем решить головоломку с *любым* числом дисков, воспользовавшись «рекурсивной» процедурой, при которой решение для заданного числа дисков получается из решения для на единицу меньшего числа дисков. Так решение 5-дисковой головоломки сводится к решению 4-дисковой головоломки, которая, в свою очередь, сводится к решению 3-дисковой головоломки, та — 2-дисковой, а та, наконец, к решению 1-дисковой головоломки. Но это уже просто: достаточно снять единственный диск с одного штырька и переставить на другой.

В общем метод можно сформулировать следующим образом. Чтобы решить n-дисковую ханойскую головоломку,

- временно забываем про самый большой диск n;
- при помощи решения для $(n - 1)$ - дисковой ханойской головоломки переносим диски 1, 2, ..., $n - 1$ на новый штырек;
- затем перекладываем диск n на оставшийся пустой штырек;
- наконец, при помощи решения для $(n - 1)$ - дисковой ханойской головоломки *опять* переносим диски 1, 2, ..., $n - 1$ на штырек с диском n. (Обратите внимание: по соображениям симметрии, когда мы прибегаем к решению для $(n - 1)$ - дисковой головоломки, целевой шпенек может выбираться из двух возможных вариантов.)

Диаграмма состояния

Рекурсивные процедуры могут сильно усложняться, если следовать им шаг за шагом, и именно это происходит с ханойской башней. Надо сказать, что сложность здесь заложена в головоломке, а не в методе ее решения. Чтобы понять почему, представлю головоломку геометрически в виде диаграммы состояния. Диаграмма, о которой идет речь, состоит из узлов, которые представляют возможные положения дисков, соединенных линиями, представляющими разрешенные ходы. Для 2-дисковой ханойской башни диаграмма состояния принимает вид, показанный на рис. 87.

Эту диаграмму можно рассматривать как три копии соответствующей диаграммы для 1-дисковой головоломки, соединенные между собой в трех местах. В каждой копии нижний диск занимает фиксированную позицию на одном из трех возможных штырьков. Соединения возникают, когда пустой штырек позволяет переместить нижний диск. Несколько математиков независимо друг от друга заметили, что рекурсивное решение головоломки проявляется в структуре диаграммы состояния. Первыми, судя по всему, были Р. С. Скорер, П. М. Гранди и Седрик А. Б. Смит, написавшие в 1944 г. совместную статью.

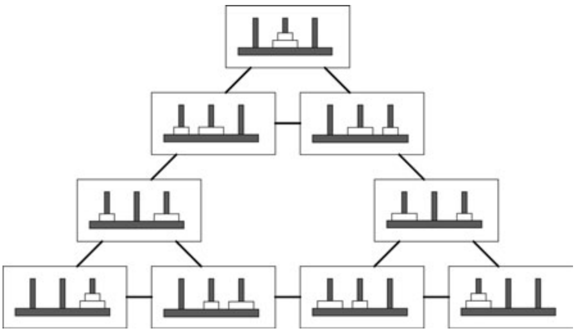


Рис. 87. Диаграмма состояния для 2-дисковой ханойской башни

Мы можем воспользоваться рекурсивным решением, чтобы предсказать вид диаграммы состояния при большем числе дисков. Так, для 3-дисковой ханойской башни следует взять три копии диаграммы, приведенной на рис. 87, каждую с дополнительным диском внизу, и соединить их в треугольник. И так далее. К примеру, на рис. 88 показана диаграмма состояния для 5-дисковой ханойской головоломки, в которой опущены конкретные положения дисков.

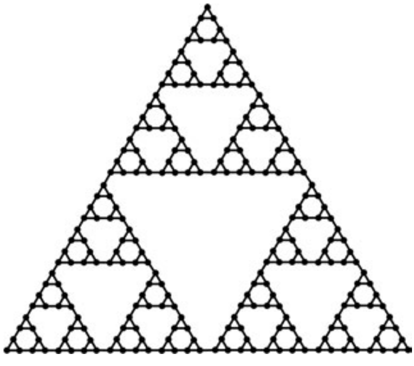


Рис. 88. Диаграмма состояния для 5-дисковой ханойской башни

Х.-Т. Чань (в 1989 г.) и Андреас Хинц (в 1992 г.) воспользовались рекурсивной структурой диаграммы состояния, чтобы получить формулу для среднего минимального числа ходов между состояниями в n-дисковой ханойской головоломке. Полное число ходов по кратчайшим путям между всеми возможными парами позиций оказывается равным

$$\frac{466}{885}18^n - \frac{1}{3}9^n - \frac{3}{5}3^n + \left(\frac{12}{59} + \frac{18}{1003}\sqrt{17}\right)\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \\ + \left(\frac{12}{59} - \frac{18}{1003}\sqrt{17}\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

Для больших n это приблизительно равно

$$\frac{466}{885}18^n,$$

поскольку все остальные слагаемые в этой формуле намного меньше первого. Средняя длина всех этих путей приблизительно в $\frac{466}{885}$ раз больше числа ходов вдоль одной из сторон диаграммы состояния. Теперь мы видим значение странной дроби $\frac{466}{885}$.

Салфетка Серпинского

Эта же дробь возникает в другой, родственной задаче. Хинц и Андреас Шиф использовали формулу для среднего числа ходов между состояниями в ханойской головоломке для вычисления среднего расстояния между любыми двумя точками в знаменитой фигуре, известной как *салфетка Серпинского*. Если стороны салфетки имеют длину 1, то ответ равен в точности $\frac{466}{885}$.

Чтобы получить салфетку Серпинского, берут равносторонний треугольник, делят его на четыре треугольника половинного размера (треугольник в центре получается перевернутым) и исключают из фигуры средний треугольник. Затем тот же процесс повторяют для трех оставшихся равносторонних треугольников. И так до бесконечности. Результат — ранний образец того, что мы сегодня называем *фракталом*: фигура, которая, сколько ее ни увеличивай, имеет замысловатый рисунок (см. главу $\frac{\log 3}{\log 2}$).

Рис. 89. Первые шесть ступеней формирования салфетки Серпинского

Польский математик Вацлав Серпинский придумал эту завораживающую структуру в 1915 г., хотя аналогичные фигуры задолго до этого (на протяжении нескольких столетий) использовались в качестве декоративных форм. Автор описал эту фигуру как «одновременно канторову и джорданову, в которой каждая точка — это точка ветвления». Называя свою фигуру канторовой, Серпинский имел в виду, что она едина, но обладает тонкой и сложной внутренней структурой. Говоря, что она джорданова, он подразумевал, что она представляет собой кривую. А говоря, что в ней «каждая точка — это точка ветвления», он имел в виду, что фигура самопересекается в каждой точке. Позже Бенуа Мандельброт в шутку назвал эту фигуру салфеткой Серпинского из-за сходства с дырчатой прокладкой под головкой блока цилиндров автомобиля того времени.

Иррациональные числа

Дроби достаточно хороши для любой практической задачи на деление, и некоторое время древние греки были убеждены, что дроби описывают все во Вселенной.

Затем один из них разобрал следствия теоремы Пифагора и задался вопросом о том, как диагональ квадрата относится к его стороне.

Из ответа на этот вопрос следовало, что некоторые задачи решить с помощью дробей невозможно.

Так родились иррациональные числа. Вместе рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.

$\sqrt{2} \sim 1,414213$

Первое известное иррациональное число

Рациональные числа — простые дроби — достаточно хороши для большинства практических целей, но некоторые задачи не имеют рациональных решений. Так, греческие геометры обнаружили, что диагональ квадрата со стороной 1 *не является* рациональным числом. Если диагональ имеет длину x, то, согласно теореме Пифагора,

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

так что $x = \sqrt{2}$. И они доказали, к собственному немалому огорчению, что это не рациональное число.

В результате эти самые греческие геометры сосредоточились на геометрических длинах и перестали обращать внимание на числа. Альтернативой такому подходу — причем лучшей, как показало время — было бы доработать и укрепить числовую систему таким образом, чтобы она легко справлялась с подобными вещами.

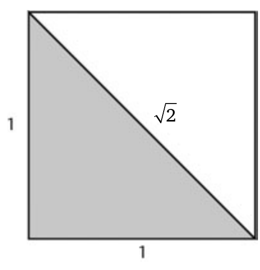


Рис. 90. Диагональ единичного квадрата

Простые дроби, десятичные дроби и иррациональные числа

Сегодня мы, как правило, записываем числа в виде десятичных дробей. По чисто практическим соображениям в вычислениях используются конечные десятичные дроби, то есть такие десятичные дроби, у которых число цифр после запятой ограничено. В предисловии мы видели, что диагональ единичного квадрата с точностью до десяти десятичных знаков после запятой равна

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623.$$

Однако простой расчет показывает, что

$$(1{,}4142135623)^2 = 1{,}99999999979325598129$$

ровно. А это хотя и близко к 2, но не равно этому числу.

Может быть, мы прекратили расчет слишком быстро. Может быть, миллион цифр даст нам точное значение корня квадратного из 2. На самом деле существует простой способ убедиться в том, что такие рассуждения не сработают. Рассматриваемое нами приближение с десятью знаками после запятой заканчивается на 3. При возведении в квадрат мы получаем число с 20 знаками после запятой, заканчивающееся на 9 (а 9 — это 3^2). Это не совпадение; такой результат следует из метода, при помощи которого мы перемножаем десятичные дроби. Далее: последняя значащая цифра любого десятичного числа, если только это не 0, обязательно является ненулевой. Следовательно, ее квадрат заканчивается ненулевой цифрой. Поскольку 2 мы можем записать в виде десятичной дроби как 2,000… с одними нулями после запятой, то понятно, что никакой квадрат длинной десятичной дроби с множеством значащих цифр не может точно равняться 2.

Все десятичные числа на калькуляторе на самом деле являются рациональными. К примеру, округление числа π до десяти десятичных знаков равняется 3,141592653, и это число *точно* равно простой дроби

$$\frac{3141592653}{1000000000}.$$

Вообще, конечные десятичные дроби точно соответствуют довольно ограниченному множеству простых дробей: тем из них, у которых знаменатель (число под чертой) представляет собой степень десятки. Другие простые дроби в этом отношении сложнее. Если я наберу на калькуляторе $\frac{1}{3}$, он покажет 0,33333333. На самом деле это не совсем верно: умножьте это число на 3, и вы получите $1 = 0{,}999999999$. Это неправда: разница составляет 0,0000000001. Но кого волнует одна десятимиллиардная?

Ответ зависит от того, что вы хотите сделать. Если вы сколачиваете книжную полку и хотите разделить метровую доску на три равные части, тогда 0,333 м (333 мм) — это достаточно точно. Но если вы доказываете математическую теорему и хотите, чтобы при умножении 3 на $\frac{1}{3}$ получилось 1, как, собственно, и должно получаться, тогда даже небольшая ошибка может стать фатальной. Если вы хотите точно записать $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби, то тройки после запятой у вас должны продолжаться вечно.

Последовательность цифр числа $\sqrt{2}$ тоже продолжаются вечно, но там не существует очевидных закономерностей. То же можно сказать и о цифрах числа π. Однако если вы хотите выразить длины, которые появляются в геометрии, при помощи чисел, то вам придется найти численное представление для таких вещей, как $\sqrt{2}$ или π. Результатом таких усилий и стала числовая система, которую мы сегодня называем действительными числами. Эти числа можно представить в виде бесконечно длинных десятичных дробей, а в высшей математике используются и более абстрактные методы.

Прилагательное «действительные» (иногда говорят вещественные числа) возникло здесь потому, что эти числа соответствуют интуитивным представлениям человека об измерениях. Каждый дополнительный десятичный знак делает измерение более точным. Однако на уровне элементарных частиц окружающий мир делается слегка неопределенным и размытым, так что десятичные дроби теряют контакт с реальностью примерно на пятидесятом знаке после запятой. По существу, мы открыли ящик Пандоры. Математические объекты и структуры представляют собой в лучшем случае *модели* реального мира, а отнюдь не саму реальность. Если мы рассматриваем бесконечные десятичные дроби, система действительных чисел выглядит упорядоченной и аккуратной. Поэтому мы можем производить математические действия с ее применением, а затем сравнивать результаты с реальностью, если такова наша основная цель. Если же мы попытаемся остановить десятичные дроби после пятидесятого знака или, допустим, введем в числа какую-то неопределенность, то получим одну только путаницу. Всегда существует компромисс между математическим удобством и физической точностью.

Любое рациональное число действительно. Более того (я не буду приводить доказательство, хотя оно не слишком сложное), десятичное представление рациональных чисел — это те самые *периодические* дроби. Другими словами, в них бесконечно повторяется один и тот же конечный блок цифр, иногда с некоторым количеством других цифр впереди (то есть слева). К примеру,

$$\frac{137}{42} = 3{,}26190476190476190 47\ldots$$

с начальным исключительным блоком 3,2 и повторяющимся неограниченно блоком 619047.

Однако многие действительные числа не являются рациональными. Примером может служить любая десятичная дробь, в которой нет бесконечного повторения одного и того же блока. Поэтому я могу быть уверен, что, скажем, число

1,101001000100001000001…

с все более длинными последовательностями нулей не рационально. Такие числа называют *иррациональными*. Любое действительное число либо рационально, либо иррационально.

Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$

Все конечные десятичные дроби одновременно являются простыми дробями, но многие простые дроби не являются конечными десятичными дробями. Можно ли записать $\sqrt{2}$ точно в виде какой-нибудь простой дроби? Если бы ответ был положительным, вся масса греческих трудов, посвященных длинам и площадям, была бы намного проще. Однако греки выяснили, что ответ на этот вопрос отрицателен. Для доказательства они не использовали десятичные дроби, они вывели его геометрически.

Сегодня мы рассматриваем этот факт как важное откровение, открывающее перед нами обширные области новой полезной математики, но в то время он казался раздражающе неприятным. Само открытие восходит к пифагорейцам, истово верившим, что Вселенная основана на числах. При этом под числами они понимали натуральные числа и простые дроби. К несчастью, один из них — говорят, это был Гиппас из Метапонта — открыл, что диагональ единичного квадрата иррациональна. Утверждается, что он огласил этот неприятный факт в море, когда группа пифагорейцев плыла куда-то на корабле, и спутники были настолько возмущены, что выбросили Гиппаса за борт, где он и утонул. Эта легенда не подтверждается историческими данными, но ясно, что единомышленники Гиппаса были бы не слишком довольны таким открытием, поскольку оно противоречило самым глубоким их убеждениям.

В греческом доказательстве используется геометрическая схема, которую мы сегодня называем алгоритмом Евклида. Это строгий и последовательный способ выяснить, являются ли два заданных отрезка a и b *пропорциональными*, то есть кратны ли их длины длине некоего общего отрезка c (укладывается ли отрезок c целое число раз в каждом из них). Если отрезки пропорциональны, метод позволяет нам узнать длину c. С точки зрения современной арифметики a и b пропорциональны в том и только том случае, когда $\frac{a}{b}$ рационально, так что «на самом деле» алгоритм Евклида представляет собой тест на рациональность заданного числа.

Греки со своей геометрической точки зрения рассуждали иначе, примерно следующим образом. Предположим, что a и b кратны c, то есть нацело делятся на c. Например, пусть $a = 17c$, а $b = 5c$. Начертим решетку 17×5 из квадратов со стороной c. Отметим, что a здесь лежит по верхней границе и состоит из 17 копий c; b идет вертикально и включает в себя 5 копий c. Таким образом, a и b пропорциональны.

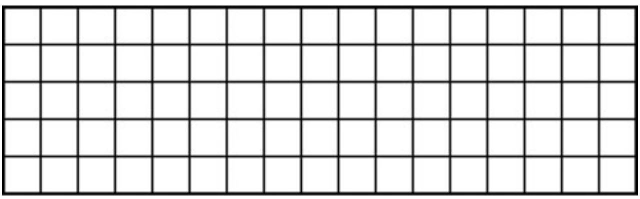


Рис. 91. Решетка 17 × 5

Далее отрежем от этой решетки столько квадратов 5×5, сколько сможем:

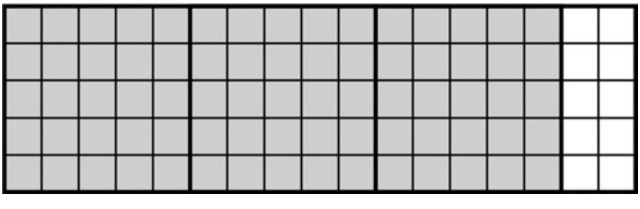


Рис. 92. Отрезаем три квадрата 5 × 5

Это оставляет нам в конце прямоугольник 2×5. Повторим процесс на этом меньшем прямоугольнике, отрезая на этот раз квадраты 2×2.

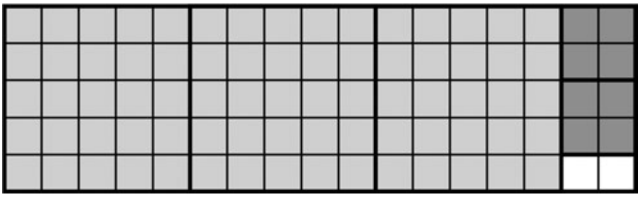


Рис. 93. Затем отрезаем два квадрата 2 × 2

Все, что у нас осталось, — это прямоугольник 2×1. Разрежем его на квадраты 1×1, и у нас не останется ни одного маленького прямоугольничка — все разделится нацело.

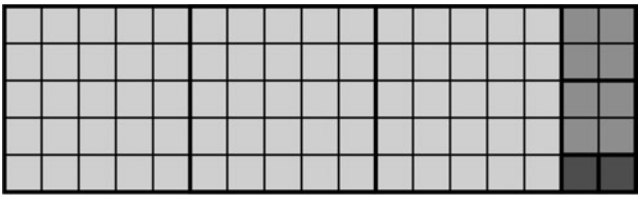


Рис. 94. Наконец отрезаем два квадрата 1 × 1

Если первоначальные длины a и b нацело делятся на общую длину c, то описанный процесс со временем обязательно остановится, поскольку все отрезки лежат на решетке, а размеры остающихся прямоугольников становятся все меньше и меньше. И наоборот, если процесс рано или поздно остановится, это означает, что a и b кратны c. Короче говоря: два отрезка пропорциональны тогда и только тогда, когда алгоритм Евклида, примененный к соответствующему прямоугольнику, останавливается после конечного числа шагов.

Если мы хотим доказать, что отрезки из некоторой пары не пропорциональны друг другу, нам достаточно придумать такой прямоугольник, для которого процесс очевидным образом *никогда* не остановится. В применении к числу $\sqrt{2}$ фокус в том, чтобы начать с прямоугольника, форма которого выбрана таким образом, что после отрезания *двух* больших квадратов оставшийся кусок будет в точности той же формы, что и оригинал.

В этом случае алгоритм Евклида будет до бесконечности отрезать по два квадрата и не сможет остановиться.

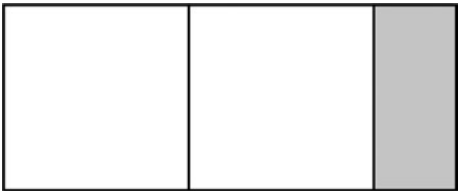


Рис. 95. Сделаем заштрихованный прямоугольник той же формы, что и оригинальный

Греки строили такой прямоугольник геометрически, но мы можем прибегнуть к помощи алгебры. Предположим, что стороны равны a и 1. В таком случае необходимое условие

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a-2}$$

Таким образом, $a^2 - 2a = 1$, тогда как $(a - 1)^2 = 2$, следовательно, $a = 1 + \sqrt{2}$. Подведем итог: алгоритм Евклида указывает на то, что длины $1 + \sqrt{2}$ и 1 не являются пропорциональными, то есть число $1 + \sqrt{2}$ иррационально.

Таким образом, $\sqrt{2}$ также иррационален. Чтобы понять почему, предположим, что $\sqrt{2}$ рационален и равен $\frac{p}{q}$. Тогда $1+\sqrt{2}=\frac{(p+q)}{q}$, что опять же рационально. Но на самом деле это не так, и мы получили противоречие, а значит, наше предположение неверно.

$\pi \sim 3{,}141592$

Измерение окружности

Числа, которыми мы пользуемся при счете, быстро становятся привычными, но существуют куда более странные числа. Первое по-настоящему необычное число, с которым мы сталкиваемся при изучении математики, это число π. Это число возникает во многих областях математики, не все из которых очевидно связаны с какими бы то ни было окружностями. Математики вычислили π с точностью до более чем 12 триллионов десятичных знаков. Как они это сделали? Понимание того, что представляет собой число π, дает ответ на древний вопрос: можно ли найти квадратуру круга при помощи линейки и циркуля?

Отношение длины окружности к ее диаметру

Мы впервые встречаемся с π при вычислении длины окружности и площади круга. Если радиус окружности равен r, то ее длина равна $2\pi r$, а площадь круга, который она ограничивает, равна πr^2. Геометрически две эти величины напрямую не связаны, так что тот факт, что в формулах для того и другого фигурирует *одно и то же* число π, на самом деле весьма примечателен. Существует интуитивный способ понять, почему так происходит. Нарежьте круг, как пиццу, на множество ломтиков и сложите из них что-то вроде прямоугольника. Ширина этого прямоугольника составит приблизительно половину длины окружности (то есть πr), а высота — приблизительно r. Так что площадь круга, очевидно, приблизительно равна $\pi r \times r = \pi r^2$.

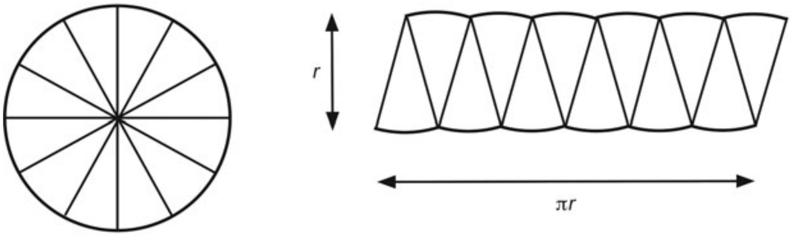


Рис. 96. Приближенное вычисление площади круга

Но это всего лишь аппроксимация. Может быть, числа, которые получаются в том и другом случае для длины окружности и площади, очень похожи, но все же не идентичны? Это представляется маловероятным, поскольку приведенные рассуждения работают, как бы тонко мы ни нарезали круг на ломтики. Если мы возьмем громадное количество очень тонких ломтиков, аппроксимация станет очень точной. Более того, позволив числу ломтиков вырасти до сколь угодно больших величин, мы можем сделать разницу между реальной формой и настоящим прямоугольником сколь угодно маленькой. А если обратиться к математике пределов, то из этого наблюдения можно получить доказательство того, что известная нам формула площади круга корректна и точна. Именно поэтому одно и то же число фигурирует в формулах и для длины окружности, и для площади круга.

Процедура поиска предела, кроме всего прочего, *определяет* понятие площади в данном контексте. Вообще, площади не так просты, как нам кажется. Если площади многоугольников можно определить путем разрезания многоугольника на треугольники, то с криволинейными фигурами невозможно поступить таким образом. Даже площадь прямоугольника неочевидна, если его стороны не пропорциональны друг другу. И проблема здесь не в том, чтобы сказать, чему равна площадь: достаточно просто перемножить стороны. Сложно доказать, что результат будет вести себя так, как полагается площади: к примеру, что при соединении фигур их площади складываются. Школьная математика быстро проскакивает мимо подобных проблем в надежде на то, что никто этого не заметит.

Почему математики используют для обозначения числа какой-то непонятный символ? Почему они не могут просто написать само число? В школе нам часто говорят, что $\pi = \frac{22}{7}$ (или 3,14), но добросовестный учитель непременно объяснит, что это всего лишь приближенное значение (см. главу $\frac{22}{7}$). Так почему мы не используем вместо этого какую-нибудь дробь, которая точно равна π?

Такой дроби не существует.

Число π — наиболее известный и изученный пример иррационального числа. Как и $\sqrt{2}$, π невозможно записать в виде какой бы то ни было дроби, какой бы сложной она ни была. Доказать это очень непросто, но математики знают, как это сделать, и это правда. Поэтому нам определенно нужен новый символ, поскольку данное конкретное число невозможно записать точно при помощи обычных числовых символов. А поскольку π — одно из важнейших чисел во всей математике, нам нужен однозначный способ сослаться на него. π — это греческая буква «пи», первая буква слова «периметр».

Надо сказать, что в этом отношении Вселенная сыграла с нами довольно жестокую шутку: подумать только, жизненно важное число, которое невозможно записать без использования сложных формул! Но хотя это, возможно, и неудобство, зато как интересно! Это лишь добавляет π загадочности и обаяния.

π и окружность

Впервые каждый из нас встречается с числом π в вопросах, связанных с окружностями или кругами. Круг — одна из фундаментальнейших математических форм, поэтому все, что помогает нам больше узнать о нем, сто́ит нашего внимания. Круги чрезвычайно широко применяются в повседневной жизни. Так, в 2011 г. число кругов, используемых всего лишь в одном качестве, превысило 5 млрд; дело в том, что в том году число автомобилей преодолело знаковый рубеж в 1 млрд, а у типичного авто на тот момент было пять колес — четыре на дороге плюс запаска. (Сегодня вместо запаски автомобилисты часто ограничиваются ремонтным набором, который стоит дешевле и помогает экономить бензин.) Разумеется, в том же автомобиле имеется множество других кругов — от рулевого колеса до щеток стеклоочистителя. А если вспомнить еще велосипеды, грузовики, автобусы, поезда, самолетные шасси…

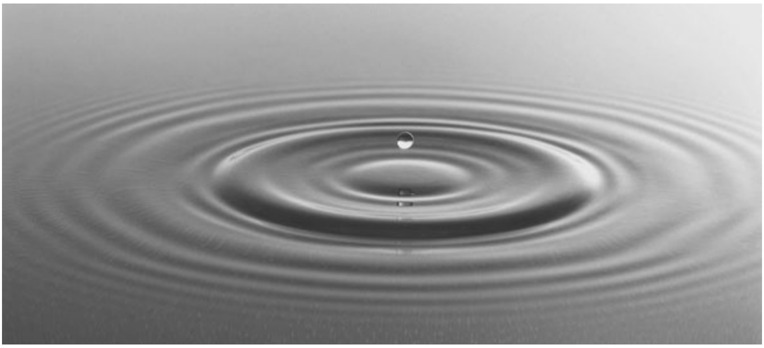


Рис. 97. Круги на воде

Рис. 98. Радуга — дуга окружности

Колеса — всего лишь одна из областей приложения геометрии круга. Они работают потому, что все без исключения точки окружности равноудалены от ее центра. Если вставить в центр круглого колеса ось, колесо, вращаясь вокруг нее, сможет плавно катиться по ровной дороге. Но окружности можно увидеть и во многих других местах. От брошенного камня по воде расходятся круги, а не что-нибудь другое; кругом является и разноцветная дуга радуги. Орбиты планет в первом приближении тоже окружности. При более точном приближении орбиты оказываются эллипсами — сплюснутыми в одном направлении окружностями.

Однако следует заметить, что инженеры с легкостью проектируют колеса, не задумываясь о числе π. Подлинное значение этого числа относится к теоретической области и лежит гораздо глубже. Математики впервые встретились с π при поиске ответов на фундаментальные теоретические вопросы об окружностях. Размеры любой окружности описываются тремя числами, тесно связанными между собой:

- *радиус* — расстояние от центра окружности до любой ее точки;
- *диаметр* — максимальная ширина окружности;
- *длина* окружности — длина самой линии, измеренная вдоль окружности.

Радиус и диаметр окружности связаны очень просто: диаметр вдвое больше радиуса, а радиус равен половине диаметра.

Соотношение между длиной окружности и ее диаметром не настолько очевидно. Если построить внутри окружности шестиугольник, то можно убедиться, что длина окружности немного больше ее утроенного диаметра. На рис. 99 можно видеть шесть радиусов, которые попарно соединяются в центре и образуют три диаметра. Периметр шестиугольника имеет ту же длину, что и шесть радиусов окружности, то есть три диаметра. А длина окружности, очевидно, немного больше периметра шестиугольника.

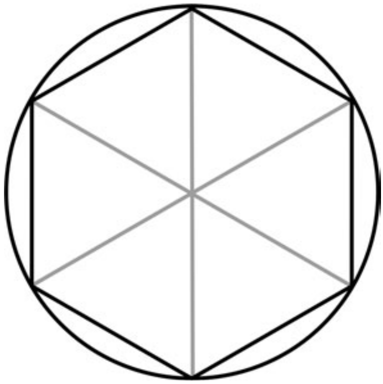


Рис. 99. Почему π больше 3

Число π *определяется* как длина произвольной окружности, деленная на ее диаметр. Каким бы ни был размер окружности, мы уверены, что это соотношение будет одним и тем же, поскольку длина окружности и ее диаметр с увеличением или уменьшением окружности изменяются в одной и той же пропорции. Около 2200 лет назад Архимед предложил строгое и логичное доказательство того, что отношение это постоянно для любой окружности.

Размышляя о вписанных в окружность шестиугольниках, а затем удваивая число сторон с 6 до 12, затем до 24, 48 и наконец 96, Архимед также получил довольно точное значение для π. Он доказал, что π больше, чем $3\frac{10}{71}$, и меньше, чем $3\frac{1}{7}$. В десятичной записи эти числа соответствуют 3,1408 и 3,1428. (Архимед работал с геометрическими фигурами, а не с реальными числами, и воспринимал то, что мы сегодня называем числом π, геометрически, так что это лишь современная интерпретация того, что он на самом деле сделал. У греков не было десятичной записи чисел.)

Предложенный Архимедом метод вычисления π можно сделать сколь угодно точным; для этого достаточно удвоить число сторон многоугольника, используемого для аппроксимации окружности, еще несколько раз — столько, сколько потребуется.

Позже математики нашли более эффективные методы — о некоторых из них мы поговорим чуть позже. До 1000 знаков после запятой число π выглядит так:

3,141592653589793238462643383279502884197169399
3751058209749445923078164062862089986280348253
4211706798214808651328230664709384460955058223
1725359408128481117450284102701938521105559644 6
2294895493038196442881097566593344612847564823
3786783165271201909145648566923460348610454326 6
4821339360726024914127372458700660631558817488 1
5209209628292540917153643678925903600113305305
4882046652138414695194151160943305727036575959 1
9530921861173819326117931051185480744623799627 4
9567351885752724891227938183011949129833673362 4
4065664308602139494639522473719070217986094370 2
7705392171762931767523846748184676694051320005 6
8127145263560827785771342757789609173637178721 4
6844090122495343014654958537105079227968925892 3
5420199561121290219608640344181598136297747713 0
9960518707211349999998372978049951059731732816 0
9631859502445945534690830264252230825334468503
5261931188171010003137838752886587533208381420 6
1717766914730359825349042875546873115956286388 2
3537875937519577818577805321712268066130019278 76
61119590921642019 9.

Если внимательно посмотреть на это число, то самой поразительной его особенностью окажется полное отсутствие каких бы то ни было закономерностей. Цифры кажутся совершенно случайными. Но согласитесь, этого не может быть, поскольку все они — цифры числа π, а это вполне конкретное число. Отсутствие закономерностей как бы намекает на то, что π — очень необычное число. Математики сильно подозревают, что любая конечная последовательность цифр непременно где-то встретится (мало того, встретится бесконечное число раз). Более того, считается, что π — *нормальное* число, то есть что все последовательности заданной длины встречаются в нем с равной частотой. Эти гипотезы пока не удалось ни доказать, ни опровергнуть.

Другие области, где встречается π

Число π встречается во многих областях математики, зачастую никак, на первый взгляд, не связанных с кругами. На самом деле связь всегда есть, хотя иногда неявная, ведь именно из этой области π происходит и именно к ней относится одно из его определений. Любое другое определение тоже должно указывать на π, так что где-то в ходе рассуждений связь с кругом необходимо доказывать. Но эта связь может быть *весьма* непрямой.

К примеру, в 1748 г. Эйлер обратил внимание на связь между числами π, e и i — корнем квадратным из –1 (см. главу e). Связь эта выражается элегантной формулой

$$e^{i\pi} = -1.$$

Эйлер также заметил, что π появляется при суммировании некоторых бесконечных рядов. В 1735 г. он решил так называемую Базельскую задачу — ответил на вопрос, заданный Пьетро Менголи в 1644 г.: найти сумму всех чисел, обратных квадратам натуральных чисел. Это бесконечный ряд, поскольку квадратов, естественно, бесконечно много. Эту задачу безуспешно пытались решить многие великие математики того времени. В 1735 г. Эйлер получил удивительно (и приятно!) простой ответ:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Это открытие мгновенно прославило его в математической среде. Видите здесь связь с тригонометрией и кругами? Нет, я тоже не вижу. Тем не менее она и не может быть слишком уж очевидной, поскольку лучшие математики тогда не могли решить Базельскую задачу. На самом деле связь здесь прослеживается через функцию синуса, которая, на первый взгляд, не имеет к задаче никакого отношения.

Метод Эйлера позволил получить аналогичные результаты для четвертых, для шестых и вообще для любых четных степеней. Например:

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots$$

$$\frac{\pi^6}{945}=\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\ldots$$

Можно также взять только четные или только нечетные натуральные числа:

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots$$

$$\frac{\pi^2}{24}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots$$

Однако математикам не удалось найти никаких формул для нечетных степеней, скажем, для кубов или пятых степеней, и предполагается, что их попросту не существует (см. главу ζ (3)).

Замечательно, что эти и родственные им ряды имеют глубокие связи с простыми числами и теорией чисел. К примеру, если выбрать два случайных натуральных числа, то вероятность того, что они не будут иметь общих делителей (больших 1) составит $\frac{6}{\pi^2} \sim 0{,}6089$, то есть величину, обратную полученной Эйлером сумме ряда.

Еще одна область неожиданного появления числа π — статистика. Площадь под знаменитой колоколообразной кривой, описываемой уравнением $y=e^{-x^2}$ в точности равна $\sqrt{\pi}$.

π содержится во многих формулах математической физики. Некоторые из них приведены ниже в списке формул, содержащих это странное число. Математики открыли огромное множество самых разных уравнений, в которых π играет заметную роль; о некоторых из них мы еще поговорим.

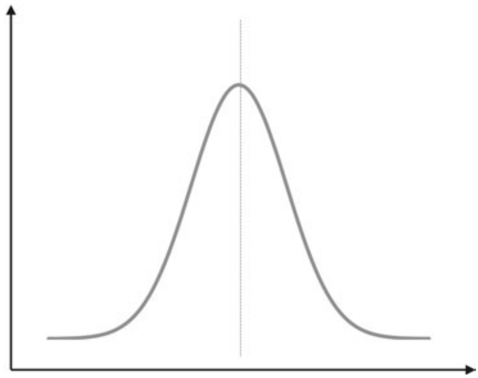


Рис. 100. Колоколообразная кривая

Как вычислить π

В 2013 г. Сигеру Кондо за 94 дня при помощи компьютера вычислил π до 12 100 000 000 050 — больше чем до двенадцати триллионов! — десятичных знаков. Для практического использования π такая точность (и даже близкая к ней) не нужна; к тому же ее невозможно получить измерением реальных физических окружностей. В разные времена для этого использовалось несколько различных способов, основанных на формулах для π или процессах, которые мы сегодня выражаем в виде формул.

Конечно, подобные расчеты полезны: они позволяют посмотреть, насколько хорошо работают формулы, и испытать новые компьютеры. Однако главной движущей силой таких достижений является тяга человека к установлению рекордов. Некоторые математики стремятся вычислить хотя бы несколько новых знаков π, как альпинисты стремятся к покорению новых вершин — просто потому, что они существуют. Установление рекордов, как в случае с числом π, не является типичной целью математических исследований и само по себе не имеет особого значения или практической ценности, но усилия математиков в этом направлении привели к открытию совершенно новых интересных формул и помогли раскрыть неожиданные связи между различными областями математики.

В формулах для расчета π, как правило, фигурируют бесконечные процессы, которые — если прогнать их достаточное количество раз — дают хорошие приближения для π. Результат Архимеда был впервые улучшен в XV в., когда индийские математики представили π как сумму бесконечного ряда — результат сложения бесконечного числа слагаемых. Если, как в случае с этими формулами, величина такой суммы с каждым шагом все ближе подходит к одному определенному числу, ее *пределу*, то ряд можно использовать для расчета все более точных аппроксимаций этого числа. Как только нужный уровень точности достигнут, расчет прекращается.

Около 1400 г. Мадхава из Сангамаргама воспользовался одним из таких рядов, чтобы вычислить π до 11 десятичных знаков. В 1424 г. перс Джамшид аль-Каши улучшил этот результат; он, примерно как Архимед в свое время, воспользовался аппроксимацией окружности при помощи многоугольников с растущим числом сторон. Рассмотрев многоугольник с 3×2^{28} сторонами, он получил первые 16 знаков числа. Архимедов метод аппроксимации π вдохновил и Франсуа Виета, который в 1593 г. написал формулу нового типа для π, а именно:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

(Здесь точками обозначено дальнейшее умножение.) К 1630 г. Кристоф Гринбергер рассчитал методом многоугольников ни много ни мало 38 знаков.

В 1655 г. Джон Уоллис нашел еще одну формулу:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \ldots$$

использовав при этом довольно сложный подход к поиску площади полукруга.

Джеймс Грегори в 1641 г. заново открыл один из рядов для расчета π, открытых еще Мадхавой. Идея его в том, чтобы начать с тригонометрической функции под названием тангенс, обозначаемой $\operatorname{tg} x$. Если измерять в радианах, то угол 45° равен $\frac{\pi}{4}$; в этом случае $a = b$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

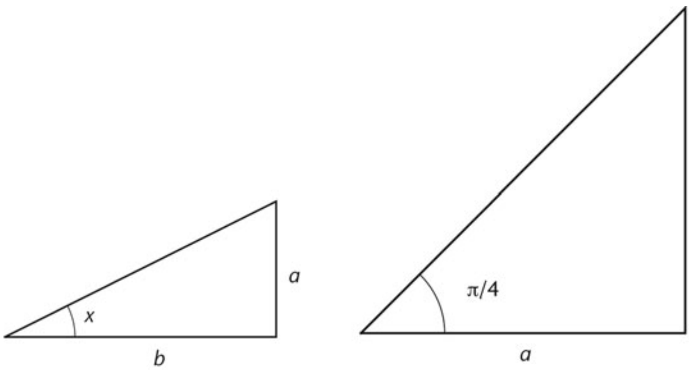


Рис. 101. Слева: тангенс $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$. Справа: если $x = \frac{\pi}{4}$, то тангенс x равен $\frac{a}{a} = 1$

А теперь рассмотрим обратную функцию, которая называется арктангенс и обозначается как $\operatorname{arctg} x$. Она «нейтрализует» функцию тангенса; то есть если $y = \operatorname{tg} x$, то $x = \operatorname{arctg} y$. В частности, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Мадхава и Грегори открыли бесконечный ряд для арктангенса:

$$\operatorname{arctg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \ldots$$

Приравняв y к 1, получим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

В 1699 г. Абрахам Шарп воспользовался этой формулой, чтобы получить 71 знак числа π, но этот ряд сходится очень медленно; это значит, что вам нужно учесть очень много его членов, чтобы получить хорошую аппроксимацию. В 1706 г. Джон Мачин воспользовался тригонометрической формулой для тангенса суммы, то есть tg $(x + y)$, чтобы показать, что

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239},$$

а затем заменил значения функции от $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{239}$ на ряд арктангенса. Поскольку эти числа много меньше единицы, ряд при этом сходится быстрее, что делает его использование намного удобнее. При помощи своей формулы Мачин вычислил π до 100 знаков. К 1946 г. Дэниел Фергюсон выжал из этой идеи практически все, на что она была способна, и довел число знаков в π до 620.

Существует множество хитроумных вариантов формулы Мачина; более того, есть даже полная теория всех подобных формул. В 1896 г. Фредерик Стёрмер уже знал, что

$$\frac{\pi}{4} = 44\,\mathrm{arctg}\frac{1}{57} + 7\,\mathrm{arctg}\frac{1}{239} - 12\,\mathrm{arctg}\frac{1}{682} + 24\,\mathrm{arctg}\frac{1}{12943}$$

и что существует немало еще более впечатляющих современных формул примерно такого же содержания, которые сходятся намного быстрее благодаря огромным знаменателям.

Никто из математиков не сумел добиться лучших результатов при помощи расчетов на бумаге, но механические вычислители и электронные компьютеры сделали расчеты намного быстрее и исключили случайные ошибки. Внимание переключилось на поиск формул, которые дают хорошее приближение уже через несколько шагов. Ряд Чудновских

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(545\,140\,134k + 13\,591\,409)}{(3k)!(k!)^3\,640\,320^{3k+\frac{3}{2}}},$$

найденный братьями Давидом и Григорием Чудновскими, дает 14 новых десятичных знаков на каждый следующий член ряда. Здесь знак суммирования $\sum$ означает: складывать значения данного выражения для всех натуральных k от 0 до бесконечности.

Существует множество других способов вычисления числа π, и новые открытия в этой области делаются до сих пор. В 1997 г. Фабрис Беллар объявил, что триллионная цифра числа π в двоичной записи — это 1. Как ни поразительно, при этом он не вычислял более ранних знаков. В 1996 г. Дэвид Бэйли, Питер Боруэйн и Саймон Плафф открыли очень любопытную формулу:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Беллар использовал похожую формулу, более эффективную при расчетах:

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \times$$
$$\times \left(-\frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \frac{64}{10n+3} - \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right).$$

Кое-какие хитроумные приемы позволяют при помощи этого метода получать отдельные двоичные знаки. Ключевая черта этой формулы — то, что многие числа в ней, такие как 4, 32, 64, 256, 2^{4n} и 2^{10n}, представляют собой степени двойки, которые очень просто записываются в двоичной системе, используемой при внутренних операциях в компьютерах. Вообще, рекорды поиска отдельных двоичных цифр числа π устанавливаются регулярно: в 2010 г. Николас Ши из Yahoo вычислил двухквадриллионную двоичную цифру числа π, которая оказалась равной 0.

При помощи тех же формул можно найти отдельные цифры записи π в числовых системах с основанием 4, 8 и 16.

Ни для каких других оснований ничего подобного не известно; в частности, мы не умеем вычислять изолированные десятичные цифры. Существуют ли в принципе такие формулы? Но до появления формулы Бэйли–Боруэйна–Плаффа никому даже в голову не приходило, что такое можно проделывать хотя бы в двоичной системе.

Квадратура круга

Древние греки искали геометрическое построение так называемой квадратуры круга: квадрата, равного по площади заданному кругу. Со временем было доказано, что эта задача, так же как трисекция угла и удвоение куба, не решается при помощи линейки и циркуля: построения, позволяющего найти сторону такого квадрата, просто не существует (см. главу 3). Доказательство опирается на свойства числа π.

Мы уже видели, что π не является рациональным числом. Следующий шаг после рациональных чисел — это алгебраические числа, то есть числа, удовлетворяющие какому-то полиномиальному уравнению с целыми коэффициентами. К примеру, $\sqrt{2}$ — число алгебраическое, это решение уравнения $x^2 - 2 = 0$. Число, которое не является алгебраическим, называется трансцендентным, и в 1761 г. Ламберт — математик, первым доказавший иррациональность π — предположил, что это число также трансцендентно.

Прошло 112 лет, прежде чем Шарль Эрмит в 1873 г. совершил первый крупный прорыв в этом вопросе и доказал, что *другое* знаменитое странное число математики — основание натуральных логарифмов e (см. главу e) трансцендентно. В 1882 г. Фердинанд фон Линдеман усовершенствовал метод Эрмита и доказал, что если ненулевое число является алгебраическим, то e в степени этого числа трансцендентно. Затем он воспользовался формулой Эйлера $e^{i\pi} = -1$ следующим образом. Пусть π — алгебраическое число. Тогда $i\pi$ — тоже алгебраическое число. Тогда по теореме Линдемана получаем, что -1 *не является* корнем никакого алгебраического уравнения (то есть что -1 трансцендентно).

Одно из важных следствий этой теоремы — ответ на древнюю геометрическую задачу квадратуры круга, то есть построения квадрата той же площади, что и заданный круг, при помощи только линейки и циркуля. Это эквивалентно построению отрезка длины π на основании отрезка длины 1. Координатная геометрия показывает, что любое число, которое можно построить таким способом, должно быть алгебраическим. Поскольку π — число не алгебраическое, такого построения не существует.

Это не останавливает некоторых людей, которые даже сегодня продолжают искать вожделенное циркульно-линейное построение. Они, кажется, не понимают, что в математике означает слово «невозможно». Это очень старое заблуждение. В 1872 г. де Морган написал книгу «Бюджет парадоксов», в которой разобрал ошибки многочисленных страдальцев за квадратуру круга и сравнил их с роем мух, вьющимся вокруг слона, причем каждая муха утверждает, что она «больше этого четвероногого». В 1992 г. Андервуд Дадли продолжил эти разъяснения в книге «Математические причуды». Хотите — исследуйте всевозможные геометрические аппроксимации π и построения при помощи других инструментов, насколько сил хватит. Но поймите, пожалуйста, что построения квадратуры круга при помощи линейки и циркуля в строгом классическом смысле не существует.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}618034$$

Золотое сечение

Это число было известно древним грекам в связи с правильными пятиугольниками и додекаэдром евклидовой геометрии. Оно тесно связано с последовательностью чисел Фибоначчи (см. главу 8) и описывает некоторые интересные закономерности строения растений и цветов. Его называют *золотым сечением*, или *золотой пропорцией*; судя по всему, такое название это число получило где-то в промежутке с 1826 по 1835 г. Его мистические и эстетические свойства широко рекламируются, но в большинстве своем эти утверждения преувеличены: некоторые из них основаны на сомнительной статистике, а многие вообще безосновательны. Однако золотая пропорция и правда обладает некоторыми замечательными математическими свойствами, включая связи с числами Фибоначчи и подлинные точки соприкосновения с миром природы — особенно в области нумерологии и геометрии растений.

Греческая геометрия

Число φ (греческая буква фи; иногда это число обозначают и другой греческой буквой — τ, тау) впервые возникло в математике (в «Началах» Евклида) в связи с геометрией правильного пятиугольника. По обычной практике того времени это число тоже интерпретировалось геометрически, а не численно.

Для φ существует точная формула, к которой мы скоро и перейдем. До шести знаков после запятой

$$\varphi = 1{,}618034,$$

а до ста знаков —

$$\varphi = 1{,}6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911375.$$

Одна из характерных черт φ проявится, если мы вычислим обратную ему величину $\frac{1}{\varphi}$ тоже до шести десятичных знаков:

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}618034$$

Это подводит нас к мысли, что $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Это соотношение можно записать в виде квадратного уравнения $\varphi^2 = \varphi + 1$ или в стандартной форме

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Алгебра квадратных уравнений показывает, что это уравнение имеет два решения:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Численно эти решения равны 1,618034 и –0,618034. Положительное решение мы берем в качестве определения φ. Таким образом,

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

и это действительно тот случай, когда $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ в точности.

Связь с пятиугольниками

Золотое сечение появляется в геометрии правильного пятиугольника. Для начала возьмем правильный пятиугольник со стороной 1. Проведем в нем пять диагоналей, чтобы получить пятиконечную звезду. Евклид доказал, что каждая диагональ имеет длину, равную золотой пропорции.

Точнее говоря, Евклид работал с «сечением в крайнем и среднем отношении». Это способ разделить отрезок на две части таким образом, чтобы отношение большего отрезка к меньшему равнялось отношению целого к большему.

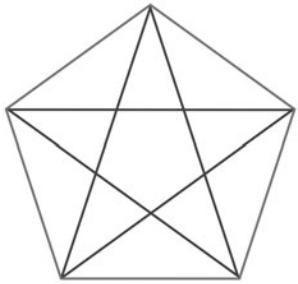


Рис. 102. Правильный пятиугольник и его диагонали

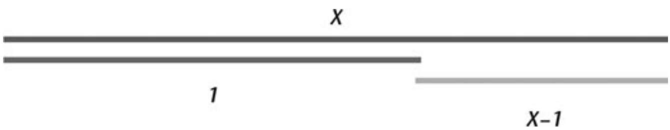


Рис. 103. Сечение в крайнем и среднем отношении: отношение длины темно-серого отрезка (1) к длине светло-серого ($x-1$) равно отношению длины черного отрезка (x) к длине темно-серого (1)

К какому числу ведет этот процесс? В символах пусть длина черного отрезка равна x, а длина темно-серого отрезка равна 1. Тогда длина светло-серого отрезка равна $x-1$. Таким образом, сечение в крайнем и среднем отношении сводится к уравнению

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{(x-1)},$$

которое после преобразований дает

$$x^2-x-1=0.$$

Это уравнение, определяющее золотое сечение, а решение нам нужно то, что больше 1, то есть φ.

Евклид заметил, что на чертеже пятиугольника сторона делит диагональ в крайнем и среднем отношении. Это позволило ему построить правильный пятиугольник при помощи традиционных инструментов — линейки и циркуля (см. главу 17). А пятиугольник был важен для греков потому, что он образует грани одного из пяти правильных многогранников — додекаэдра. Вершина евклидовых «Начал» — доказательство существования ровно пяти правильных многогранников (см. главу 5).

Числа Фибоначчи

Золотое сечение тесно связано с числами Фибоначчи, которые ввел в 1202 г. Леонардо Пизанский (см. главу 8). Напомним, что эта последовательность чисел начинается как

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233.

Каждое число после двух первых получается путем сложения двух предыдущих чисел: $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$ и так далее. Отношение последовательных чисел Фибоначчи чем дальше, тем заметнее приближается к золотому сечению:

$$\frac{1}{1}=1 \qquad \frac{21}{13}=1{,}6153$$

$$\frac{2}{1}=2 \qquad \frac{34}{21}=1{,}6190$$

$$\frac{3}{2}=1{,}5 \qquad \frac{55}{34}=1{,}6176$$

$$\frac{5}{3}=1{,}6666 \qquad \frac{89}{55}=1{,}6181$$

$$\frac{8}{5}=1{,}6 \qquad \frac{144}{89}=1{,}6179$$

$$\frac{13}{8}=1{,}625 \qquad \frac{233}{144}=1{,}6181$$

и это свойство можно доказать, опираясь на правило формирования последовательности и квадратное уравнение для φ.

И обратно, мы можем выразить числа Фибоначчи через золотое сечение (см. главу 8):

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

В структуре растений

Более 2000 лет люди замечают, что числа Фибоначчи очень часто встречаются в растительном царстве. Так, у многих цветов, особенно из семейства астровых, число лепестков равняется одному из чисел Фибоначчи. У календулы обычно 13 лепестков. У астры 21. Многие маргаритки имеют по 34 лепестка; если нет, то лепестков у них чаще всего 55 или 89. У подсолнуха, как правило, 55, 89 или 144 лепестка.

Другие числа попадаются реже, но все-таки иногда встречаются: к примеру, у фуксии 4 лепестка. Вообще, среди исключений часто встречаются числа Лукаса 4, 7, 11, 18 или 29; они образуются так же, как числа Фибоначчи, но начинается последовательность с 1 и 3. Ниже вы найдете несколько примеров.

Эти же числа фигурируют в некоторых других чертах растений. Кожура ананаса состоит из почти правильных шестиугольников; шестиугольными становятся и отдельные фрукты, если им приходится расти в плотном соплодии. Они складываются в два сцепленных семейства спиралей. Спирали одного семейства завиваются против часовой стрелки, если смотреть сверху, и содержат восемь спиралей; другие завиваются по часовой стрелке и содержат тринадцать спиралей. Можно встретить также третье семейство из пяти спиралей, которые идут по часовой стрелке, но под меньшим углом.

Чешуйки сосновых шишек образуют подобные спирали. То же можно наблюдать у семян в спелой головке подсолнуха, но здесь спирали лежат на плоскости.

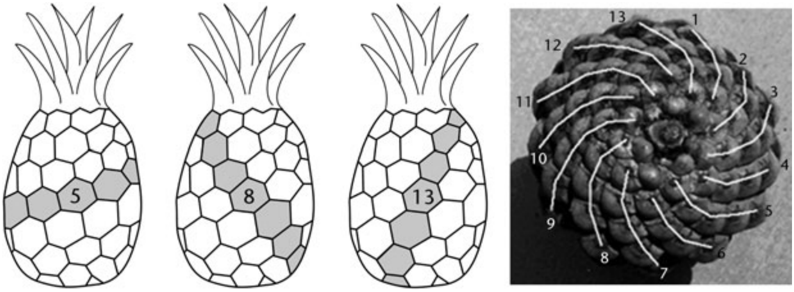


Рис. 104. Слева: три семейства спиралей в ананасе. Справа: семейство из 13 спиралей, закрученных против часовой стрелки, в сосновой шишке

Ключом к геометрии спиралей подсолнуха служит золотое сечение, которое, в свою очередь, объясняет существование чисел Фибоначчи. Разделим полную окружность (360°) на две дуги в соотношении золотого сечения (так, чтобы угол, определяемый большей дугой, был в φ раз больше угла, определяемого меньшей дугой). Тогда меньшая дуга составляет $\frac{1}{1+\varphi}$ долю от полной окружности. Этот угол, известный как золотой угол, приблизительно равен 137,5°.

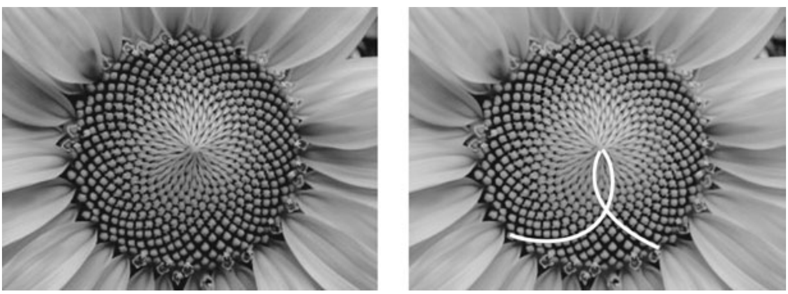


Рис. 105. Спирали Фибоначчи в головке подсолнуха. Слева: расположение семян. Справа: спирали двух семейств: тех, что загибаются по часовой стрелке (светло-серые), и тех, кто против (темно-серые)

В 1868 г. немецкий ботаник Вильгельм Хофмайстер наблюдал, как изменяется побег растения в процессе роста; его работы заложили фундамент для всех последующих работ по этому вопросу. Основные закономерности развития определяются тем, что происходит на кончике — в точке роста. Все зависит от небольшой группы клеток, известных как примордиальные клетки; со временем из них разовьются семена. Хофмайстер открыл, что последовательные примордии лежат на спирали, причем каждое из них отделяет от предшествующего золотой угол; таким образом, n-е семя смещено на угол nA. При этом расстояние от центра пропорционально корню квадратному из n.

Это наблюдение объясняет расположение семян в головке подсолнуха. Такую структуру можно получить, если расположить последовательные семена под углами, кратными золотому углу, на расстоянии от центра, пропорциональном корню квадратному из номера семечка. Если обозначить золотой угол A, то семена будут располагаться под углами

$$A \qquad 2A \qquad 3A \qquad 4A \qquad 5A \qquad 6A \qquad \ldots$$

и на расстояниях, пропорциональных

$$1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{6}\ldots$$

В таких цветах, как маргаритки, лепестки образуют внешний край одного из семейств спиралей. Поэтому число Фибоначчи спиралей подразумевает число Фибоначчи лепестков. Но почему в спиралях мы наблюдаем числа Фибоначчи?

Из-за золотого угла.

В 1979 г. Гельмут Фогель, воспользовавшись геометрией подсолнуха, объяснил существование золотого угла. Он выяснил, что произойдет с семенной головкой, если оставить спиральную структуру, но немного изменить золотой угол 137,5°. Только золотой угол позволяет расположить семена близко одно к другому, без пробелов и перекрытий. Даже небольшое — в десятую долю градуса — изменение угла разбивает рисунок семян, превращая его в одно семейство спиралей; между семенами возникают пустые промежутки. Это не просто численное совпадение; именно поэтому золотой угол находится на особом положении и так распространен в растительном царстве.

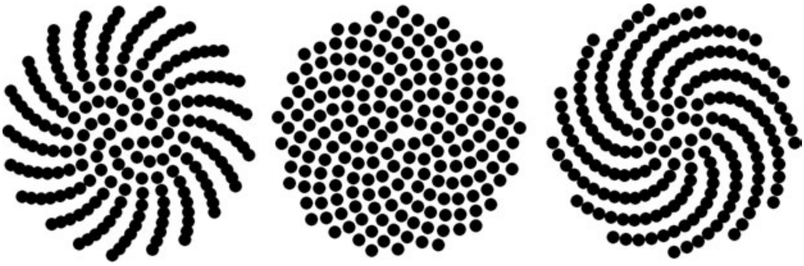


Рис. 106. Семена подсолнуха, расположенные под углами 137°, 137,5° и 138°. Только золотой угол позволяет расположить семена максимально близко одно к другому.

Однако полное объяснение лежит еще глубже. По мере роста между соседними клетками возникают силы взаимодействия. В 1992 г. Стефан Дуади и Ив Кудер исследовали механику таких систем как экспериментально, так и при помощи компьютерного моделирования. Они обнаружили, что углы между последовательными семенами представляют собой аппроксимацию золотого угла при помощи дробей Фибоначчи.

Выдвинутая ими теория объясняет также загадочное появление нефибоначчиевых чисел, таких как четыре лепестка фуксии. Подобные исключения берутся из последовательности, очень похожей на последовательность Фибоначчи и известной как числа Лукаса:

1 3 4 7 11 18 29 47 76 123 …

Формула для этих чисел выглядит так:

$$L^n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n},$$

то есть очень похоже на формулу для чисел Фибоначчи, приведенную выше.

Четыре лепестка фуксии — лишь один пример лукасова числа лепестков. На некоторых кактусах можно наблюдать рисунок из четырех спиралей в одном направлении и семи в другом или 11 в одном направлении и 18 в другом. Один из видов эхинокактусов имеет 29 ребер. Известны случаи, когда у подсолнухов находили наборы из 47 и 76 спиралей.

Одной из крупных областей прикладной математики является теория упругости, которая изучает, как материалы изгибаются или деформируются под действием приложенных сил. Например, эта теория объясняет, как ведут себя металлические балки или листы в конструкциях зданий и мостов. В 2004 г. Патрик Шипман и Алан Ньюэлл применили теорию упругости к модели растущего побега, обращая при этом особое внимание на кактусы. Они смоделировали формирование примордия как деформацию поверхности кончика растущего побега и показали, что этот процесс порождает наложение рисунков параллельных волн. Эти схемы управляются двумя факторами: числом волн и их направлением. Важнейшие схемы образуются в результате взаимодействия трех волн, причем волновое число одной волны должно быть суммой волновых чисел двух других волн. Примером такой структуры могут служить спирали на ананасе с волновыми числами 5, 8 и 13. Их теория прослеживает числа Фибоначчи непосредственно до арифметики волновых процессов. На какой же биохимии все это основано? Формированием примордий управляет гормон растений под названием ауксин, и аналогичные волновые схемы возникают в распределении этого гормона. Таким образом, чтобы полностью объяснить числа Фибоначчи и золотой угол, нужно привлечь и биохимию, и механическое взаимодействие между клетками, и геометрию. Ауксин стимулирует рост примордий. Примордии оказывают механическое воздействие друг на друга, и эти механические силы создают соответствующую геометрию. Очень важно, что геометрия, в свою очередь, тоже влияет на биохимические процессы, поскольку запускает выработку дополнительного ауксина в конкретных местах. Так что возникает сложная система обратных связей между биохимией, механикой и геометрией.

$e \sim 2{,}718281$

Натуральные логарифмы

Следующее после π по-настоящему странное число, которое мы встречаем — обычно в дифференциальном или интегральном исчислении, — называется e, от слова «экспоненциальный». Первым его описал Якоб Бернулли в 1683 г. Это число возникает в задачах о сложном проценте, ведет к логарифмам и рассказывает нам о том, как изменяются во времени такие параметры, как температура, радиоактивность или численность населения. Эйлер связал это число с π и i.

Банковский процент

Занимая или вкладывая куда-то деньги, мы иногда получаем — или вынуждены платить — некий процент на сумму, о которой идет речь. К примеру, если мы кладем в банк 100 фунтов стерлингов под 10% годовых, то через год мы получаем обратно £110. Разумеется, в наши времена — времена финансового кризиса — 10% представляется нереалистично высоким процентом для депозита и в то же время нереалистично *низким* для займа, особенно для краткосрочного займа под 5853% в годовом исчислении*. Но как бы то ни было, это удобное число для иллюстративных целей.

Часто по кредиту взимаются так называемые *сложные проценты*. Это значит, что проценты сразу же добавляются к исходной сумме, и затем проценты начисляются уже на полную сумму. При ставке 10% с капитализацией (то есть с добавлением про-

* В Великобритании действительно есть компании, которые предлагают краткосрочные кредиты под такой процент. — *Прим. пер.*

центов к исходной сумме) на следующий год доход на наши £110 составит уже £11, хотя доход на первоначальную сумму на второй год составил бы все те же £10. Таким образом, через два года £100, положенные под 10% с капитализацией (то есть под сложные проценты), превратятся в £121. На третий год сложный процент на ту же сумму добавит к ней £12,10 (получим £133,10), на четвертый общая сумма составит £146,41.

Математическая константа, известная как *e*, возникает, если представить себе процентную ставку в 100%, так что через какой-то фиксированный промежуток времени (скажем, через сто лет) наши деньги удвоятся. На каждый вложенный фунт (или рубль) по истечении этого периода мы получим £2 (или рубля).

Предположим, что вместо 100% за столетие мы назначим ставку 50% за полстолетия (в два раза чаще) и введем капитализацию. Через полвека у нас будет (в рублях)

$$1 + 0{,}5 = 1{,}5.$$

Еще через полвека у нас будет

$$1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25.$$

Иными словами, получим мы в конечном итоге больше.

Если разбить столетие на три равных периода и разделить процентную ставку на 3, то наш рубль будет расти следующим образом (берем результаты до десяти знаков после запятой):

первоначально:	1;
после $\frac{1}{3}$ периода:	1,3333333333;
после $\frac{2}{3}$ периода:	1,7777777777;
после 1 периода:	2,3703703704.

Опять же, получается больше.

В приведенных числах имеется закономерность:

$$1 = \left(1\frac{1}{3}\right)^0$$

$$1{,}3333333333 = \left(1\frac{1}{3}\right)^1$$

$$1{,}7777777777 = \left(1\frac{1}{3}\right)^2$$

$$2{,}3703703704 = \left(1\frac{1}{3}\right)^3$$

Математиков интересовало, что происходит, если прикладывать процентную ставку практически непрерывно, то есть через все меньшие доли периода. Теперь закономерность проясняется: если мы делим период на n равных частей и устанавливаем процентную ставку $\frac{1}{n}$, то в конце периода мы должны получить

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Непрерывно начисляемый сложный процент соответствует тому, что n становится чрезвычайно большим. Попробуем провести кое-какие вычисления, опять же до десяти десятичных знаков:

N	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
2	2,2500000000
3	2,3703703704
4	2,4414062500
5	2,4883200000
10	2,5937424601
100	2,7048138294
1000	2,7169239322
10 000	2,7181459268
100 000	2,7182682372
1 000 000	2,7182816925
10 000 000	2,7182816925

Таблица 10

Чтобы увидеть закономерность, нам приходится брать очень большие величины n, но, судя по всему, в пределе, когда n становится очень большим, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ все ближе подходит к некоторому фиксированному числу, примерно равному 2,71828. На самом деле это так и есть, и математики определяют особое число, получившее название e, именно как эту ограничивающую величину:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где знак lim означает «пусть n становится бесконечно большим, а мы посмотрим, к какой величине сойдется выражение». До 100 десятичных знаков:

$$e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274.$$

Это еще одно из тех забавных чисел, у которых, как у числа π, десятичная запись продолжается до бесконечности, но при этом никакой блок цифр не повторяется раз за разом. Иными словами, e иррационально (см. главы $\sqrt{2}$, π). В отличие от π, доказать иррациональность e совсем несложно; Эйлер нашел доказательство в 1737 г., но семь лет не публиковал его.

В 1748 г. Эйлер вычислил первые 23 цифры числа e, а позже несколько других математиков улучшили его результат. К 2010 г. Сигеру Кондо и Александер И вычислили для e первый триллион десятичных знаков. Для этого они использовали мощный компьютер и улучшенную методику.

Натуральные логарифмы

В 1614 г. Джон Непер, восьмой лэрд Мерчистона (одной из частей шотландского Эдинбурга), написал книгу под названием «Описание чудесного логарифмического канона» (Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio). Судя по всему, слово «логарифм» Непер придумал сам, составив из двух греческих слов: logos — «пропорция» и arithmos — «число». Свою идею он представил следующим образом:

> «Поскольку в практике математического искусства, собратья-математики, нет ничего более утомительного, чем огромные задержки, которые приходится терпеть в ходе долгих рутинных действий — умножения и деления, поиска отношений и извлечения квадратных и кубических корней, — и многочисленные ошибки, которые могут при этом закрасться в ответ, то я размышлял упорно, посредством какого надежного и быстрого искусства я смог бы, возможно, разрешить указанные трудности. В конце концов, после длительных раздумий, я нашел поразительный способ сократить указанные действия… Представить этот метод математикам для общего пользования — приятная задача».

Непер из собственного опыта знал, что многие научные задачи, особенно в астрономии, требуют перемножения сложных чисел или нахождения квадратных и кубических корней. Во времена, когда не было даже электричества, не говоря уже о компьютерах, все вычисления приходилось делать вручную. Сложить два десятичных числа было несложно, но уже перемножить их было гораздо сложнее. Поэтому Непер придумал способ превратить умножение в сложение. Фокус был в том, чтобы вместо самих чисел работать со степенями некоего фиксированного числа.

В алгебре степени неизвестного x обозначаются небольшим надстрочным числом. Иными словами, $xx = x^2$, $xxx = x^3$, $xxxx = x^4$ и так далее; здесь, если мы пишем подряд две буквы, это означает, что соответствующие числа следует перемножить. К примеру, $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$, а $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$.

Перемножение двух подобных выражений — несложная операция. К примеру, если мы хотим найти $10^4 \times 10^3$, то нам следует записать:

$$10\,000 \times 1000 = (10 \times 10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) =$$
$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$$
$$= 10\,000\,000.$$

Число нулей в ответе равно 7, что равно 4 + 3. Первый шаг в расчете показывает, *почему* оно равно 4 + 3: мы склеиваем четыре десятки и три десятки в единое число. Таким образом,

$$10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7.$$

Аналогично, какой бы ни была величина x, если мы перемножим a-ю степень x и его же b-ю степень, где a и b — целые числа, то мы получим $(a + b)$-ю степень того же числа:

$$x^a x^b = x^{a+b}.$$

Эта запись интереснее, чем кажется на первый взгляд. Слева здесь стоит перемножение двух величин, а справа — главное действие: сложение a и b, что намного проще.

Возможность перемножать целые степени 10 — не бог весть какое достижение. Но ту же идею можно распространить на куда более полезные вычисления.

Предположим, что вы хотите умножить 1,484 на 1,683. Выполнив долгий расчет, мы находим ответ — 2,497572 — и округляем его до трех знаков после запятой: 2,498. Вместо этого мы можем воспользоваться формулой $x^a x^b = x^{a+b}$, предварительно выбрав подходящий x. Если взять $x = 1{,}001$, то после некоторых арифметических действий получим:

$$1{,}001^{395} = 1{,}484;$$
$$1{,}001^{521} = 1{,}683$$

с точностью до трех знаков после запятой. Затем, согласно формуле, получаем, что

$$1{,}484 \times 1{,}683 = 1{,}001^{395+521} = 1{,}001^{916},$$

что, с точностью до трех знаков после запятой, равно 2,498. Неплохо!

Основа расчета здесь — простое сложение: 395 + 521 = 916. Однако на первый взгляд этот метод только усложняет задачу. Чтобы найти $1{,}001^{395}$, вам придется умножить число 1,001 на само себя 394 раза, это же относится и к остальным двум степеням. Так что идея представляется бесполезной. Непера же осенило, что это возражение, в общем-то, беспочвенно. Для того чтобы обойти это препятствие, кому-то необходимо заранее проделать очень объемную и утомительную работу — рассчитать множество степеней 1,001, начиная с $1{,}001^2$ и заканчивая не менее чем $1{,}001^{10\,000}$. Стоит опубликовать таблицу этих степеней — и все самое сложное позади. Вам просто придется провести пальцем по колонке цифр и найти среди них строку 395 и число 1,484; аналогично в строке 521 вы найдете число 1,683. Затем вы сложите эти два числа и получите 916, а соответствующая строка таблицы сообщит вам, что 1,001 в этой степени равно 2,498. Дело сделано.

В контексте этого примера можно сказать, что показатель степени 395 — это логарифм числа 1,484, а 521 — логарифм числа 1,683. Аналогично, 916 есть логарифм их произведения 2,498. Обозначив логарифм сокращением log, получим для этого примера уравнение

$$\log ab = \log a + \log b,$$

верное для любых a и b. Выбранное достаточно произвольно число 1,001 называется *основанием* логарифма. Если использовать другое основание, вычисляемые логарифмы тоже будут другими, но для любого фиксированного основания все работает совершенно одинаково.

Доработка Бриггса

Примерно такой метод следовало предложить Неперу, но по каким-то причинам он поступил немного иначе и предложил менее удобный метод. Математик Генри Бриггс был очарован методом Непера, однако, будучи типичным математиком, сразу же — не успели еще чернила высохнуть — начал искать способ все упростить. И оказалось, что такой способ действительно существует. Первым делом он переписал идею Непера так, что она стала работать описанным выше способом. Далее он заметил, что использование степеней числа вроде 1,001 сводится к использованию степеней (приближения к) того самого особого числа *e*.

1000-я степень $1{,}001^{1000}$ равняется $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$, а это, по определению *e*, должно быть близко к *e*. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить $n = 1000$ в формулу $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Таким образом, вместо

$$1{,}001^{395} = 1{,}484$$

мы могли бы написать

$$\left(1{,}001^{1000}\right)^{0{,}395} = 1{,}484.$$

Далее $1{,}001^{1000}$ очень близко к *e*, поэтому в разумном приближении

$$e^{0{,}395} = 1{,}484.$$

Чтобы получить более точные результаты, мы используем степени числа, намного более близкого к единице, такого как 1,000001. Надо отметить, что $1{,}000001^{1\,000\,000}$ еще ближе к *e*. Это сильно увеличивает объем таблицы, в которой теперь должно быть порядка миллиона степеней. Составление такой таблицы — громадный труд, но сделать это необходимо *всего лишь один раз*. Усилий одного человека достаточно, чтобы избавить следующие поколения от гигантского количества арифметических расчетов. Да и умножать число на 1,000001 не слишком уж сложно. Нужно только скрупулезно следить за точностью расчетов и не пропустить ошибок.

В результате этого варианта усовершенствования Бриггса был определен *натуральный логарифм* числа — степень, в которую нужно возвести e, чтобы получить это число. Другими словами,

$$e^{\ln x} = x$$

для любого x. Вспомним, что

$$\log xy = \log x + \log y,$$

и таблица натуральных логарифмов, однажды составленная, сводит любую задачу на умножение к задаче на сложение.

Однако эта идея упрощает практические расчеты, если заменить e на 10, так чтобы $10^{\log x} = x$. Здесь используется *логарифм по основанию 10,* записываемый $\log_{10}x$. Ключевой момент здесь — то, что $\log_{10}10 = 1$, $\log_{10}100 = 2$ и так далее. Если вы знаете логарифмы по основанию 10 чисел от 1 до 10, все остальные логарифмы с легкостью находятся.

К примеру,

$$\log_{10}2 = 0{,}3010;$$
$$\log_{10}20 = 1{,}3010;$$
$$\log_{10}200 = 2{,}3010$$

и так далее.

С логарифмами по основанию 10 проще производить практические расчеты, потому что мы пользуемся десятичной системой счисления. Но в высшей математике число 10 не обладает никакими особыми свойствами. Мы могли бы выбрать для своей системы счисления любое другое основание. Оказывается, натуральные логарифмы Бриггса — логарифмы по основанию e — более фундаментальны в высшей математике.

Среди многочисленных свойств числа e я упомяну лишь одно. Это свойство проявляется в аппроксимации факториала по Стирлингу, очень полезной при больших значениях n:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Экспоненциальный рост и падение

Число e то и дело мелькает в физике, поскольку является базовым для любого природного процесса, в котором скорость роста (или падения) некой величины в любой заданный момент времени пропорциональна самой этой величине в этот момент. Если обозначить x' скорость изменения величины x, то такой процесс описывается дифференциальным уравнением

$$x' = kx,$$

для постоянной k. Из курса математического анализа мы знаем, что решение этого уравнения

$$x = x_0 e^{kt}$$

в момент времени t; x_0 — здесь начальное значение x в момент времени $t = 0$.

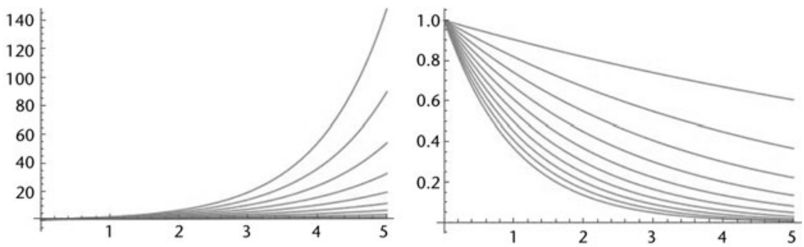


Рис. 107. Слева: экспоненциальный рост e^{-kt} для $k = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 1$. Справа: экспоненциальное падение e^{-kt} для $k = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 1$

Экспоненциальный рост

Если k положительно, $x_0 e^{kt}$ с ходом времени растет все быстрее и быстрее. Это *экспоненциальный рост*.

К примеру, x может быть численностью популяции каких-то животных. Если их пищевые ресурсы и территория ничем не ограничены, популяция растет со скоростью, пропорциональной ее численности, и к ней применима экспоненциальная модель. Со временем размер популяции становится нереалистично большим. На практике пища, или территория, или еще какой-то ресурс начинают истощаться, ограничивая численность популяции, и следует использовать более сложные модели. Но эта простая модель полезна тем, что наглядно демонстрирует полную нереалистичность неограниченного роста с постоянной скоростью.

Численность населения Земли на протяжении большей части письменной истории человечества росла примерно экспоненциально, но сейчас многое свидетельствует о том, что начиная примерно с 1980 г. этот рост замедлился. Если это не так, мы в большой беде. Прогнозы на будущее предполагают, что эта тенденция сохранится, но даже в этом случае существует значительная неопределенность. По оценкам ООН, к 2100 г. население Земли составит от 6 (меньше, чем нынешнее население, составляющее немногим меньше 7 млрд) до 16 млрд (более чем вдвое больше нынешнего) человек.

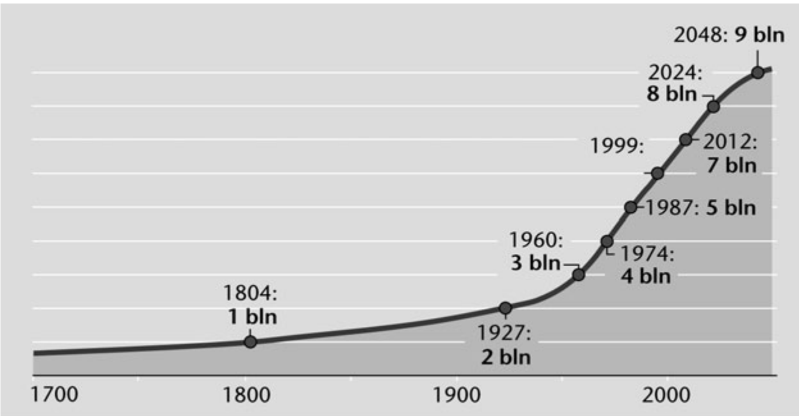


Рис. 108. Рост населения Земли

Экспоненциальное падение

Если k отрицательно, x_0e^{kt} с течением времени падает все быстрее и быстрее: это *экспоненциальное падение*.

В качестве примеров можно привести остывание нагретого тела и радиоактивный распад. Радиоактивные элементы превращаются в другие элементы посредством ядерных процессов, испуская при этом элементарные частицы в виде излучения. Уровень радиоактивности со временем падает экспоненциально. Это значит, что уровень радиоактивности $x(t)$ в момент времени t следует уравнению

$$x(t) = x_0 e^{-kt},$$

где x_0 — это начальный уровень радиации, а k — положительная константа, разная для разных элементов.

Удобной мерой времени для радиоактивных процессов оказывается *период полураспада*, концепция которого была впервые предложена в 1907 г. Это время, за которое первоначальный уровень радиоактивности x_0 падает до половины своего значения. Предположим, что период полураспада составляет одну неделю. Тогда первоначальная скорость распада, от которой зависит излучение вещества, падает за одну неделю вдвое, за две недели вчетверо, за три недели в 8 раз и так далее. За 10 недель излучение упадет в тысячу раз (строго говоря, в 1024 раза), а через двадцать недель составит всего лишь одну миллионную от первоначального уровня.

Чтобы вычислить период полураспада, необходимо решить уравнение

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kt},$$

взяв логарифмы от обеих его частей. В результате получим

$$t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,6931}{k},$$

где постоянная k известна из экспериментов.

При авариях на современных ядерных реакторах наибольшее внимание уделяется радиоактивным продуктам йод-131 и цезий-137. Первый может вызвать рак щитовидной железы, поскольку именно здесь в организме накапливается больше всего йода. Период полураспада йода — всего восемь суток, так что этот элемент не вызывает сильного поражения, если под рукой имеются нужные медикаменты (в основном йод в таблетках). Период полураспада цезия-137 — 30 лет, так что уровень его активности упадет в сто раз примерно через 200 лет. Поэтому опасность, связанная с этим элементом, сохраняется очень долго, если его не собрать и не утилизировать.

Связь между e и π (формула Эйлера)

В 1748 г. Эйлер открыл замечательную связь между e и π; полученную им формулу часто называют самой красивой формулой математики. В ней также фигурирует мнимое число i. Выглядит эта формула так:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Объяснить ее можно при помощи удивительной связи между комплексной экспонентой и тригонометрическими функциями

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

которую проще всего установить, если воспользоваться методами дифференциального исчисления. Здесь угол θ измеряется в радианах — единице, для которой полный оборот в 360° равен 2π радиан — длине окружности единичного радиуса. Измерение углов в радианах стандартно в математике, поскольку упрощает все формулы. Чтобы вывести формулу Эйлера, положим $\theta = \pi$. Тогда $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, так что

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \times 0 = -1.$$

Альтернативное доказательство, использующее теорию дифференциальных уравнений, прослеживает уравнение до геометрии комплексной плоскости и объясняет попутно (в этом его преимущество), каким образом π попадает в общую картину. Приведем краткое изложение идеи. Уравнение Эйлера работает потому, что умножение комплексных чисел на i поворачивает комплексную плоскость на 90°.

В радианах, которые математики используют для теоретических исследований — в основном потому, что это упрощает многие формулы в анализе, — угол определяется длиной соответствующей дуги единичной окружности. Поскольку половина такой окружности имеет длину π, угол 90° соответствует $\frac{\pi}{2}$ радиан. При помощи дифференциальных уравнений можно показать, что для любого действительного числа x умножение на комплексное число e^{ix} поворачивает комплексную плоскость на x радиан. В частности, умножение на $e^{i\frac{\pi}{2}}$ поворачивает ее на 90°. Но мы знаем, что именно такое действие производит умножение на i. Таким образом,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим формулу Эйлера.

$$\frac{\log 3}{\log 2} \sim 1{,}584962$$

Фракталы

Это занятное число, как и $\frac{466}{885}$, относится к основным свойствам салфетки Серпинского. Но это число определяет, насколько извилистой, или шероховатой, будет знаменитая необычная кривая Серпинского. Подобные вопросы возникают в первую очередь во фрактальной геометрии — такое название получил новый способ моделировать сложные природные формы, в котором это число обобщает концепцию размерности. Один из самых известных фракталов — множество Мандельброта — представляет собой бесконечно сложную фигуру, определяемую очень простым процессом.

Фракталы

Салфетка Серпинского (см. главу $\frac{466}{885}$) — всего лишь один из представителей целого зоопарка примеров, рожденных в начале XX в. и получивших в то время отдающее негативом название «патологических кривых». К ним относятся кривая в форме снежинки Хельге фон Коха и кривые Джузеппе Пеано и Давида Гильберта, заполняющие собой все пространство.

В то время подобные кривые были, можно сказать, вынужденной мерой: контрпримерами к более или менее правдоподобным на первый взгляд, но ложным на самом деле математическим утверждениям. Кривая в форме снежинки непрерывна, но нигде не дифференцируема; это значит, что на ней нет разрывов, зато имеется перелом в каждой точке. При бесконечной длине она ограничивает конечную площадь. Кривые, заполняющие пространство, не просто создают очень плотную сетку: они на самом деле полностью заполняют все пространство. Если построение проводится бесконечно долго, получившаяся в результате кривая проходит через *каждую точку* внутри квадрата.

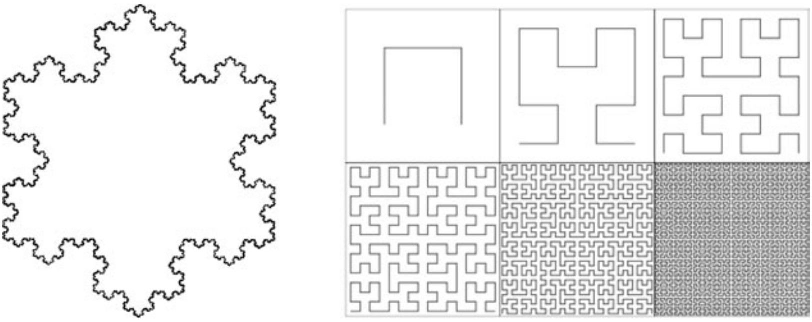


Рис. 109. Слева: кривая в форме снежинки. Справа: последовательные этапы построения гильбертовой кривой, заполняющей собой пространство

Самые консервативные математики высмеивали подобные кривые как интеллектуально бесплодные. Одним из немногих ведущих математиков того времени, понявших, что эти кривые могут оказаться весьма полезными и помочь в превращении математики в строгую науку и освещении ее логической основы, оказался Гильберт. Он с энтузиазмом поддержал тех, кто готов был принимать всерьез причудливые свойства этих фигур.

Сегодня мы видим эти кривые в более позитивном свете: это были первые шаги к новой области математики — *фрактальной геометрии*, начало которой положил Мандельброт в 1970-е гг. Патологические кривые были придуманы в чисто математических целях, но Мандельброт понял, что подобные фигуры могут пролить свет на неправильности, часто наблюдаемые в природе. Он указал на то, что треугольники, квадраты, окружности, конусы, сферы и другие традиционные фигуры евклидовой геометрии не имеют тонкой структуры. Сильно увеличенная окружность выглядит как прямая линия, не имеющая никаких нарушений и особенностей. Однако в природе многие формы имеют замысловатую структуру даже в самых мелких масштабах. Мандельброт писал: «Облака — не сферы, горы — не конусы, береговая линия идет не по окружности, а кора у дерева не гладкая, да и молния проходит не по прямой». Разумеется, все это знали и до него, но Мандельброт первым понял значительность этого наблюдения.

Он не утверждал, что евклидовы фигуры бесполезны. В физике они играют видную роль. Так, форму планет можно приближенно считать сферической, и для астрономов такая аппроксимация когда-то была очень полезной. Можно получить приближение и получше, если сплющить сферу в эллипсоид, который тоже является простой евклидовой фигурой. Но для некоторых целей простые фигуры не слишком подходят. Ветви деревьев уменьшаются к вершине, облака представляют собой размытые кляксы, горы изрезаны складками, а береговая линия бывает весьма извилистой. Математическое понимание этих форм и решение связанных с ними физических задач требуют нового подхода.

Размышляя о береговых линиях, Мандельброт понял, что на любой карте, независимо от ее масштаба, береговая линия выглядит примерно одинаково. Крупная карта показывает больше деталей и извивов, но результат выглядит примерно так же, как на мелкомасштабной карте. Точная форма побережья меняется, но его «текстура» остается схожей. Более того, большая часть статистических черт береговой линии (таких, например, как доля бухт заданного относительного размера в общем числе бухт) остаются прежними, какого бы масштаба карту вы ни взяли.

Мандельброт ввел слово «фрактал» для обозначения любой фигуры, обладающей сложной структурой при любом, сколь угодно крупном, увеличении. Если структура при большом увеличении выглядит так же, как и при малом, говорят, что фрактал *самоподобен*. Если масштабируются, не изменяясь, только статистические свойства, фрактал *статистически самоподобен*. Простейшие для понимания фракталы самоподобны. Пример такого фрактала — салфетка Серпинского (см. главу $\frac{466}{885}$), для построения которой используются три ее копии половинного размера.

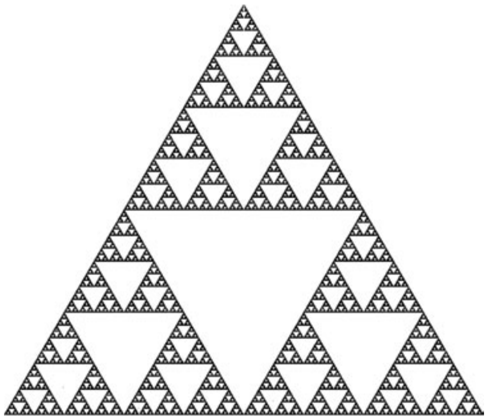


Рис. 110. Салфетка Серпинского

Еще один пример — кривая-снежинка. Ее можно собрать из трех копий кривой, показанной в правой части рис. 111. Этот компонент (хотя и не вся снежинка) в точности самоподобен. На каждом последующем этапе построения берутся четыре копии предыдущего этапа, уменьшенные втрое. В пределе мы получаем бесконечно сложную кривую, построенную из четырех копий самой себя, уменьшенных втрое.

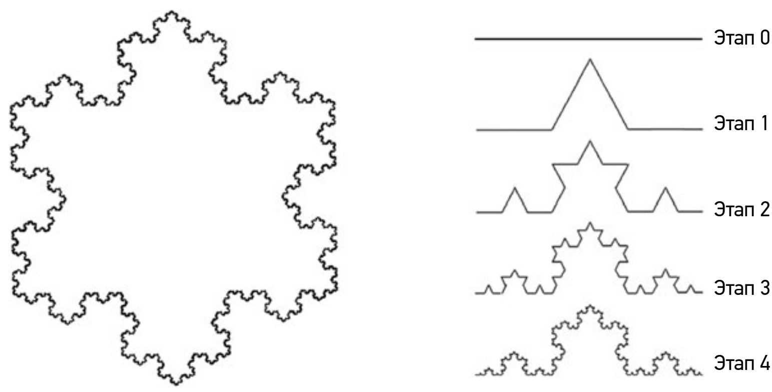


Рис. 111. Кривая-снежинка и последовательные этапы ее построения

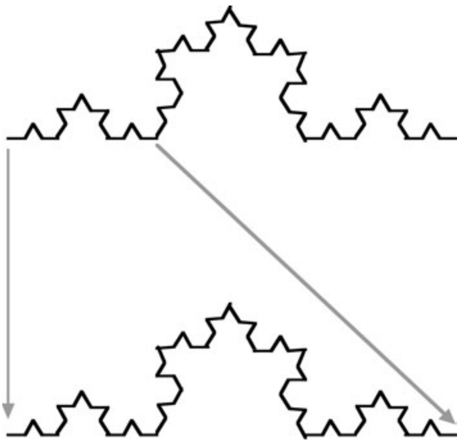


Рис. 112. Каждая четверть снежинки при увеличении втрое выглядит в точности так же, как оригинальная кривая

Эта кривая имеет слишком правильную форму, чтобы представлять реальную береговую линию, но степень извилистости у нее подходящая, а нерегулярные кривые, построенные по тем же принципам, но со случайными вариациями, выглядят очень похожими на настоящее побережье.

Фракталы широко распространены в природе. Точнее говоря, там часто встречаются формы, которые можно с пользой *моделировать* при помощи фракталов. Вообще, в реальном мире нет математических объектов; эти объекты — всего лишь концепции. Цветная капуста, известная как брокколи Романеско (то есть римская), состоит из крохотных соцветий, каждое из которых имеет ту же форму, что и капуста в целом. Прикладное значение фракталов чрезвычайно велико: они используются в самых разных областях — от тонкой структуры минералов до распределения вещества во Вселенной. Фракталы используются при проектировании антенн в мобильных телефонах, обеспечивают запись громадного количества данных на CD- и DVD-диски, помогают распознавать раковые клетки. Постоянно появляются новые области их применения.

Рис. 113. Капуста брокколи

Фрактальная размерность

Насколько извилист фрактал или насколько эффективно он заполняет пространство, можно оценить при помощи числа, получившего название фрактальной размерности. Чтобы понять, что это такое, рассмотрим сначала некоторые более простые нефрактальные фигуры.

Если мы разобьем отрезок на равные части по $\frac{1}{5}$ его длины каждый, то для восстановления отрезка в целом виде нам потребуется пять таких частей. Если проделать аналогичную операцию с квадратом, то для сборки начальной фигуры потребуется 25, то есть 5^2, кусочков. Для куба потребуется уже 125, то есть 5^3, кусочков.

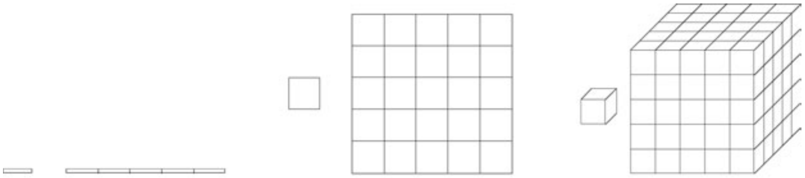


Рис. 114. Эффект масштабирования на «кубиках» в 1, 2 и 3 измерениях

Степень, в которую возводится 5 в этой ситуации, равна размерности фигуры: для отрезка это 1, для квадрата — 2 и для куба — 3. Если размерность фигуры равна d, а для сборки начальной фигуры нам нужно сложить вместе k кусочков размера $\frac{1}{n}$, то $k = n^d$. Взяв логарифм обеих частей (см. главу e) и решив уравнение относительно d, получаем формулу

$$d = \frac{\log k}{\log n}.$$

Проверим эту формулу на салфетке Серпинского. Чтобы собрать салфетку из меньших ее копий, нам нужно $k = 3$ кусочка половинного размера. Таким образом, $n = 2$, и по формуле получаем

$$d = \frac{\log 3}{\log 2},$$

что приблизительно равно 1,5849. Таким образом, размерность салфетки Серпинского в данном конкретном смысле *не является целым числом*.

Традиционно, думая о размерности, мы представляем себе число имеющихся в нашем распоряжении независимых направлений; естественно, это число должно быть целым. Но, когда речь заходит о фракталах, мы пытаемся измерить их нерегулярность и сложность или оценить, насколько хорошо они заполняют окружающее пространство, а не определить количество их направлений. На глаз видно, что салфетка плотнее чистой линии, но не такая плотная, как заполненный квадрат. Поэтому величина, которая нам нужна, должна располагаться где-то между 1 (размерность прямой) и 2 (размерность квадрата). В частности, она *не может* быть целым числом.

Точно так же мы можем найти фрактальную размерность снежинки Коха. Как и раньше, нам проще будет работать с одной третьей частью снежинки — одним из ее одинаковых «ребер», потому что эта ее деталь полностью самоподобна. Чтобы собрать одно ребро снежинки Коха из меньших копий этого же ребра, нам потребуется $k = 4$ кусочка втрое меньшего размера, то есть $n = 3$. По формуле получаем

$$d = \frac{\log 4}{\log 3},$$

что приблизительно равно 1,2618. Опять же, фрактальная размерность фигуры не является целым числом, и это логично. Очевидно, что снежинка Коха более извилиста, чем прямая линия, но заполняет пространство хуже, чем заполненный квадрат. Нужная нам величина должна находиться где-то между 1 и 2, так что 1,2618 выглядит вполне разумно. Кривая размерности 1,2618 более извилиста, чем кривая размерности 1 (например, прямая), но менее извилиста, чем кривая размерности 1,5849 (к примеру, салфетка). Фрактальная размерность большинства реальных береговых линий близка к 1,25 — они больше похожи на контур снежинки, чем на салфетку. Так что фрактальная размерность хорошо согласуется с интуитивным пониманием того, какой из фракталов лучше заполняет пространство.

Кроме того, она дает экспериментаторам количественный способ проверки теорий, основанных на фракталах. К примеру, копоть, или нагар, имеет фрактальную размерность около 1,8, так что фрактальные модели нагарообразования (а их множество) можно проверять по их фрактальной размерности.

Существует много разных способов определить размерность фрактала, если он не самоподобен. Математики используют *размерность Хаусдорфа–Безиковича*, которая определяется довольно сложно. Физики часто пользуются более простым определением — так называемой *кубической размерностью*. Во многих случаях, хотя и не всегда, эти два представления о размерности совпадают. В этом случае мы используем термин «*фрактальная размерность*» для обозначения любой из них. Первые фракталы представляли собой ломаные, но среди них могут быть поверхности, объемные фигуры или фигуры более высоких размерностей. А фрактальная размерность помогает измерить, насколько *шероховатый* у нас фрактал или насколько эффективно он заполняет пространство.

Оба названных варианта фрактальной размерности иррациональны. Предположим, что $\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{p}{q}$, где p и q целые. Тогда $q \log 3 =$ $= p \log 2$; следовательно, $\log 3^q = \log 2^p$; следовательно, $3^q = 2^p$.

Но это противоречит единственности разложения на простые множители. Аналогичный аргумент можно привести для $\frac{\log 4}{\log 3}$. Обратите внимание на то, как базовые понятия, вроде этого, вдруг всплывают в неожиданных местах. Замечательно, не правда ли?

Множество Мандельброта

Самый известный, возможно, среди фракталов — множество Мандельброта. Он показывает, что происходит с комплексным числом, если его раз за разом возводить в квадрат и добавлять как константу. Иными словами, берете комплексную константу c, затем образуете из нее $c^2 + c$, затем $(c^2 + c)^2 + c$, затем $((c^2 + c)^2 + c)^2 + c$ и так далее. (Существуют и другие способы определить это множество, но этот — простейший.) Геометрически комплексные числа обитают на плоскости, расширяя обычную числовую прямую, на которой располагаются действительные числа. Есть два основных варианта: либо все комплексные числа в приведенной последовательности остаются в пределах некой конечной области, либо такой области нет. Обозначим те c, для которых последовательность остается в пределах конечной области, черным цветом, а те c, для которых она уходит в бесконечность, белым. Тогда множество всех черных точек и будет множеством Мандельброта. Выглядит оно следующим образом.

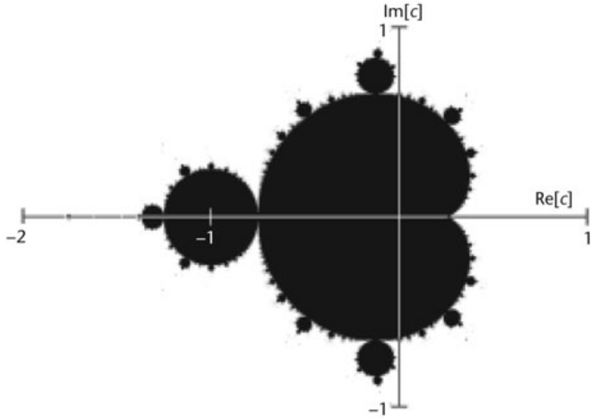


Рис. 115. Множество Мандельброта

Граница множества Мандельброта — точки на грани, сколь угодно близкие одновременно к черным и белым точкам — представляет собой фрактал. Его фрактальная размерность оказывается равной 2, то есть это «почти заполняющее пространство» множество. Чтобы разглядеть более тонкие детали, мы можем раскрасить белые точки разными оттенками, в зависимости от того, как быстро последовательность стремится в бесконечность. В этом случае мы получаем удивительно замысловатые рисунки, полные причудливых завитушек, спиралей и других фигур. Увеличение картины ведет лишь к новой, еще более высокой детализации. В подходящих местах можно найти даже крохотные новые отпрыски множества Мандельброта.

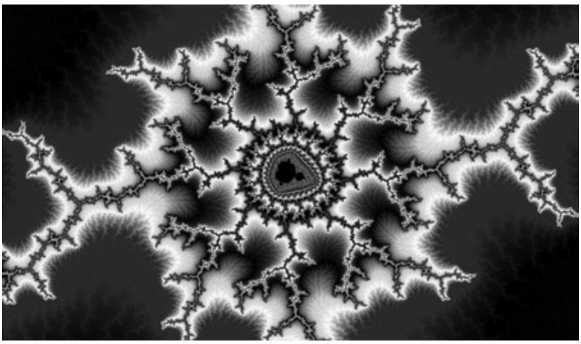


Рис. 116. Отпрыск множества Мандельброта в родительском множестве

Само по себе множество Мандельброта не имеет никаких важных приложений, но это одна из простейших нелинейных динамических систем, основанных на комплексных числах, поэтому это множество привлекает к себе значительное внимание математиков, занятых поисками общих принципов, которые могли бы найти более широкое применение. Кроме того, оно демонстрирует ключевой «философский» момент: простые правила могут привести к сложным результатам, то есть простые причины могут вызвать сложные последствия. При исследовании очень сложных систем кажется естественным ожидать, что правила, на которых основаны эти системы, окажутся не менее сложными. Множество Мандельброта доказывает, что подобные ожидания вполне могут оказаться ошибочными. На этом принципе строится вся «наука о сложности» — новая область, которая пытается разобраться в сложных на первый взгляд системах, обнаружив более простые правила, которые ими управляют.

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \sim 0{,}740480$$

Упаковка шариков

Число $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$ имеет фундаментальное значение в математике, физике и химии. Это доля пространства, которая оказывается заполненной при упаковке одинаковых шариков наиболее эффективным способом, то есть так, чтобы незаполненным осталось как можно меньшее пространство. Кеплер предположил такой результат в 1611 г., но его гипотеза оставалась недоказанной до 1998 г., когда Томас Хейлз сумел доказать это утверждение при помощи компьютера. Доказательство, которое человек мог бы проверить без использования компьютера, не найдено до сих пор.

Упаковка кругов

Мы начнем с более простого вопроса об упаковке одинаковых кружков на плоскости. Поэкспериментировав с несколькими десятками монет одинакового достоинства, попереставляя их с места на место, стараясь вместить на одну и ту же площадь как можно больше, вы без труда обнаружите, что при случайном расположении монет свободного места остается очень много. Если вы попытаетесь избавиться от лишнего свободного пространства, сдвигая монеты плотнее, то увидите, что плотнее (а значит, эффективнее) они встанут тогда, когда образуют структуру вроде пчелиных сот.

Однако можно предположить, что при каком-то другом, хитроумном расположении монеты уложатся еще плотнее. Это представляется маловероятным, но это мнение — еще не доказательство. Способов расположить на плоскости одинаковые монеты бесконечно много, так что ни одному экспериментатору не удастся перепробовать их все.

Сотовая структура очень регулярна и симметрична, в отличие от случайного расположения. Кроме того, она *жесткая*: в ней невозможно сдвинуть хотя бы одну монету с места, поскольку остальные монеты удерживают ее в фиксированном положении. На первый взгляд, жесткое расположение монет должно заполнять пространство более эффективно, потому что не оставляет возможности изменить одну раскладку на другую, двигая монеты по очереди.

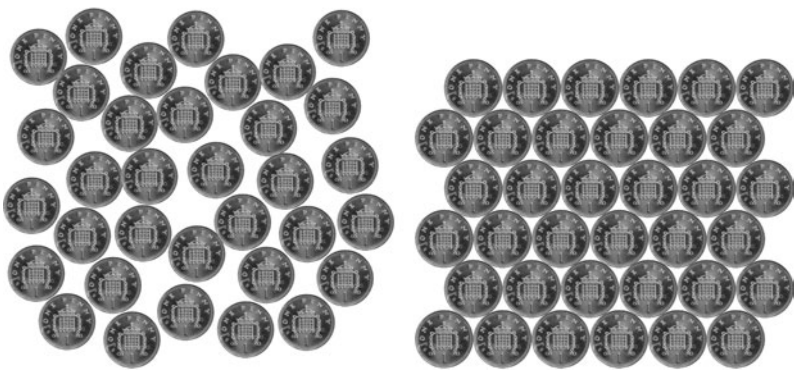


Рис. 117. Слева: случайное расположение монет оставляет много свободного места. Справа: при сотовой структуре большинство промежутков исчезает

Однако существуют другие жесткие раскладки, которые при всем при том менее эффективны. Рассмотрим для начала два очевидных способа упаковать кружки на плоскости регулярным способом:

- сотовая, или шестиугольная, решетка; ее название объясняется тем, что центры кружков образуют шестиугольники;
- квадратная решетка, где кружки организованы как квадраты на шахматной доске.

Рис. 118. Слева: шесть центров образуют правильный шестиугольник. Справа: упаковка по квадратной решетке

Квадратная решетка также является жесткой, но кружки в ней пакуются менее эффективно. Если площадь, занимаемая решеткой, очень велика, то шестиугольная решетка занимает меньше места, нежели квадратная.

Чтобы уточнить и конкретизировать подобные рассуждения, математики определили *плотность* упаковки кружков как долю от заданной плоскости, занятую кружками, в пределе, когда задействованная область становится бесконечно большой. Условно говоря, идея в том, чтобы покрыть кружками *всю плоскость* и определить, какую долю поверхности они при этом займут. При буквальном подходе это отношение равно $\frac{\infty}{\infty}$, что лишено смысла, поэтому мы заполняем кружками все более крупные квадраты и берем предел.

Рассчитаем плотность упаковки по квадратной решетке. Если площадь каждого квадратика равна единице, то радиус кружков составляет $\frac{1}{2}$, а площадь каждого кружка равна $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$. Для большого числа квадратов и кругов отношение площадей не меняется, поэтому в пределе мы получаем плотность $\frac{\pi}{4}$, что приблизительно равно 0,785.

Более сложные вычисления для гексагональной (шестиугольной) решетки дают плотность $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, то есть приблизительно 0,906. Это *больше* плотности квадратной решетки.

В 1773 г. Лагранж доказал, что гексагональная решетка дает наиболее плотную *регулярную* упаковку кружков на плоскости. Но вопрос о том, не может ли какая-нибудь менее регулярная схема упаковки дать лучший результат, оставался открытым. Математикам потребовалось более 150 лет, чтобы исключить эту не слишком вероятную возможность. В 1892 г. Аксель Туэ прочел лекцию, в которой привел набросок доказательства того, что никакая упаковка кругов на плоскости не может быть плотнее гексагональной решетки, но опубликованные подробности лекции слишком неопределенны, чтобы понять, каким должно было быть предложенное доказательство, и тем более определить, было ли оно верным. В 1910 г. он предложил новое доказательство, но и в нем были кое-какие логические пробелы. Первое полное доказательство опубликовал в 1940 г. Ласло Фейш Тот, а вскоре после этого Беньямино Сегре и Курт Малер нашли собственные альтернативные варианты. В 2010 г. Чан Хайчау и Ван Личун разместили в Интернете более простое доказательство.

Гипотеза Кеплера

Гипотеза Кеплера посвящена аналогичной проблеме — упаковке одинаковых шариков в пространстве. Эту гипотезу выдвинул в начале XVII в. великий математик и астроном Кеплер в книге о снежинках.

Кеплер заинтересовался снежинками, потому что они часто обладают шестилучевой симметрией: одни и те же формы в них почти точно повторяются шесть раз и повернуты друг относительно друга на один и тот же угол 60°. Он заинтересовался причиной этого явления и, воспользовавшись логикой, воображением и знанием аналогичных структур в природе, дал объяснение, замечательно близкое к нашим сегодняшним представлениям.

Кеплер был придворным математиком императора Священной Римской империи Рудольфа II, а его работу спонсировал Иоганн Вакер фон Вакенфельс, богатый дипломат и один из советников императора. В 1611 г. Кеплер преподнес своему покровителю новогодний подарок — книгу «О шестиугольных снежинках»*. В книге Кеплер начал с вопроса о том, почему снежинки шестиугольны, рассказав о природных формах, также обладающих шестилучевой симметрией (таких как пчелиные соты и зернышки в гранате). Мы только что видели, как упаковка кружков на плоскости естественным образом приводит к структуре, напоминающей соты. Кеплер объяснил симметричную форму снежинок через упаковку шариков в пространстве.

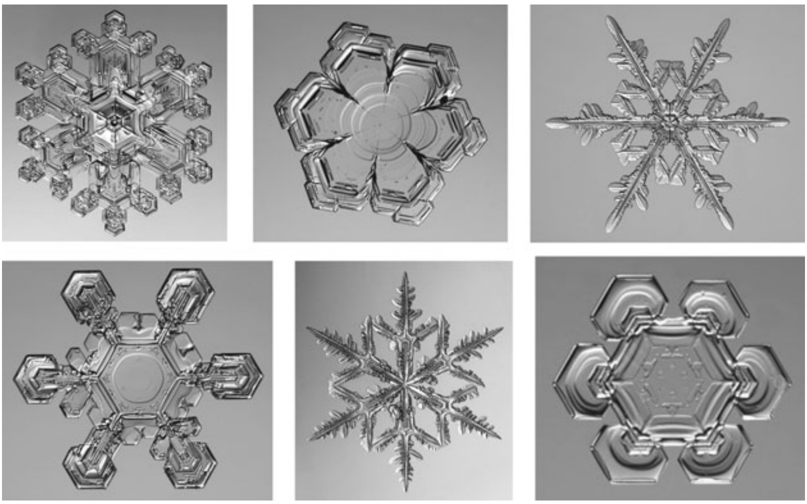


Рис. 119. На этих фотографиях — реальные снежные кристаллы, упавшие на землю в Северном Онтарио, на Аляске, в Вермонте, на полуострове Верхний в Мичигане и в горах Сьерра-Невада в Калифорнии. Фото сделал Кеннет Либбрехт при помощи специально разработанного для съемки снежинок фотомикроскопа

Он подошел поразительно близко к современному объяснению: снежинка — это кристалл льда, атомная структура которого очень схожа со структурой пчелиных сот. В частности, этот кристалл обладает шестилучевой симметрией (строго говоря, не только шестилучевой). Разнообразие форм

* Кеплер И. О шестиугольных снежинках. — М.: Наука, 1982.

снежинок при неизменности общей структуры объясняется меняющимися условиями в снеговых тучах, где снежинки вырастают.

По пути Кеплер высказал одно довольно небрежное замечание и породил математическую головоломку, на решение которой ушло 387 лет. Как наиболее эффективно упаковать одинаковые шарики в пространстве? Он предположил, что сделать это можно в соответствии с тем, что мы сегодня называем гранецентрированной кубической решеткой (ГЦК).

Именно так продавцы обычно складывают пирамиды из апельсинов, яблок и других округлых фруктов. Для этого сначала нужно выложить слой шаров, организованных в квадратную решетку (рис. 120, слева). Затем выкладываем аналогичный уровень выше, помещая каждый шар в выемку между четырьмя соседними шарами нижнего ряда. И продолжаем в том же духе, пока не заполним все пространство. Вообще говоря, для этого нужно продолжить каждый уровень в стороны до бесконечности, а также разместить слои не только поверх нижнего слоя, но и под ним. Плотность такой упаковки можно вычислить, она равна $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \sim 0{,}740480$. Согласно Кеплеру, такая упаковка должна быть «самой плотной», то есть иметь максимально возможную плотность.

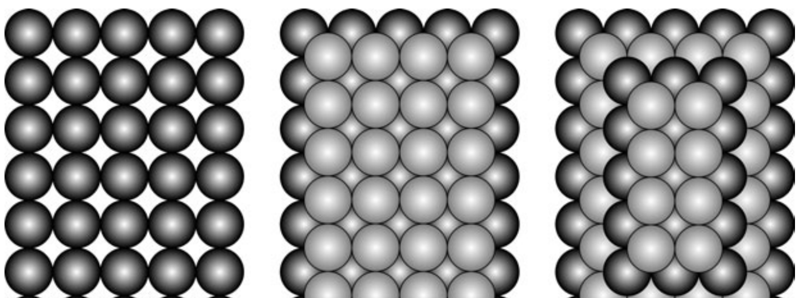


Рис. 120. ГЦК-решетка. Слева: первый слой. По центру: первые два слоя. Справа: первые четыре слоя

Продавцы фруктов начинают с ящика или столешницы и поднимают пирамиду слой за слоем. Это один из способов построить ГЦК-решетку. Но в задаче Кеплера спрашивается обо всех возможных упаковках, поэтому мы не можем заранее считать, что все шары укладываются в плоские слои. Получается, что метод продавца фруктов решает другую задачу. Вопрос в том, меняется ли от этого ответ?

На первый взгляд, упаковка «по-рыночному» кажется *неверным* ответом, потому что в слоях используется квадратная решетка, а мы знаем, что шестиугольная решетка плотнее. К тому же понятно, что продавцы выкладывают апельсины по квадратной решетке не потому, что добиваются наиболее плотной упаковки, а потому, что пользуются прямоугольными ящиками. Так не лучше ли было бы первый слой выложить по шестиугольной решетке? При этом следующие слои, тоже шестиугольные, так же лягут в углубления предыдущего слоя.

Кеплер понял, что между этими способами нет никакой разницы. Дело в том, что боковой срез пирамиды на рисунке справа образует шестиугольную решетку. Слои, параллельные боковому срезу, также представляют собой шестиугольные решетки, а плоды в них попадают во впадины точно таких же соседних слоев. Так что альтернативная укладка с шестиугольными слоями — это всего лишь наклонный вариант ГЦК-решетки.

Однако эти два варианта укладки позволяют нам нечто важное: *бесконечное число* различных укладок, почти все из которых *не являются* регулярными, имеют плотность, равную плотности ГЦК-решетки. Существует два разных способа наложить одну шестиугольную решетку на другую так, чтобы плоды одного слоя попали в углубления второго, и для каждого слоя бесконечной укладки мы можем выбрать любой из них. Если слоя всего два, то один вариант можно получить из другого простым поворотом, но уже при трех, а тем более при большем числе слоев это невозможно. Таким образом, для 3 слоев существует 2 по-настоящему разных варианта укладки, для

4 слоев их уже 4, для 5 слоев — 8 и так далее. Если заполняется все пространство, число вариантов бесконечно. Однако, какие бы варианты вы ни выбрали, все слои будут иметь одну и ту же плотность и одинаково плотно прилегать друг к другу. Так что для любой последовательности выбора плотность укладки одинакова и равна $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$. Существование бесконечного числа разных укладок одной и той же плотности — предупреждение о том, что в задаче Кеплера могут обнаружиться подводные камни.

Гипотеза Кеплера оставалась недоказанной до 1998 г., когда Томас Хейлз и его студент Сэмьюел Фергюсон завершили компьютерное доказательство. В 1999 г. Хейлз передал доказательство для публикации в престижный журнал *Annals of Mathematics*. На его проверку группе экспертов потребовалось четыре года, но расчеты оказались столь сложными и объемными, что ученые так и не смогли подтвердить их полную корректность. Через некоторое время доказательство было опубликовано, но с примечанием, в котором об этом говорилось.

Как ни забавно, способ обойти эту проблему, вероятно, заключается в том, чтобы переписать доказательство в такой форме, чтобы его корректность можно было проверить… при помощи компьютера. Смысл в том, что программа проверки, скорее всего, окажется проще доказательства, так что ее логику, возможно, удастся проверить вручную. Тогда мы сможем быть уверены в том, что эта программа делает ровно то, что утверждают ее создатели, — проверяет гораздо более сложное доказательство гипотезы Кеплера.

Следите за новостями.

$\sqrt[12]{2} \sim 1{,}059463$

Музыкальный строй

Корень двенадцатой степени из 2 — это отношение частот последовательных нот в равномерно темперированном музыкальном строе. Это компромисс — примерно такой же, как аппроксимация числа π дробью $\frac{22}{7}$, но на этот раз естественные музыкальные интервалы представляют собой несложные рациональные числа, а степени числа $\sqrt[12]{2}$ — это их иррациональные аппроксимации. Такая ситуация объясняется особенностями человеческого восприятия звука.

Звуковые волны

С точки зрения физики музыкальная нота — это звуковая волна, которую производит музыкальный инструмент и воспринимает ухо. Волна — это возмущение в твердой, жидкой или газообразной среде, которое движется, не меняя формы, или повторяет одно и то же движение вновь и вновь регулярным образом. Волны часто встречаются в окружающем нас мире: примерами могут служить свет, звук, волны на воде и любые вибрации. Волны в толще Земли вызывают землетрясения.

Простейшая и фундаментальная форма волны — синусоидальная. Высота синусоидальной кривой представляет *амплитуду* волны, то есть меру того, насколько сильно возмущение среды. Для звуковой волны это соответствует громкости звука: чем больше амплитуда, тем сильнее возмущение воздуха, которое сильнее воздействует на ухо, а мы воспринимаем это как увеличение громкости.

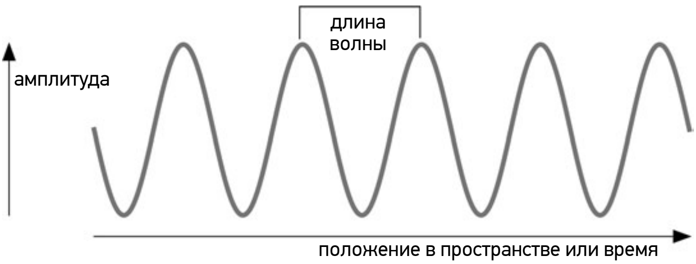


Рис. 121. Синусоидальная волна

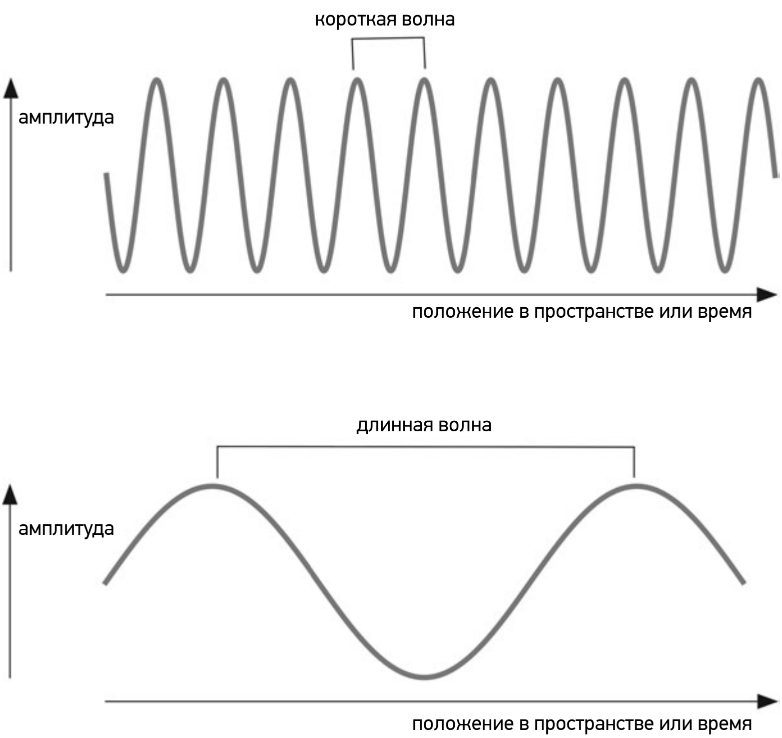


Рис. 122. Длина волны

Еще одна важная характеристика синуса — *длина волны*: расстояние (или время) между последовательными пиками амплитуды.

Длина волны определяет ее форму. Для звуковой волны длина определяет высоту тона. Чем меньше длина волны, тем выше звучит нота, чем больше длина волны — тем нота ниже.

Существует и другой способ измерять эту характеристику волны — ее *частота*, которая обратно пропорциональна длине волны. Частота соответствует числу волновых пиков, укладывающихся в заданное расстояние или время. Частота измеряется в единицах, получивших название герц (Гц): один герц соответствует одному колебанию в секунду. К примеру, нота *до* первой октавы на пианино звучит с частотой 261,62556 Гц, что означает, что за каждую секунду происходит немногим больше 261 колебания.

Рис. 123. Базовая форма музыкальной записи

До на октаву выше имеет частоту 523,25113 Гц — ровно вдвое больше. *До* на октаву ниже имеет частоту 130,81278 Гц — ровно вдвое меньше. Эти соотношения — основные примеры того, как выглядит математика волновых процессов применительно к музыке. Далее представьте себе какой-нибудь струнный музыкальный инструмент, к примеру скрипку или гитару. Рассмотрим для начала только одну струну.

Предположим, инструмент лежит на боку, а мы смотрим на него фронтально. Когда музыкант щиплет струну, она начинает колебаться из стороны в сторону относительно инструмента; для нас она движется вверх-вниз. Это порождает волну, известную как стоячая: при ней концы струны остаются фиксированными, а форма ее циклически меняется.

При простейших колебаниях струна образует как бы половинку синусоидальной волны. Следующая по простоте форма колебаний — целая синусоидальная волна. После этого идет 1,5 синусоидальной волны, 2 синусоидальной волны и так далее. Полуволны фигурируют здесь потому, что полная синусоидальная волна пересекает горизонталь не только на концах, но и посередине.

Рис. 124. Слева направо: половинка синусоидальной волны. Полная синусоидальная волна. Полторы синусоидальной волны. Две синусоидальной волны

Здесь длина волны составляет $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 3 и так далее. Половинки присутствуют потому, что мы используем не целые волны, а полуволны. Если бы мы решили работать в системе, где длина струны равна $\frac{1}{2}$, то длины волн стали бы 1, 2, 3, 4, что проще.

Соответствующие частоты для одной и той же струны при одинаковом натяжении находятся в отношении 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. К примеру, если полуволновые колебания происходят с частотой 261 Гц, то есть близко к *до* первой октавы, то эти частоты составляют:

261 Гц

$$\frac{261}{2} = 130{,}5 \text{ Гц}$$

$$\frac{261}{3} = 87 \text{ Гц}$$

$$\frac{261}{4} = 65{,}25 \text{ Гц}$$

Базовая единичная полуволна называется основной гармоникой (или основным тоном), остальные — высшими (или обертонами).

Около 2500 лет назад пифагорейцы считали, что все в мире управляется математическими формами и числовыми закономерностями. Они открыли замечательное соотношение между числами и музыкальной гармонией. По одной из легенд, Пифагор, проходя мимо кузницы, заметил, что молоты разных размеров производят при ударе по наковальне звуки разного тона и что удары молотов, связанных простыми соотношениями — к примеру, один вдвое больше другого, — звучат гармонично. Однако, если вы попробуете повторить опыт Пифагора с настоящими молотками, вы обнаружите, что их форма слишком сложна, чтобы удары звучали гармонично. Но в целом мелкие объекты действительно производят более высокие звуки, чем большие.

Более правдоподобным представляется эксперимент с натянутой струной, о котором рассказывал Птолемей в своих «Гармониках» около 150 г. н. э. Пифагорейцы открыли, что если длины двух струн равного натяжения имеют простое отношение (например, 2:1 или 3:2), то они производят необычайно гармоничные звуки. Более сложные соотношения длин дают диссонанс и неприятны для слуха.

Музыкальные интервалы

Музыканты описывают пары нот, указывая интервал между ними, то есть количество шагов, разделяющих их на некой музыкальной шкале. Самый фундаментальный интервал — октава: сдвиг на семь белых клавиш на клавиатуре фортепиано. Ноты, разделенные октавой, звучат замечательно похоже, только одна из них выше другой, и они чрезвычайно гармоничны. Настолько гармоничны, что иногда такая гармония может показаться немного пресной. На скрипке или гитаре, чтобы получить звук на октаву выше звука открытой струны, нужно прижать ее к грифу ровно посередине. Струна половинной длины дает звук на октаву выше. Так что октава напрямую связана с простым числовым соотношением 2:1.

Другие гармоничные интервалы также связаны с простыми числовыми отношениями. Самыми важными для европейской музыки являются кварта (4:3) и квинта (3:2). (Названия интервалов обретают смысл, если рассматривать нотную шкалу стандартной октавы: *до, ре, ми, фа, соль, ля, си, до*. Если выбрать в качестве базы *до* и пронумеровать ноты начиная с 1, то четвертой нотой окажется *фа* (отсюда кварта), пятой — *соль* (квинта), а восьмой (октава) — снова *до*.)

Геометрия струны особенно наглядна на таком инструменте, как гитара, где в грифе сделаны специальные металлические лады, к которым удобно прижимать струны. Лад для кварты отстоит от порожка на четверть длины струны, лад для квинты — на треть, а лад для октавы располагается ровно посередине. Это несложно проверить при помощи рулетки.

Гамма

Эти отношения обеспечивают теоретическую основу для музыкальной гаммы; они же привели в свое время к созданию музыкального строя, который сегодня используется практически во всей европейской музыке. Вообще-то существует много различных вариантов музыкального строя, и мы описываем только простейший из них. Начинаем с основного тона и поднимаемся вверх по квинтам, получая струны следующих длин:

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^4 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

Раскроем скобки:

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{9}{4} \qquad \frac{27}{8} \qquad \frac{81}{16} \qquad \frac{243}{32}$$

Все эти ноты, за исключением первых двух, слишком высоки, чтобы оставаться в пределах октавы, но мы можем их опустить на одну или несколько октав; для этого нужно один или несколько раз разделить дробь на 2, пока результат не окажется в интервале от 1 до 2. Это дает нам дроби

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{9}{8} \qquad \frac{27}{16} \qquad \frac{81}{64} \qquad \frac{243}{128}$$

Наконец, расположив эти числа по возрастанию, получим

$$1 \qquad \frac{9}{8} \qquad \frac{81}{64} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{27}{16} \qquad \frac{243}{128}$$

Это достаточно точно соответствует нотам *до, ре, ми, соль, ля, си* (C, D, E, G, A, B в американской нотации) на рояле. Обратите внимание: нота *фа* (F) в списке отсутствует. Более того, на слух промежуток между $\frac{81}{64}$ и $\frac{3}{2}$ кажется шире, чем другие промежутки. Чтобы его заполнить, мы вставляем $\frac{4}{3}$ — отношение для кварты, очень близкое к ноте *фа* на клавиатуре пианино. Полезно также дополнить шкалу второй *до* на октаву выше первой (отношение 2:1). В результате получим музыкальную шкалу, основанную целиком и полностью на квартах, квинтах и октавах:

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
C	D	E	F	G	A	B	C

Длина обратно пропорциональна высоте тона, поэтому нам пришлось бы перевернуть дроби, чтобы получить соответствующие длины.

Итак, мы объяснили все белые клавиши на пианино, но есть еще и черные клавиши. Они появились на клавиатуре потому, что соседние числа нашей шкалы относятся друг к другу по разному: их отношение равно либо $\frac{9}{8}$ (такой интервал называется тон), либо $\frac{256}{243}$ (полутон). Так, $\frac{81}{64}$ относится к $\frac{9}{8}$ как $\frac{9}{8}$, а вот $\frac{4}{3}$ относится к $\frac{81}{64}$ как $\frac{256}{243}$. Термины «тон» и «полутон» указывают на примерное соотношение этих интервалов. Численно приведенные отношения составляют 1,125 и 1,05. Первая величина больше, поэтому тон соответствует более заметной смене высоты звучания, чем полутон. Два полутона дают отношение $1{,}05^2$, что приблизительно равно 1,11 — не так далеко от 1,125. Иными словами, два полутона дают почти тон.

Продолжая в том же духе, мы можем разделить каждый тон на два интервала, каждый приблизительно по полтона, и получить линейку из 12 нот. Это можно сделать несколькими разными способами, получив при этом слегка разные результаты. Но как бы это ни было сделано, при изменении тональности музыкального произведения могут возникнуть небольшие, но слышимые проблемы; скажем, если сдвинуть каждую ноту вверх на полтона, все интервалы слегка изменятся. На некоторых музыкальных инструментах, таких как кларнет, это может вызвать серьезные технические проблемы, поскольку звук там извлекается прохождением воздуха через отверстия в инструменте, а они, естественно, располагаются в фиксированных местах. На других инструментах, таких как скрипка, можно извлечь непрерывный ряд звуков, так что музыкант может подстраиваться под ситуацию.

На инструментах еще одного типа, таких как гитара или фортепиано, используется другая математическая система. Проблему изменения тональности там стараются обойти при помощи небольшого компромисса. Идея в том, чтобы сделать все интервалы между последовательными нотами совершенно одинаковыми. Интервал между двумя нотами гаммы зависит от отношения их частот, поэтому, чтобы получить заданный интервал, мы берем частоту одной ноты и *умножаем ее* на некоторую фиксированную величину, получая при этом частоту следующей ноты.

Какой должна быть эта фиксированная величина для полутонового интервала?

Двенадцать полутонов составляют октаву с отношением частот 2:1. Чтобы получить октаву, мы должны взять частоту исходного тона и умножить ее на некоторую фиксированную частоту, соответствующую полутону, двенадцать раз подряд.

Результатом должна быть удвоенная частота базового тона. Таким образом, отношение для полутона, возведенное в 12-ю степень, должно быть равно 2. Следовательно, отношение для полутона должно быть равно корню двенадцатой степени из 2. Записывается это $\sqrt[12]{2}$ и равно приблизительно 1,059463.

Серьезным преимуществом этой идеи является то, что теперь многие музыкальные соотношения работают *точно*. Два полутона составляют точно тон, а 12 полутонов — октаву. Что еще лучше, можно сменить тональность, то есть начало строя, простым сдвигом всех нот вверх или вниз на фиксированную величину.

Это число — корень двенадцатой степени из 2 — позволяет построить *равномерно темперированный* строй. Это компромисс; так, при равномерно темперированном строе вместо отношения $\frac{4}{3}$ для кварты мы получаем $1{,}059^5 = 1{,}335$, а не $\frac{4}{3} = 1{,}333$. Тренированное ухо музыканта услышит эту разницу, но к ней несложно привыкнуть, а большинство обычных людей ее просто не замечает.

$\sqrt[12]{2}$ — иррациональное число. Предположим, что $\sqrt[12]{2} = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Тогда $p^{12} = 2q^{12}$. Разложим обе части на простые множители. Левая часть имеет четное количество (возможно, 0) двоек. Правая часть имеет нечетное их количество. Это противоречит единственности разложения на простые множители.

Колеблющиеся струны и барабаны

Чтобы понять, почему простые отношения так тесно связаны с музыкальной гармонией, нам придется заглянуть в физику колеблющейся струны.

В 1727 г. Иоганн Бернулли совершил прорыв в описании движения простой математической модели скрипичной струны. Он выяснил, что в простейшем случае форма колеблющейся струны в любой момент времени представляет собой синусоидальную кривую. Амплитуда колебаний также изменяется по закону синуса, но уже во времени, а не в пространстве.

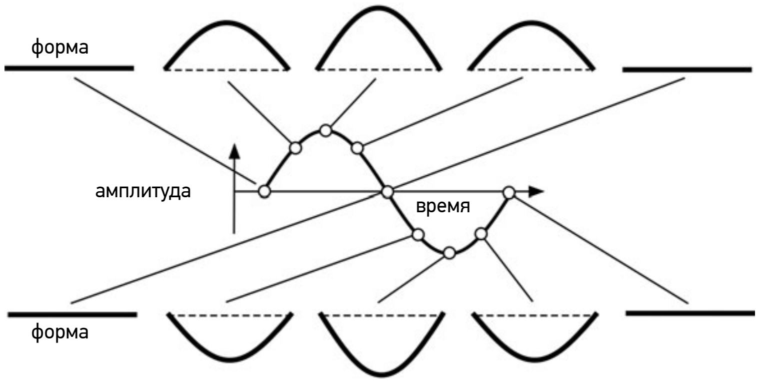


Рис. 125. Последовательные положения колеблющейся струны. Форма ее в любой момент соответствует синусоидальной кривой. Амплитуда во времени также изменяется синусоидально

Однако в движении струны присутствовали и другие решения. Все они имели синусоидальную форму, но описывали различные «тональности» колебаний, при которых вдоль струны укладывалось 1, 2, 3 или больше волн. Здесь тоже форма струны была синусоидальной в любой момент времени, а амплитуда колебаний имела множитель, который зависел от времени и тоже изменялся синусоидально.

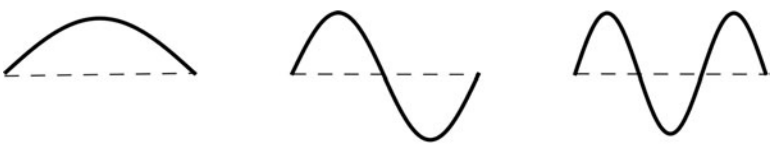


Рис. 126. Моментальные снимки 1-й, 2-й и 3-й гармоник колеблющейся струны. В каждом случае струна колеблется вверх вниз, а амплитуда колебаний меняется синусоидально во времени. Чем больше волн укладывается на струну, тем быстрее колебания

На концах струна всегда неподвижна. Во всех гармониках, кроме первой, между ее концами имеются точки, где кривая пересекает горизонтальную ось. Эти «узлы» объясняют, почему в экспериментах пифагорейцев фигурировали простые отношения. Так, поскольку колебательные гармоники 2 и 3 могут существовать одновременно на одной и той же струне, промежуток между соседними узлами на кривой гармоники 2 окажется в $\frac{3}{2}$ раза больше соответствующего промежутка на кривой гармоники 3. Этим объясняется, почему такие отношения, как 3:2, естественно возникают из динамики колеблющейся струны.

Наконец, заключительный шаг — понять, почему эти отношения звучат гармонично, в то время как остальные порождают диссонанс.

В 1746 г. Жан ле Рон д'Аламбер открыл, что колебания струны управляются математическим уравнением, получившим название волнового уравнения. Это уравнение описывает, как силы, действующие на струну, — ее собственное натяжение, а также сила щипка или движение смычка — влияют на ее движение. Д'Аламбер понял, что можно совместить синусоидальные решения Бернулли. Чтобы упростить картину, рассмотрим только некоторое положение в какой-то фиксированный момент времени, забыв о зависимости от времени. На рис. 127 показан график $5 \sin x + 4 \sin 2x - 2 \cos 6x$. Он намного сложнее простой синусоидальной кривой. Реальные музыкальные инструменты, как правило, производят звуки сложного состава, волновые уравнения которых включают в себя множество разных синусоидальных и косинусоидальных слагаемых.

Чтобы упростить еще, посмотрим на $\sin 2x$, частота которого вдвое выше частоты $\sin x$. Как это звучит? Это нота *на октаву выше*. Это та самая нота, которая при сочетании с основным тоном звучит гармоничнее всего. Далее форма струны для второй гармоники ($\sin 2x$) пересекает ось ровно посередине. В этой точке (узле) струна остается неподвижной. Если поставить в этом месте палец, две половинки струны смогут по-прежнему колебаться по схеме $\sin 2x$, а по схеме $\sin x$ — уже не смогут. Это объясняет открытие пифагорейцев — то, что струна половинной длины производит звук на октаву выше. Аналогично объясняются и другие простые отношения, открытые ими: все они связаны с синусоидальными кривыми, частоты которых находятся в этом отношении, и такие кривые точно укладываются на струне фиксированной длины с закрепленными концами.

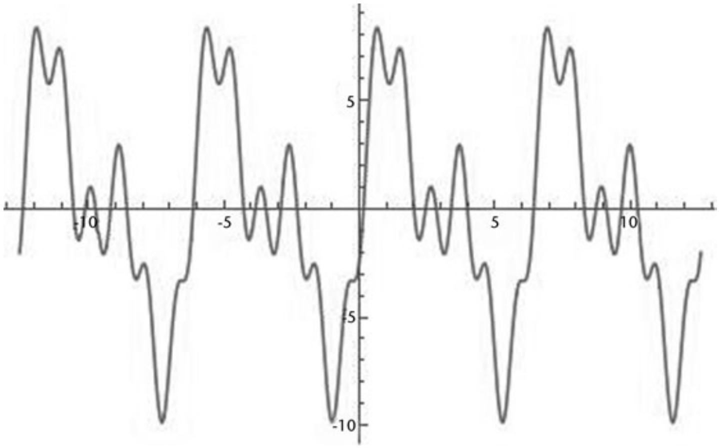


Рис. 127. Типичная комбинация синусов и косинусов с разными амплитудами и частотами

Почему эти отношения звучат гармонично? Отчасти причина заключается в том, что синусоидальные волны с частотами, не связанными простым отношением, при наложении друг на друга порождают эффект, известный как «биения». К примеру, отношение вида 8:7, соответствующее $\sin 7x + \sin 8x$, имеет такую волновую форму.

Возникающий при этом звук похож на высокое гудение, которое то стихает, то вновь усиливается. Ухо отзывается на приходящие звуки примерно так же, как скрипичная струна, поэтому, когда между двумя звуками близких частот возникают биения, результат звучит совершенно негармонично.

Однако здесь присутствует еще один фактор. Уши младенцев настраиваются на звуки, которые они слышат чаще всего, по мере развития мозга. Следует учитывать, что от мозга к уху идет больше нервных связей, чем в обратном направлении, и что мозг способен с их помощью настраивать реакцию уха на приходящие звуки. Так что наши рассуждения о гармонии имеют и культурное измерение. Но простейшие отношения обладают естественной гармонией и используются в большинстве культур.

Струна одномерна, но очень похожие идеи применимы и к системам с бóльшим числом измерений. К примеру, чтобы разобраться в колебаниях барабана, мы рассмотрим колеблющуюся мембрану — двумерную поверхность — в форме барабанной кожи. У большинства музыкальных барабанов звучащая поверхность круглая, но, в принципе, мы можем рассмотреть звуки, производимые и квадратным или прямоугольным барабаном, а также барабаном произвольной формы — скажем, барабаном в форме нарисованной кошки.

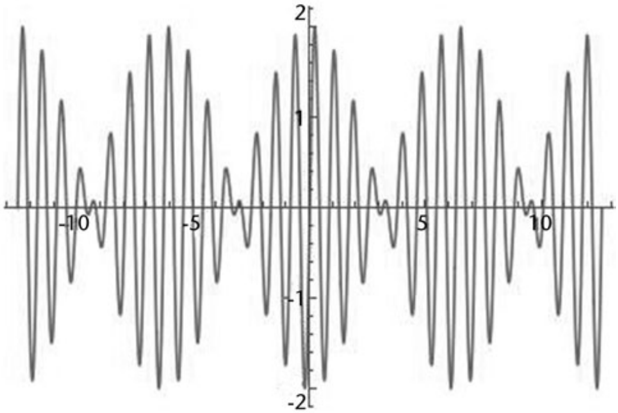


Рис. 128. Биения

Для любой выбранной формы звучащей поверхности существуют функции, аналогичные бернуллиевым синусам и косинусам и представляющие простейшие схемы колебаний. Эти рисунки называются гармониками или нормальными гармониками, если вы хотите с абсолютной точностью знать, о чем идет речь. Все остальные волны могут быть получены наложением нормальных гармоник, опять же с использованием бесконечных рядов при необходимости.

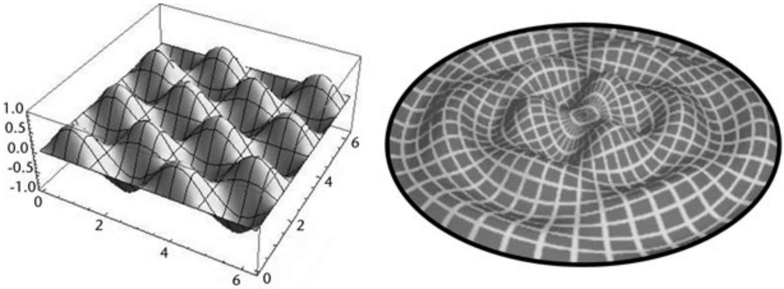


Рис. 129. Слева: мгновенный снимок одной гармоники колеблющегося прямоугольного барабана с волновыми числами 2 и 3. Справа: мгновенный снимок одной гармоники колеблющегося круглого барабана

Кроме того, звучащая фигура может быть и трехмерной. Важный пример — колеблющийся сплошной шар, который может служить простой моделью того, как земная поверхность движется при землетрясении. Более точная модель Земли — эллипсоид, слегка сплюснутый у полюсов. Чтобы разобраться в сигналах землетрясений, сейсмологи тоже используют волновое уравнение, причем более сложные его формы, точнее отражающие физику Земли.

Если при разработке нового автомобиля вы хотите исключить нежелательные колебания, то нужно посмотреть волновое уравнение объекта, формой напоминающего автомобиль — или ту его часть, в поведении которой хотят разобраться инженеры. Очень похожий процесс — проектирование сейсмоустойчивых зданий.

$\zeta(3) \sim 1,202056$

Постоянная Апери

Постоянная Апери — замечательная особенность математической картины мира, которая работает для всех четных чисел, но, судя по всему, неверна для нечетных. Насколько нам известно. Доказательство иррациональности этого числа свалилось нам, как снег на голову.

Дзета от трех

Помните дзета-функцию (см. главу $\frac{1}{2}$)? Она определяется с некоторыми техническими оговорками относительно аналитической непрерывности рядом

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots$$

где z — комплексное число (см. главу i). Впервые математики XVIII в. столкнулись с этим бесконечным рядом в частном случае $z = 2$, когда Эйлер решал Базельскую задачу. На формальном языке это означает формулу для ζ (2), которая представляет собой сумму чисел, обратных полным квадратам. В главе π мы видели, что в 1735 г. Эйлер нашел ответ (сумму этого ряда):

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Тот же метод работает для четвертых, шестых и вообще любых четных положительных целых степеней:

$$\zeta(4)=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(6)=\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945}.$$

Эта закономерность продолжается и дальше:

$$\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450} \qquad \zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93\,555}$$

$$\zeta(12)=\frac{691\pi^{12}}{945\,638\,512\,875} \qquad \zeta(14)=\frac{2\pi^{14}}{18\,243\,225}$$

Опираясь на эти примеры, мы вполне могли бы ожидать, что сумма величин, обратных кубам, окажется произведением π^3 на рациональное число, сумма величин, обратных пятым степеням, — произведением π^5 на рациональное число и так далее. Однако численные расчеты ясно показывают, что это предположение ошибочно. В самом деле, мы не знаем ни одной формулы для этих рядов — ни с участием числа π, ни без него. Все это выглядит весьма загадочно.

Поскольку π иррационально и, мало того, трансцендентно (см. главу π), суммы всех приведенных выше рядов иррациональны. Таким образом, $\zeta(n)$ иррационально для $n = 2, 4, 6, 8\ldots$ Однако мы не знаем, верно ли это для нечетных степеней. Такой вариант представляется очень вероятным, но $\zeta(n)$ для нечетных целых n понять намного сложнее, потому что методы Эйлера опираются на четность n. Многие математики пытались справиться с этим вопросом — с практически нулевыми результатами.

При $n = 3$ складываются величины, обратные кубам; получается число, известное сегодня как постоянная Апери:

$$\zeta(3)=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots$$

численное значение которой

1,2020569031595942853997381615114499907649862923...

При делении на π^3 получаем

0,0387681796029167989411198903187211498062345684...

В этом числе не видно никаких признаков повторяемости, так что на рациональное оно *не похоже*. Можно точно сказать, что это не есть рациональное число с небольшими числителем и знаменателем. В 2013 г. Роберт Сетти вычислил постоянную Апери до 200 млрд десятичных знаков. В таком виде она еще меньше похожа на произведение π^3 и какого-нибудь рационального числа и представляется не связанной с другими стандартными математическими константами.

Поэтому в 1978 г. математики с громадным удивлением восприняли сообщение Рауля Апери о том, что получено доказательство иррациональности $\zeta(3)$; еще большее удивление они испытали, когда предложенное доказательство оказалось верным. Я не хочу бросить тень на Апери, но его доказательство и правда включало в себя некоторые необычные утверждения: к примеру, что последовательность очевидно рациональных чисел, выглядевших, однако, очень не похожими на целые, на самом деле была последовательностью целых чисел. (Каждое целое число рационально, но не наоборот.) Когда компьютерные расчеты начали выдавать одно целое число за другим, это утверждение стало более правдоподобным, однако потребовалось немало времени, чтобы доказать, что так будет всегда. Вообще, доказательство Апери очень сложное, хотя в нем и не используются какие бы то ни было методики, которых не мог знать, к примеру, Эйлер. Позже были найдены и более простые доказательства.

Все методы сосредоточены конкретно на $\zeta(3)$ и, судя по всему, не распространяются на другие нечетные целые числа. Однако в 2000 г. Вадим Зудилин и Танги Ривоаль доказали, что бесконечно много чисел $\zeta(2n + 1)$ должны быть иррациональными. В 2001 г. они доказали также, что по крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ и $\zeta(11)$ иррационально, но их теорема не позволяет определить, какое именно. Что называется, близок локоть… Иногда в математике такое случается.

$\gamma \sim 0{,}577215$

Постоянная Эйлера

Это число фигурирует во многих областях математического анализа и теории чисел. Это определенно действительное число, и я бы поставил, пожалуй, на то, что оно иррационально (именно поэтому я поместил его в этот раздел). Получается оно при простейшей аппроксимации суммы величин, обратных всем натуральным числам до некоего заданного предела. Мы очень мало знаем об этом числе, несмотря на его вездесущность и простоту. В частности, никто не в состоянии *доказать* его иррациональность. Но мы точно знаем, что если это число рационально, то оно должно быть чрезвычайно сложным: представляющая его дробь обязательно будет содержать просто гигантские числа более чем из 240 000 десятичных знаков.

Гармонические числа

Гармонические числа — это конечные суммы обратных величин:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Не известно никакой явной алгебраической формулы для H_n, и представляется вероятным, что такой формулы просто не существует. Однако средствами дифференциального исчисления можно достаточно просто показать, что H_n приблизительно равно натуральному логарифму $\ln n$ (см. главу e). Более того, есть и лучшее приближение:

$$H_n \sim \ln n + \gamma,$$

где γ — некая константа. По мере увеличения n разность между двумя частями становится сколь угодно маленькой.

Десятичная запись γ начинается так:

$$\gamma = 0{,}57721566490153286060651209008240243104 21\ldots$$

и в 2013 г. Александер И вычислил значение этой постоянной до 19 377 958 182 десятичных знаков. Эта величина получила название постоянной Эйлера, поскольку впервые появилась в его статье 1734 г. Эйлер обозначал эту постоянную C и O, а позже вычислил ее до 16 десятичных знаков. В 1790 г. Лоренцо Маскерони также опубликовал кое-что об этой постоянной, но обозначал он ее A и a. Он попытался вычислить ее до 32 знаков, но допустил ошибки в знаках с 20 по 22. Иногда эту величину называют постоянной Эйлера–Маскерони, но в целом можно сказать, что заслуга принадлежит в основном Эйлеру. К 1830-м гг. математики изменили ее обозначение на γ, и на сегодня оно является стандартным.

Постоянная Эйлера фигурирует во многих математических формулах, особенно в связи с бесконечными рядами и определенными интегралами в математическом анализе. Ее экспонента e^{γ} — частый гость в теории чисел. Предполагается, что постоянная Эйлера трансцендентна, но наверняка мы не можем сказать даже, что она иррациональна. Расчеты ее цепной дроби показывают, что если γ рациональна и равна $\frac{p}{q}$ для целых p и q, то q должно быть не меньше $10^{242\,080}$.

Еще более точная формула для гармонических чисел выглядит так:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4}$$

с ошибкой не более $\frac{1}{252n^6}$.

Особые небольшие числа

Вернемся к натуральным числам, которые обладают своеобразным обаянием. Каждое из них — отдельная индивидуальность и каждое имеет особые черты, делающие его интересным.

Более того, *все* числа интересны. Доказательство: если это не так, то где-то должно существовать наименьшее неинтересное число. Но это и придает ему интерес. Получаем противоречие.

11

Теория струн

Обычно мы представляем себе пространство трехмерным. Время привносит четвертое измерение и порождает пространство-время — царство теории относительности. Однако современные исследования на переднем крае физики, известном как теория струн — или, конкретно, М-теория, — позволяют предположить, что на самом деле пространство-время имеет одиннадцать измерений. Семь из них никак себя не проявляют по отношению к обычным человеческим чувствам и не обнаруживаются ими. Строго говоря, они до сих пор не зарегистрированы достоверно ни в одном эксперименте.

Это может показаться невероятным — и может оказаться неправдой. Но физика не однажды демонстрировала нам, что образ окружающего мира, воспринимаемый нашими чувствами, может значительно отличаться от реальности. Так, непрерывное и цельное на первый взгляд вещество состоит из отдельных крохотных частиц — атомов. А некоторые физики считают, что подлинное пространство сильно отличается от пространства, в котором, как нам представляется, мы живем. Именно одиннадцать измерений выбраны не потому, что на такое количество указывают какие бы то ни было наблюдения реального мира; нет, просто именно при таком их числе принципиально важная математическая структура работает стабильно. Теория струн строится на сложном математическом аппарате, но основные ее идеи можно изложить без особого труда.

Объединение теории относительности и квантовой теории

Величайшие достижения теоретической физики — теория относительности и квантовая механика. Теория относительности, предложенная Эйнштейном, объясняет силу всемирного тяготения через кривизну пространства-времени. Согласно Общей теории относительности, которую Эйнштейн разработал после Специальной, любая частица движется из одной точки в другую по геодезической линии, то есть по кратчайшему пути, соединяющему их. Но возле массивного тела, такого как звезда, пространство-время искажается, что заставляет путь зрительно искривляться. К примеру, планеты обращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам.

Первоначальная теория гравитации, разработанная Ньютоном, интерпретировала искривление пути как результат действия силы и давала математическую формулу для величины этой силы. Но очень точные измерения показали, что теория Ньютона чуть-чуть неточна. Эйнштейн заменил силу притяжения кривизной пространства-времени, и эта новая теория исправила наблюдаемые ошибки. Позже она была подтверждена множеством различных наблюдений, в основном наблюдений далеких астрономических объектов.

Второй величайший триумф физики — квантовая механика — появился благодаря работам нескольких великих физиков, среди которых Макс Планк, Вернер Гейзенберг, Луи де Бройль, Эрвин Шрёдингер и Поль Дирак. Квантовая механика объясняет, как ведет себя вещество в самых мелких масштабах — в масштабах атомов или еще меньше. В этих масштабах вещество ведет себя одновременно, как крохотные частицы и как волны. Квантовая механика предсказывает множество странных эффектов, которые очень отличаются от того, что мы наблюдаем в человеческом масштабе, но результаты тысяч экспериментов согласуются с этими предсказаниями. Современная электроника не работала бы, если бы квантовая механика сильно отличалась от реальности.

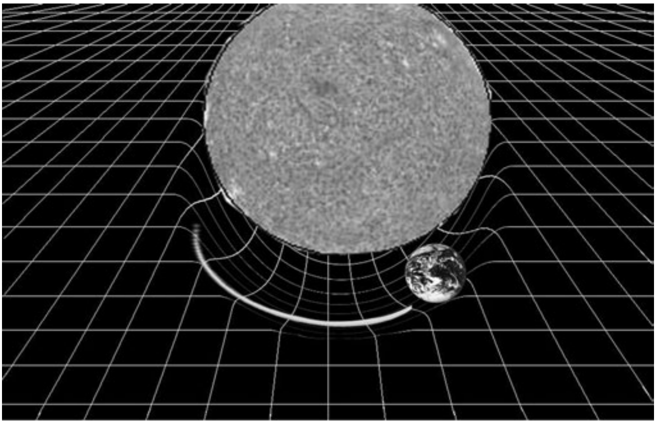


Рис. 130. Как кривизна пространства-времени может действовать как сила. Частица, пролетающая мимо массивного тела, такого как звезда, отклоняется от своего пути, то есть испытывает на себе такой же эффект, какой дало бы действие силы притяжения

Физикам-теоретикам не нравится иметь две разные теории, применимые в разных контекстах, особенно если там, где эти контексты перекрываются, теории противоречат друг другу. Так происходит в космологии — теории Вселенной как целого. Еще Эйнштейн начал поиски единой теории поля, которая объединила бы обе названные теории логически непротиворечивым образом. И поиски принесли частичные успехи, но лишь в квантовом мире.

Эти успехи позволили объединить три фундаментальные физические силы из четырех. Физики различают в природе четыре типа сил: гравитационные; электромагнитные, в зону ответственности которых входят электричество и магнетизм; слабые ядерные силы, связанные с распадом радиоактивных частиц; и сильные ядерные силы, связывающие частицы вроде протонов и нейтронов между собой. Строго говоря, все эти силы представляют собой «взаимодействия» между частицами вещества. Теория относительности описывает гравитационное взаимодействие, а квантовая механика остальные три типа фундаментальных взаимодействий.

В последние десятилетия физикам удалось найти единую общую теорию, которая объединила три силы квантовой механики. Эта теория, известная как Стандартная модель, описывает структуру вещества на субатомном уровне. Согласно Стандартной модели, все вещество построено всего лишь из 17 фундаментальных частиц.

Из-за некоторых загадочных результатов наблюдений — например, вращение галактик не соответствует предсказаниям общей теории относительности, если в них, кроме того, что мы видим, нет никакого другого вещества — в настоящее время космологи считают, что большая часть Вселенной представляет собой скрытую массу, или «темную материю», которая, вероятно, состоит из других частиц, помимо 17 уже известных. Если они правы, то Стандартную модель придется дорабатывать. В противном случае нам может понадобиться новая теория гравитации или модифицированная теория того, как движутся тела под действием силы.

Однако физики-теоретики до сих пор не сумели объединить теорию относительности и квантовую механику путем построения единой теории, которая бы описывала *все четыре* силы непротиворечивым образом и при этом согласовывалась с обеими существующими теориями в их областях применения (то есть в очень крупном и очень мелком масштабах соответственно). Поиски этой единой теории поля, или «теории всего», привели к некоторым красивым математическим идеям и вылились в *теорию струн*. На текущий момент эта теория не получила достоверного экспериментального подтверждения; кроме того, существует еще несколько гипотез, по которым также ведутся активные исследования. Типичный пример — теория петлевой квантовой гравитации, в которой пространство представлено как сеть мельчайших петелек, вместе слегка напоминающих кольчугу. Физики называют ее «спиновая пена».

Теория струн началась с предположения о том, что элементарные частицы не следует воспринимать как точки. Более того, возникло ощущение, что в природе *не бывает* точек, так что причиной противоречий между квантовой теорией (теорией частиц) и теорией относительности (которая работает с гладкими кривыми и поверхностями), может быть использование точечных моделей. На самом же деле частицы должны напоминать крохотные замкнутые петельки, получившие название *струн*. Петельки могут изгибаться, так что эйнштейново представление о кривизне естественным образом вписывается в картину.

Рис. 131. 17 фундаментальных частиц

Более того, петельки могут колебаться, и их колебания корректно объясняют существование различных квантовых свойств, таких как электрический заряд или спин. Одно из загадочных свойств квантовой механики — то, что измеряемые свойства частиц обычно кратны некой базовой константе. Например, протон имеет заряд +1, электрон –1, а нейтрон заряда не имеет, то есть его заряд равен 0. Кварки — более фундаментальные частицы, в различных сочетаниях образующие протоны и нейтроны, — имеют заряды $\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{3}$ единицы. Так что все заряды кратны (с коэффициентами –3, –1, 0, 2, 3) некой базовой единице — заряду некоторых типов кварков. Почему кратны? Математика колеблющихся струн солидарна с физикой. Каждое колебание — это волна с конкретной длиной (см. главу $\sqrt[12]{2}$). Волны на замкнутой петельке должны правильным образом подходить к точке, где петелька замыкается, а следовательно, должны целое число раз укладываться в длину петельки. Если эти волны представляют квантовые состояния, то это объясняет, почему величины здесь дискретны и кратны какой-то базовой величине.

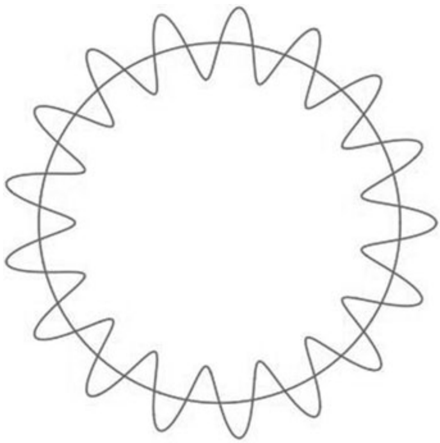


Рис. 132. В длину петельки укладывается целое число волн

Разумеется, история оказалась не настолько прямолинейной. Однако разработка теории частиц-петелек привела физиков и математиков к кое-каким замечательным и мощным идеям.

Дополнительные измерения

Колеблющейся квантовой струне для колебаний необходимо какое-то пространство. При этом, если мы хотим сохранить адекватную математику, это не может быть обычное пространство как таковое. Там должна присутствовать дополнительная переменная — *дополнительное пространственное измерение*, поскольку подобные колебания представляют собой квантовое, а не пространственное свойство. С развитием теории струн теоретикам стало ясно, что, для того чтобы все работало, дополнительных измерений понадобится несколько. Новый принцип, получивший название суперсимметрии, указывал на существование у каждой частицы «суперпартнера» — гораздо более тяжелой частицы. Если допустить такую симметрию, то струны следует заменить на суперструны. А суперструны работают, только если считать, что пространство имеет *шесть дополнительных измерений*.

Это означало также, что струна, вместо простой кривой наподобие окружности, должна иметь более сложную форму в шести измерениях. Среди подходящих в принципе форм — так называемые многообразия Калаби–Яу.

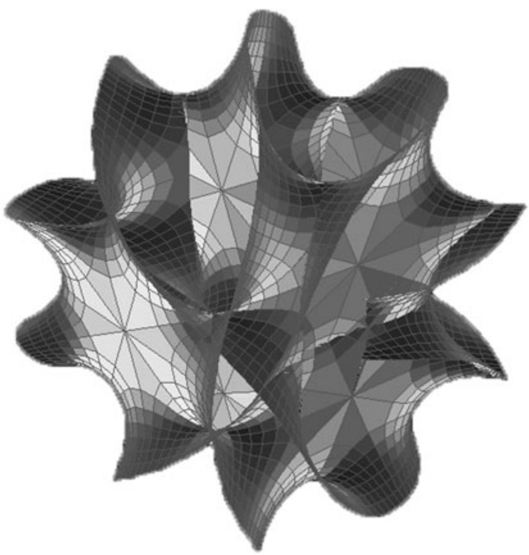


Рис. 133. Проекция шестимерного многообразия Калаби–Яу на обычное пространство

Это предположение вовсе не так безумно, как может показаться, поскольку «измерение» в математике означает всего лишь «независимую переменную». Классический электромагнетизм описывает электричество в терминах электрического и магнитного полей, пронизывающих обычное пространство. Каждое поле требует трех новых переменных: это три компоненты направления электрического поля и то же самое для магнитного поля. Хотя компоненты эти берутся вдоль пространственных направлений, напряженность поля вдоль этих направлений не зависит от самих направлений. Таким образом, классический электромагнетизм нуждается в шести дополнительных измерениях: три для электричества и три для магнетизма. В каком-то смысле в классической электромагнитной теории фигурирует десять измерений: четыре для пространства-времени плюс шесть непосредственно для электромагнетизма.

Теория струн действует аналогично, но использует *не эти* шесть новых измерений. В некоторых отношениях новые измерения теории струн — новые переменные, по поведению больше похожие на обычные пространственные измерения, чем электричество и магнетизм. Одно из крупнейших достижений Эйнштейна — объединение трехмерного пространства и одномерного времени в четырехмерное пространство-время. Это было необходимо, потому что, согласно теории относительности, при очень быстром движении объекта пространственные и временны́е переменные смешиваются. В теории струн происходит что-то подобное, но ей требуется десятимерное пространство-время с девятью пространственными и одним временны́м измерением.

Теоретики вынуждены были принять эту идею, поскольку лишь в этом случае математика сохраняла логическую непротиворечивость. Если считать, что время, как обычно, имеет одно измерение, а пространство-время — d измерений, то расчеты приводят к возникновению аномальных слагаемых в уравнениях. Как правило, такие слагаемые бесконечны. Это обещает большие проблемы, ведь все мы знаем, что бесконечность в реальном мире не существует. Однако ситуация такова, что слагаемые, о которых идет речь, кратны $d - 10$. Это выражение равно нулю тогда и только тогда, когда $d = 10$; в этом случае аномалии исчезают. Таким образом, чтобы избавиться от аномалий, требуется, чтобы размерность пространства-времени равнялась 10.

Множитель $d - 10$ изначально присущ теории и неизбежно возникает при ее формулировании. Выбрав $d = 10$, мы избавляемся от этой проблемы, но вводим другую, на первый взгляд еще более сложную. Вычитая из 10 одно измерение, соответствующее времени, мы обнаруживаем, что пространство у нас имеет не три, а девять измерений. Но ведь если бы все действительно обстояло так, мы бы наверняка это заметили? *Где прячутся дополнительные шесть измерений?*

Один из ответов — весьма привлекательный, надо сказать — состоит в том, что они все здесь, но свернуты так плотно, что мы их просто не замечаем; более того, мы *не в состоянии* заметить их. Представьте себе длинный шланг. Издалека вы не заметите его толщины: он покажется всего лишь одномерной кривой линией. Остальные два измерения — круглое сечение шланга — свернуты в такое маленькое пространство, что увидеть их невозможно. Струна устроена так же, но свернута намного плотнее. Длина нашего шланга приблизительно в тысячу раз больше его толщины. «Длина» струны (видимое пространственное движение) более чем в 10^{40} раз превосходит ее «толщину» (дополнительные измерения, в которых она колеблется).

Еще один возможный ответ состоит в том, что эти дополнительные измерения на самом деле достаточно велики, но большинство состояний частицы заключено в фиксированной области этих измерений — так лодка плавает на поверхности океана. Сам океан имеет три измерения: по широте, долготе и глубине. Но лодка вынужденно остается на поверхности и может «видеть» только два из них: широту и долготу.

Некоторые свойства, такие как гравитация, все же учитывают дополнительные измерения пространства-времени — примером может служить прыгающий с лодки ныряльщик. Но большинство их просто не видит.

Примерно к 1990 г. теоретики выработали пять разновидностей теории струн, различающихся между собой в основном симметриями дополнительных измерений. Эти варианты теории получили названия типов I, IIA, IIB, HO и HE. Эдвард Уиттен открыл элегантное математическое объединение всех пяти вариантов, которое назвал M-теорией. Эта теория требует, чтобы пространство-время имело 11 измерений: десять пространственных и одно временно́е. Различные математические уловки, применяемые для перехода от одного из пяти типов теории струн к другому, здесь рассматриваются как физические свойства полного 11-мерного пространства-времени. Выбрав подходящее «положение» внутри этого 11-мерного пространства-времени, можно получить любую из пяти типов теории струн.

Даже если окажется, что теория струн не отражает реального устройства Вселенной, ее вклад в математику — к несчастью, слишком сложный, чтобы обсуждать его здесь — не потеряет своего значения. Поэтому математики будут и дальше изучать и ценить теорию струн, даже если физики решат, что в реальном мире она не применима.

12

Пентамино

Пентамино — это фигура, составленная из пяти одинаковых квадратиков, соединенных сторонами. Существует 12 возможных форм пентамино, если не считать зеркально симметричные фигуры различными. Иногда их обозначают похожими буквами латинского алфавита. Кроме того, 12 — число шаров, которые могут одновременно касаться друг друга в трехмерном пространстве.

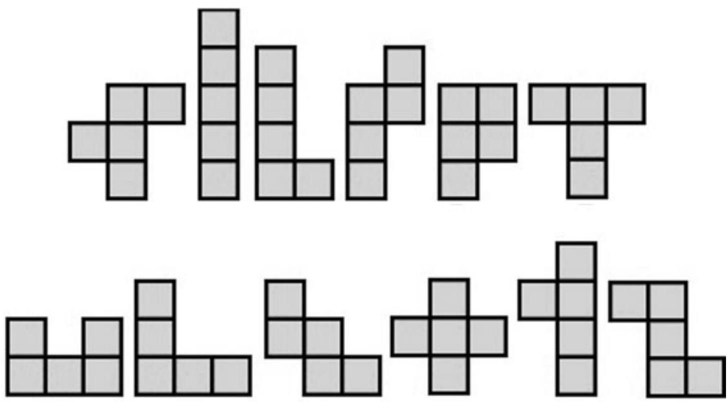


Рис. 134. 12 фигурок-пентамино

Полимино

В более общем смысле n-мино — это фигура, составленная из n одинаковых квадратов. Все вместе эти фигуры называются полимино. Существует, к примеру, 35 гексамино ($n = 6$) и 108 гептамино ($n = 7$).

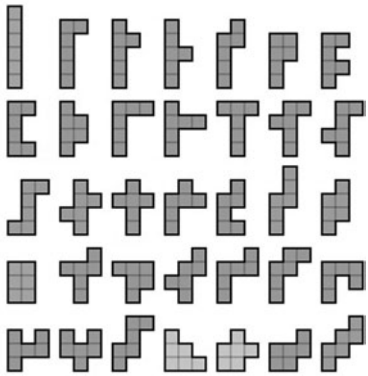


Рис. 135. 35 гексамино

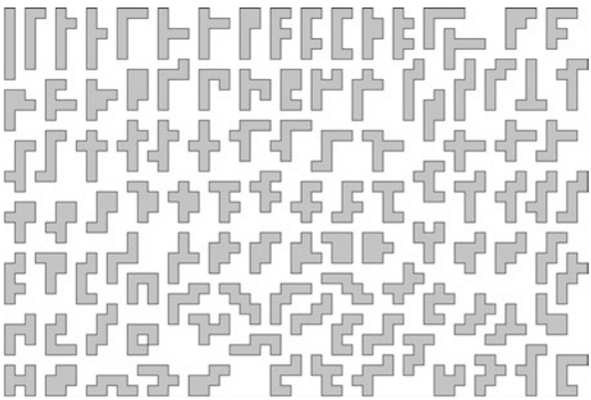


Рис. 136. 108 гептамино

Общую концепцию таких фигур, как и название, придумал Соломон Голомб в 1953 г.; их популярности очень способствовали публикации Мартина Гарднера в *Scientific American*. Название образовано инверсно от слова «домино», костяшки которого состоят из двух соединенных квадратов; если исхитриться, то слог «до-» в названии игры можно интерпретировать как латинское *di* или греческое *do*, означающее «два». (На самом деле слово «домино» происходит от латинского *dominus*, «господин».)

Вообще, предшественников полимино в литературе хватает. Известный английский составитель головоломок Генри Дьюдени включил одну из головоломок с пентамино в свои «Кентерберийские головоломки» 1907 г. С 1937 по 1957 г. журнал *Fairy Chess Review* печатал много задач на складывание фигур из пентамино и гексамино, называя их «задачами на разрезание».

Головоломки с полимино

На полимино в целом и пентамино в частности основано громадное количество весьма занимательных игр и головоломок. К примеру, из них можно собирать различные интересные фигуры.

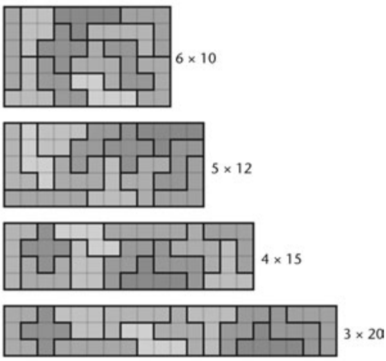


Рис. 137. Возможные размеры прямоугольников из пентамино

Площадь всех двенадцати пентамино в сумме составляет 60 единиц (если считать, что каждый квадрат, из которых составлены детали-пентамино, имеет площадь 1). Любой способ записать 60 как произведение двух натуральных чисел определяет прямоугольник, и задача составления такого прямоугольника из деталей-пентамино представляет собой увлекательную и непростую головоломку. Детали при необходимости можно переворачивать, получая, таким образом, зеркальные фигуры. Оказывается, таким способом можно сложить прямоугольники 6×10, 5×12, 4×15 и 3×20. Несложно убедиться, что прямоугольники 2×30 и 1×60 сложить невозможно.

Число различных способов сложить эти прямоугольники (поворот и отражение всего прямоугольника целиком не считаются как отдельные варианты, а вот поворот и отражение меньших прямоугольников, когда все остальное остается на месте, разрешается) известно:

6×10 — 2339 способов;
5×12 — 1010 способов;
4×15 — 368 способов;
3×20 — 2 способа.

Еще одна типичная головоломка начинается с уравнения $8 \times 8 - 2 \times 2 = 60$ и ставит вопрос: можно ли сложить из двенадцати пентамино квадрат 8×8 с центральным отверстием 2×2. Ответ: да, можно.

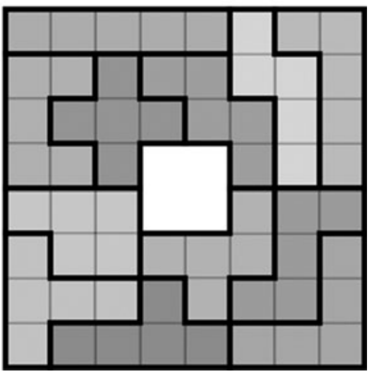


Рис. 138. Составление квадрата с отверстием из пентамино

Симпатичный способ сложить все гексамино вместе дает параллелограмм:

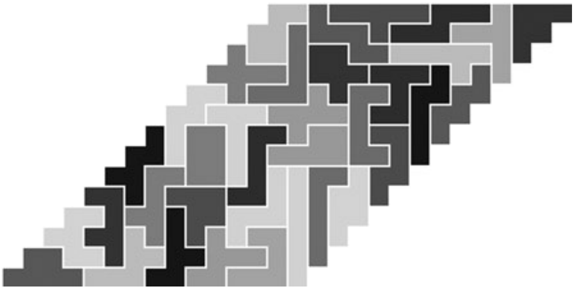


Рис. 139. Параллелограмм из гексамино

Число полимино

Математики и компьютерщики рассчитали, сколько существует n-мино для многих n. Если не считать повороты и отражения отдельными фигурами, то общее число их таково:

n	число *n*-мино
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	108
8	369
9	1285
10	4655
11	17 073
12	63 600

Таблица 11

Контактное число для шаров

Контактное число для кругов — наибольшее количество кругов, которые могут одновременно касаться данного, если все они одинакового размера — шесть (см. главу 6). Существует также контактное число для шаров — наибольшее число шаров, которые могут касаться данного, если все они одинакового размера. Это число равно 12.

Показать, что 12 шаров могут одновременно касаться данного, довольно просто. Более того, можно сделать это таким образом, чтобы точки касания образовали 12 вершин правильного икосаэдра (см. главу 5). Между этими точками достаточно места, чтобы поставить на каждое шар, и эти шары не будут касаться друг друга.

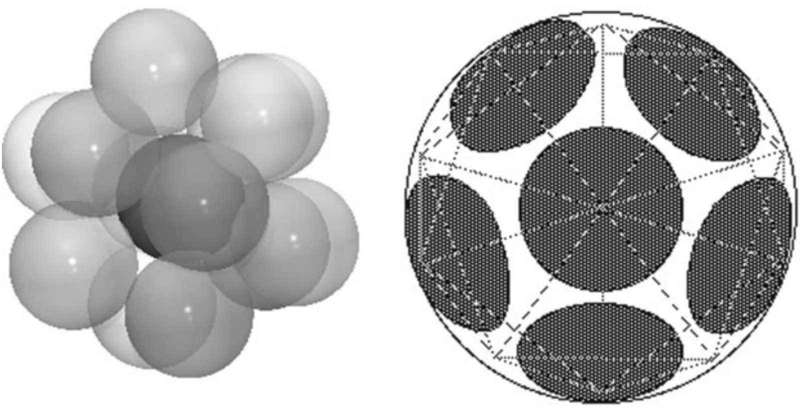


Рис. 140. Слева: как 12 шаров могут касаться одного центрального шара. Справа: «тени» 12 шаров, касающихся данного шара в вершинах икосаэдра

На плоскости шесть кругов, одновременно касающиеся центрального, не оставляют свободного места, и вся конструкция получается жесткой. Но в трех измерениях свободного места остается немало, и шары можно двигать. Долгое время было неизвестно, не хватит ли этого свободного места для тринадцатого шара, если остальные двенадцать сдвинуть правильным образом.

Два знаменитых математика — Ньютон и Дэвид Грегори — вели долгий спор по этому поводу. Ньютон утверждал, что правильное число 12, тогда как Грегори был убежден, что оно должно быть 13. В XIX в. предпринимались попытки доказать правоту Ньютона, но в них обнаруживались логические пробелы. Полное доказательство того, что контактное число для шаров равно 12, было впервые опубликовано в 1953 г.

Четыре измерения или больше

Аналогичная ситуация возникает и в четырехмерном пространстве, где относительно несложно найти вариант одновременного касания 24 четырехмерных шаров, но остается достаточно места, чтобы туда, возможно, влез 25-й шар. В этом вопросе разобрался Олег Мусин в 2003 г.; ответ, как и ожидалось, составляет 24.

В большинстве других размерностей математики знают, что некоторое конкретное количество шаров может коснуться центрального шара, и они могут найти такое расположение шаров, при котором все получится; можно также сказать наверняка, что некоторое (как правило, значительно большее) число касаний невозможно, по различным косвенным признакам и причинам. Эти числа называются *нижней* и *верхней границами* контактного числа. Само число может лежать где-то между ними или равняться одной из границ.

В двух случаях при размерностях больше 4 известные нижняя и верхняя границы совпадают, так что их общая величина и есть контактное число. Замечательно, что эти размерности 8 и 24, для которых контактные числа составляют 240 и 196 650 соответственно. В этих размерностях существует две высокосимметричные решетки — аналоги решеток из квадратов или, в более общем случае, из параллелограммов. Эти особые решетки известны как E_8 (или решетка Госсета) и решетка Лича, и шары можно разместить в подходящих для этого узловых точках. По едва ли не чудесному совпадению доказуемая верхняя граница контактного числа в этих измерениях совпадает с нижней границей, полученной при помощи этих особых решеток.

Текущее состояние проблемы отражено в таблице, где полужирным выделены те размерности, для которых известен точный ответ:

Размерность	**Нижняя граница**	**Верхняя граница**	**Размерность**	**Нижняя граница**	**Верхняя граница**
1	**2**	**2**	13	1130	2233
2	**6**	**6**	14	1582	3492
3	**12**	**12**	15	2564	5431
4	**24**	**24**	16	4320	8313
5	40	45	17	5346	12 215
6	72	78	18	7398	17 877
7	126	135	19	10 688	25 901
8	**240**	**240**	20	17 400	37 974
9	306	366	21	27 720	56 852
10	500	567	22	49 896	86 537
11	582	915	23	93 150	128 096
12	840	1416	24	**196 560**	**196 560**

Таблица 12

17

Многоугольники и орнаменты

Еще в юности Гаусс открыл, ко всеобщему, в том числе и собственному, изумлению, что правильный 17-угольник можно построить при помощи линейки и циркуля; Евклид в свое время даже не подозревал об этом. Да и никто не подозревал более 2000 лет.

Существует 17 различных типов симметрии для узоров на обоях. Это на самом деле двумерный вариант кристаллографии, то есть атомной структуры кристаллов.

В Стандартной модели физики элементарных частиц присутствует 17 типов фундаментальных частиц (см. главу 11).

Правильные многоугольники

Многоугольник (от греческого слова, означающего «много сторон») — это фигура, сторонами которой служат отрезки прямых. Многоугольник называется правильным, если все его стороны имеют одинаковую длину, и углы между соседними сторонами тоже одинаковы.

Правильные многоугольники играли центральную роль в геометрии Евклида и приобрели фундаментальное значение во многих других областях математики. Одной из основных целей евклидовых «Начал» было доказать, что существует ровно пять правильных многогранников — объемных тел, гранями которых служили одинаковые правильные многоугольники, одинаково расположенные во всех углах (см. главу 5). Для этого автору пришлось рассмотреть грани, то есть правильные многоугольники с 3, 4 и 5 сторонами. Большего числа сторон у граней правильных многогранников не бывает.

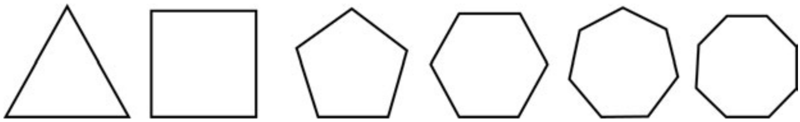


Рис. 141. Правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 7 и 8 сторонами. Это — равносторонний треугольник, квадрат и правильные пентагон, гексагон, гептагон и октагон

По ходу дела Евклиду необходимо было научиться строить эти фигуры, используя традиционные инструменты — неразмеченную линейку и циркуль, поскольку на этом строились все его геометрические методы. Простейшие построения позволяют получить равносторонний треугольник и правильный шестиугольник. Чтобы найти их вершины, достаточно одного циркуля. Чтобы прочертить стороны, необходима линейка, но к этому, собственно, и сводится вся ее роль.

Построение квадрата чуть сложнее, но, как только вы научитесь строить прямой угол, все остальное будет уже очевидно.

Пентагон — правильный пятиугольник — куда более хитрая штука. Вот как Евклид это делает. Три определенные вершины правильного пятиугольника всегда образуют треугольник с углами 36°, 72° и 72°. Более того, можно подойти с другого конца и построить правильный пятиугольник, проведя окружность через вершины такого треугольника и разделив углы 72° пополам — как это делается, Евклид показал в своей книге намного раньше (см. главу $\frac{1}{2}$).

Теперь все, что ему требовалось, это построить треугольник этой особой формы; именно это оказалось наиболее трудным. Мало того, для этого потребовалось еще одно хитрое построение, которое, в свою очередь, зависело от предыдущего. Так что неудивительно, что Евклид добрался до правильного пятиугольника лишь в четвертой книге своего тринадцатитомного труда.

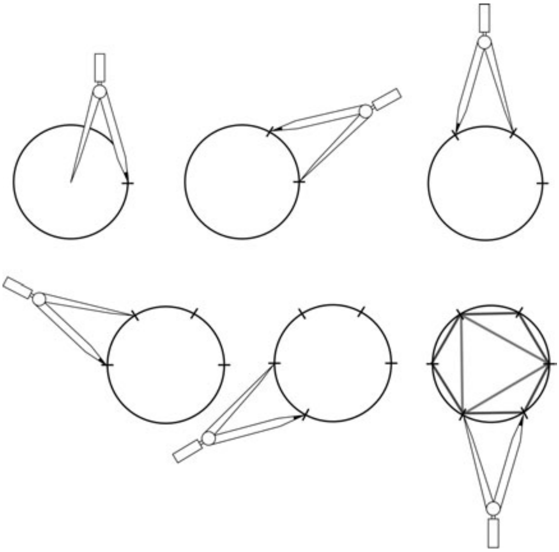


Рис. 142. Проведем окружность и отметим на ней произвольную точку. Отметим последовательно на окружности точки циркулем, не меняя расстояния между ножками. Это позволит получить шесть вершин правильного шестиугольника. Если взять каждую вторую вершину, получится равносторонний треугольник

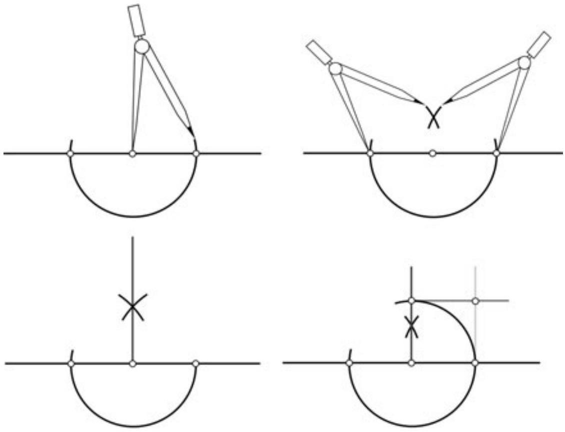


Рис. 143. Отметив точку на прямой, поставим центр циркуля в эту точку и проведем дугу, так чтобы она дважды пересекла прямую. Раздвинем ножки циркуля шире и проведем из точек пересечения первой дуги с прямой две дуги так, чтобы они пересеклись. Тогда прямая на третьем рисунке будет перпендикулярна начальной прямой. Повторив описанные действия, получим остальные стороны квадрата

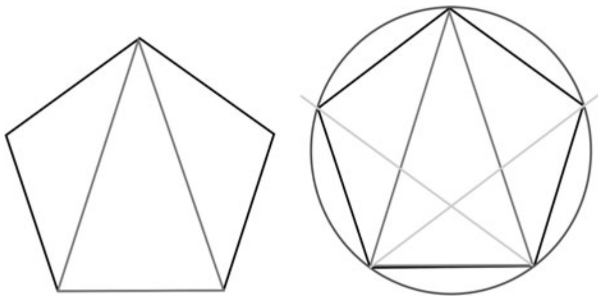


Рис. 144. Слева: эти три угла правильного пятиугольника образуют треугольник с углами 36°, 72° и 72°. Справа: имея такой треугольник, проводим окружность через его вершины (темно-серая) и строим биссектрисы углов 72°, то есть делим их пополам (светло-серые линии), чтобы получить две оставшиеся вершины пятиугольника

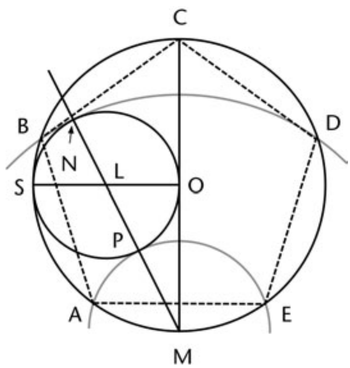


Рис. 145. Более простое построение правильного пятиугольника

На рис. 145 показано более простое и более современное построение. Начнем с окружности диаметром CM с центром в точке O. Построим в точке O перпендикулярный к CM отрезок OS и найдем его середину — точку L. Построим окружность с центром в L, проходящую через точку O и касающуюся первоначальной окружности в точке S. Пусть ML пересекает эту окружность в точках N и P. Проведем дуги (серые) окружностей с центром M через точки N и P; они пересекают большую окружность в точках B, D, A и E. Тогда ABCDE (пунктиром) — правильный пятиугольник.

Более шести сторон

Евклид знал также, как удвоить число сторон любого правильного многоугольника: для этого нужно провести бисекцию углов в его центре. На рис. 146 показано, как можно превратить, к примеру, правильный шестиугольник в правильный 12-угольник.

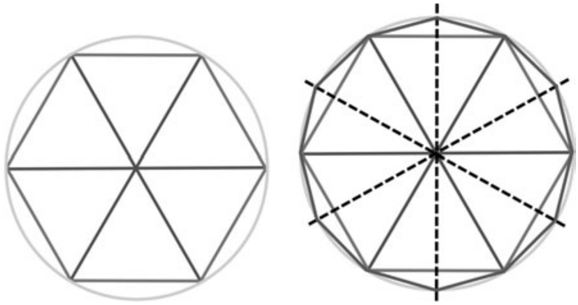


Рис. 146. Слева: начнем с шестиугольника, вписанного в окружность. Проведем его диагонали. Справа: разделим пополам все углы в центре (пунктир). Полученные биссектрисы пересекают окружность в оставшихся шести вершинах правильного двенадцатиугольника

Скомбинировав построение равностороннего треугольника и правильного пятиугольника, Евклид получил правильный 15-угольник. Этот метод работает, потому что $3 \times 5 = 15$, а 3 и 5 не имеют общих делителей.

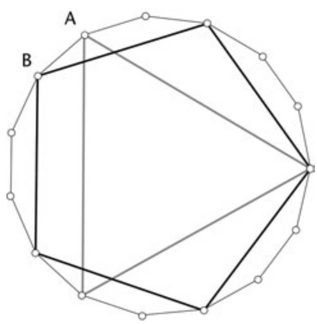


Рис. 147. Как построить пятнадцатиугольник. Вершина A равностороннего треугольника и вершина B правильного пятиугольника — последовательные вершины правильного 15-угольника. При помощи циркуля несложно отметить на окружности положение остальных его вершин.

Комбинируя все известные ему способы, Евклид научился строить правильные многоугольники со следующим числом сторон:

3 4 5 6 8 10 12 15 16 20 24 30 32 40 48

и так далее — на основе чисел 3, 4, 5 и 15, а также удвоения числа сторон. Но многих чисел в этом списке нет, и первым выпадает число 7.

Греки не сумели найти никаких способов построения при помощи линейки и циркуля отсутствующие в списке правильные многоугольники. Это не означало, что таких многоугольников не существует; это всего лишь указывало на то, что линейка и циркуль — неподходящие инструменты для их построения. Никто, похоже, не думал, что какое-то построение из отсутствующих в списке все же можно провести при помощи этих инструментов; судя по всему, никто даже не задавался этим вопросом.

Правильный 17-угольник

Гаусс — один из величайших математиков в истории человечества — в юности едва не стал лингвистом. Но в 1796 г., когда ему было 19 лет, он понял, что число 17 обладает двумя особыми свойствами, сочетание которых позволяет предположить, что для правильного 17-угольника существует построение при помощи линейки и циркуля.

Он открыл этот поразительный факт в результате размышлений не о геометрии, а об алгебре. В комплексных числах уравнения $x^{17} = 1$ существует ровно 17 решений, и оказывается, что на комплексной плоскости они образуют правильный 17-угольник: см. «Корни из единицы» в главе i. Ко времени Гаусса это было уже хорошо известно, но Гаусс заметил то, что все остальные прежде упускали из виду. Все они, как и он, знали, что 17 — число простое и что оно к тому же на 1 больше степени двойки, а именно равно $16 + 1$, где $16 = 2^4$. Однако

Гаусс доказал, что сочетание этих двух свойств подразумевает, что уравнение $x^{17} = 1$ может быть решено при помощи обычных алгебраических операций — сложения, вычитания, умножения и деления — плюс извлечение квадратного корня. А все эти операции можно провести геометрически, пользуясь линейкой и циркулем. Короче говоря, для правильного 17-угольника должно существовать классическое построение. А это была сенсация — ведь более 2000 лет никто даже не мечтал ни о чем подобном. Это был гром среди ясного неба. Безусловно, это событие помогло Гауссу сделать жизненный выбор в пользу математики.

Он не описал в явном виде способ построения, но пятью годами позже в своем шедевре «Арифметические исследования» (Disquisitiones Arithmeticae) он записал формулу

$$\frac{1}{16}\left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\ +\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})}\end{array}\right]$$

и доказал, что 17-угольник может быть построен, если вы сумеете построить отрезок такой длины на базе отрезка единичной длины. Поскольку в формуле фигурируют только квадратные корни, ее можно перевести в довольно сложное геометрическое построение. Однако существуют и более эффективные методы, открытые несколькими математиками, размышлявшими над доказательством Гаусса.

Гаусс понимал, что логическая цепочка, применимая к 17, применима и к любому другому числу, обладающему теми же двумя свойствами: это число должно быть простым и на 1 больше степени 2. Эти числа называют простыми числами Ферма. Алгебраическими методами можно доказать, что если число $2^k + 1$ простое, то k должно быть равно 0 или степени 2, то есть $k = 0$ или 2^n. Числа такого вида называют числами Ферма. Первые несколько чисел Ферма представлены в табл. 13.

n	$k = 2^n$	$2^k + 1$	Простое?
	0	2	Да
0	1	3	Да
1	2	5	Да
2	4	17	Да
3	8	257	Да
4	16	65 537	Да
5	32	4 294 967 297 (равно 641 × 6 700 417)	Нет

Таблица 13

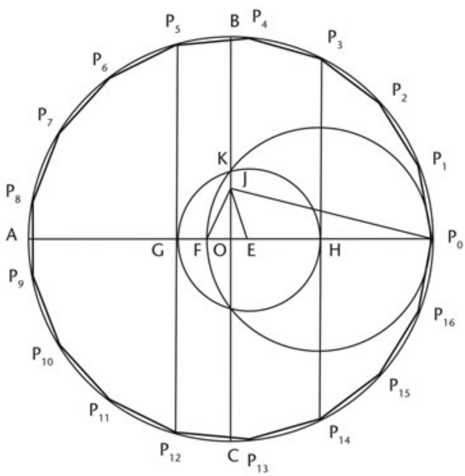


Рис. 148. Предложенный Ричмондом метод построения правильного 17-угольника. Возьмем два перпендикулярных диаметра окружности AOP_0 и BOC. Построим $OJ = \frac{1}{4}OB$ и угол $OJE = \frac{1}{4}OJP_0$. Найдем точку F, такую, что угол $EJF = 45°$. Проведем окружность диаметром FP_0; она пересечет OB в точке K. Проведем окружность с центром E через K; она пересечет AP_0 в точках G и H. Проведем HP3 и GP5 перпендикулярно к AP_0.

Первые шесть чисел Ферма — простые. Первые три из них — 2, 3 и 5 — соответствуют построениям, известным еще грекам. Следующее — для 17 — открыл Гаусс. За этим следуют два еще более поразительных числа — 257 и 65 537. Благодаря открытию Гаусса мы знаем, что правильные многоугольники с таким числом сторон также можно построить при помощи линейки и циркуля. В 1832 г. Ф. Ришело опубликовал построение для правильного 257-угольника. О. Гермес из Лингенского университета посвятил 10 лет жизни построению 65 537-угольника. Его неопубликованную работу можно найти в Гёттингенском университете, однако считается, что в ней есть ошибки. Неясно, стоит ли проверка этой работы тех усилий, которые придется на это затратить, ведь мы и так знаем, что такое построение *существует*. Найти его — рутинная задача, если забыть о количестве необходимых для этого расчетов. Мне кажется, эта задача может стать хорошим тестом для компьютерных систем проверки доказательств.

Некоторое время считалось, что все числа Ферма простые, но в 1732 г. Эйлер заметил, что 7-е число Ферма — 4 294 967 297 — является составным и равно 641 × 6 700 417. (Не забывайте, что в те дни все расчеты приходилось делать вручную. Сегодня компьютер определил бы это за долю секунды.) С тех пор и до настоящего времени не доказана простота ни одного из дальнейших чисел Ферма. Для $5 \leq n \leq 11$ это составные числа, для которых известно полное разложение на простые множители.

Для $12 \leq n \leq 32$ числа Ферма также составные, но для них известны не все множители, а для $n = 20$ и 24 не известно ни одного множителя в явном виде. Существует непрямой тест на простоту числа Ферма, и эти два числа его не проходят. Наименьшее число Ферма, статус которого неизвестен, соответствует $n = 33$ и содержит 2 585 827 973 десятичных знака. Возведите 2 в степень, равную этому числу, и добавьте 1… Настоящий монстр! Однако не вся надежда потеряна из-за одного только размера числа: наибольшее известное составное число Ферма — это $F_{2\,747\,497}$, и делится оно на

$$57 \times 2^{2\,747\,499} + 1$$

(Маршалл Бишоп, 2013).

Представляется вполне возможным, что уже известные простые числа Ферма — единственные в своем роде, но это до сих пор не доказано. Если это не так, то существует правильный многоугольник с гигантским простым числом сторон, который можно построить при помощи линейки и циркуля.

Рисунки на обоях

Рисунок на обоях повторяет одно и то же изображение в двух различных направлениях: сверху вниз и вдоль стены (возможно, с наклоном). Повторение сверху вниз возникает из-за того, что обои печатаются на длинном рулоне, причем рисунок наносится на бумагу при помощи вращающегося барабана. Повторение рисунка вдоль стены дает возможность продолжать узор в стороны — покрыть единым орнаментом целую стену.

Число возможных обойных *рисунков* чрезвычайно велико. Однако многие рисунки организованы идентично, только с использованием разных изобразительных элементов. Поэтому математики различают существенно разные рисунки по тому, какие в них имеются симметрии. Какими способами можно наклонить рисунок, или повернуть его, или даже перевернуть (как бы отразить в зеркале), чтобы конечный результат совпал с первоначальным изображением?

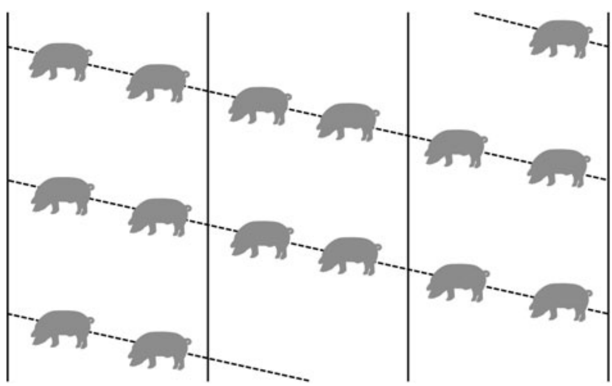


Рис. 149. Рисунки на обоях повторяются в двух направлениях

Симметрии на плоскости

Группа симметрии узора на плоскости включает в себя все перемещения фигуры как единого целого на плоскости, в результате которых узор точно накладывается сам на себя. Существует четыре важных типа такого перемещения:

- параллельный перенос (сдвиг без вращения);
- вращение (поворот вокруг некоторой фиксированной точки — центра вращения);
- отражение (зеркальное отражение относительно некоторой прямой — оси симметрии);
- скользящее отражение (зеркальное отражение и сдвиг вдоль оси симметрии).

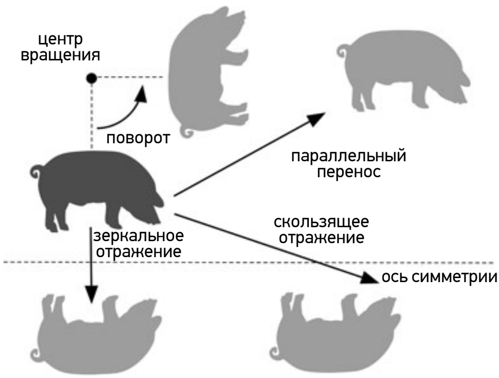


Рис. 150. Четыре типа перемещения фигур как единого целого

Если рисунок занимает конечную область, в нем возможны только вращение и зеркальное отражение. Вращение само по себе дает циклическую групповую симметрию, тогда как вращение плюс зеркальное отражение дает диэдральную групповую симметрию.

Бесконечные обойные узоры могут иметь в своем составе симметрии по типу параллельного переноса и скользящего отражения. Так, мы можем разместить диэдральный групповой рисунок из свинок на квадратной плитке и замостить такими плитками плоскость. (Диаграмма показывает лишь четыре из бесконечного набора плиток.) В таком рисунке присутствуют параллельные переносы (их примеры показаны сплошными стрелками) и скользящие отражения (пунктирная стрелка).

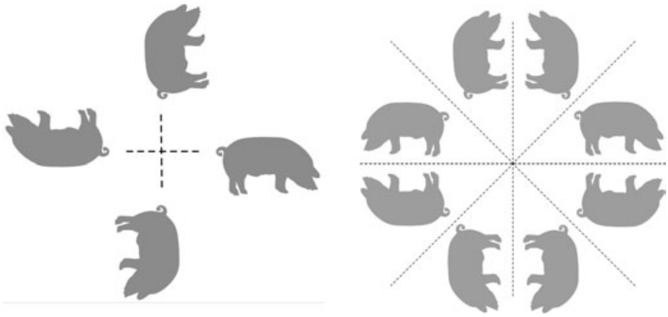


Рис. 151. Слева: циклическая групповая симметрия (здесь вращение на углы, кратные прямому). Справа: диэдральная групповая симметрия (пунктирными линиями показаны оси симметрии)

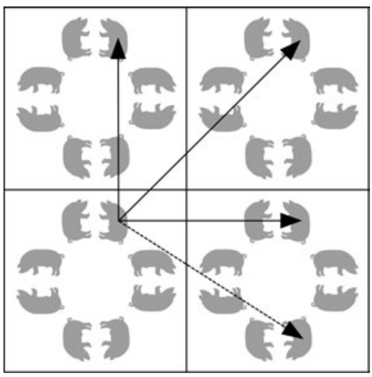


Рис. 152. Набор квадратных плиток, на котором показаны симметрии по типу параллельного переноса (сплошные стрелки) и скользящего отражения (пунктирная стрелка)

17 типов обоев по видам симметрии

На моих обоях с цветочным рисунком присутствует только один вид симметрии — параллельный перенос в двух направлениях, в которых рисунок повторяется, или несколько таких переносов, совершаемых поочередно. Это простейший тип обойной симметрии, и в любом обойном дизайне, если рассматривать его с математической точки зрения, такие решетчатые симметрии присутствуют по определению. Я не утверждаю, что не существует таких вещей, как, к примеру, фотообои, где рисунок не повторяется и никакой симметрии нет вообще, за исключением тривиальной «оставить все как есть». Просто подобные рисунки не относятся к теме нашего разговора, и я исключаю их из рассмотрения.

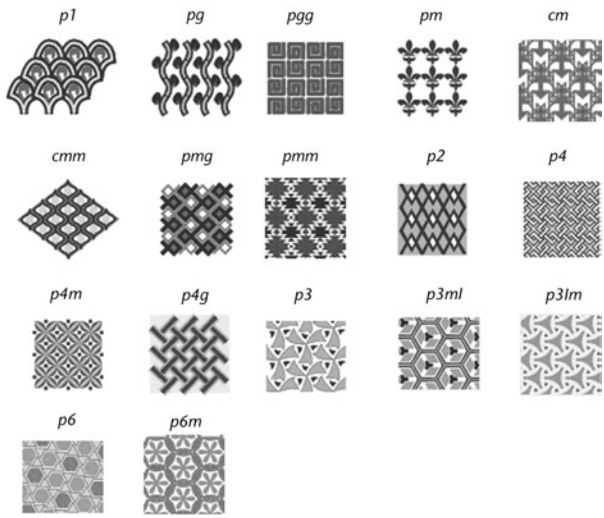


Рис. 153. 17 типов обойных рисунков и их международные кристаллографические обозначения. (Взято с сетевого ресурса MathWorld.)

Во многих типах обоев присутствуют дополнительные виды симметрии, такие как вращения и зеркальные отражения. В 1924 г. Дьёрдь Пойа и Пауль Ниггли доказали, что существует ровно 17 различных типов обойных рисунков.

В трех измерениях аналогичная задача сводится к тому, чтобы составить список всех возможных типов кристаллических атомных решеток по их симметриям. Таких типов насчитали 230. Забавно, но этот ответ был получен раньше, чем кто-либо решил гораздо более простую двумерную версию задачи про обойные рисунки.

23

Парадокс дней рождения

Во время футбольного матча на поле обычно присутствует 23 человека: две команды по 11 игроков в каждой плюс рефери. (Кроме того, два помощника рефери дежурят непосредственно за границей поля и еще один чуть дальше, но мы оставим их за скобками вместе с медиками, болельщиками, которые время от времени толпой выбегают на поле, и всевозможными менеджерами.) Какова вероятность того, что у двух или больше из этих людей день рождения придется на одно и то же число?

Скорее да, чем нет

Ответ вас удивит, если вы никогда прежде с этой задачей не сталкивались.

Для простоты расчетов положим, что возможны лишь 365 разных дней рождения (и никакого 29 февраля для тех, кто родился в високосный год) и что на любую из этих дат день рождения может выпасть с абсолютно равной вероятностью $\frac{1}{365}$. Реальные данные показывают небольшие, но существенные различия: в некоторые даты и времена года люди рождаются чаще, чем в другие, причем эти различия в разных странах разные. Если принять во внимание эти дополнительные факторы, искомая вероятность не слишком сильно изменится; результат по крайней мере останется столь же удивительным.

Считаем также, что вероятности попадания дня рождения на определенную дату для разных игроков не зависят друг от друга, что не соответствовало бы действительности, если бы, к примеру, игроков специально отбирали таким образом, чтобы дни рождения у них были разные. Или как, скажем, в ледяном мире планеты Гнус I, где каждое новое поколение инопланетных чудовищ вылупляется одномоментно в подземных туннелях и разные поколения не могут играть в одной команде — эти существа представляют собой нечто среднее между человеком и насекомыми со стадийным развитием вроде цикад. Поэтому, если два гнусоида сходятся на поле, вероятность общего дня рождения для них автоматически становится равной 1.

Проще найти другую вероятность, связанную с первой, — вероятность того, что все 23 дня рождения *различны*. По правилам логики, после этого нам достаточно вычесть полученный результат из 1, чтобы получить искомый ответ. Иными словами, вероятность того, что событие не произойдет, равна единице минус вероятность этого события. При описании расчета удобно считать, что люди появляются на поле по одному.

- При появлении первого человека на поле никого нет. Поэтому вероятность того, что его день рождения не совпадает с днями рождения остальных присутствующих, равна 1 (это факт).
- Когда на поле появляется второй человек, его день рождения не должен совпадать с днем рождения первого, так что его дата может приходиться на 364 дня из 365. Вероятность этого составляет

  $$\frac{364}{365}.$$

- Когда появляется третий, его день рождения не должен совпадать с днями рождения первых двоих, так что для него в году остается 363 варианта даты из 365. Согласно правилам вычисления вероятностей, вероятность того, что два независимых события одновременно произойдут, равна *произведению* их вероятностей. Так что вероятность того, что до сих пор совпадения нет, составляет

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}.$$

- Когда появляется четвертый, его день рождения не должен совпадать с днями рождения первых трех, так что для него в году остается 362 варианта даты из 365. Вероятность несовпадения равна

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}.$$

- Принцип ясен. После появления на поле k человек вероятность того, что все k дней рождения различны, составляет

$$P(k)=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{365-k+1}{365}.$$

При $k = 23$ даже наименьший сомножитель все еще близок к единице и составляет 0,9397; тем не менее их произведение близко к 0,4927, то есть чуть меньше $\frac{1}{2}$. Таким образом, вероятность того, что по крайней мере у двух человек на поле дни рождения приходятся на один и тот же день года, равна 1–0,492703, что составляет

0,507297.

Это чуть больше $\frac{1}{2}$.

Иными словами, если собрать в одном месте 23 человека, то совпадения дней рождения среди них *скорее будут, чем нет*.

Строго говоря, 23 — наименьшее число, для которого это утверждение верно. Для 22 человек P (22) = 0,524305 — чуть больше половины. Тогда вероятность совпадающих дней рождения составит 1 – 0,524305, что равно 0,475695 — чуть меньше половины.

На рис. 154 показано, как $P(k)$ зависит от k, для k от 1 до 50. Горизонтальная линия соответствует равной вероятности обоих событий (50:50).

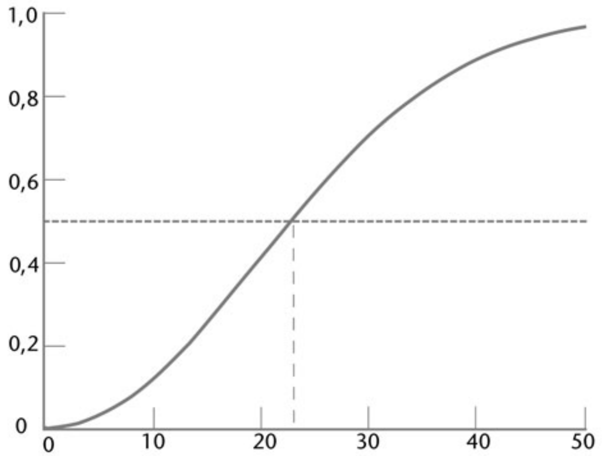


Рис. 154. Зависимость $P(k)$ от k

Удивительно, что число $k = 23$ так мало. При 365 днях в году, на любой из которых может прийтись день рождения любого человека, представляется, что для того, чтобы вероятность совпадения дат стала больше половины, потребуется гораздо больше людей. Это интуитивное представление ложно, потому что при добавлении новых участников перемножать приходится все больше членов убывающей последовательности вероятностей. Так что результат уменьшается быстрее, чем мы того ожидаем.

Тот же день рождения, что у вас

Возможно, для нашего удивления есть и другая причина. Не исключено, что мы путаем эту задачу с другой: определить, сколько человек нужно собрать, чтобы вероятность совпадения одного из дней рождения присутствующих *с вашим* днем рождении превысила половину?

Этот вопрос немного проще для анализа. Опять же, мы подойдем с другой стороны и рассчитаем вероятность *несовпадения* дней рождения. Для каждого человека вероятность того, что его день рождения не совпадает с вашим, всегда одна и та же, а именно

$$\frac{364}{365}.$$

Таким образом, для k человек вероятность того, что все их дни рождения отличаются от вашего, составляет

$$\frac{364}{365}\times\ldots\times\frac{364}{365}=\left(\frac{364}{365}\right)^k.$$

Здесь числа, которые мы перемножаем, не убывают. Их произведение уменьшается с ростом числа множителей, поскольку $\frac{364}{365}$ меньше 1, но медленнее. Нам теперь потребуется $k = 253$ человек, прежде чем это число упадет до $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253}=0,499523.$$

Теперь если что-то нас и удивляет, так это то, что число получилось такое *большое*.

Дни рождения на Юпитере

Мы получили в ответе 23, потому что в году 365 дней. Вообще-то число 365 не несет в себе никакого особого математического смысла: оно возникает из астрономических соображений. С математической точки зрения нам следовало бы рассмотреть более общую задачу, в которой число дней в году может быть произвольным.

Начнем с задачи о днях рождения для шароидов — выдуманной инопланетной расы, представители которой плавают в глубинах юпитерианской водородно-гелиевой атмосферы, поскольку их клетки наполнены водородом. Юпитер дальше от Солнца, чем Земля, поэтому его год — время полного оборота планеты вокруг Солнца — длиннее нашего (он составляет 4332,59 земных суток). Кроме того, Юпитер вращается быстрее Земли, так что его сутки — время оборота вокруг своей оси — короче наших (9 час 55 мин 30 сек). Таким образом, год на Юпитере состоит приблизительно из 10 477 юпитерианских суток.

Аналогичные расчеты показывают, что везде, где 121 шароид — три команды по 40 шароидов плюс рефери — соберутся, чтобы погонять мяч, вероятность совпадения дней рождения по крайней мере у двоих из присутствующих будет чуть больше половины. Строго говоря, эта вероятность равна

$$1-\left(\frac{10\,476}{10\,477}\times\frac{10\,475}{10\,477}\times\ldots\times\frac{10\,356}{10\,477}\right)=0{,}501234,$$

тогда как для 120 шароидов такая вероятность равна 0,495455.

Юпитерианские математики, недовольные необходимостью снова и снова рассчитывать такие вероятности для разного числа дней в году, разработали общую формулу. Она не вполне точна, но обеспечивает хорошее приближение и отвечает на общий вопрос: если имеется n возможных вариантов даты, то сколько существ нужно собрать, чтобы вероятность того, что хотя бы двое из этих существ родились в один и тот же день, превысила $\frac{1}{2}$?

Юпитерианцы об этом не знали, но вот уже полстолетия (по-юпитериански) вокруг Юпитера обращается флотилия инопланетных захватчиков с планеты Нииблбрукт. За это время они не раз похищали по сорок два юпитерианских математика в надежде выведать секрет этой формулы. Дело в том, что нииблбруктианский год состоит ровно из $42^4 = 3\,111\,696$ нииблбруктианских суток, и никому до сих пор не удалось определить, каким числом в этой схеме нужно заменить 121.

Эту задачу можно решить при помощи секретной юпитерианской формулы. Юпитерианцы доказали, что, если выбирать приходится из n дат, а существ присутствует k, вероятность того, что по крайней мере у двоих из них день рождения окажется одинаковым, впервые превысит $\frac{1}{2}$ при k, близком к

$$\sqrt{\ln 4} \times \sqrt{n},$$

где постоянная $\sqrt{\ln 4}$ представляет собой корень квадратный из логарифма 4 по основанию *ln* и равна приблизительно 1,1774.

Попробуем применить эту формулу к трем примерам.

- *Земля:* $n = 365$, $k \sim 22{,}4944$.
- *Марс:* $n = 670$, $k \sim 30{,}4765$.
- *Юпитер:* $n = 10\,477$, $k \sim 120{,}516$.

Округляя до следующего целого числа, получим точку перехода на 23, 31 и 121 существа. Мы знаем, что это верные значения. Однако для больших n формула не настолько точна. В частности, для нииблбруктианского года, где $n = 3\,111\,696$, она дает

$$k = 2076{,}95,$$

что округляется до 2077. Но точный расчет показывает, что

$$P(k) = 0{,}4999,$$

что чуть меньше половины, а верный ответ оказывается равным 2078, для которого

$$P\ (k) = 0{,}5002.$$

Формула объясняет, почему число существ, необходимых для того, чтобы совпадение дней рождения скорее встретилось в компании, чем не встретилось, так мало. По порядку величины оно соответствует *корню квадратному* из числа дней в году, а это гораздо меньше, чем число дней. Так, для года, состоящего из миллиона дней, квадратный корень составляет всего лишь одну тысячу.

Ожидаемое число

Существует еще один распространенный вариант этой задачи:

При n возможных днях рождения каково *ожидаемое* число существ, при котором по крайней мере у двоих дни рождения придутся на одну и ту же дату? Иными словами, сколько существ для этого потребуется в среднем?

Если $n = 365$, ответ оказывается равным 23,9. Это настолько близко к 23, что две задачи иногда путают. Здесь опять же существует хорошая приближенная формула:

$$k \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{n}$$

и постоянная $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533$. Это чуть больше, чем $\ln 4 = 1{,}1774$.

Фрэнк Матис нашел более точную формулу для числа существ, необходимых для того, чтобы дни рождения скорее совпали, чем нет:

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2n \ln 2}.$$

Индийский математик-самоучка Сриниваса Рамануджан, обладавший гениальным чутьем на формулы, нашел более точную формулу для ожидаемого числа существ:

$$\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n}.$$

26

Тайные шифры

Стоит упомянуть шифры, и на память тут же приходят Джеймс Бонд или «Шпион, пришедший с холода»*. Однако почти каждый из нас пользуется тайными шифрами в повседневной жизни, причем с совершенно нормальными и законными целями: к примеру, для управления банковскими счетами. Все наше общение с банком шифруется — кодируется при помощи шифра, чтобы преступники не могли прочесть наши сообщения и получить доступ к нашим деньгам. По крайней мере с легкостью.

В английском алфавите 26 букв, и в практически используемых шифрах часто фигурирует число 26. Так, в машине «Энигма», которую немцы использовали для шифрования, применялись роторы с 26 позициями по числу букв. Таким образом, это число представляется разумным заголовком для статьи, посвященной криптографии. Однако само по себе оно не имеет никаких особых математических свойств в этом контексте, те же принципы работают и с другими числами.

Шифр Цезаря

История шифров восходит по крайней мере к Древнему Египту и начинается около 1900 г. до н. э. Юлий Цезарь в частной переписке и для военной секретности пользовался простым шифром. Его биограф Светоний писал: «Если нужно было сообщить что-нибудь негласно, он пользовался тайнописью, то есть менял

---

* Видимо, автор имеет в виду фильм «The Spy Who Came in from the Cold» 1965 г., снятый по одноименному роману Дэвида Корнуэлла. — *Прим. ред.*

буквы так, чтобы из них не складывалось ни одного слова. Чтобы разобрать и прочитать их, нужно читать всякий раз четвертую букву вместо первой: например, D вместо A и так далее».

В дни Цезаря в алфавите не было букв J, U и W, но мы будем работать с сегодняшним алфавитом, поскольку так привычнее. Его идея состояла в том, чтобы записать алфавит в обычном порядке, а затем внизу поместить его же сдвинутую версию — возможно, так:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E

Теперь вы можете зашифровать сообщение, превратив каждую букву обычного алфавита в букву, стоящую на той же позиции в сдвинутом алфавите. При этом A превращается в F, B — в G и так далее. Примерно так:

J	U	L	I	U	S	C	A	E	S	A	R
O	Z	Q	N	Z	X	H	F	J	X	F	W

Чтобы расшифровать это сообщение, достаточно взять обратное соответствие между двумя алфавитами:

O	Z	Q	N	Z	X	H	F	J	X	F	W
J	U	L	I	U	S	C	A	E	S	A	R

Чтобы получить удобное устройство, которое автоматически сопоставляло бы символы алфавита, можно расставить буквы по кругу или разместить на цилиндре.

Шифр Цезаря слишком прост, чтобы быть сколько-нибудь надежным, о причинах чего мы поговорим позже. Но в нем уже присутствуют некоторые базовые идеи и понятия, общие для всех *шифров*, то есть для всех кодовых систем:

- *открытый текст* — исходное сообщение;
- *шифротекст* — его зашифрованная версия;
- *алгоритм шифрования* — метод преобразования открытого текста в шифротекст;
- *алгоритм расшифровки* — метод преобразования шифротекста в открытый текст;
- *ключ* — тайная информация, необходимая для шифрования и расшифровки текста.

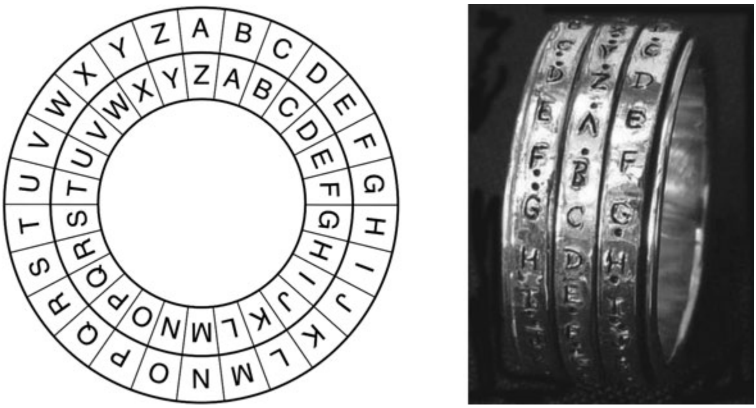


Рис. 155. Практические устройства для сопоставления

В шифре Цезаря ключ — это число шагов, на которые сдвигается алфавит. Алгоритм шифрования состоит в том, чтобы «сдвинуть алфавит на несколько шагов согласно ключу». Алгоритм расшифровки — в том, чтобы «сдвинуть алфавит *в обратном направлении* на несколько шагов согласно ключу», то есть сдвинуть его на минус ключ шагов в том же направлении, что и прежде.

В этой системе ключ шифрования и ключ расшифровки тесно связаны между собой: они противоположны, то есть представляют собой одинаковый сдвиг в противоположных направлениях. В подобных случаях знать ключ шифрования — по существу, то же самое, что знать ключ расшифровки. Такая система называется *шифром с симметричным ключом*.

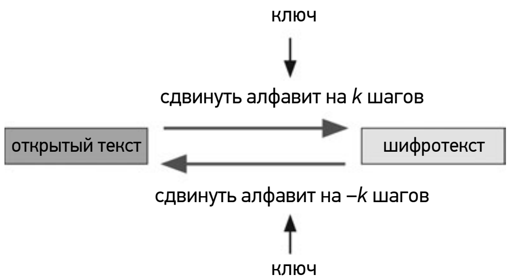


Рис. 156. Общие характеристики системы шифрования

Очевидно, Цезарь пользовался и более сложными шифрами, и не напрасно.

Математическое описание

Шифр Цезаря можно выразить математически при помощи модульной арифметики (см. главу 7). В данном случае модуль равен 26 — числу букв в алфавите. Арифметические действия производятся как обычно, с одним дополнительным условием: любое число, кратное 26, можно заменить нулем. Это именно то, что нам нужно, чтобы адекватно «замкнуть алфавит в кольцо».

Теперь буквы A — Z представлены у нас числами 0–25, причем A = 0, B = 1, C = 2 и так далее, вплоть до Z = 25. Метод шифрования, при котором A (позиция 0) сдвигается до F (позиция 5), на языке математики записывается так:

$$n \to n + 5 \pmod{26}.$$

Обратите внимание: U (позиция 20) переходит на позицию 20 + 5 = 25 (mod 26), что соответствует Z, тогда как V (позиция 21) переходит на позицию 21 + 5 = 26 = 0 (mod 26), что соответствует A. На этом примере видно, как математическая формула обеспечивает корректное зацикливание алфавита.

Метод дешифровки представляет собой аналогичное правило:

$$n \to n - 5 \pmod{26}.$$

Поскольку $n + 5 - 5 = n \pmod{26}$, дешифровка ликвидирует шифрование.

В целом, если ключ k означает «сдвиг на k шагов вправо», то правило шифрования выглядит так:

$$n \to n + k \pmod{26},$$

а правило расшифровки — так:

$$n \to n - 5 \pmod{26}.$$

Смысл перевода шифра на язык математики в том, что теперь мы можем описывать шифры точным образом и анализировать их свойства, не беспокоясь о том, как ведет себя задействованный алфавит. Все теперь работает *в числах*. Помимо прочего, это позволяет нам рассматривать дополнительные символы — строчные буквы a, b, c, ..., знаки препинания; цифры. Достаточно изменить 26 на что-то большее и решить раз и навсегда, как обозначить цифры.

Как разгадать шифр Цезаря

Шифр Цезаря очень ненадежен. В описанном виде у него всего 26 возможных вариантов, так что вы без труда можете пробовать их все до тех пор, пока один из вариантов не даст на выходе осмысленное сообщение. Такой метод не сработает для варианта шифра, известного как *шифр подстановки,* в котором алфавит перемешивается, а не просто сдвигается. В этом шифре уже 26! вариантов (см. главу 26!), а это громадное число. Но для разгадки таких шифров существует простой способ. В любом языке есть буквы, которые встречаются в тексте чаще других.

В английском языке самая распространенная буква — E, на нее приходится около 13% всех букв в тексте. Далее идет

Т (9%), А (8%) и так далее*. Если вы перехватили длинный шифротекст и подозреваете, что закодирован он шифром подстановки с перемешиванием алфавита, то вы можете провести подсчет и вычислить частоту встречаемости всех букв в нем. Вероятно, частоты не лягут точно в теоретическую картину, поскольку тексты бывают разные. Но если, к примеру, в шифротексте чаще всего попадается буква Q, вы можете попробовать подставить вместо нее E. Если следующая по частоте встречаемости буква M, посмотрите, что получится, если заменить ее на T и так далее. Можно немного менять порядок; даже в этом случае вариантов для проверки у вас окажется намного меньше.

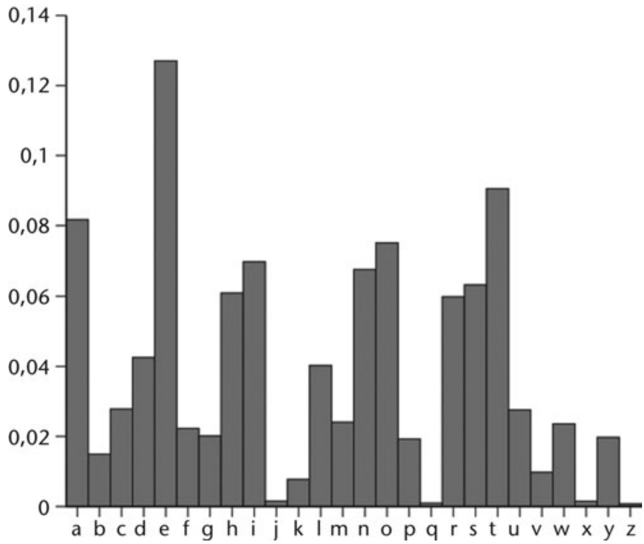


Рис. 157. Частота встречаемости букв в типичном английском тексте

Предположим, что в шифротексте содержится, помимо всего прочего, такой фрагмент:

* В русском тексте с алфавитом из 32 букв четыре первых места по частоте встречаемости занимают гласные О, Е, А, И (соответственно 11; 8,5; 8 и 7,4%), после которых идут согласные Н, Т, С (от 6,7 до 5,5%). — *Прим. пер.*

X J M N Q X J M A B W,

и вы знаете, что чаще всего в тексте встречаются Q, M и J, именно в таком порядке. Подставим E вместо Q, T вместо M, A вместо J, оставив вместо остальных букв пробелы:

- A T - E - A T - - -.

Несложно догадаться, что на самом деле сообщение может выглядеть так:

M A T H E M A T I C S.

Взяв более длинный фрагмент шифротекста, вы скоро поймете, имеет ли смысл такая расшифровка, ведь теперь вы предполагаете, что X расшифровывается как M; N — как H; A — как I; B — как C; и W — как S. Если другая часть шифротекста выглядит как

W B A Q R B Q H A B M A L R,

то вы скоро расшифруете его предположительно как

S C I E - C E - I C T I - - -

и догадаетесь, что здесь должно быть

S C I E N C E F I C T I O N.

Двойная N дает полезное дополнительное подтверждение, и теперь вы знаете, как расшифровываются N, F и O. Метод работает быстро даже вручную и позволяет без лишнего промедления разгадать шифр.

Методов шифрования существуют тысячи. Процесс взлома шифра, то есть выяснения метода расшифровки сообщений, если алгоритмы заранее неизвестны, а ключа нет, зависит от шифра. Существуют несложные шифры, которые практически невозможно взломать, поскольку ключ меняется раньше, чем криптографы успевают набрать достаточно материала для расшифровки. Во время Второй мировой войны такой результат достигался использованием одноразовых шифровальных таблиц; по существу, это был блокнот со сложными ключами, каждый из которых использовался один раз для зашифровки короткого сообщения, а затем уничтожался. Основная проблема такого метода — то, что шпиону приходится держать таблицы под рукой (сегодня это может быть какой-то электронный гаджет, выполняющий ту же функцию) и они могут быть у него найдены.

«Энигма»

Одна из самых знаменитых систем шифрования — германская машина «Энигма», использовавшаяся в ходе Второй мировой войны. Ее шифр взломали математики и инженеры-электронщики из британского Блетчли-Парка, самым известным из которых был пионер компьютерной науки Алан Тьюринг. В этом деле им очень помогло то, что в распоряжении группы имелся работающий экземпляр машины, полученный в 1939 г. от группы польских криптографов, которые к тому моменту уж несколько лет работали над взломом шифра «Энигмы» и существенно продвинулись в этом направлении.

Были взломаны и другие германские шифры, включая еще более сложный шифр машины «Лоренц», причем в данном случае самой машины в распоряжении криптографов не было. Команде криптоаналитиков под руководством Ральфа Тестера пришлось устанавливать вероятное ее устройство по перехваченным сообщениям. Затем математики, воспользовавшись блестящей идеей В. Татта, начали взлом шифра, что позволило получить полезную информацию о принципах работы машины. После этого дело пошло быстрее. Для решения практической задачи расшифровки сообщений пришлось сконструировать особое электронное устройство «Колосс»; его разработала и построила команда специалистов под руководством Томаса Флауэрса. По существу, «Колосс» был одним из первых специализированных электронных компьютеров.

Рис. 158. Машина «Энигма»

«Энигма» состояла из *клавиатуры* для ввода открытого текста и серии *роторов*; каждый ротор имел 26 позиций, соответствовавших буквам алфавита. У первых образцов машины было три ротора; позже их число было увеличено до пяти (а у машин, предназначенных для германского военно-морского флота, роторов было восемь), из которых на каждый конкретный день нужно было выбрать любые три. Целью роторов было перемешивать буквы открытого текста *способом, который менялся всякий раз при введении новой буквы*. Конкретный метод довольно сложен; познакомиться с ним можно на сайте

http://www.codesandciphers.org.uk/enigma/example1.htm.

Грубо говоря, процесс проходит примерно так: каждый ротор изменяет алфавит по принципу шифра Цезаря со сдвигом, который определяется положением ротора. Когда буква поступает на первый ротор, то сдвинутый результат передается на второй и снова сдвигается; затем результат поступает на третий ротор и сдвигается третий раз. В этот момент сигнал достигает *рефлектора* — набора из 13 проводов, соединяющих буквы попарно, — который превращает получившуюся букву в парную ей — ту, с которой она связана в системе рефлектора. Затем результат передается обратно через те же три ротора; в результате получается итоговая буква, которая и заменяет в шифротексте исходную.

После этого шифротекст считывается с *ламповой панели* (это 26 ламп, по одной на каждую букву алфавита; загоревшаяся лампа указывает на букву шифротекста, соответствующую только что введенной букве открытого текста).

Самое хитрое в этом устройстве — то, как соответствие между буквой открытого текста и буквой шифротекста *меняется* с каждым нажатием клавиши. С нажатием на любую клавишу клавиатуры роторы переводятся в следующее положение и, соответственно, иначе сдвигают алфавит. Ротор справа всякий раз поворачивается вперед на следующую позицию. Ротор в середине сдвигается на одну позицию всякий раз, когда правый ротор проходит букву Z и возвращается на A. Ротор слева делает то же самое, ориентируясь на средний ротор.

Рис. 159. Комплект из трех роторов

Таким образом, роторы «Энигмы» работают приблизительно так же, как счетчик пройденного пути в автомобиле (так, как этот счетчик работал до того, как стал электронным). Там цифра в разряде единиц меняется от 0 до 9 и вновь возвращается на 0, делая по одному шагу за раз. Цифра в разряде десятков делает то же самое, но двигается только тогда, когда получает «перенос» из разряда единиц при переходе того с 9 на 0. Аналогично, цифра в разряде сотен увеличивается на 1 только тогда, когда получает перенос из разряда десятков. Таким образом, блок из трех цифр показывает числа от 000 до 999, добавляя всякий раз по единичке, а затем возвращается на 000.

Однако на роторах «Энигмы» по 26 «цифр» — буквы от A до Z — и вместе они дают $26 \times 26 \times 26 = 17\,576$ различных положений. Более того, они могут быть установлены в любую начальную позицию. При реальном использовании такая позиция устанавливалась в начале дня и использовалась в течение 24 часов.

Я описал пошаговый процесс в терминах левого, среднего и правого роторов, однако на самом деле роторы в машине могут использоваться в произвольном порядке (в любом из шести возможных вариантов). Это сразу же увеличивает число возможных начальных состояний вшестеро и дает 105 456 вариантов.

При военном использовании дополнительный уровень секретности обеспечивала *штепсельная панель*, которая меняла некоторые буквы (те, что были соединены на ней в пары специальными проводами) местами. Использовалось до десяти таких проводов, что давало 150 738 274 937 250 вариантов. Опять же, конфигурация штепсельной панели менялась ежедневно.

Для пользователей такая система была весьма удобна своей симметричностью. Для расшифровки сообщений можно было использовать ту же самую или другую такую же машину. Конечно, начальные установки на каждый день необходимо было сообщать всем пользователям: немцы использовали для этого своеобразный вариант одноразовых блокнотов.

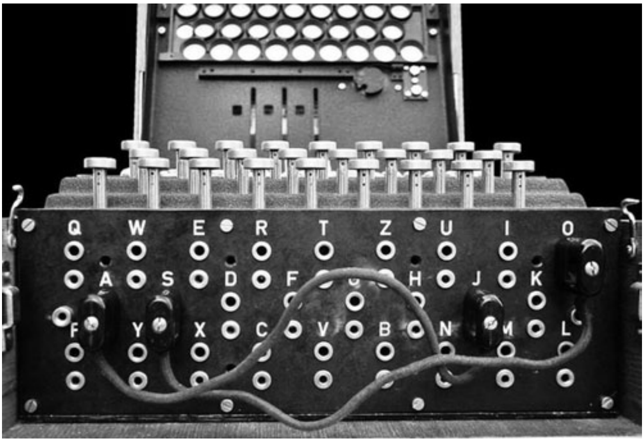


Рис. 160. Штепсельная панель с двумя соединительными проводами

Взлом шифра «Энигмы»

Однако в процедуре использования шифровальной машины имелись и слабые места. Самым очевидным из них было то, что если противнику — в данном случае союзникам по антигитлеровской коалиции — удалось бы установить начальную конфигурацию машины, то они смогли бы расшифровать все сообщения, переданные в этот день. Были и другие слабые места. В частности, шифр становился уязвимым, если одна и та же конфигурация использовалась два дня подряд, как иногда случалось в результате ошибки.

Используя эти уязвимости, команда Блетчли-Парка впервые разгадала шифр «Энигмы» в январе 1940 г. В тот момент работа группы строилась на базе знаний и идей, полученных польской группой криптоаналитиков под руководством Мариана Раевского, работавшей над взломом шифров «Энигмы» с 1932 г. Поляки распознали слабое место в процедуре, посредством которой передавались установки на день. По существу, это снизило число возможных вариантов установки, которые приходилось рассматривать, с 10 000 триллионов примерно до 100 000. Составив полный каталог возможных схем установки, поляки могли быстро определить, которая из них использовалась в любой заданный день. Они придумали в помощь себе машину под названием циклометр, то есть счетчик циклов. На подготовку каталога ушел примерно год, но, как только работа была завершена, на подбор текущих установок и взлом шифра на сутки стало уходить всего лишь 15 минут.

В 1937 г. немцы усовершенствовали свою систему, и полякам пришлось начинать все сначала. Поляки разработали несколько методов, самый мощный из которых представлял собой устройство, известное как *криптологическая бомба*. Каждый из этих методов позволял проанализировать путем перебора 17 576 возможных начальных положений трех роторов для каждого из шести возможных порядков их использования.

В 1939 г., незадолго до появления в Блетчли-Парке, Тьюринг предложил британский вариант «бомбы». Опять же, задачей этого устройства было определение первоначальных установок роторов и порядка их использования. К июню 1941 г. использовалось пять таких устройств; к концу войны в 1945 г. их было 210. Когда германский военно-морской флот перешел на четырехроторные машины, у союзников очень скоро появились соответствующим образом модифицированные «бомбы».

Стоило нацистам доработать свою систему с целью повышения надежности, как криптологи находили способы свести на нет все их усовершенствования. К 1945 г. союзники были в состоянии расшифровать чуть ли не все германские сообщения, но верховное командование Германии продолжало верить в полную безопасность своей системы связи. Правда, их криптографы подобных иллюзий не питали, но при этом сомневались, что кто-то сможет сосредоточить на задаче взлома шифров необходимые для ее решения гигантские усилия. Союзники получили громадное преимущество, но им приходилось проявлять осторожность и следить за использованием полученной информации, чтобы не выдать противнику своей способности расшифровывать перехваченные сообщения*.

Асимметричное шифрование

Концепция *асимметричного* шифрования — одно из серьезнейших достижений криптографии. Здесь ключи шифрования и расшифровки различаются между собой, причем настолько сильно, что, даже зная ключ шифрования, найти ключ расшифровки практически нереально. Может показаться, что такая ситуация невозможна — ведь расшифровка обратна шифрованию, — но существуют такие методы задания ключей, что «обратная реконструкция метода шифрования» практически невыполнима. Примером может служить шифр RSA (см. главу 7), основанный на свойствах простых чисел в модулярной арифметике. В этой системе алгоритм шифрования, алгоритм расшифровки и ключ шифрования можно сделать *публичными*; даже в этом случае вывести ключ расшифровки не удастся. Однако законные получатели информации смогут прочесть сообщение, поскольку обладают также *секретным ключом,* при помощи которого его можно расшифровать.

---

* Весьма обычная для разведки ситуация, когда использование добытой информации ведет к компрометации ее источника, например внедренного агента. Широко известен тот факт, что Уинстон Черчилль распорядился не принимать меры к защите от германской бомбардировки города Ковентри, чтобы не раскрыть перед немцами факт раскрытия шифра «Энигмы». — *Прим. пер.*

56

Гипотеза о колбаске

Доказано, что совокупность сфер, «выпуклая оболочка» которых имеет минимальный объем, всегда представляет собой колбаску для 56 и любого меньшего числа сфер, но не для 57 сфер.

Упаковка в эластичную оболочку

Чтобы разобраться в этом, начнем с занятия попроще: с упаковки кругов. Положим, что мы пакуем некоторое количество одинаковых кругов на плоскости в «эластичную оболочку», окружая все множество кратчайшей возможной кривой. Технически такая кривая называется выпуклой оболочкой множества кругов. К примеру, если кругов семь, то можно попробовать длинную «колбаску».

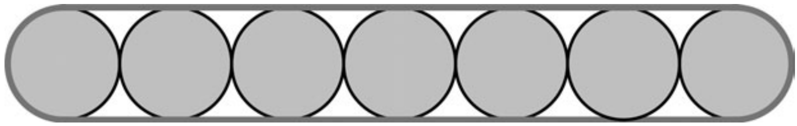


Рис. 161. Форма и оболочка в виде колбаски

Однако представим, что нам нужно сделать всю свободную *площадь* внутри кривой минимально возможной. Если радиус каждого круга равен 1, то площадь колбаски составит

$$24 + \pi = 27{,}141.$$

Но существует вариант и получше — шестиугольник с центральным кругом; его площадь равна

$$12 + \pi + 6\sqrt{3} = 25{,}534,$$

что меньше предыдущего значения.

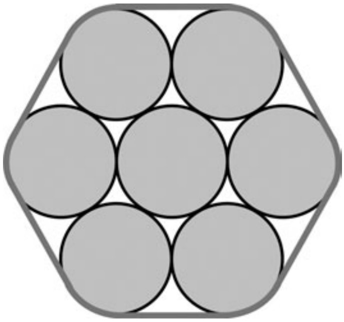


Рис. 162. Шестиугольная фигура и оболочка. Здесь площадь меньше, чем у колбаски

На самом деле даже для трех кругов колбаска — не лучшая фигура. Площадь внутри кривой равна

$$8 + \pi = 11{,}14$$

для колбаски, но

$$6 + \pi + \sqrt{3} = 10{,}87$$

для составленного из кругов треугольника.

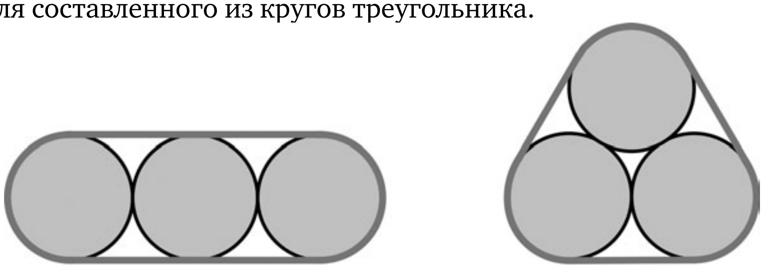


Рис. 163. Колбаска и оболочка в форме колбаски с тремя кругами. Площадь треугольника меньше

Однако если взять одинаковые *шары* вместо кругов и обтягивать их эластичной поверхностью минимальной возможной *площади*, то для семи шаров длинная колбаска даст меньший полный объем, чем шестиугольное расположение шаров. Более того, колбаска дает минимальный объем внутри оболочки для любого числа шаров вплоть до 56 включительно. Но для 57 или большего числа шаров оптимальным будет более округлое расположение.

Еще менее интуитивно понятно то, что происходит в пространствах четырех или более измерений. Организация четырехмерных шаров, оболочка которых дает наименьший четырехмерный «объем», представляет собой колбаску для любого числа шаров по крайней мере вплоть до 50 000. При этом известно, что для более чем 100 000 шаров это *не* колбаска. Получается, что упаковка наименьшего объема имеет вид длиннющей колбаски из одинаковых шаров — очень-очень длинной для очень-очень большого числа шаров. Никто не знает, при каком точно числе шаров четырехмерная колбаска перестает быть оптимальной по объему формой.

По-настоящему поразительная перемена, *вероятно*, ожидает нас в пятимерном пространстве. На основании уже сказанного можно было бы предположить, что при пяти измерениях колбаска будет оптимальна, скажем, до 50 млрд шаров, но затем что-то более округлое даст меньший пятимерный объем; а при шести измерениях подобная граница проходит после 29 сквиллионов шаров и так далее. Однако в 1975 г. Ласло Фейеш Тот сформулировал «гипотезу колбаски», согласно которой для пяти и более измерений компоновка сфер с наименьшей по объему выпуклой оболочкой *всегда* представляет собой колбаску, каким бы большим ни было число шаров.

В 1998 г. Ульрих Бетке, Мартин Хенк и Йорг Уиллс доказали, что Тот был прав для любого числа измерений, большего или равного 42. На сегодняшний день это максимум, что нам известно.

168

Конечная геометрия

На протяжении столетий геометрия Евклида была единственной геометрией. Считалось, что это подлинная геометрия пространства, а потому никакая другая геометрия попросту невозможна. Мы сегодня не считаем истинным ни одно из этих утверждений. Существует множество разновидностей неевклидовой геометрии, соответствующие разным искривленным поверхностям. Общая теория относительности показала, что реальное пространство-время не является плоским, а искривляется вблизи массивных тел, таких как звезды (см. главу 11). Еще одна разновидность геометрии — проективная геометрия — возникла из художественной перспективы. Существуют даже геометрии с конечным числом точек. В простейшей из них семь точек, семь прямых и 168 симметрий. Из нее возникает замечательная история о конечных простых группах, кульминацией которой является причудливая группа, известная — и недаром — как монстр.

Неевклидова геометрия

По мере того как человек начинал все активнее исследовать земной шар, сферическая геометрия — естественная геометрия на сфере — обретала особое значение, поскольку сфера представляет собой достаточно точную модель формы Земли. Она не точна; на самом деле форма Земли ближе к сфероиду, сплюснутому у полюсов. Но и навигация в те времена не была особенно точной. Однако сфера — это поверхность в евклидовой геометрии, поэтому считалось, что сферическая геометрия —

это не новый тип геометрии, а разновидность евклидовой. В конце концов, никто не считал геометрию треугольника радикальным отступлением от Евклида, даже если технически треугольник и не являлся плоскостью.

Все изменилось, когда математики внимательнее всмотрелись в одну из особенностей евклидовой геометрии: существование параллельных прямых. Параллельные прямые — это прямые, которые никогда не пересекаются, сколько их ни продлевай. Евклид, должно быть, понимал, что в вопросе о параллельных есть свои тонкости, поскольку предусмотрительно сделал их существование одной из фундаментальных аксиом (традиционно их называют постулатами) своей геометрии.

В большинстве своем постулаты Евклида представляли собой очень аккуратные и интуитивно понятные утверждения: «все прямые углы равны между собой», к примеру. Постулат же о параллельных сформулирован достаточно путано. «Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы в сумме меньше двух прямых». В какой-то момент математики начали сомневаться в необходимости подобных сложностей. Но нельзя ли доказать существование параллельных, исходя из остальных евклидовых постулатов?

Им удалось заменить неуклюжую формулировку Евклида на более простые и интуитивно очевидные утверждения. Вероятно, простейшим вариантом можно считать аксиому Плейфера: через произвольную точку, не принадлежащую прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной. Название свое аксиома получила в честь Джона Плейфера, сформулировавшего ее в 1795 г. в книге «Начала геометрии». Строго говоря, он говорил здесь о существовании не более чем одной параллельной прямой, поскольку на основании остальных аксиом можно доказать, что одна такая параллельная прямая существует. Было сделано множество попыток вывести постулат о параллельных из остальных постулатов Евклида, но все они оказались неудачными. Со временем стало ясно: сделать это невозможно. Существуют варианты геометрии, удовлетворяющие всем евклидовым постулатам, *за исключением* постулата о параллельных. Если бы доказательство этого постулата существовало, то и сам постулат действовал бы в такой модели; однако это не так. Следовательно, никаких доказательств.

Фактически сферическая геометрия представляет собой именно такую модель. «Прямая» здесь интерпретируется как «большой круг» — окружность, по которой рассекает сферу плоскость, проходящая через ее центр. Любые два больших круга пересекаются друг с другом, поэтому параллельных «прямых» в этой геометрии нет вообще. Этот контрпример, однако, остался незамеченным, потому что любые два несовпадающих больших круга пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. Евклид же требует, чтобы любые две прямые пересекались ровно в одной точке, если только они не параллельны — в этом случае они не пересекаются вообще.

С современной точки зрения ответ достаточно прямолинеен: можно интерпретировать «точку» как «пару диаметрально противоположных точек»; эта интерпретация дает то, что мы сегодня называем эллиптической геометрией. Однако в давние времена такой подход показался бы слишком абстрактным; кстати говоря, именно эта лазейка позволила Плейферу исключить из рассмотрения подобные геометрии. Вместо этого математики разработали гиперболическую геометрию, в которой через заданную точку приходит бесконечно много линий, параллельных данной. Стандартная модель такой геометрии — диск Пуанкаре, представляющий собой внутренность круга. *Прямая* (или *геодезическая линия* — обобщение понятия *прямая* в искривленных пространствах) здесь определяется как любая дуга окружности, подходящая к границе под прямым углом. Потребовалось около столетия, чтобы эти идеи вошли в математическое сознание и перестали казаться противоречивыми.

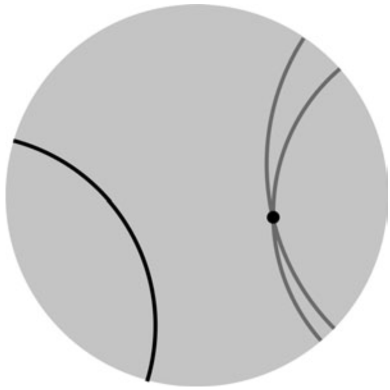


Рис. 164. Диск Пуанкаре — модель гиперболической плоскости (закрашен серым). Обе серые «прямые» параллельны черной и проходят через одну точку

Проективная геометрия

А тем временем зарождался еще один вариант на тему евклидовой геометрии. Этот вариант вырос из искусства и архитектуры, где художники итальянского Возрождения разрабатывали перспективное изображение. Представьте, что вы стоите на ровной евклидовой плоскости между двумя параллельными прямыми: например, ровно посередине бесконечно длинной и абсолютно прямой дороги. Что вы видите?

Чего вы точно *не видите*, так это того, что прямые нигде не пересекаются. Вместо этого вы явственно видите, что они сходятся на горизонте*.

Как так может быть? Евклид утверждает, что параллельные не пересекаются; ваши глаза говорят, что пересекаются. На самом деле здесь нет логического противоречия. Евклид говорит, что параллельные не пересекаются *ни в какой точке на плоскости*. Горизонт не является частью плоскости. Если бы

---

* Валентина Толкунова явно знала толк в проективной геометрии, когда пела: «А рельсы-то, как водится, на горизонте сходятся…» — *Прим. пер.*

он был частью плоскости, то ограничивал бы ее, но плоскость бесконечна и не имеет границы. Художнику же нужна не евклидова плоскость, а плоскость с дополнительным элементом — горизонтом. При этом горизонт можно рассматривать как «прямую в бесконечности», составленную из «точек в бесконечности» — и именно там встречаются параллельные прямые.

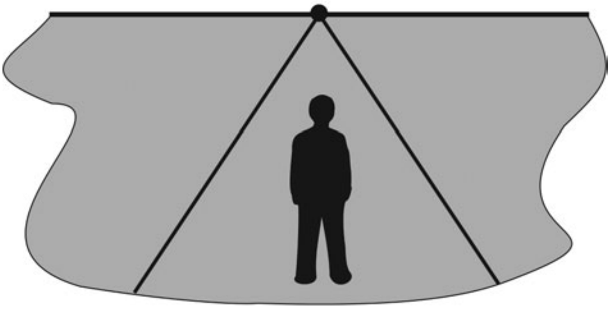


Рис. 165. Параллельные прямые сходятся на горизонте

Это описание станет понятнее, если мы задумаемся над тем, что, собственно, делает художник. Он ставит мольберт с холстом и переносит на него то, что видит перед собой; он *проецирует* видимое на холст. Художник может делать это на глазок, а может — при помощи различных механических или оптических устройств. Говоря математически, проецируя точку на холст, вы мысленно проводите линию из точки в свой глаз и ставите точку в том месте, где эта линия проходит сквозь холст. Примерно так, по существу, работает фотокамера: линза проецирует внешний мир на пленку или в цифровом варианте на некий приемник с зарядовой связью. Точно так же человеческий глаз проецирует окружающий мир на сетчатку.

Чтобы понять, откуда берется горизонт, мы нарисуем для параллельных прямых вид сбоку (рис. 166, справа). Точки на евклидовой плоскости (серые) проецируются на точки под горизонтом. Прямые перед художником проецируются в линии, которые заканчиваются на горизонте. Сам горизонт не является проекцией какой бы то ни было точки на плоскости. Если мы попробуем найти такую точку через обратную проекцию, как показывает линия со стрелкой, то линия эта окажется параллельна плоскости и нигде с ней не пересечется. Она уйдет «в бесконечность» вдоль нашей плоскости. Таким образом, ничто на плоскости не соответствует горизонту.

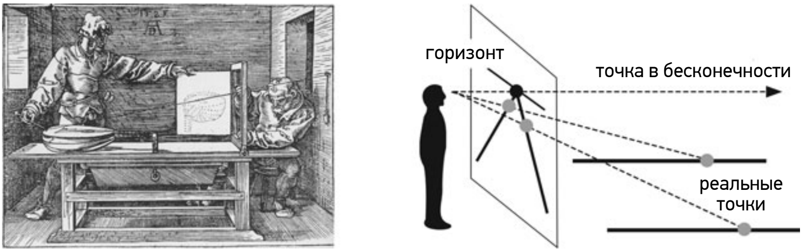


Рис. 166. Слева: гравюра Дюрера (1525 г.), иллюстрирующая проекцию. Справа: проецирование параллельных прямых на холст

На основании этой идеи может быть разработана логически непротиворечивая геометрия. Евклидова плоскость расширяется за счет добавления «прямой в бесконечности», составленной из «точек в бесконечности». В такой системе, получившей название проективной геометрии, параллельных прямых не существует. Любые две несовпадающие прямые пересекаются ровно в одной точке. Более того, как и в евклидовой геометрии, через любые две точки можно провести прямую. Таким образом, возникает приятная «двойственность»: если заменить точки прямыми и, наоборот, — прямые точками, — все постулаты останутся на месте.

Плоскость Фано

Прорабатывая эту новую идею, математики задались также вопросом о том, могут ли существовать конечные аналоги проективной геометрии, то есть конфигурации, собранные из конечного числа точек и прямых, в которых:

- любые две несовпадающие точки лежат ровно на одной прямой;
- любые две несовпадающие прямые пересекаются ровно в одной точке.

Такие конфигурации существуют и необязательно в виде диаграмм на плоскости или в пространстве. Они могут определяться алгебраически, путем задания своего рода координатной системы для проективной геометрии. Вместо пары действительных чисел (x, y), которую мы обычно используем на евклидовой плоскости, можно использовать тройки чисел (x, y, z). Обычно тройки чисел определяют координаты в трехмерном евклидовом пространстве, но мы наложим дополнительное условие: значение имеет только отношение координат. К примеру, мы можем считать, что тройка (1, 2, 3) представляет ту же точку, что (2, 4, 6) или (3, 6, 9).

Теперь мы можем *почти* заменить тройку (x, y, z) парой $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, которая возвращает нас обратно к двум координатам и евклидовой плоскости. Однако z может равняться нулю. В этом случае мы можем воспринимать $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ как «бесконечность» с той замечательной особенностью, что $\frac{x}{y}$ по-прежнему имеет смысл. Таким образом, точки с координатами $(x, y, 0)$ располагаются «в бесконечности» и в совокупности образуют прямую в бесконечности — тот самый горизонт. Чтобы все это работало, достаточно исключить всего лишь одну тройку: мы договоримся, что тройка (0, 0, 0) не представляет никакой точки. Если бы это было не так, то она представляла бы все точки, поскольку (x, y, z) и $(0x, 0y, 0z)$ совпадали бы. Но последняя тройка — это и есть (0, 0, 0).

Привыкнув к этим однородным (так они называются) координатам, мы можем проделать что-то аналогичное в более общем случае. В частности, мы можем получить конечные конфигурации с заданными свойствами, заменив действительные числа целыми по модулю p при простом p. Если взять $p = 2$ — простейший случай, то возможные координаты будут 0 и 1.

Для них существует восемь троек, но (0, 0, 0) опять же не разрешена. Остается семь точек:

(0, 0, 1) (0, 1, 0) (1, 0, 0) (0, 1, 1) (1, 0, 1) (1, 1, 0) (1, 1, 1).

Получившаяся в результате «конечная проективная геометрия» называется плоскостью Фано в честь итальянского математика Джино Фано, опубликовавшего эту идею в 1892 г. На самом деле он описал конечное проективное трехмерное пространство с 15 точками, 35 прямыми и 15 плоскостями. В нем использовались четыре координаты, каждая из которых могла принимать значение 0 или 1, исключая (0, 0, 0, 0). При этом каждая плоскость имеет ту же геометрию, что плоскость Фано.

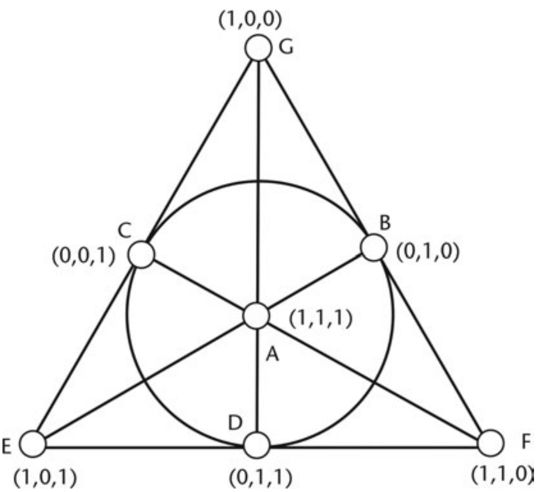


Рис. 167. Семь точек и семь прямых плоскости Фано

На плоскости Фано имеется семь прямых, каждая из которых содержит три точки, и семь точек, каждая из которых лежит на трех прямых. На рис. 167 все линии прямые, за исключением BCD, которая имеет вид окружности, но только потому, что мы пытаемся показать целые числа по модулю 2 на традиционной плоскости. На самом деле все семь точек равноправны. Координаты любых трех точек, образующих прямую, при суммировании всегда дают нуль; к примеру, нижняя прямая соответствует

$$(1, 0, 1) + (0, 1, 1) + (1, 1, 0) =$$
$$= (1 + 0 + 1, 0 + 1 + 1, 1 + 1 + 0) = (0, 0, 0),$$

поскольку $1 + 1 = 0$ по модулю 2.

Симметрии плоскости Фано

Пока нет никаких признаков числа 168, но мы уже близко. Ключ — симметрия.

Симметрия математического объекта или системы — это способ так преобразовать этот объект, чтобы он сохранил свою структуру. Естественные симметрии евклидовой геометрии — это варианты жесткого движения, то есть движения системы как целого, при которых не меняются ни углы, ни расстояния. В качестве примеров можно назвать параллельный перенос, при котором плоскость целиком сдвигается в сторону; вращение, при котором она поворачивается вокруг какой-то фиксированной точки; и зеркальное отражение, при котором плоскость отражается на себя относительно какой-то фиксированной прямой.

Естественные симметрии проективной геометрии не являются жесткими перемещениями, поскольку проецирование может искажать форму объектов, а также увеличивать или уменьшать длины и углы. Это проекции, то есть трансформации, при которых не меняются взаимоотношения объектов, или инцидентность (к примеру, если точка лежит на прямой, то при проецировании она не может никуда с нее «соскочить»). Симметрии не считаются необходимыми свойствами любых математических объектов, поэтому с нашей стороны естественно задать вопрос: что собой представляют симметрии плоскости Фано?

Речь здесь не идет о симметриях изображенной на рисунке фигуры, связанных с жесткими перемещениями. Понятно, что как равносторонний треугольник она обладает шестью такими симметриями. Я имею в виду такие преобразования семи точек плоскости, при которых если три точки образуют прямую, то они и после преобразования образуют прямую. К примеру, мы могли бы трансформировать нижнюю прямую EDF в окружность CDB. Обозначим такое преобразование как

$$E' = C, D' = D, F' = B,$$

где штрих показывает, как эти три буквы преобразуются. Нам нужно решить, что должны представлять собой A', B', C' и G', иначе ничего из нашего преобразования не получится. Они не должны совпадать с C, D и B, так как для них пары уже указаны. Может быть, стоит попробовать

$$A' = E$$

и посмотреть, что из этого получится. Поскольку ADG — прямая, объект $A'D'G'$ тоже должен быть прямой. Но мы уже решили, что $A' = E$ и $D' = D$. Чему должно соответствовать G'? Чтобы найти ответ, заметим, что из всех прямых точки E и D содержит только EDF. Следовательно, нам придется сделать $G' = F$. Разобрав таким образом все прямые одну за другой, получим, что $B' = G$ и $C' = A$. Таким образом, мое преобразование переводит ABCDEFG в $A'B'C'D'E'F'G'$, и результат есть EGADCBF.

Наглядно представить себе такие преобразования непросто, но их можно найти алгебраическим способом. Их больше, чем можно было бы ожидать. Замечательно, что их конкретно 168.

Чтобы доказать это, мы воспользуемся описанным выше методом как вполне типичным. Начнем с точки A. В какую точку она может перейти? В принципе, в любую из точек A, B, C, D, E, F, G, так что вариантов у нас семь. Предположим, мы преобразовали A в A´. После этого посмотрим на точку B. Мы можем перевести ее в любую из шести оставшихся позиций, не нарушая отношений инцидентности. Это дает нам на этот момент $7 \times 6 = 42$ потенциальные симметрии. Решив, что A и B переходят в A´ и B´, мы уже не можем принимать свободного решения по точке E, третьей точке на прямой AB. Она должна перейти в третью точку на прямой A´B´, какой бы эта точка ни оказалась — дополнительных возможностей здесь нет. Однако остаются еще четыре точки, образцы которых не определены. Выберем одну из них; она может перейти в *любую* из этих четырех точек. Но как только пункт ее назначения выбран, все дальнейшее определяется геометрией.

Можно убедиться в том, что все эти комбинации сохраняют отношения инцидентности: соответствующие прямые всегда пересекаются в соответствующих точках. Поэтому всего существует $7 \times 6 \times 4 = 168$ симметрий. Цивилизованный способ доказать все это — использовать методы линейной алгебры на поле целых чисел по модулю 2. Тогда интересующие нас преобразования будут представлены обратимыми матрицами размера 3×3, заполненными нулями и единицами.

Квадрика Клейна

Эта же группа возникает и в комплексном анализе. В 1893 г. Адольф Гурвиц доказал, что комплексная поверхность (или, языком математиков, компактная риманова поверхность) с g отверстиями имеет не более $84\,(g - 1)$ симметрий. Если отверстия три, это число равно 168. Феликс Клейн построил поверхность, получившую название квадрики Клейна, с уравнением

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

в *комплексных* однородных координатах (x, y, z). Оказывается, эта поверхность обладает той же группой симметрий, что и плоскость Фано, то есть она имеет максимально возможный порядок, предсказанный теоремой Гурвица, — 168. Эта поверхность связана с укладкой на гиперболической плоскости треугольников таким образом, что в каждом узле решетки сходится семь треугольников.

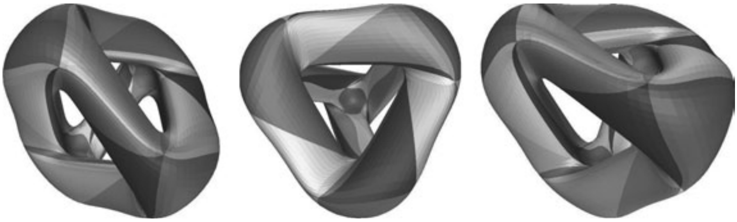


Рис. 168. Три действительные секции квадрики Клейна

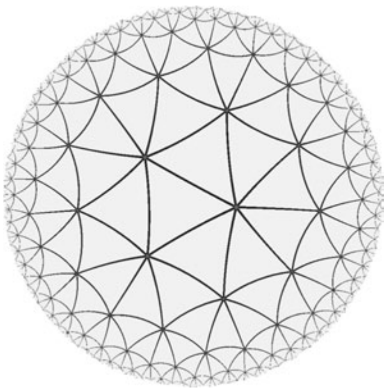


Рис. 169. Соответствующая укладка на гиперболической плоскости, показанная на модели — диске Пуанкаре

Простые группы и монстр

Симметрии любой математической системы или объекта образуют *группу*. В обычном языке под этим словом подразумевается всего лишь некий набор или комплект, но в математике оно означает набор с одним дополнительным свойством. Любые два члена этого набора можно *комбинировать* определенным образом, получив при этом еще один член того же набора. Эта операция немного напоминает умножение: два члена группы

g и h комбинируются, в результате чего получается gh. Но члены группы и операция их «перемножения» могут быть произвольными. При условии, что эта операция обладает некоторыми чудесными свойствами, мотивированными симметриями.

Симметрии представляют собой преобразования, и если мы хотим объединить, или комбинировать, два преобразования, то мы сначала выполняем одно из них, а затем другое. Такое представление о «перемножении» подчиняется нескольким простым алгебраическим законам. Перемножение ассоциативно: $(gh)k = g(hk)$. Существует такой элемент, как единица, для которой $1g = g1 = g$. Для любого g существует обратное ему g^{-1}, такое что $g^{-1}g = 1$. (Коммутативный закон $gh = hg$ не является обязательным требованием, поскольку он не выполняется для многих симметрий.) Любая математическая система, снабженная операцией, которая подчиняется этим трем правилам, называется *группой*.

Симметрии обладают ассоциативным свойством автоматически, поскольку мы комбинируем преобразования; единичным элементом является трансформация «ничего не делать», а обратным к любому преобразованию является преобразование «отменить выполненные действия». Таким образом, симметрии любой системы или объекта образуют группу. В частности, это верно для плоскости Фано. Число преобразований в ее группе симметрий (называемое порядком группы) равно 168. Эта группа весьма необычна.

Многие группы можно разбить на несколько меньших групп — это немного напоминает разложение чисел на простые множители, но процесс выглядит сложнее. Аналоги простых множителей называются *простыми группами*. Это группы, которые невозможно разбивать далее таким образом. «Простые» в данном случае не означает «несложные»; это означает «имеющие лишь один компонент».

Существует бесконечно много конечных групп, то есть групп конечного порядка, с конечным числом членов. Выбранная наугад конечная группа вряд ли окажется простой — так же как простые числа встречаются редко по сравнению с составными. Однако существует бесконечно много простых групп, опять же, как и простых чисел. В самом деле, некоторые из них связаны с простыми числами. Если n — любое число, то целые числа по модулю n (см. главу 7) образуют группу, если мы в качестве операции комбинирования членов введем их *сложение*. Такая группа называется циклической группой порядка n и является простой тогда и только тогда, когда n простое. В самом деле, все простые группы порядка, выраженного простым числом, являются циклическими.

А существуют ли какие-нибудь другие? Галуа в работе, посвященной уравнениям пятой степени, нашел простую группу порядка 60. Это не простое число, так что соответствующая группа не является циклической. Она состоит из всех четных перестановок (см. главу 2) пяти объектов. Для Галуа объектами были пять решений уравнения пятой степени (см. главу 5), и группа симметрий этого уравнения состояла из всех 120 перестановок этих решений. Внутри этой группы находилась его группа порядка 60, и Галуа знал, что, поскольку эта группа простая, для решений этого уравнения не существует алгебраической формулы. Уравнение обладало *не тем видом симметрии*, чтобы его можно было решить при помощи алгебраической формулы.

Следующая по размеру нециклическая простая группа имеет порядок 168 и представляет собой группу симметрий плоскости Фано. С 1995 по 2004 г. порядка сотни алгебраистов сумели классифицировать все конечные простые группы, то есть составить их полный список. Результатом этой монументальной работы, занимающей по крайней мере 10 000 журнальных страниц, является то, что каждая конечная простая группа попадает в некоторое бесконечное семейство тесно связанных групп и таких семейств существует 18. Одно из них — семейство проективных специальных линейных групп — начинается с простой группы порядка 168.

Ну, вообще-то не совсем. Существует ровным счетом 26 исключений, известных как спорадические группы. Эти

Обозначение	Название	Порядок
M_{11}	Группа Матьё	$2^4\times3^2\times5\times11$
M_{12}	Группа Матьё	$2^6\times3^3\times5\times11$
M_{22}	Группа Матьё	$2^7\times3^2\times5\times7\times11$
M_{23}	Группа Матьё	$2^7\times3^2\times5\times7\times11\times23$
M_{24}	Группа Матьё	$2^{10}\times3^3\times5\times7\times11\times23$
J_1	Группа Янко	$2^3\times3\times5\times7\times11\times19$
J_2	Группа Янко	$2^7\times3^3\times5^2\times7$
J_3	Группа Янко	$2^7\times3^5\times5\times17\times19$
J_4	Группа Янко	$2^{21}\times3^3\times5\times7\times11^3\times23\times29\times31\times37\times43$
Co_1	Группа Конуэя	$2^{21}\times3^9\times5^4\times7^2\times11\times13\times23$
Co_2	Группа Конуэя	$2^{18}\times3^6\times5^3\times7\times11\times23$
Co_3	Группа Конуэя	$2^{10}\times3^7\times5^3\times7\times11\times23$
Fi_{22}	Группа Фишера	$2^{17}\times3^9\times5^2\times7\times11\times13$
Fi_{23}	Группа Фишера	$2^{18}\times3^{13}\times5^2\times7\times11\times13\times17\times23$
Fi_{24}'	Группа Фишера	$2^{21}\times3^{16}\times5^2\times7^3\times11\times13\times17\times23\times29$
HS	Группа Хигмана–Симса	$2^9\times3^2\times5^3\times7\times11$
McL	Группа Маклафлина	$2^7\times3^6\times5^3\times7\times11$
He	Группа Хельда	$2^{10}\times3^3\times5^2\times7^3\times17$
Ru	Группа Рюдвалиса	$2^{14}\times3^3\times5^3\times7\times13\times29$
Suz	Группа Судзуки	$2^{13}\times3^7\times5^2\times7\times11\times13$
O’N	Группа О’Нана	$2^9\times3^4\times5\times7^3\times11\times19\times31$
HN	Группа Харады–Нортона	$2^{14}\times3^6\times5^6\times7\times11\times19$
Ly	Группа Лайонса	$2^8\times3^7\times5^6\times7\times11\times31\times37\times67$
Th	Группа Томпсона	$2^{15}\times3^{10}\times5^3\times7^2\times13\times19\times31$
B	Монстрик	$2^{41}\times3^{13}\times5^6\times7^2\times11\times13\times17\times19\times23\times31\times47$
M	Монстр	$2^{46}\times3^{20}\times5^9\times7^6\times11^2\times13^3\times17\times19\times23\times29\times31\times41\times47\times59\times71$

Таблица 14. 26 спорадических конечных простых групп

группы представляют собой презанятнейшую коллекцию уникумов, иногда отдаленно связанных друг с другом. В таблице 14 можно найти все 26 с указанием названий и порядков.

Большинство этих групп названы в честь своих первооткрывателей, но самая крупная из них известна как «монстр», и недаром, поскольку ее порядок примерно равен 8×10^{53}. Точнее говоря,

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000.

В табл. 14 приведено разложение этого числа на простые множители, с которыми специалистам по теории групп работать проще. Мне хотелось посвятить данную главу именно этому числу, но потом я решил поставить вместо него 168, чтобы дать более широкую картину.

Существование группы-монстра предсказали в 1973 г. Берндт Фишер и Роберт Грейс, а построил ее Грейс в 1982 г. Это группа симметрий занятной алгебраической структуры, известной как алгебра Грейса. У монстра имеются замечательные связи в совершенно иной области математики — в области модулярных форм в комплексном анализе. Некоторые численные совпадения, указывавшие на эту связь, привели Джона Конуэя и Саймона Нортона к формулировке гипотезы «чудовищного вздора», которую доказал в 1992 г. Ричард Борчердс. Это слишком сложно, чтобы пытаться объяснить здесь; достаточно сказать, что это связано с теорией струн в квантовой физике (см. главу 11). Если вас интересуют подробности, загляните на сайт:

http://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine.

Особые большие числа

Натуральные числа продолжаются до бесконечности. Не существует самого большого числа, потому что любое число можно сделать больше, прибавив к нему единицу.

Из этого следует, что в большинстве своем натуральные числа слишком велики, чтобы их можно было записать, какую бы систему записи вы ни использовали.

Конечно, всегда можно немного схитрить и определить символ Ã так, чтобы он обозначал именно то большое число, о котором вы думаете.

Но это не система, это всего лишь отдельный специально определенный символ.

К счастью, нам редко требуются по-настоящему большие числа.

Однако они интересны и завораживают сами по себе. И время от времени выясняется, что одно из таких чисел играет в математике значительную роль.

26! = 403 291 461 126 605 635 584 000 000

Факториалы

Число вариантов расстановки букв латинского алфавита.

Расстановка

Каким числом способов можно расставить по порядку элементы некоего списка? Если в списке два символа, скажем, A и B, таких способа два:

AB BA.

Если список содержит три буквы A, B и C, способов шесть:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA.

Что, если в списке четыре буквы A, B, C и D?

Можно аккуратно и упорядоченно записать все возможные варианты, и ответ окажется равным 24. Существует хитрый способ убедиться в том, что такой ответ верен. Представьте себе, где может стоять D. Это может быть первая, вторая, третья или четвертая позиции. Представьте, что мы уберем D. Получится список только из трех букв: A, B и C; он, в свою очередь, должен соответствовать одному из приведенных выше шести вариантов. Все шесть вариантов возможны: достаточно просто вставить D в список в нужном месте. Таким образом, мы можем записать все возможные варианты как набор из четырех списков по шесть вариантов в каждом. Примерно так:

D на первом месте:

DABC DACB DBAC DBCA DCAB DCBA.

D на втором месте:

ADBC ADCB BDAC BDCA CDAB CDBA.

D на третьем месте:

ABDC ACDB BADC BCDA CADB CBDA.

D на четвертом месте:

ABCD ACBD BACD BCAD CABD CBAD.

Все эти варианты различны либо потому, что D в них стоит на разных позициях, либо потому, что используются разные варианты ABC. Более того, каждый вариант ABCD здесь имеется: позиция D говорит нам о том, в какой шестерке его нужно искать, а порядок букв без D подсказывает, какой вариант ABC выбрать.

Поскольку теперь у нас четыре набора по шесть элементов в каждом, полное число вариантов равно $4 \times 6 = 24$.

Строго говоря, шесть вариантов расстановки ABC мы могли получить аналогичным способом. Здесь нам нужно было бы посмотреть, где может стоять C, а затем исключить C из списка:

CAB **C**BA A**C**B B**C**A AB**C** BA**C**.

Более того, таким же способом можно получить и число вариантов расстановки AB:

BA A**B.**

Такой способ перебора вариантов расстановки предполагает общий алгоритм:

Число способов расстановки…

…2 букв равен $2 = 2 \times 1$.
…3 букв равен $6 = 3 \times 2 \times 1$.
…4 букв равен $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Итак, сколькими способами можно расставить 5 букв ABCDE? Алгоритм подсказывает, что ответ должен равняться

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120,$$

и можно показать, что это верный ответ, представив пять разных позиций для E и 24 возможных варианта расстановки ABCD для каждой из них, если E исключить. Это показывает, что искомое число равно 5×24, то есть $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Путем аналогичных рассуждений получим, что число различных вариантов расстановки n букв равняется

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Такая величина называется «n факториал» и записывается как «$n!$». Чтобы получить ее, нужно просто взять все числа от 1 до n и перемножить их.

Приведем первые несколько факториалов:

$1! = 1$	$6! = 720$
$2! = 2$	$7! = 5040$
$3! = 6$	$8! = 40\,320$
$4! = 24$	$9! = 362\,880$
$5! = 120$	$10! = 3\,628\,800$.

Вы видите, что числа стремительно возрастают, причем чем дальше, тем быстрее.

Таким образом, число возможных перестановок алфавита из 26 букв целиком равно

$$26! = 26 \times 25 \times 24 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 =$$
$$= 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000.$$

Число различных перестановок колоды из 52 игральных карт равно

$$52! = 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766$$
$$975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000.$$

Гамма-функция

В некотором смысле

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}.$$

Чтобы разобраться в этой записи, введем гамма-функцию, которая расширяет определение факториала на все комплексные числа, сохраняя при этом его ключевые свойства. Гамма-функция обычно определяется средствами интегрального исчисления:

$$\boldsymbol{\Gamma}(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Связь с факториалами заключается в том, что для положительного целого n

$$\boldsymbol{\Gamma}(n) = (n-1)!$$

Воспользовавшись методом, известным как аналитическое продолжение, мы можем определить $\boldsymbol{\Gamma}(z)$ для всех комплексных чисел z.

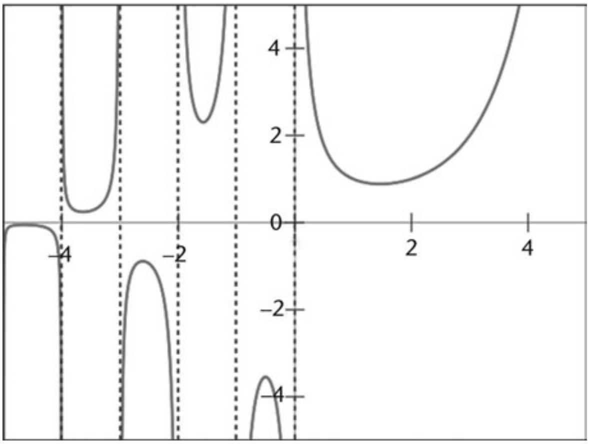


Рис. 170. График **Г**(x) для действительных x

Гамма-функция $\mathbf{\Gamma}(z)$ бесконечна для отрицательных целых величин z и конечна для всех остальных комплексных чисел. Она имеет важные приложения в статистике и обладает ключевым свойством факториала:

$$\mathbf{\Gamma}(z + 1) = z\mathbf{\Gamma}(z),$$

за исключением того, что это выполняется для $(z - 1)!$, а не для $z!$. Гаусс предложил избавиться от этого неудобства, определив пи-функцию $\mathbf{\Pi}(z) = \mathbf{\Gamma}(z + 1)$, которая совпадала бы с $n!$ при $z = n$, но на сегодняшний день более распространен гамма-вариант функции.

Формула удвоения для гамма-функции гласит, что

$$\mathbf{\Gamma}(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

Если принять $z = \frac{1}{2}$, получим

$$\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)=2^{0}\sqrt{\pi}\Gamma(1),$$

так что

$$\mathbf{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Именно в этом смысле $\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$.

43 252 003 274 489 856 000

Кубик Рубика

В 1974 г. венгерский профессор Эрнё Рубик изобрел головоломку, состоящую из перемещающихся кубиков. Сегодня она известна как кубик Рубика, а за годы по всему миру было продано 350 млн ее экземпляров. Я еще помню, как Математическое общество Университета Уорвика ввозило эту головоломку ящиками из Венгрии, пока увлечение не распространилось настолько широко, что ей заинтересовались коммерческие компании. Громадное число в заголовке главы говорит о том, сколько различных комбинаций может быть у кубика Рубика.

Геометрия кубика Рубика

Головоломка представляет собой куб, разделенный на 27 кубиков втрое меньшего размера. Каждая грань большого куба окрашена в свой цвет. Изобретением Рубика был механизм, позволявший каждой грани кубика поворачиваться независимо. Многократные повороты смешивают цвета граней. Задача играющего — вернуть все в исходное положение, так чтобы грани куба вновь стали одноцветными.

Рис. 171. Кубик Рубика

Маленький кубик в центре увидеть невозможно, да его там и нет; вместо него стоит хитрый механизм Рубика. Центральные кубики граней поворачиваются, но не могут переходить на другие грани, так что их цвет не меняется. Поэтому далее мы можем считать, что шесть *лицевых кубиков* не двигаются, только вращаются на месте. Таким образом, поворот кубика Рубика целиком в другое положение, без реального поворота хотя бы одной из граней, не считается существенным.

Перемещающиеся кубики бывают двух типов: это 8 угловых и 12 боковых кубиков (по центру каждого ребра). Если смешивать цвета на боковых и угловых кубиках всеми возможными способами — к примеру, сняв и переклеив цветные наклейки, — число возможных комбинаций цветов составит

519 024 039 293 878 272 000.

Однако не все эти комбинации доступны в реальном кубике Рубика, ведь у него можно только поворачивать грани. Поэтому возникает вопрос: какие из этих комбинаций могут быть получены в результате серии поворотов? В принципе, таких комбинаций могло бы оказаться очень немного, но математики доказали, что при помощи разрешенных поворотов можно получить ровно одну двенадцатую часть всех теоретически возможных комбинаций. Поэтому число разрешенных комбинаций цветов на кубике Рубика равно

43 252 003 274 489 856 000.

Если бы каждый из 7 млрд человек на Земле мог перебирать по одной комбинации в секунду, человечеству потребовалось бы около 200 лет, чтобы перебрать их все.

Как вычислять эти числа

Для восьми угловых кубиков существует 8! вариантов размещения. Вспомним, что

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$

Это число появляется потому, что для первого кубика существует 8 возможных позиций, которые следует комбинировать с 7 оставшимися позициями для второго кубика, далее с шестью оставшимися позициями для третьего и так далее (см. главу 26!). Затем каждый угловой кубик может быть повернут независимо в любую из трех различных ориентаций. Таким образом, существует $3^8 \times 8!$ теоретических способов расставить угловые кубики.

Аналогично, 12 боковых кубиков можно расставить 12! способами, где

$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Каждый из них может находиться в двух ориентациях, что даст дополнительно 2^{12} вариантов. В целом существует $2^{12} \times 12!$ теоретических способов расстановки боковых кубиков.

Число возможных способов объединить эти варианты получается перемножением двух указанных чисел и дает $3^8 \times 8! \times$ $\times\ 2^{12} \times 11!$, что равно 519 024 039 293 878 272 000.

Но, как я уже сказал, большую часть этих вариантов невозможно получить серией последовательных поворотов кубика. Каждый поворот меняет положение нескольких кубиков одновременно, а определенные свойства набора кубиков в целом при этом не меняются. Эти свойства называются инвариантами, и в данном случае их три.

Четность по кубикам на грани. Вообще, перестановки бывают двух типов, четные и нечетные (см. главу 2). Четная перестановка меняет порядок четного числа пар объектов. Если две четные перестановки перемножить путем последовательного их выполнения, результирующая перестановка также будет четной. В нашем случае любое вращение кубика Рубика представляет собой четную перестановку составляющих его кубиков. Следовательно, любая комбинация вращений — тоже четная перестановка. Это условие сразу уполовинивает число возможных сочетаний.

Четность по граням боковых кубиков. Любой поворот кубика Рубика представляет собой четную перестановку граней боковых кубиков, то же можно сказать и о любой серии поворотов. Это условие еще раз уполовинивает число возможных сочетаний.

Тройственность по угловым кубикам. Пронумеруем 24 грани угловых кубиков числами 0, 1, 2 так, чтобы на каждом углу эти числа читались по часовой стрелке в порядке 0, 1, 2. Сделаем это так, чтобы на противоположных гранях кубика Рубика стояли нули, как на правом рисунке (рис. 172). Сумма всех этих чисел на любой грани кубика Рубика по модулю 3, то есть остаток от деления суммы на 3, при любом повороте кубика не меняется. Это условие уменьшает число возможных сочетаний еще втрое.

С учетом всех трех условий число возможных сочетаний следует разделить на $2 \times 2 \times 3 = 12$. Иными словами, число расстановок, которые можно получить серией вращений, равно

$$3^8 \times 8! \times 2^{12} \times \frac{12!}{12} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.$$

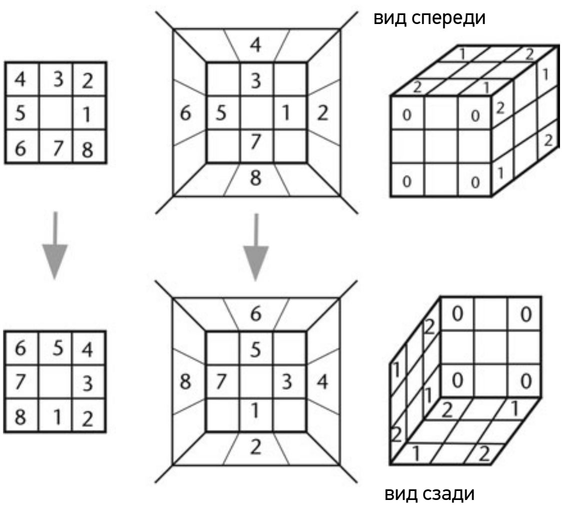


Рис. 172. Инварианты кубика Рубика. Слева: результат поворота грани по часовой стрелке на четверть оборота. В середине: нумерация граней боковых кубиков. Справа: нумерация граней угловых кубиков

Математические методы, использованные нами при анализе кубика Рубика, позволяют также получить систематические способы решения этой головоломки. Однако эти методы слишком сложны, чтобы их здесь описывать, а разобраться в том, как они работают, — продолжительный и технически сложный процесс.

Число Бога

Определим *ход* как поворот одной грани на любое число прямых углов, то есть четвертей оборота. Наименьшее число ходов, которого достаточно для решения головоломки вне зависимости от начального ее положения, называют числом Бога — вероятно, потому, что, на первый взгляд, это число недоступно смертным и получить его скромными человеческими силами невозможно. Однако такая оценка ситуации оказалась чересчур пессимистичной. В 2010 г. Томас Рокики, Герберт Коцемба, Морли Дэвидсон и Джон Детридж при помощи кое-какой хитрой математики и грубой компьютерной мощи доказали, что число Бога равно 20. Вычисления проводились одновременно на большом числе компьютеров; на одном компьютере они заняли бы 350 лет.

6 670 903 752 021 072 936 960

Судоку

Головоломки судоку захватили мир в 2005 г., однако их предшественники возникли гораздо раньше. Задача судоку состоит в том, чтобы разместить цифры от 1 до 9 в квадрате 9 × 9, разделенном на десять подквадратов 3 × 3. В каждой строке, каждом столбце и каждом подквадрате должно содержаться по одному экземпляру каждой цифры, причем некоторые цифры задаются составителем головоломки заранее. Число в заголовке — это число различных вариантов заполнения решетки судоку. Согласитесь, можно не опасаться, что варианты вдруг закончатся. Хватит на всех.

5				7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Рис. 173. Слева: головоломка судоку. Справа: ее решение

От латинского квадрата до судоку

Историю судоку часто возводят к работе Эйлера о латинском квадрате (см. главу 10). Заполненная решетка судоку представляет собой особый тип латинского квадрата: подквадраты 3×3 вводят дополнительные ограничения. Аналогичная головоломка появилась в 1892 г., когда французская газета *Le Siècle* попросила читателей заполнить магический квадрат, из которого были удалены некоторые числа. Вскоре после этого *La France* использовала магические квадраты, содержащие только цифры от 1 до 9. В решениях блоки 3×3 также содержали по девять цифр, но явно это требование не озвучивалось.

Современной формой судоку мы, вероятно, обязаны Говарду Гарнсу, который, как считается, придумал серию головоломок, опубликованных в 1979 г. компанией Dell Magazines под заголовком «впиши числа». В 1986 г. японская компания Nikoli начала публиковать судоку в Японии. Поначалу головоломка называлась «цифры встречаются по одному разу» (*sūji wa dokushin ni kagiru*), но название быстро сократилось до *sū doku*. Газета *Times* начала публиковать судоку в Великобритании в 2004 г., а в 2005 г. эти головоломки обрели всемирную популярность.

Большое число

6 670 903 752 021 072 936 960,

украшающее настоящую главу, представляет собой число различных вариантов заполнения стандартной рамки судоку. Число латинских квадратов 9×9 примерно в миллион раз больше:

5 524 751 496 156 892 842 531 225 600.

Число вариантов заполнения судоку было опубликовано в новостной группе *rec.puzzle* сети USENET без доказательства в 2003 г. Бертрам Фельгенгауэр и Фрейзер Джарвис в 2005 г. объяснили ход рассуждений подробнее, прибегнув к помощи компьютера и опираясь на несколько правдоподобных, но недоказанных утверждений. Их метод использует симметрию судоку. Каждый конкретный вариант заполненного шаблона имеет собственную группу симметрий (см. главу 168), состоящую из преобразований (перестановки строк и столбцов, замена чисел), при которых структура остается неизменной. Но ключевой структурой является группа симметрий всего набора возможных вариантов заполнения: способы превратить любую решетку в любую другую (может быть, в ту же самую, но это необязательно).

Входящие в эту группу преобразования делятся на несколько типов. Самые очевидные — это 9! перестановок девяти цифр. Систематически переставив цифры некоторого варианта судоку, мы, очевидно, получим другой вариант. Но можно также менять местами строки, сохраняя при этом, конечно, трехблочную структуру. То же можно делать и со столбцами. Можно отразить заданный вариант заполнения относительно большой диагонали. Порядок этой группы симметрий равен $2\times6^4\times6^4 = 3\,359\,232$. Подсчитывая варианты, эти симметрии следует принимать во внимание. Доказывается это сложно, отсюда и использование компьютеров. За прошедшие годы прорехи в оригинальном доказательстве были ликвидированы. Подробности и дальнейшую информацию можно увидеть на сайте

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku.

Поскольку симметричные варианты заполнения по существу представляют собой один и тот же вариант, мы можем также задаться вопросом: сколько существует *различных* вариантов, если считать симметричные варианты эквивалентными? В 2006 г. Джарвис и Эд Расселл вычислили это число как

5 472 730 538.

Оно не равно полному числу вариантов расстановки, деленному на 3 359 232, поскольку некоторые варианты обладают собственными симметриями.

Как и в случае с кубиком Рубика, математические методы, использованные при анализе судоку, позволяют получить систематические способы решения таких головоломок. Однако эти методы слишком сложны, чтобы их здесь описывать; в целом их лучше всего охарактеризовать как систематические методы проб и ошибок.

$2^{57\,885\,161}-1$ (всего 17 425 170 знаков)

Наибольшее известное простое число

Чему равно наибольшее простое число? Еще в III в. до н. э. Евклид доказал, что такого числа не существует. «Простых чисел больше, чем любое наперед заданное число». Иными словами, простых чисел существует бесконечно много. Компьютеры могут значительно расширить список таких чисел; основная причина их остановки — то, что у них заканчивается память или распечатки приобретают какой-то совсем уж несусветный размер. На сегодняшний день рекорд держит приведенное в заголовке число.

Числа Мерсенна

Поиск наибольшего известного простого числа превратился в настоящую гонку. Главная цель участников — установление рекорда и испытание новых компьютеров. В апреле 2014 г. рекорд принадлежал числу $2^{57\,885\,161}-1$, настолько громадному, что для его записи необходимо 17 425 170 десятичных знаков.

Числа вида

$$M_n = 2^n - 1$$

называются числами Мерсенна в честь французского монаха Марена Мерсенна. Если вы поставили своей целью побить рекорд больших простых чисел, вам следует двигаться именно этим путем, поскольку числа Мерсенна обладают особыми свойствами, которые дают возможность определить, простые ли они, даже если их размер уже не позволяет воспользоваться более общими методами.

Простыми алгебраическими методами доказывается, что если $2^n - 1$ простое, то n тоже должно быть простым. В давние времена математики, похоже, считали, что обратное тоже верно: если n простое, то M_n тоже простое. Однако в 1536 г. Удальрик Регий заметил, что $M_{11} = 2047$ — не простое число, хотя 11 — простое. На самом же деле

$$2^{11}-1 = 2047 = 23 \times 89.$$

Пьетро Катальди показал затем, что M_{17} и M_{19} — простые; сегодня, с современными компьютерами, это совсем несложно, но в его время все вычисления приходилось делать вручную. Он утверждал также, что M_n простое для $n = 23, 29, 31$ и 37, однако на самом деле

$$M_{23} = 8\,388\,607 = 47 \times 178\,481,$$
$$M_{29} = 536\,870\,911 = 233 \times 1103 \times 2089,$$
$$M_{37} = 137\,438\,953\,471 = 223 \times 616\,318\,177,$$

так что эти три числа Мерсенна являются составными. Ферма обнаружил делители M_{23} и M_{37} в 1640 г., а Эйлер нашел делители M_{29} в 1738 г. Позже Эйлер доказал, что отчасти Катальди был прав и M_{31} действительно простое.

В 1644 г. Мерсенн в предисловии к своей книге «Размышления о физике и математике» (Cogitata Physica-Mathematica) заявил, что M_n простое для $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ и 257. Этот список интригует математиков вот уже 200 с лишним лет. Как ему удалось получить данные о таких больших числах? Со временем стало ясно: он просто гадал, хотя и не без оснований. Его список содержит несколько ошибок. В 1876 г. Лукас доказал, что Мерсенн был прав относительно числа

$$M_{127} = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727;$$

при доказательстве он воспользовался хитроумным тестом на простоту M_n собственного изобретения. Деррик Лемер в 1930 г. слегка усовершенствовал тест Лукаса. Определим последовательность чисел S_n такую, что $S_2 = 4$, $S_3 = 14$, $S_4 = 194$, … $S_{n+1} = S_n^2 - 2$. Тест Лукаса–Лемера утверждает, что M_p простое в том и только том случае, если S_p делится на M_p. Именно этот тест позволяет достоверно разобраться с простотой — или непростотой — чисел Мерсенна.

Со временем стало ясно, что Мерсенн ошибся в нескольких случаях. Два числа из его списка (для $n = 67$ и 257) оказались составными; кроме того, он пропустил $n = 61$, 89 и 107, из которых получаются простые числа. Принимая во внимание трудности ручных вычислений, он хорошо справился с задачей.

В 1883 г. Иван Михеевич Первушин доказал, что M_{61} простое (это число Мерсенн пропустил). Позже Р. Пауэрс показал, что Мерсенн пропустил также простые M_{89} и M_{107}. К 1947 г. на простоту были проверены числа Мерсенна до $n = 257$. Простыми в этом диапазоне являются числа Мерсенна для $n = 2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 и 127. В настоящее время список простых Мерсенна выглядит так (см. таблицу на с. 387).

Поиск по-настоящему больших простых чисел сосредоточился в основном на числах Мерсенна по нескольким причинам. В двоичной нотации, которой пользуются компьютеры, 2^n представляет собой 1 с цепочкой из n нулей, а $2^n - 1$ — цепочку из n единиц. Это ускоряет некоторые арифметические расчеты. Кроме того, что еще важнее, тест Лукаса–Лемера намного эффективнее общих методов проверки на простоту, а потому годится для намного более крупных чисел. Именно благодаря этому тесту в таблице появились 47 простых чисел Мерсенна. Новости этой гонки и более подробную информацию можно найти на сайте

http://primes.utm.edu/mersenne/.

n	Год открытия	Автор
2	—	Древние
3	—	Древние
5	—	Древние
7	—	Древние
13	1456	Аноним
17	1588	Катальди
19	1588	Катальди
31	1772	Эйлер
61	1883	Первушин
89	1911	Пауэрс
107	1914	Пауэрс
127	1876	Лукас
521	1952	Робинсон
607	1952	Робинсон
1279	1952	Робинсон
2203	1952	Робинсон
2281	1952	Робинсон
3217	1957	Ризель
4253	1961	Гурвиц
4423	1961	Гурвиц
9689	1963	Джиллис
9941	1963	Джиллис
11 213	1963	Джиллис
19 937	1971	Такерман
21 701	1978	Нолл и Никель
23 209	1979	Нолл
44 497	1979	Нельсон и Словинский
86 243	1982	Словинский
110 503	1988	Колкитт и Уэлш
132 049	1983	Словинский
216 091	1985	Словинский
756 839	1992	Словинский, Гейдж и др.
859 433	1994	Словинский и Гейдж

Таблица 15

n	Год открытия	Автор
1 257 787	1996	Словинский и Гейдж
1 398 269	1996	Арменгод, Вольтман и др.
2 976 221	1997	Спенс, Вольтман и др.
3 021 377	1998	Кларксон, Вольтман, Куровский и др.
6 972 593	1999	Хайратвала, Вольтман, Куровский и др.
13 466 917	2001	Кэмерон, Вольтман, Куровский и др.
20 996 011	2003	Шейфер, Вольтман, Куровский и др.
24 036 583	2004	Финдли, Вольтман, Куровский и др.
25 964 951	2005	Новак, Вольтман, Куровский и др.
30 402 457	2005	Купер, Бун, Вольтман, Куровский и др.
32 582 657	2006	Купер, Бун, Вольтман, Куровский и др.
37 156 667	2008	Элвених, Вольтман, Куровский и др.
42 643 801	2009	Стриндмо, Вольтман, Куровский и др.
43 112 609	2008	Смит, Вольтман, Куровский и др.
57 885 161	2013	Купер, Вольтман, Куровский и др.

Окончание табл. 15

Бесконечные числа

Как я уже говорил, математики никогда не прекращают заниматься чем-либо только потому, что это невозможно.

Если это достаточно интересно, они находят способы *сделать* это возможным.

Такой штуки, как наибольшее натуральное число, не существует в природе.

Эти числа продолжаются до бесконечности. Это всем известно.

Но Георг Кантор, задавшись вопросом о том, *насколько велика* данная конкретная концепция бесконечности, предложил новаторский метод работы с бесконечно большими числами. В результате выяснилось, что некоторые бесконечности могут быть больше других.

Многие современники сочли его безумцем. Но в безумии Кантора была система, и оказалось, что его новые трансфинитные числа имеют смысл и важны.

К ним просто нужно было привыкнуть.

А это было непросто.

$\aleph_0$

Алеф-нуль: наименьшая бесконечность

Математики свободно и широко пользуются словом «бесконечность». Неформально можно сказать, что что-то бесконечно, если вы не можете обозначить его величину при помощи обычных натуральных чисел или выразить его длину в обычных действительных числах. В отсутствии традиционного числа мы используем «бесконечность» как его своеобразный заменитель. Бесконечность — не число в обычном смысле этого слова. Это, так сказать, то, чем было бы наибольшее возможное число, если бы эта фраза имела хоть какой-то смысл. Но логического смысла в ней нет, если только вы не определите очень-очень тщательно, что имеете в виду.

Кантор нашел способ превратить бесконечность в настоящее число, пересчитав бесконечные множества. В применении к множеству натуральных чисел его идея позволяет определить бесконечное число, которое он назвал $\aleph_0$ (алеф-нуль). Это число больше любого натурального числа. Таким образом, это бесконечность, не правда ли? Ну, своего рода. Определенно, это *некоторая* бесконечность. Более того, это наименьшая бесконечность, поскольку существуют и другие бесконечности — и они больше.

Бесконечность

Когда дети учатся считать и начинают осваиваться с большими числами, такими как тысяча или миллион, они часто интересуются, чему равно самое большое возможное число. Может быть, думают они, это что-то вроде

1 000 000 000 000 000.

В какой-то момент, однако, они понимают, что можно сделать число и побольше, если приставить в конце еще один нулик или просто добавить единицу и получить

1 000 000 000 000 001.

Ни одно конкретное натуральное число не может быть наибольшим, поскольку добавление единицы способно увеличить любое число. Натуральные числа продолжаются до бесконечности. Если начать считать и делать это не останавливаясь, невозможно добраться до наибольшего возможного числа и остановиться, поскольку такого числа не существует. Чисел бесконечно много.

Сотни лет математики с большой осторожностью относились к бесконечности. Когда Евклид доказал, что простых чисел существует бесконечно много, он формулировал это не так. Он сказал: «Простые числа превосходят любую определенную величину». Иными словами, наибольшего простого числа не существует.

Если отбросить осторожность, то очевидный путь здесь — воспользоваться историческими прецедентами и ввести новый тип числа, который по определению будет больше любого натурального числа. Назвать его «бесконечностью» и обозначить определенным символом. Обычно используется символ ∞, напоминающий лежащую на боку цифру 8. Но бесконечность может породить проблемы, поскольку иногда ведет себя парадоксально.

Конечно же, ∞ — наибольшее возможное число? Ну, по определению оно больше любого натурального числа, но стоит нам попытаться применить наше новое число в арифметических действиях, как все станет куда менее очевидным. Первый естественный вопрос: чему равно $\infty + 1$? Если результат больше, чем ∞, то ∞ уже не может быть наибольшим возможным числом. Но если результат этого действия — по-прежнему ∞, то $\infty = \infty + 1$. Вычитаем ∞, получаем $0 = 1$. И как насчет $\infty + \infty$? Если это больше, чем ∞, то возникают уже упоминавшиеся трудности. Если не больше, то $\infty + \infty = \infty$. Вычитаем ∞, получаем $\infty = 0$.

Опыт обращения с предыдущими расширениями числовой системы показывает, что при введении новых типов чисел нам неизменно приходится жертвовать какими-то правилами арифметики или алгебры. В данном случае нам, похоже, придется запретить вычитание, если речь идет о числе ∞. По аналогичным причинам мы не можем также ожидать, что деление на ∞ работает так же, как в обычном случае. Но согласитесь, хилое получается число, если его нельзя использовать ни для вычитания, ни для деления.

Это могло бы положить конец всей истории, но возможность работать с бесконечными процессами представлялась математикам чрезвычайно полезной. Так, полезные результаты можно было получить разбиением фигур на кусочки, которые затем последовательно уменьшались до бесконечности. Например, с помощью такого бесконечного процесса можно объяснить, почему одно и то же число π фигурирует и в формуле длины окружности, и в формуле площади круга (см. главу π). Около II в. до н. э. Архимед успешно воспользовался этой идеей в работе об окружностях, сферах и цилиндрах. Он нашел сложное, но логически строгое доказательство того, что этот метод дает верные ответы.

Начиная с XVII в. нужда в разумной теории такого рода процессов стала очень заметной; особенно это касалось бесконечных последовательностей, которыми можно было аппроксимировать важные числа и функции с любой заданной точностью путем простого сложения все большего числа уменьшающихся чисел. К примеру, в главе π мы видели, что

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots$$

где сумма чисел, обратных квадратам, выражена через π. Это утверждение верно, только если последовательность продолжается до бесконечности. Если остановиться, то сумма последовательности даст некое рациональное число, которое — после умножения на 6 и извлечения корня — даст приближенное значение π. Однако так не удастся получить точное значение π, потому что π — число иррациональное. И в любом случае, где бы мы ни остановились, добавление следующего члена увеличит сумму и результат.

Трудность с подобными бесконечными суммами состоит в том, что иногда они, на первый взгляд, лишены всякого смысла. Классический пример:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Если эту сумму записать как

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots,$$

она превратится в

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

что с очевидностью равно 0. Но если записать ее в иной форме (мы считаем, что к ней применимы обычные законы алгебры), то получится

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$$

Это соответствует

$$1 + 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

что с не меньшей очевидностью должно равняться 1.

Оказалось, что проблема здесь заключается в том, что эта последовательность не сходится; это значит, что ее сумма не стремится к какой-то определенной величине, подходя к ней все ближе и ближе по мере прибавления все новых членов. Вместо этого величина суммы становится по очереди равной то 1, то 0:

$$1 = 1,$$
$$0 = 1 - 1,$$
$$1 = 1 - 1 + 1,$$
$$0 = 1 - 1 + 1 - 1$$

и так далее. Это не единственный источник потенциальных проблем, но это указывает путь к логичной теории бесконечных рядов. Смысл имеют те, что сходятся, то есть те, у которых при добавлении все новых членов сумма все ближе подходит к какому-то конкретному числу. Ряд чисел, обратных квадратам, сходится, причем сходится *ровно* к $\frac{\pi^2}{6}$.

Философы отличают потенциальную бесконечность от актуальной. Нечто потенциально бесконечно, если может, в принципе, быть продолжено до бесконечности — как добавление все новых членов ряда. Каждая отдельная сумма при этом конечна, но процесс генерации этих сумм не имеет фиксированного конца. Актуальная бесконечность возникает, когда весь бесконечный процесс или вся бесконечная система рассматриваются как единый объект. Математики нашли разумный способ интерпретировать потенциальную бесконечность бесконечных рядов. Они использовали несколько различных потенциально бесконечных процессов, но во всех интерпретировали символ бесконечности как «продолжать до тех пор, пока не подойдешь к верному ответу настолько близко, насколько это необходимо».

Актуальная бесконечность — совершенно иное дело, и математики изо всех сил старались держаться от нее подальше.

Что такое бесконечное число?

Я уже задавал этот вопрос (на с. 24) для обычных натуральных чисел 1, 2, 3, ... Я добрался до идеи Фреге о том, что это класс всех классов, соответствующих данному классу, и остановился, намекнув только, что здесь может содержаться ловушка.

Ловушка тут действительно есть.

Это определение очень элегантно — если, конечно, привыкнуть к такому стилю мышления; к тому же у него есть существенное достоинство — оно определяет уникальный объект. Однако не успели на шедевре Фреге высохнуть чернила, как Расселл выдвинул возражение. Не против основной идеи, а против того типа класса, которым пришлось воспользоваться Фреге. Класс всех классов, соответствующих нашему классу чайных чашек, *громаден*. Возьмите три любых объекта, объедините их в класс, и результат обязательно окажется элементом вездесущего класса классов Фреге. К примеру, класс, элементами которого являются Эйфелева башня, конкретный вид маргариток в полях Кембридшира и афоризм Оскара Уайльда, придется в него включить.

Парадокс Расселла

Имеют ли такие всеобъемлющие классы хоть какой-нибудь смысл? Расселл понял, что, вообще говоря, смысла в них нет. Его пример представлял собой один из вариантов знаменитого парадокса брадобрея. В одной деревне жил брадобрей, который брил тех и только тех, кто не брился сам. Кто же брил брадобрея? При условии, что все в деревне бреются тем или иным способом, такого брадобрея просто не может существовать. Если он не бреется сам, то по определению он должен брить себя. Если же он бреет себя сам, то нарушается условие о том, что он бреет только тех, кто не бреется сам.

Здесь мы считаем, что брадобрей — мужчина, чтобы избежать с ним/с ней проблем. Однако, дамы, сегодня мы знаем, что многие из вас тоже бреются, хотя бреют обычно и не бороду. Так что брадобрей-женщина — не настолько удачное решение этого парадокса, как многие думали.

Расселл нашел класс, очень похожий на тот, что хотел использовать Фреге, который ведет себя в точности так, как брадобрей: *класс всех классов, которые не содержат сами себя*. Содержит этот класс сам себя или не содержит? Оба варианта можно исключить. Если этот класс *содержит* себя, то для него выполняется то же условие, что и для всех прочих входящих в него классов: он *не содержит* себя. Но если он *не содержит* себя, то он удовлетворяет условию вхождения и, следовательно, *содержит* себя.

Хотя парадокс Расселла не доказывает, что определение числа по Фреге логически противоречиво, он все же означает, что невозможно просто, без всяких доказательств, считать, что любое условие типа да/нет определяет класс, то есть те объекты, для которых условие выполняется. И это сразу выбило фундамент из-под подхода Фреге. Позже Расселл и его коллега Альфред Норт Уайтхед попытались заделать возникшую прореху, разработав хитроумную теорию о классах, которые могут быть определены разумным образом в определенной математической среде. Результатом их работы стал трехтомный труд «Математические начала» (Principia Mathematica) — сознательная дань уважения Исааку Ньютону — в котором вся математика выводилась из логических свойств классов. Чтобы определить число 1, понадобилось несколько сотен страниц текста; немало места ушло также на определение знака + и доказательство того, что $1 + 1 = 2$. После этого дело пошло намного быстрее.

Алеф-нуль: наименьшее бесконечное число

Теперь уже мало кто из математиков пользуется подходом к классам, предложенным Расселлом и Уайтхедом, поскольку более простые подходы работают лучше. Ключевая фигура в формулировании сегодняшних логических оснований математики — Кантор. Начинал он, как и Фреге, с попытки разобраться в логической базе натуральных чисел. Но исследования увели его в другом направлении: к присвоению числовых значений *бесконечным* множествам. Эти числовые значения стали называть трансфинитными кардинальными числами (кардинальные числа — это обычные счетные числа). Их замечательнейшая черта — то, что таких чисел больше одного.

Кантор работал также с наборами объектов, которые он называл множествами, а не классами, потому что на объекты в них накладывалось больше ограничений, чем допускал Фреге (у него объекты могли быть любыми). Подобно Фреге, он начал с интуитивной идеи о том, что два множества имеют одинаковое число членов тогда и только тогда, когда между этими множествами можно установить соответствие. В отличие от Фреге, он делал это в том числе и для бесконечных множеств. Более того, вначале он, возможно, полагал, что так можно определить бесконечность. Очевидно же, что любое бесконечное множество можно поставить в соответствие любому другому бесконечному множеству? Если так, то должно существовать ровно одно бесконечное число и оно должно быть больше любого конечного числа — на том и делу конец.

Оказалось, однако, что это лишь начало.

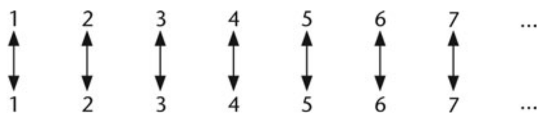


Рис. 174

Базовое бесконечное множество — это множество всех натуральных чисел. Поскольку эти числа используются для счета, Кантор определил любое множество как счетное, если его элементы можно поставить в соответствие множеству натуральных чисел. Обратите внимание: рассматривая это множество целиком, Кантор говорил об актуальной, а не потенциальной бесконечности.

Множество всех натуральных чисел, очевидно, счетное, — достаточно каждое число в нем поставить в соответствие самому себе.

Существуют ли другие такие множества? Да, и притом странные. Как насчет такого?

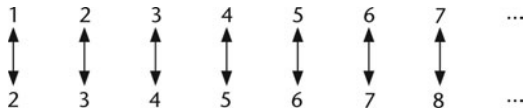


Рис. 175

Удалите число 1 из множества натуральных чисел, и общее число его элементов *не уменьшится* на 1: оно останется в точности таким же, как было.

Согласен, если остановиться на каком-то конечном числе, то на правом конце у нас останется лишнее число, однако если использовать *все* натуральные числа, то правого конца у нас просто не будет. Любое число n соответствует числу $n + 1$, и это соответствие связывает множество всех натуральных чисел и то же множество без числа 1. Часть здесь по размеру равна целому.

Кантор назвал свои бесконечные числа кардинальными, поскольку иногда таким цветистым образом в арифметике называют обычные натуральные числа, используемые при счете. Мы, чтобы выделить, называем эти числа трансфинитными, или просто бесконечными, кардинальными числами. Для обозначения кардинальных чисел, в отличие от натуральных, Кантор выбрал необычный символ — первую букву $\aleph$(алеф) еврейского алфавита, поскольку сама идея была весьма необычной. По причинам, которые я объясню в следующей главе, он добавил к символу нижний индекс 0, написав $\aleph_0$.

Если любое бесконечное множество можно было бы поставить в соответствие множеству натуральных чисел, то $\aleph_0$ стал бы всего лишь вычурным символом для обозначения «бесконечности». И вначале было похоже, что дело вполне может обернуться именно так. К примеру, существует множество нецелых рациональных чисел, так что, на первый взгляд, мощность множества рациональных чисел вполне могла бы оказаться больше $\aleph_0$.

Однако Кантор доказал, что рациональные числа можно поставить в соответствие обычным натуральным числам. Таким образом, мощность их множества *тоже* равна $\aleph_0$.

Чтобы приблизительно представить, как это происходит, рассмотрим рациональные числа между 0 и 1. Фокус в том, чтобы записать их в правильном порядке, который *не соответствует* порядку численному. Вместо этого мы распределим их по величине знаменателя — числá под чертой дроби. Для каждого конкретного знаменателя мы расставим числа по величине числителя — числá над чертой. Список у нас получится примерно такой:

$$\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{3}{4}\ \ \frac{1}{5}\ \ \frac{2}{5}\ \ \frac{3}{5}\ \ \frac{4}{5}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{5}{6}\dots$$

где, например, $\frac{2}{4}$ пропущена, потому что эта дробь равна $\frac{1}{2}$. Теперь мы можем соотнести эти рациональные числа со счетными, взяв их именно в этом конкретном порядке. Каждое рациональное число между 0 и 1 найдется где-то в нашем списке, так что ни одно из них не окажется неучтенным.

До сих пор теория Кантора позволила получить лишь одно бесконечное кардинальное число — $\aleph_0$. Но все не так просто, и мы убедимся в этом в следующей главе.

$\mathfrak{c}$

Мощность континуума

Самое блестящее озарение Кантора — то, что бесконечности бывают разные и что одни бесконечности могут быть больше других. Он открыл одно замечательное свойство «континуума» — таково причудливое название для системы действительных чисел. Ее мощность, или кардинальное число, которое он обозначил $\mathfrak{c}$, больше чем $\aleph_0$. Я говорю сейчас не только о том, что некоторые действительные числа не являются натуральными. Некоторые рациональные числа (строго говоря, большинство из них) тоже не являются натуральными, но при этом множества целых и рациональных чисел имеют одинаковую мощность $\aleph_0$. Там, где речь идет о бесконечных кардинальных числах, целое не обязано быть больше части, что понял еще Галилей. Это означает, что невозможно, как ни тасуй, поставить все действительные числа одно за другим в соответствие натуральным числам, то есть, попросту говоря, пересчитать их.

Поскольку $\mathfrak{c}$ больше чем $\aleph_0$, Кантор задался вопросом о том, есть ли между ними еще бесконечные кардинальные числа. Согласно его гипотезе, их там нет. Он не смог ни доказать, ни опровергнуть это смелое утверждение. Курт Гёдель в 1940 г. и Пол Коэн в 1963 г. доказали, что ответ должен быть «и да и нет» в зависимости от того, как организовать логический фундамент математики.

Несчетная бесконечность

Вспомним, что действительное число можно записать в десятичном виде, при этом оно может остановиться после конечного числа десятичных знаков, как 1,44, а может и продолжаться до бесконечности, как π. Кантор понял (хотя говорил он об этом другими словами), что бесконечность действительных чисел определенно больше, чем бесконечность счетных, или натуральных, чисел, то есть $\aleph_0$.

Идея, которая за этим стоит, обманчиво проста и использует доказательство от противного. Предположим, в надежде получить логическое противоречие, что действительные числа можно поставить в соответствие числам натуральным. Тогда существует список бесконечных десятичных дробей вида

$$\begin{aligned}
&1 \leftrightarrow a_0\boldsymbol{a_1}a_2a_3a_4a_5 \ldots \\
&2 \leftrightarrow b_0b_1\boldsymbol{b_2}b_3b_4b_5 \ldots \\
&3 \leftrightarrow c_0c_1c_2\boldsymbol{c_3}c_4c_5 \ldots \\
&4 \leftrightarrow d_0d_1d_2d_3\boldsymbol{d_4}d_5 \ldots \\
&5 \leftrightarrow e_0e_1e_2e_3e_4\boldsymbol{e_5} \ldots
\end{aligned}$$

такой, что любая возможная бесконечная десятичная дробь когда-нибудь встретится в нем справа от стрелки. Не будем пока обращать внимания на выделения; об этом чуть позже.

Блестящая идея Кантора состоит в том, чтобы построить такую бесконечную десятичную дробь, которая никак не могла бы там появиться. Для этого подойдет число вида

$$0\,x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$$

где

x_1 не совпадает с a_1,
x_2 не совпадает с b_2,
x_3 не совпадает с c_3,
x_4 не совпадает с d_4,
x_5 не совпадает с e_5

и так далее. Это те самые цифры, которые я выделил полужирным шрифтом.

Главное здесь то, что если взять произвольную бесконечную десятичную дробь и изменить в ней всего лишь *одну* цифру, сколь угодно далеко от запятой, ее величина изменится. Может быть, ненамного, но это неважно. А важно, что число изменилось. Проделав этот трюк с каждым числом нашего вроде бы полного списка, мы получим новое «неучтенное» число.

Условие, касающееся x_1, означает, что это новое число — не первое в списке, поскольку на первом месте после запятой у него не та цифра. Условие про x_2 означает, что наше число — не второе в списке, поскольку на втором месте после запятой у него тоже не та цифра. И так далее. А поскольку и дроби, и список продолжаются до бесконечности, можно сделать вывод о том, что нашего нового числа просто нет в списке.

Но первоначально мы предположили, что оно там есть. Это противоречие; следовательно, наше предположение неверно, и полного списка не существует.

Внимания требует еще один технический момент: в числе, которое мы строим, не следует произвольным образом использовать цифры 0 и 9, поскольку десятичная запись иногда неоднозначна. Так, 0,10000… в точности равно 0,09999… (это два разных способа записать $\frac{1}{10}$ в виде бесконечной десятичной дроби). Эта неоднозначность возникает *только* тогда, когда десятичная дробь заканчивается бесконечной цепочкой нулей или девяток.

Эта идея называется диагональным аргументом Кантора, поскольку цифры a_1, b_2, c_3, d_4, e_5 и так далее располагаются вдоль диагонали правой части списка. (Взгляните, где находятся выделенные полужирным буквы.) Это доказательство работает именно потому, что и сами цифры, и список можно соотнести со счетными числами.

Важно понять логику этого доказательства. Действительно, мы можем взять построенное нами конкретное число и поставить его в голову списка, сдвинув все остальные числа на одну позицию вниз. Но логика доказательства от противного состоит в том, что мы заранее считаем, что в этом не будет необходимости. Предполагается, что построенное нами число *уже* содержится в списке, без всякой его модификации. Однако его там нет. Поэтому можно сделать вывод: такого списка не существует.

Поскольку любое натуральное число является к тому же и действительным, из этого следует, что в системе Кантора бесконечность, связанная с числом всех действительных чисел, больше, чем бесконечность, связанная с числом всех натуральных чисел. Кантору удалось, модифицировав парадокс Рассела, пройти намного дальше и доказать, что наибольшего бесконечного числа не существует. А это позволило представить бесконечный ряд возрастающих бесконечных чисел, известных как бесконечные (или трансфинитные) *кардинальные числа*.

Наибольшей бесконечности не существует

Кантор считал, что его ряд бесконечных чисел должен начинаться примерно так:

$$\aleph_0\ \aleph_1\ \aleph_2\ \aleph_3\ \aleph_4\ \ldots$$

где каждое последующее бесконечное число является «следующим» в полной мере в том смысле, что между этими двумя числами ничего нет. Натуральные числа соответствуют $\aleph_0$. Рациональные тоже. Но действительные числа не обязательно рациональны. Диагональный аргумент Кантора доказывает, что $\mathfrak{c}$ больше чем $\aleph_0$, так что можно предположить, что действительные числа соответствуют $\aleph_1$. Но так ли это?

Рассмотренное доказательство ничего нам об этом не сообщает. Оно говорит, что $\mathfrak{c}$ больше $\aleph_0$, но не исключает возможности того, что между этими двумя числами лежит еще что-то. С позиции Кантора $\mathfrak{c}$ могло бы быть, скажем, $\aleph_3$. Если не хуже.

Кое-что из изложенного он сумел доказать. Бесконечные кардинальные числа и правда можно организовать таким образом. Более того, индексы 0, 1, 2, 3, 4,… не заканчиваются с конечными натуральными числами. Должно существовать также трансфинитное число $\aleph_{\aleph_0}$: это наименьшее трансфинитное число, большее, чем все $\aleph_n$, где n — любое натуральное число. И если бы на этом все остановилось, то это противоречило бы его теореме, согласно которой наибольшего трансфинитного числа не существует, поэтому ничего не остановится. Никогда.

Чего Кантор не смог доказать, так это того, что действительные числа соответствуют именно $\aleph_1$. Может быть, они соответствуют $\aleph_2$, а между ними располагается мощность еще какого-нибудь множества, которое и соответствует $\aleph_1$. Как ни старался, он не мог отыскать такого множества, но не мог и доказать, что его не существует. Так где же располагаются действительные числа в списке алефов? Кантор не мог сказать. Он подозревал, что они все же соответствуют $\aleph_1$, но это было чистое предположение. Поэтому он выбрал для них другое обозначение: готическое $\mathfrak{C}$, сокращенное continuum — название, которое использовалось в то время для обозначения множества действительных чисел.

Конечное множество, содержащее n элементов, имеет 2^n разных подмножеств. Поэтому Кантор определил 2^A для любого кардинального A так: он взял некоторое множество мощности A и заявил, что 2^A — это мощность множества всех подмножеств данного множества. Затем он сумел доказать, что 2^A больше A, для любого бесконечного кардинального A. Что, кстати говоря, подразумевает, что наибольшего бесконечного кардинального числа не существует. Он сумел также доказать, что $\mathfrak{C} = 2^{\aleph_0}$. Казалось вероятным также, что $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_0}$. Иными словами, если взять множество всех подмножеств, то получится следующее бесконечное кардинальное число. Но доказать этого Кантор не смог.

Он не смог доказать даже простейшего случая, когда $n = 0$, что эквивалентно утверждению о том, что $\mathfrak{C} = \aleph_1$. В 1878 г. Кантор предположил, что это равенство верно, и оно приобрело известность как гипотеза континуума. В 1940 г. Гёдель доказал, что ответ «да» логически согласуется с обычными аксиомами теории множеств, что внушало оптимизм. Но затем, в 1963 г., Коэн доказал, что ответ «нет» *тоже* логически согласуется с ними.

Упс!

В математике это не считается логическим противоречием. Смысл этого намного нестандартнее и в некотором отношении тревожнее: ответ зависит от того, какой вариант теории множеств вы используете. Существует более одного способа организовать логические основания математики. Все эти варианты приводят к одинаковым результатам в случае элементарной математики, но для более продвинутых разделов математики различия между этими вариантами имеют значение. Пого, мультяшный персонаж Уолта Келли, говаривал: «Мы встретили врага, и этот враг — мы сами». Наше настойчивое стремление к аксиоматической логике оборачивается против нас.

Сегодня мы знаем, что многие другие свойства бесконечных кардинальных чисел тоже зависят от варианта теории множеств, которую вы используете. Более того, эти вопросы тесно связаны с другими свойствами множеств, в которых кардинальные числа вроде бы явно не фигурируют. Эта область математики — замечательные охотничьи угодья для специалистов по математической логике, но в целом остальная математика, судя по всему, прекрасно работает с любым вариантом теории множеств.

Жизнь, вселенная и…

Правда ли, 42 — самое скучное число на свете?

42

Вовсе не скучное

Ну, вот вам и ответ.

Как упоминалось в предисловии, это число фигурирует в «Путеводителе по Галактике» Дугласа Адамса, где оно выступает как ответ на «Великий Вопрос Жизни, Вселенной и Всего Остального». Это открытие немедленно поставило новый вопрос: что на самом деле представляет собой великий вопрос жизни, Вселенной и всего остального. Адамс сказал, что он выбрал это число потому, что беглый опрос среди друзей показал, что это совершенно скучное число.

Здесь я хочу защитить число 42 от этого обвинения. Признаю, 42 не сравнится, скажем, с числами 4, или π, или даже 17 по своему математическому значению. Однако нельзя сказать также, что оно совершенно не представляет интереса. Это прямоугольное число, число Каталана и магическая постоянная наименьшего магического куба. Плюс еще кое-что.

Прямоугольное число

Прямоугольное число представляет собой произведение двух последовательных натуральных чисел. Следовательно, оно имеет форму $n\ (n + 1)$. Если $n = 6$, получим $6 \times 7 = 42$. Поскольку n-е треугольное число равно $\frac{1}{2} n\ (n + 1)$, прямоугольное число вдвое превышает треугольное. Следовательно, оно представляет собой сумму первых n четных чисел. Прямоугольное число точек можно расположить в виде прямоугольника, в котором одна сторона на единицу больше другой.

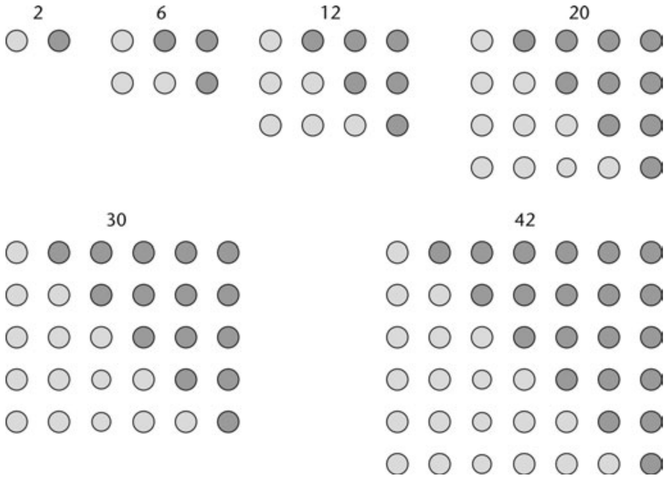


Рис. 176. Первые шесть прямоугольных чисел. Затенение показывает, почему каждое из таких чисел вдвое превосходит треугольное число

Рассказывают, что Гауссу в ранней юности задали задачу общего вида

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100.$$

Он сразу же понял, что если ту же сумму записать в обратном порядке слагаемых

$$100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 1,$$

то соответствующие пары дадут в сумме 101. Поскольку таких пар 50, полная сумма составит $50 \times 101 = 5050$. Это прямоугольное число. Однако мы не знаем в точности, какие числа дал классу учитель Гаусса; вероятно, пример был менее красивым. Если это так, то озарение Гаусса было еще более ярким.

Шестое число Каталана

Числа Каталана проявляют себя во многих комбинаторных задачах; они отражают число способов выполнения различных математических операций. Они восходят к Эйлеру, который подсчитал число способов разбиения многоугольника на треугольники путем соединения его вершин. Позже Эжен Каталан открыл связь с алгеброй: сколькими способами можно расставить скобки в некой сумме или произведении. Я скоро перейду к этому, но сначала позвольте представить эти числа.

Первые несколько чисел Каталана C_n для $n = 0, 1, 2, \ldots$ таковы:

1 1 2 5 14 42 132 429 1430 4862.

Существует формула с использованием факториала:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

Хорошей аппроксимацией для больших n является

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}},$$

что представляет собой еще один пример того, как π возникает в задаче, которая, казалось бы, не имеет никакого отношения к окружностям или сферам.

C_n — это число различных способов разрезать правильный $(n + 2)$-угольник на треугольники.

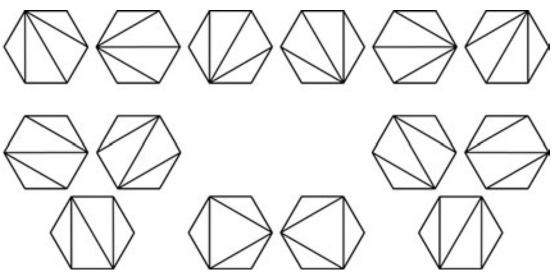


Рис. 177. 14 вариантов триангуляции шестиугольника

Кроме того, это число корневых двоичных деревьев с $n + 1$ листьями. Такие деревья получают, начиная с одной точки — корня, из которого затем расходятся две ветви. Каждая ветвь заканчивается либо точкой, либо листом. Из каждой точки, в свою очередь, выходят две ветви.

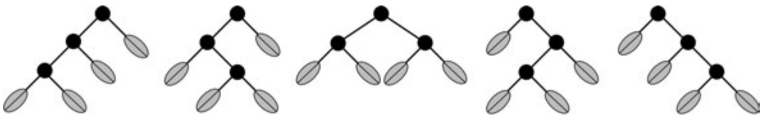


Рис. 178. Пять двоичных корневых деревьев с четырьмя листьями

Если эта идея представляется вам эзотерической, обратите внимание на то, что она непосредственно связана с алгеброй: это число различных способов расставить скобки в произведении, таком как *abcd*, где существует $C_3 = 5$ вариантов:

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd)).$$

В общем, при $n + 1$ символах скобок будет C_n. Чтобы увидеть эту связь, напишите символы рядом с листьями дерева и поставьте скобки в соответствии с тем, какие пары сходятся в одной точке. Если говорить подробнее (рис. 179), мы обозначаем листья буквами *a, b, c, d* слева направо. Двигаясь снизу вверх, пишем (*bc*) возле точки, в которой сходятся *b* и *c*. Затем выше, возле точки, где соединяются а и линия от точки (*bc*), пишем (*a* (*bc*)). Наконец, еще выше, где ко всему этому присоединяется d, пишем ((*a* (*bc*)) *d*).

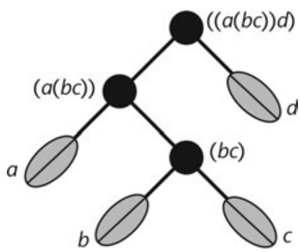


Рис. 179. Перевод двоичного корневого дерева на язык алгебры

Многие другие комбинаторные задачи также ведут к числам Каталана; вышеприведенные — всего лишь небольшой пример простейших из них.

Магические кубы

Магическая постоянная магического куба $3 \times 3 \times 3$ равна 42. Такой куб содержит числа от 1 до 27, причем сумма чисел любого ряда, параллельного ребру, или любой диагонали, проходящей через центр куба, одинакова и равна магической постоянной. Сумма всех 27 чисел равна $1 + 2 + \ldots + 27 = 378$. Эти числа разбиваются на девять непересекающихся троек, каждая из которых дает в сумме магическую постоянную, так что она должна быть равна $\frac{378}{9} = 42$.

Такие варианты существуют и на рис. 180 показан один из них.

1	17	24
15	19	8
26	6	10

23	3	16
7	14	21
12	25	5

18	22	2
20	9	13
4	11	27

Рис. 180. Последовательные слои магического куба 3 × 3 × 3

Другие особые свойства

- 42 — это число разбиений 10, то есть количество способов записать это число как сумму натуральных чисел в их естественном порядке, например:

  $1 + 2 + 2 + 5 \qquad 3 + 3 + 4.$

- 42 — второе сфеническое число (это числа, представляющие собой произведение трех различных простых чисел). В данном случае $42 = 2 \times 3 \times 7$. Вот первые несколько сфенических чисел:

  30 42 66 70 78 102 105 110 114 130.

- 42 — третье пятнадцатиугольное число (это аналог треугольных чисел на базе правильного 15-угольника).

- 42 — суперкратно совершенное число: сумма делителей суммы его делителей (включая 42) вшестеро больше самого числа.
- Некоторое время 42 считалось наилучшей известной мерой иррациональности для π, то есть лучшей количественной оценкой того, «насколько π иррационально». Точнее, Курт Малер в 1953 г. доказал, что

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{42}}$$

  для любого рационального $\frac{p}{q}$. Однако в 2008 г. В. Х. Саликов заменил показатель 42 на 7,60630853, так что число 42 вновь стало скучным в этом отношении.
- 42 — третье первичное псевдосовершенное число. Эти числа удовлетворяют условию

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{N} = 1,$$

  где p_k — различные простые делители N.

Вот первые несколько первичных псевдосовершенных чисел:

2 6 42 1806 47 058 2 214 502 422 52 495 396 602.

- 42 — число n множеств из четырех различных положительных целых чисел $a, b, c, d < n$, таких что $ab - cd$, $ac - bd$ и $ad - bc$ делятся на n. Это единственное *известное* число, обладающее таким свойством; существуют ли другие такие числа, неизвестно.
- 42 — наименьшая размерность, для которой гипотеза о колбаске *доказана* (см. главу 56). Предполагается, однако, что эта гипотеза верна для всех размерностей, боль-

ших или равных 5, так что значение числа 42 в этом случае зависит от текущего состояния наших знаний.

Вот видите? Вовсе не скучное!

Библиография

Carl B. Boyer. A History of Mathematics, Wiley, New York 1968.

John H. Conway and Richard K. Guy. The Book of Numbers, Springer, New York 1996.

John H. Conway and Derek A. Smith. On Quaternions and Octonions, A.K. Peters, Natick MA 2003.

John H. Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss. The Symmetries of Things, A.K. Peters, Wellesley MA 2008.

Tobias Dantzig. Number: The Language of Science, Pi Press, New York 2005.

Augustus De Morgan. A Budget of Paradoxes (2 vols., reprint), Books for Libraries Press, New York 1969.

Underwood Dudley. Mathematical Cranks, Mathematical Association of America, New York 1992.

Marcus Du Sautoy. The Music of the Primes, HarperPerennial, New York 2004.

Richard J. Gillings. Mathematics in the Time of the Pharaohs (reprint), Dover, New York 1982.

Anton Glaser. History of Binary and Other Nondecimal Numeration, Tomash, Los Angeles 1981.

Jan Gullberg. Mathematics from the Birth of Numbers, Norton, New York 1997.

Richard K. Guy. Unsolved Problems in Number Theory, Springer, New York 1994.

G.H. Hardy and E.M. Wright. An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press (4th edn.), Oxford 1960.

Andreas M. Hinz, Sandi Klavzar, Uros Milutinovic, and Ciril Petr. The Tower of Hanoi—Myths and Maths, Birkhäuser, Basel 2013.

Gareth A. Jones and J. Mary Jones. Elementary Number Theory, Springer, Berlin 1998.

George Gheverghese Joseph. The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics, Penguin, London 1992.

Viktor Klee and Stan Wagon. Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, Mathematical Association of America, New York 1991.

Mario Livio. The Golden Ratio, Broadway, New York 2002.

Mario Livio. The Equation That Couldn't Be Solved, Simon & Schuster, New York 2005.

John McLeish. Number, Bloomsbury, London 1991.

O. Neugebauer. A History of Ancient Mathematical Astronomy (3 vols.), Springer, Berlin 1975.

Paulo Ribenboim. The Book of Prime Number Records, Springer, New York 1984.

Ernő Rubik, Támás Varga, Gerszon Kéri, György Marx, and Támás Vekerdy. Rubik's Cubic Compendium, Oxford University Press, Oxford 1987.

Karl Sabbagh. Dr Riemann's Zeros, Atlantic Books, London 2022.

W. Sierpiński. Elementary Theory of Numbers, North-Holland, Amsterdam 1998.

Simon Singh. Fermat's Last Theorem, Fourth Estate, London 1997.

Ian Stewart. Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities, Profile, London 2008.

Ian Stewart. Professor Stewart's Hoard of Mathematical Treasures, Profile, London 2009.

Ian Stewart. Professor Stewart's Casebook of Mathematical Mysteries, Profile, London 2014.

Frank J. Swetz. Legacy of the Luoshu, A.K. Peters, Wellesley MA 2008.

Jean-Pierre Tignol. Galois's Theory of Algebraic Equations, Longman, London 1988.

Matthew Watkins and Matt Tweed. The Mystery of the Prime Numbers, Inamorata Press, Dursley 2010.

Jeremy Webb (editor). Nothing, Profile, London 2013.

Robin Wilson. Four Colors Suffice (2nd edn.), Princeton University Press, Princeton 2014.

Благодарности

Автор благодарит за разрешение использовать следующие материалы:
рис. 1. Wikimedia creative commons, Albert1ls; рис. 3. Wikimedia creative commons, Мари-Лэн Нгуен; рис. 31. Ливио Зукка; рис. 32. Метрополитен-музей, Нью-Йорк; получено в дар от Честера Дейла; рис. 63. Wikimedia creative commons; рис. 77. Архив Лессинга; рис. 108. Allianz SE; рис. 119. Кеннета Либрехта; рис. 130. thoughtyoumayask.com; рис. 133. Джеффа Брайнта и Эндрю Хэнсона; рис. 153. Wolfram MathWorld; рис. 159. Wikimedia creative commons; рис. 160. Wikimedia creative commons, Matt Crypto; рис. 168. Джо Кристи.

Мы предприняли все усилия, чтобы связаться с правообладателями иллюстраций, но автор и издатель будут благодарны за информацию о тех из них, кого мы не сумели найти, и внесут ее в последующие издания.

Стюарт Иэн

НЕВЕРОЯТНЫЕ ЧИСЛА ПРОФЕССОРА СТЮАРТА

Руководитель проекта *И. Серёгина*
Корректоры *М. Миловидова, М. Савина, Е. Чудинова*
Компьютерная верстка *А. Фоминов*
Дизайн обложки *Ю. Буга*

Иллюстрации на обложке Shutterstok

Подписано в печать 25.03 .2016. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Объем 26,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № .

ООО «Альпина нон-фикшн»
123060, г. Москва
ул. Расплетина, д. 19, офис 2
Тел. +7 (495) 980-5354
www.nonfiction.ru

Знак информационной продукции
(Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010 г.) 12+

Издательство «Альпина нон-фикшн»

Величайшие математические задачи

Иэн Стюарт, пер. с англ., 2-е изд., 2016, 460 с.

Закономерности простых чисел и теорема Ферма, гипотеза Пуанкаре и сферическая симметрия Кеплера, загадка числа π и орбитальный хаос в небесной механике. Многие из нас лишь краем уха слышали о таинственных и непостижимых загадках современной математики. Между тем, как ни парадоксально, фундаментальная цель этой науки — раскрывать внутреннюю простоту самых сложных вопросов. Английский математик и популяризатор науки, профессор Иэн Стюарт, помогает читателю преодолеть психологический барьер. Увлекательно и доступно он рассказывает о самых трудных задачах, над которыми бились и продолжают биться величайшие умы, об истоках таких проблем, о том, почему они так важны и какое место занимают в общем контексте математики и естественных наук. Эта книга — проводник в удивительный и загадочный мир чисел, теорем и гипотез, на передний край математической науки, которая новыми методами пытается разрешить задачи, поставленные перед ней тысячелетия назад.

Быстрый ум

Как забывать лишнее и помнить нужное

Майк Байстер и Кристин Лоберг, пер. с англ., 3-е изд., 2016, 326 с.

Обладатель одного из самых быстрых математических умов в мире и создатель популярной системы работы с памятью убежден: именно талант запоминать и обрабатывать информацию быстрее других открывает пути большого успеха. И этот талант можно развивать. Майк Байстер призывает не бояться чисел и тренировать мозг интересными и необычными способами не ради развития математических способностей как таковых. Овладев материалом этой книги, вы сможете освоить в жизни все что угодно, от иностранных языков до музыки, от кулинарии до умения вести переговоры, общаться и даже налаживать отношения с окружающими. И главное, станете намного увереннее в себе.